SERWAY · JEWETT

FÍSICA

para ciencias e ingeniería con Física Moderna

Volumen 2

Séptima edición

FÍSICA

para ciencias e ingeniería con Física Moderna

Volumen 2

Séptima edición

FÍSICA

para ciencias e ingeniería con Física Moderna

Volumen 2

Séptima edición

Raymond A. Serway
Emérito, James Madison University

John W. Jewett, Jr.
California State Polytechnic University, Pomona

Traducción
Víctor Campos Olguín
Traductor profesional

Revisión Técnica
Misael Flores Rosas
Profr. de Termodinámica
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas
Instituto Politécnico Nacional

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Dedicamos este libro a nuestras esposas
Elizabeth y Lisa, y a todos nuestros hijos
y nietos por su amorosa comprensión
cuando pasamos tiempo escribiendo
en lugar de estar con ellos.

Parte 4 ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO 641

Jhon W. Jewett, Jr.

© Thomson Learning/Charles D. Winters.

Parte 5 LUZ Y ÓPTICA 977

Parte 6 FÍSICA MODERNA 1111

Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman.

Contenido

© Thomson Learning/Charles D. Winters

© Thomson Learning/Charles D. Winters

© Thomson Learning/Charles D. Winters

Raymond A. Serway recibió su doctorado en el Illinois Institute of Technology y es profesor emérito en la James Madison University. En 1990 recibió el Madison Scholar Award en la James Madison University, donde enseñó durante 17 años. El doctor Serway comenzó su carrera docente en la Clarkson University, donde dirigió investigación y enseñó de 1967 a 1980. En 1977 recibió el Distinguished Teaching Award en la Clarkson University y el Alumni Achievement Award del Utica College en 1985. Como científico invitado en el IBM Research Laboratory en Zurich, Suiza, trabajó con K. Alex Müller, ganador del premio Nobel 1987. El doctor Serway también fue científico visitante en el Argonne National Laboratory, donde colaboró con su mentor y amigo, Sam Marshall. Además de las primeras ediciones de este libro, el doctor Serway es coautor de *Principles of Physics*, cuarta edición; *College Physics*, séptima edición; *Essentials of College Physics* y *Modern Physics*, tercera edición. También es coautor del libro de bachillerato *Physics*, publicado por Holt, Rinehart y Winston. Además, el doctor Serway ha publicado más de 40 artículos de investigación en el campo de física de materia condensada y ha impartido más de 70 conferencias en reuniones profesionales. El doctor Serway y su esposa, Elizabeth, disfrutan viajar, jugar al golf, cantar en un coro de iglesia y pasar tiempo de calidad con sus cuatro hijos y ocho nietos.

John W. Jewett, Jr., obtuvo su doctorado en la Ohio State University, con especialidad en las propiedades ópticas y magnéticas de la materia condensada. El doctor Jewett comenzó su carrera académica en el Richard Stockton College de Nueva Jersey, donde enseñó de 1974 a 1984. En la actualidad es profesor de física en la California State Polytechnic University, Pomona. A lo largo de su carrera docente, el doctor Jewett ha sido un activo promotor de la educación en ciencias. Además de recibir cuatro becas National Science Foundation, ayudó a fundar y dirigir el Southern California Area Modern Physics Institute. También dirigió el Science IMPACT (Institute of Modern Pedagogy and Creative Teaching), que trabaja con profesores y escuelas para desarrollar currícula efectiva en ciencia. Los premios del doctor Jewett incluyen el Stockton Merit Award en el Richard Stockton College en 1980, el Outstanding Professor Award en la California State Polythecnic University para 1991-1992, y el Excellence in Undergraduate Physics Teaching Award de la American Association of Physics Teachers en 1998. Ha impartido más de 80 conferencias en reuniones profesionales, incluidas conferencias en eventos internacionales en China y Japón. Además de su trabajo en este libro, es coautor de *Principles of Physics*, cuarta edición, con el doctor Serway, y autor de *The World of Physics… Mysteries, Magic and Myth*. Al doctor Jewett le gusta tocar piano con su banda de físicos, viajar y coleccionar antigüedades que se puedan usar como aparatos de demostración en clases de física. Lo más importante, le gusta pasar el tiempo con su esposa, Lisa y sus hijos y nietos.

Al escribir esta séptima edición de *Física para ciencias e ingeniería*, continuamos nuestros esfuerzos actuales por mejorar la claridad de la presentación e incluir nuevas características pedagógicas que ayudan a apoyar los procesos de aprendizaje y enseñanza. Al retroalimentar las sugerencias de los usuarios de la sexta edición, así como de los revisores, hemos clarificado el texto para satisfacer mejor las necesidades de los estudiantes y profesores.

Este libro está pensado para un curso introductorio de física para estudiantes que se especializan en ciencia o ingeniería. Todo el contenido del libro en su versión amplia podría cubrirse en un curso de tres semestres, pero es posible usar el material en secuencias más breves con la omisión de capítulos y subtemas seleccionados. Los antecedentes matemáticos ideales de los estudiantes que tomen este curso deben incluir un semestre de cálculo. Si esto no es posible, el estudiante debe inscribirse en un curso simultáneo de introducción al cálculo.

Objetivos

Este libro de introducción a la física tiene dos objetivos principales: proporcionar al estudiante una presentación clara y lógica de los conceptos básicos y principios de la física y fortalecer la comprensión de los conceptos y principios a través de un amplio intervalo de aplicaciones interesantes al mundo real. Para satisfacer estos objetivos, hemos enfatizado en argumentos físicos sólidos y metodología para resolver problemas. Al mismo tiempo hemos intentado motivar al estudiante mediante ejemplos prácticos que demuestren el papel de la física en otras disciplinas, incluidas ingeniería, química y medicina.

Cambios en la séptima edición

Para preparar la séptima edición de este texto se hicieron varios cambios y mejoras. Algunas de las nuevas características se basan en nuestras experiencias y en tendencias actuales en educación en ciencia. Otros cambios se incorporaron en respuesta a comentarios y sugerencias ofrecidos por los usuarios de la sexta edición y por revisores del manuscrito. Las características que se mencionan aquí representan los principales cambios en la séptima edición.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS Se hizo una revisión sustancial de las preguntas y problemas de fin de capítulo con la finalidad de mejorar su variedad, interés y valor pedagógico, mientras conservaban su claridad y calidad. Cerca de 23% de las preguntas y problemas son nuevos o cambiaron sustancialmente. Muchas de las preguntas para cada capítulo están en formato objetivo. Numerosos problemas en cada capítulo piden explícitamente razonamiento cualitativo en algunas partes, así como respuestas cuantitativas en otras:

> **19.** ● Considere una porción de aire en un tubo recto que se mueve con una aceleración constante de -4.00 m/s^2 y tiene una velocidad de 13.0 m/s a las 10:05:00 a.m., en cierta fecha. a) ¿Cuál es su velocidad a las 10:05:01 a.m.? b) ¿A las 10:05:02 a.m.? c) ¿A las 10:05:02.5 a.m.? d) ¿A las 10:05:04 a.m.? e) ¿A las 10:04:59 a.m.? f) Describa la forma de una gráfica de velocidad en función del tiempo para esta porción de aire. g) Argumente a favor o en contra del enunciado “conocer un solo valor de la aceleración constante de un objeto es como conocer toda una lista de valores para su velocidad”.

© Charles D. Winters.

EJEMPLOS Todos los ejemplos en el texto se remodelaron y ahora se presentan en un formato de dos columnas para reforzar mejor los conceptos físicos. La columna izquierda muestra información textual que describe las etapas para resolver el problema. La columna derecha muestra las operaciones matemáticas y los resultados de seguir dichos pasos. Esta presentación facilita la concordancia del concepto con su ejecución matemática y ayuda a los estudiantes a organizar su trabajo. Dichos ejemplos reconstituidos siguen de cerca una Estrategia General para Resolver Problemas que se introduce en el capítulo 2 para reforzar hábitos efectivos para resolver problemas (véase página siguiente).

Cada solución se reorganizó para seguir más de cerca la Estrategia General para Resolver Problemas que se resalta en el capítulo 2, para reforzar buenos hábitos en la solución de problemas.

EJEMPLO 3.2 Un viaje de vacaciones

Un automóvil viaja 20.0 km al norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

Figura 3.11 (Ejemplo 3.2) a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. b) Sumar los vectores en orden inverso $(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}})$ da el mismo resultado para $\vec{\mathbf{R}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ dibujados en la figura 3.11a ayudan a formar conceptos del problema.

Categorizar Este ejemplo se puede clasificar como un simple problema de análisis acerca de suma vectorial. El desplazamiento $\vec{\mathbf{R}}$ es la resultante cuando se suman los dos desplazamientos individuales $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Incluso se puede clasificar como un problema acerca del análisis de triángulos, así que se acude a la experiencia en geometría y trigonometría.

Analizar En este ejemplo se muestran dos formas para analizar el problema de encontrar la resultante de dos vectores. La primera es resolver el problema mediante la geometría, con el uso de papel graficado y un transportador para medir la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y su dirección en la figura 3.11a. (De hecho, aun cuando sepa que va a realizar un cálculo, debe bosquejar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador ordinarios, típicamente un buen diagrama da respuestas con dos dígitos pero no con una precisión de tres dígitos.

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo con el álgebra. La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ se obtiene a partir de la ley de cosenos, tal como se aplica al triángulo (véase el apéndice B.4).

Cada paso de la solución se detalla en un formato de dos columnas. La columna izquierda proporciona una explicación para cada paso matemático de la columna derecha, para reforzar mejor los conceptos físicos.

Aplique $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$ de la ley de cosenos para encontrar R:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Sustituya valores numéricos y advierta que $\theta = 180° - 60° = 120°$:

$$R = \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$
$$= 48.2\text{ km}$$

Aplique la ley de senos (apéndice B.4) para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ medida desde la dirección norte:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{B} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{B}{R}\operatorname{sen}\theta = \frac{35.0\text{ km}}{48.2\text{ km}}\operatorname{sen}120° = 0.629$$

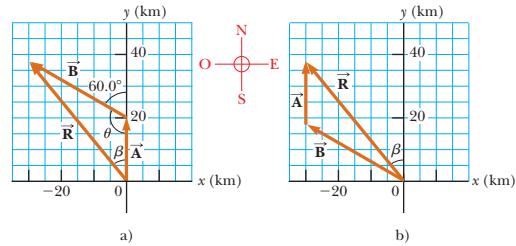
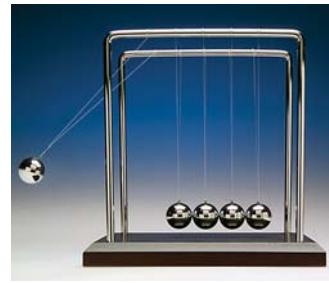
$$\beta = 38.9°$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km con una dirección de 38.9° al noroeste.

Finalizar ¿El ángulo β, que se calculó, concuerda con una estimación realizada al observar la figura 3.11a o con un ángulo real medido del diagrama con el uso del método gráfico? ¿Es razonable que la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ sea mayor que la de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$? ¿Las unidades de $\vec{\mathbf{R}}$ son correctas?

Aunque el método gráfico de sumar vectores funciona bien, tiene dos desventajas. Primera, algunas personas encuentran abrumador el uso de las leyes de cosenos y senos. Segunda, un triángulo sólo resulta si suma dos vectores. Si suma tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 se explora un nuevo método para sumar vectores que abordará estas dos desventajas.

¿Qué pasaría si? Considere que el viaje se realiza considerando los dos vectores en orden inverso: 35.0 km con dirección 60.0° al noroeste primero y después 20.0 km al norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y dirección del vector resultante?

Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la suma vectorial dice que el orden de los vectores en una suma es irrelevante. Gráficamente, la figura 3.11b muestra que los vectores sumados en orden inverso proporcionan el mismo vector resultante.

Los enunciados **¿Qué pasaría si?** aparecen casi en 1/3 de los ejemplos trabajados y ofrecen una variación de la situación planteada en el texto del ejemplo. Por ejemplo, esta característica puede explorar los efectos de cambiar las condiciones de la situación, determinar qué sucede cuando una cantidad se lleva a un valor límite particular o preguntar si se puede determinar información adicional acerca de la situación del problema. Esta característica alienta a los estudiantes a pensar acerca de los resultados del ejemplo y auxiliarlos en la interpretación conceptual de los principios.

TAREAS EN LÍNEA Ahora es más fácil asignar tarea en línea con Serway y Jewett y Enhanced WebAssign. Todos los ejemplos trabajados, problemas de fin de capítulo, figuras, preguntas rápidas y la mayoría de las preguntas están disponibles en WebAssign. La mayoría de los problemas incluyen sugerencias y retroalimentación para proporcionar reforzamiento instantáneo o instrucciones para dicho problema. Además del contenido del texto, hemos agregado herramientas de corrección matemática para ayudar a los estudiantes a adquirir rapidez en álgebra, trigonometría y cálculo.

RESÚMENES Cada capítulo contiene un resumen que revisa los conceptos y ecuaciones importantes explicados en dicho capítulo. Una nota marginal junto a cada resumen de capítulo dirige a los estudiantes a preguntas adicionales, animaciones y ejercicios interactivos para dicho capítulo en el sitio Web. El formato del resumen de fin de capítulo se revisó por completo para esta edición. El resumen se divide en tres secciones: *Definiciones*, *Conceptos y Principios*, y *Modelos de análisis para resolver problemas*. En cada sección, recuadros tipo ficha de estudio se enfocan en cada definición, concepto, principio o modelo de análisis separado.

Thomson Learning/Charles D. Winters

APÉNDICE MATEMÁTICO El apéndice matemático, una valiosa herramienta para los estudiantes, se actualizó para mostrar las herramientas matemáticas en un contexto físico. Este recurso es ideal para los estudiantes que necesitan un repaso rápido acerca de temas tales como álgebra y trigonometría.

CAMBIO EN EL CONTENIDO El contenido y organización del libro son esencialmente los mismos que en la sexta edición. Muchas secciones de varios capítulos se afinaron, borraron o combinaron con otras secciones para permitir una presentación más balanceada. Los vectores ahora se denotan en negritas con una flecha sobre ellos (por ejemplo, $\vec{\mathbf{v}}$), así son más fáciles de reconocer. Los capítulos 7 y 8 se reorganizaron por completo con la idea de preparar a los estudiantes para aplicar un planteamiento unificado de la energía a lo largo del texto. Una nueva sección en el capítulo 9 enseña a los estudiantes cómo analizar sistemas deformables con la ecuación de conservación de la energía y el teorema impulso–cantidad de movimiento. El capítulo 34 es más extenso que en la 6a. edición debido al reacomodo del material de corrientes de desplazamiento del capítulo 30 y de las ecuaciones de Makwell del capítulo 31. En el sitio Web de la compañía puede encontrar una lista más detallada de los cambios de contenido.

Contenido

El material en este libro cubre temas fundamentales de física clásica y proporciona una introducción a la física moderna. El libro se divide en seis partes. La Parte 1 (capítulos 1 a 14) se relaciona con los fundamentos de la mecánica newtoniana y la física de fluidos; la Parte 2 (capítulos 15 a 18) cubre oscilaciones, ondas mecánicas y sonido; la Parte 3 (capítulos 19 a 22) aborda el calor y la termodinámica. La parte 4 (capítulos 23 a 34) trata la electricidad y el magnetismo; la parte 5 (capítulos 35 a 38) cubre luz y óptica; la parte 6 (capítulos 39 a 46) aborda la relatividad y la física moderna.

Características del texto

La mayoría de los instructores cree que el libro seleccionado para un curso debe ser la principal guía del estudiante para entender y aprender la materia de estudio. Además, el libro debe tener un estilo accesible y estar escrito para facilitar la instrucción y el aprendizaje. Con estos puntos en mente, hemos incluido muchas características pedagógicas, que se mencionan a continuación, y tienen la intención de mejorar su utilidad tanto a estudiantes como a instructores.

Resolución de problemas y comprensión conceptual

ESTRATEGIA GENERAL PARA RESOLVER PROBLEMAS Al final del capítulo 2 se perfila una estrategia general a seguir por los estudiantes y les proporciona un proceso estructurado para resolver problemas. En los capítulos restantes la estrategia se emplea explícitamente en cada ejemplo, de modo que los estudiantes aprenden cómo se aplica.

MODELADO Aunque los estudiantes se enfrentan con cientos de problemas durante sus cursos de física, los instructores se dan cuenta de que un número relativamente pequeño de situaciones físicas forma la base de estos problemas. Al enfrentar un problema nuevo, un físico forma un *modelo* del problema para resolverlo de manera simple al identificar la situación física común que se presenta en el problema. Por ejemplo, muchos problemas involucran partículas bajo aceleración constante, sistemas aislados u ondas bajo refracción. Ya que los físicos han estudiado estas situaciones ampliamente y comprenden el comportamiento asociado, pueden aplicar este conocimiento como un modelo para un nuevo problema. En ciertos capítulos esta séptima edición identifica modelos de análisis, que son situaciones físicas (como la partícula bajo aceleración constante, el sistema aislado o la onda bajo refracción) que se presenta de manera frecuente, que se pueden usar como un modelo para resolver un problema no familiar. Estos modelos se explican en el texto del capítulo y el estudiante los recuerda en el resumen de fin de capítulo bajo el encabezado Modelos de análisis para resolver problemas.

George Semple.

PROBLEMAS Un extenso conjunto de problemas se incluye al final de cada capítulo; en total, el texto contiene aproximadamente tres mil problemas. Las respuestas a los problemas con número impar se proporcionan al final del libro. Para conveniencia, tanto del estudiante como del instructor, casi dos tercios de los problemas tienen claves referentes a secciones específicas del capítulo. Los problemas restantes, etiquetados como *Problemas adicionales*, no tienen claves a secciones específicas. La numeración para problemas directos se imprimen en negro, para problemas de nivel intermedio en azul y para problemas desafiantes en magenta.

- **Problemas "no sólo un número"** Cada capítulo incluye varios problemas marcados que requieren que los estudiantes piensen cualitativamente en algunas partes y cuantitativamente en otras. Los instructores pueden asignar tales problemas para guiar a los estudiantes hacia una comprensión más profunda, practicar buenas técnicas de resolución de problemas y prepararse para los exámenes.
- **Problemas para desarrollar razonamiento simbólico** Cada capítulo contiene problemas que piden soluciones en forma simbólica, así como muchos problemas piden respuestas numéricas. Para ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades en el razonamiento simbólico, cada capítulo contiene un par de problemas de otra manera idénticos, uno que pide una solución numérica y uno que pide una deducción simbólica. En esta edición, además cada capítulo tiene un problema que da un valor numérico por cada dato menos uno, de modo que la respuesta muestra cómo la incógnita depende del dato representado simbólicamente. Por lo tanto la respuesta tiene la forma de la función de una variable, familiar al estudiante a partir de las matemáticas. Razonar acerca del comportamiento de esta función pone énfasis en la etapa *Finalizar* de la Estrategia General para Resolver Problemas. Todos los problemas que desarrollan razonamiento simbólico se identifican mediante una pantalla de color beige:

> **53.** ● Un resorte ligero tiene una longitud no estirada de 15.5 cm. Se describe mediante la ley de Hooke con constante de resorte 4.30 N/m. Un extremo del resorte horizontal se mantiene sobre un eje vertical fijo, y el otro extremo se une a un disco de masa m que se puede mover sin fricción sobre una superficie horizontal. El disco se pone en movimiento en un círculo con un periodo de 1.30 s. a) Encuentre la extensión del resorte x conforme depende de m. Evalúe x para b) $m = 0.070\ 0$ kg, c) $m = 0.140$ kg, d) $m = 0.180$ kg y e) $m = 0.190$ kg. f) Describa el patrón de variación de x como dependiente de m.

- **Problemas de repaso** Muchos capítulos incluyen problemas de repaso que requieren que el estudiante combine conceptos cubiertos en el capítulo con los que se explicaron en capítulos anteriores. Estos problemas reflejan la naturaleza cohesiva de los principios en el texto y verifican que la física no es un conjunto de ideas dispersas. Cuando se mira hacia temas del mundo real como el calentamiento global o las armas nucleares, puede ser necesario invocar ideas físicas de varias partes de un libro como éste.
- **"Problemas Fermi"** Como en ediciones anteriores, al menos un problema en cada capítulo pide al estudiante razonar en términos de orden de magnitud.

- **Problemas de diseño** Varios capítulos contienen problemas que le solicitan al estudiante determinar parámetros de diseño para un dispositivo práctico, de modo que pueda funcionar como se requiere.
- **Problemas "*Jeopardy!*"** Muchos capítulos dan a los estudiantes práctica para cambiar entre diferentes representaciones, al establecer ecuaciones y pedir una descripción de una situación a la que aplicar, así como una respuesta numérica.
- **Problemas en términos del cálculo** Todos los capítulos contienen al menos un problema que aplica ideas y métodos del cálculo diferencial y un problema que usa cálculo integral.

El website del instructor, proporciona listas de problemas que usan cálculo, problemas que alientan o requieren uso de computadora, problemas con partes **"¿Qué pasaría si?"**, problemas a los que se hace referencia en el texto del capítulo, problemas en función de la información experimental, problemas de orden de magnitud, problemas acerca de aplicaciones biológicas, problemas de diseño, problemas *Jeopardy!*, problemas de repaso, problemas que reflejan razonamiento histórico acerca de ideas confusas, problemas que desarrollan habilidad de razonamiento simbólico, problemas con partes cualitativas, preguntas de clasificación y otras preguntas complementarias.

PREGUNTAS La sección de preguntas al final de cada capítulo se revisó por completo. Se agregaron preguntas de opción múltiple, de clasificación y verdadero-falso. El instructor puede seleccionar entre ellas para asignar como tarea o usar en el salón de clase, posiblemente con métodos de "instrucción de pares" y acaso con sistemas de "compaginador". En esta edición se incluyen más de ochocientas preguntas. Las respuestas a preguntas seleccionadas se incluyen en el paquete de recursos que acompañan al libro (http://latinoamerica.cengage.com/serway), y las respuestas a todas las preguntas se encuentran en el *Manual de soluciones del instructor*.

19. **O i)** Clasifique las aceleraciones gravitacionales que mediría para a) un objeto de 2 kg a 5 cm arriba del suelo, b) un objeto de 2 kg a 120 cm sobre el suelo, c) un objeto de 3 kg a 120 cm sobre el suelo y d) un objeto de 3 kg a 80 cm sobre el suelo. Mencione primero el que tiene aceleración con mayor magnitud. Si dos son iguales, muestre su igualdad en la lista. **ii)** Clasifique las fuerzas gravitacionales sobre los mismos cuatro objetos, primero la mayor magnitud. **iii)** Clasifique las energías potenciales gravitacionales (del sistema objeto–Tierra) para los mismos cuatro objetos, primero la mayor, y considere $y = 0$ en el suelo.

23. **O** A un cubo de hielo se le da un empujón y se desliza sin fricción sobre una mesa a nivel. ¿Qué es correcto? a) Está en equilibrio estable. b) Está en equilibrio inestable. c) Está en equilibrio neutro. d) No está en equilibrio.

EJEMPLOS Para auxiliar la comprensión del estudiante se presentan dos tipos de ejemplos. Todos los ejemplos en el texto se pueden asignar para tarea en WebAssign.

El primer tipo de ejemplo presenta un problema y respuesta numérica. Como se señaló anteriormente, las soluciones a estos ejemplos se alteraron en esta edición para presentar una plantilla de dos columnas para explicar los conceptos físicos y las etapas matemáticas lado a lado. Todo ejemplo sigue las etapas explícitas de la Estrategia general para resolver problemas que se resalta en el capítulo 2.

El segundo tipo de ejemplo es conceptual en naturaleza. Para dar énfasis a la comprensión de los conceptos físicos, los muchos ejemplos conceptuales se etiquetan como tales, se ponen en recuadros y están diseñados para enfocar a los estudiantes en la situación física del problema.

¿QUÉ PASARÍA SI? Aproximadamente un tercio de los ejemplos del texto contienen una condicional **¿Qué pasaría si?** Al completar la solución del ejemplo, una pregunta **¿Qué pasaría si?** ofrece una variación en la situación planteada en el texto del ejemplo. Por ejemplo, esta característica puede explorar los efectos de cambiar las condiciones de la situación, determinar lo que ocurre cuando una cantidad se lleva a un valor límite

particular, o preguntar si es posible determinar información adicional acerca de la situación. Esta característica alienta a los estudiantes a pensar acerca de los resultados del ejemplo; también ayuda en la interpretación conceptual de los principios. Las preguntas **¿Qué pasaría si?** también preparan a los estudiantes para encontrar problemas novedosos que se presenten en los exámenes. Algunos de los problemas de fin de capítulo también incluyen esta característica.

PREGUNTAS RÁPIDAS Las preguntas rápidas proporcionan a los estudiantes una oportunidad para poner a prueba su comprensión de los conceptos físicos presentados. Las preguntas piden a los estudiantes tomar decisiones de acuerdo a un razonamiento firme, y algunas de las preguntas se escribieron para ayudar a los estudiantes a superar interpretaciones equívocas comunes. Las preguntas rápidas se presentan en un formato objetivo, que incluyen opción múltiple, verdadero–falso y de clasificación. Las respuestas a todas las preguntas rápidas se encuentran al final de cada capítulo. En el website están disponibles preguntas rápidas adicionales que se pueden usar en la enseñanza en el salón de clase. Muchos instructores prefieren usar tales preguntas en un estilo de enseñanza de "instrucción por búsqueda" o con el uso de sistema de respuesta personal "compaginadores", pero también se pueden usar en formato de pregunta estándar.

Pregunta rápida 7.5 Se carga un dardo en una pistola de juguete, accionada por resorte, al empujar el resorte hacia adentro una distancia x. Para la siguiente carga, el resorte se comprime una distancia $2x$. ¿Qué tan rápido deja la pistola el segundo dardo, en comparación con el primero? a) cuatro veces más rápido, b) dos veces más rápido, c) la misma, d) la mitad de rápido, e) un cuarto de rápido.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.2
Dos tipos de rapidez/velocidad

No confunda v, la rapidez de la onda mientras se propaga a lo largo de la cuerda, con v_y, la velocidad transversal de un punto sobre la cuerda. La rapidez v es constante para un medio uniforme, mientras que v_y varía sinusoidalmente.

PREVENCIONES DE RIESGOS OCULTOS Más de doscientas *Prevenciones de riesgos ocultos* se proporcionan para ayudar a los estudiantes a evitar errores y malas interpretaciones comunes. Estas características, que se colocan en los márgenes del texto, abordan tanto malas interpretaciones estudiantiles comunes como situaciones en que los estudiantes con frecuencia siguen rutas improductivas.

Características útiles

ESTILO Para facilitar la rápida comprensión, hemos escrito el libro en un estilo claro, lógico y atractivo. Elegimos un estilo de escribir que es un poco informal y relajado de modo que los estudiantes encontrarán el texto atractivo y agradable para leer. Los nuevos términos se definen cuidadosamente y hemos evitado el uso de vocabulario especial.

ENUNCIADOS Y ECUACIONES IMPORTANTES Los enunciados y definiciones más importantes se ponen en negritas o se resaltan con una pantalla para agregar énfasis y facilitar la revisión. De igual modo, las ecuaciones importantes se resaltan con una pantalla para facilitar su ubicación.

NOTAS MARGINALES Los comentarios y notas que aparecen en el margen con un icono ▶ se pueden usar para ubicar enunciados, ecuaciones y conceptos importantes en el texto.

USO PEDAGÓGICO DEL COLOR Los lectores deben consultar el cuadro pedagógico de color (al final del libro) para una lista de los símbolos en color que se usan en los diagramas del texto. Este sistema se usa consistentemente en todas las partes del texto.

NIVEL MATEMÁTICO Introducimos el cálculo de manera gradual, teniendo en mente que los estudiantes con frecuencia toman cursos introductorios de cálculo y física simultáneamente. La mayoría de las etapas se muestra cuando se desarrollan ecuaciones básicas, y con frecuencia se hace referencia a los apéndices matemáticos cerca del final del texto. Los productos vectoriales se introducen más adelante en el texto, donde se necesitan en aplicaciones físicas. El producto punto se introduce en el capítulo 7, que aborda la energía de un sistema; el producto cruz se introduce en el capítulo 11, que se relaciona con cantidad de movimiento angular.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS Las cifras significativas tanto en los ejemplos trabajados como en los problemas de fin de capítulo se manejaron con cuidado. La mayoría de los ejemplos numéricos se trabaja a dos o a tres cifras significativas, depende de la precisión de los datos proporcionados. Los problemas de fin de capítulo por lo regular establecen datos y respuestas a tres dígitos de precisión.

UNIDADES A lo largo del texto se usa el sistema internacional de unidades (SI). El sistema estadounidense de unidades usuales sólo se usa en una medida limitada en los capítulos acerca de mecánica y termodinámica.

APÉNDICES Casi al final del texto se proporcionan varios apéndices. La mayoría del material de los apéndices representa un repaso de conceptos y técnicas matemáticas aplicadas en el texto, incluidos notación científica, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo diferencial y cálculo integral. En todas las partes del texto se hace referencia a estos apéndices. La mayor parte de las secciones de repaso matemático en los apéndices incluyen ejemplos y ejercicios con respuestas. Además de los repasos matemáticos, los apéndices contienen tablas de datos físicos, factores de conversión y las unidades del SI de cantidades físicas, así como una tabla periódica de los elementos. Otra información útil (constantes fundamentales y datos físicos, datos planetarios, una lista de prefijos estándar, símbolos matemáticos, el alfabeto griego y abreviaturas estándar de unidades de medición) aparecen al final del libro.

Material de apoyo para el profesor

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, póngase en contacto con el área de servicio a clientes en las siguientes direcciones de correo electrónico:

Cengage Learning México y Centroamérica	clientes.mexicoca@cengage.com
Cengage Learning Caribe	clientes.caribe@cengage.com
Cengage Learning Cono Sur	clientes.conosur@cengage.com
Cengage Learning Pacto Andino	clientes.pactoandino@cengage.com

Los recursos disponibles se encuentran en el sitio web del libro:
http://latinoamerica.cengage.com/serway/

Las direcciones de los sitios web referidas en el texto no son administradas por Cengage Learning Latinoamérica, por lo que ésta no es responsable de los cambios o actualizaciones de las mismas.

Opciones de enseñanza

Los temas en este libro se presentan en la siguiente secuencia: mecánica clásica, oscilaciones y ondas mecánicas, y calor y termodinámica. Esta presentación es una secuencia tradicional, donde el tema de las ondas mecánicas se aborda antes que la electricidad y el magnetismo.

Para los instructores que enseñan una secuencia de dos semestres, algunas secciones y capítulos se podrían eliminar sin pérdida de continuidad. Las siguientes secciones se pueden considerar opcionales para este propósito:

2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo
4.6 Velocidad y aceleración relativas
6.3 Movimiento en marcos acelerados
6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas
7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema
9.8 Propulsión de cohetes
11.5 El movimiento de giroscopios y trompos
14.7 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos
15.6 Oscilaciones amortiguadas

15.7 Oscilaciones forzadas
17.5 Grabación de sonido digital
17.6 Sonido cinematográfico
18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas
18.8 Patrones de onda no sinusoidales
22.8 Entropía a escala microscópica
25.7 El experimento de la gota de aceite de Millikan
25.8 Aplicaciones de la electrostática
26.7 Una descripción atómica de los dieléctricos
27.5 Superconductores
28.5 Medidores eléctricos
28.6 Cableado doméstico y seguridad eléctrica
29.3 Aplicaciones que involucran partículas con carga que se mueven en un campo magnético
29.6 El efecto Hall
30.6 Magnetismo en la materia
30.7 El campo magnético de la Tierra
31.6 Corrientes de Eddy
33.9 Rectificadores y filtros
34.6 Producción de ondas electromagnéticas por una antena
36.5 Aberraciones de lentes
36.6 La cámara
36.7 El ojo
36.8 El amplificador simple
36.9 El microscopio compuesto
36.10 El telescopio
38.5 Difracción de rayos X por cristales
39.10 La teoría de la relatividad general
41.6 Aplicaciones de la tunelización
42.9 Transiciones espontáneas y estimuladas
42.10 Láser
43.7 Dispositivos semiconductores
43.8 Superconductividad
44.8 Resonancia magnética nuclear y resonancia magnética de imágenes
45.5 Daños por radiación
45.6 Detectores de radiación
45.7 Usos de la radiación

Reconocimientos

Esta séptima edición de *Física para ciencias e ingeniería* se preparó con la guía y asistencia de muchos profesores que revisaron selecciones del manuscrito, la revisión previa del texto o ambos. Queremos agradecer a los siguientes académicos y expresar nuestro sincero aprecio por sus sugerencias, críticas y aliento:

David P. Balogh, Fresno City College
Leonard X. Finegold, Drexel University
Raymond Hall, California State University, Fresno
Bob Jacobsen, University of California, Berkeley
Robin Jordan, Florida Atlantic University
Rafael Lopez-Mobilia, University of Texas at San Antonio
Diana Lininger Markham, City College of San Francisco
Steven Morris, Los Angeles Harbor City College
Taha Mzoughi, Kennesaw State University
Nobel Sanjay Rebello, Kansas State University
John Rosendahl, University of California, Irvine
Mikolaj Sawicki, John A. Logan College
Glenn B. Stracher, East Georgia College

Som Tyagi, Drexel University
Robert Weidman, Michigan Technological University
Edward A. Whittaker, Stevens Institute of Technology

Este título lo comprobaron cuidadosamente para su exactitud Zinoviy Akkerman, City College of New York; Grant Hart, Brigham Young University; Michael Kotlarchyk, Rochester Institute of Technology; Andres LaRosa, Portland State University; Bruce Mason, University of Oklahoma at Norman; Peter Moeck, Portland State University; Brian A. Raue, Florida International University; James E. Rutledge, University of California at Irvine; Bjoern Seipel, Portland State University; Z. M. Stadnick, University of Ottowa; y Harry W. K. Tom, University of California at Riverside. Queremos agradecerles sus diligentes esfuerzos bajo presión de agenda.

Estamos agradecidos con Ralph McGrew por organizar los problemas de fin de capítulo, escribir muchos nuevos problemas y sugerir mejoras en el contenido del texto. Los problemas y preguntas nuevos en esta edición fueron escritos por Duane Deardorff, Thomas Grace, Francisco Izaguirre, John Jewett, Robert Forsythe, Randall Jones, Ralph McGrew, Kurt Vandervoort y Jerzy Wrobel. Las siguientes personas nos dieron amablemente su ayuda: Dwight Neuenschwander, Michael Kinney, Amy Smith, Will Mackin y el Sewer Department of Grand Forks, North Dakota. Daniel Kim, Jennifer Hoffman, Ed Oberhofer, Richard Webb, Wesley Smith, Kevin Kilty, Zinoviy Akkerman, Michael Rudmin, Paul Cox, Robert LaMontagne, Ken Menningen y Chris Church hicieron correcciones a los problemas tomados de ediciones anteriores. Queremos agradecer a los autores John R. Gordon y Ralph McGrew por preparar el *Manual de soluciones/Guía de estudio del estudiante*. El autor Ralph McGrew preparó un excelente *Manual de soluciones del instructor*. Edward Adelson editó y mejoró cuidadosamente el banco de pruebas. Kurt Vandervoort preparó preguntas rápidas adicionales para el sitio Web de la compañía para el instructor.

Gracias y reconocimiento especial para el personal profesional en Brooks/Cole Publishing Company, en particular a Ed Dodd, Brandi Kirksey (quien gestionó el programa auxiliar y mucho más), Shawn Vasquez, Sam Subity, Teri Hyde, Michelle Julet, David Harris y Chris Hall, por su fino trabajo durante el desarrollo y producción de este libro. Mark Santee es nuestro gerente de marketing estacional, y Bryan Vann coordina nuestras comunicaciones de marketing. Reconocemos el profesional servicio de producción y excelente trabajo artístico proporcionados por el personal en Lachina Publishing Services, y los dedicados esfuerzos de investigación fotográfica de Jane Sanders Miller.

Para finalizar, estamos profundamente en deuda con nuestras esposas, hijos y nietos por su amor, apoyo y sacrificios de largo plazo.

Raymond A. Serway
St. Petersburg, Florida

John W. Jewett, Jr.
Pomona, California

Es adecuado ofrecer algunas palabras de consejo que deben ser de beneficio para el estudiante. Antes de hacerlo, suponemos que ha leído el Prefacio, que describe las diferentes características del texto y materiales de apoyo que le ayudarán a lo largo del curso.

Cómo estudiar

Con frecuencia preguntan a los instructores: "¿cómo debo estudiar física y prepararme para los exámenes?". No hay una respuesta simple a esta pregunta, pero podemos ofrecer algunas sugerencias de acuerdo con nuestra experiencia en el aprendizaje y enseñanza a través de los años.

Ante todo, mantenga una actitud positiva hacia el tema de estudio, teniendo en mente que la física es la más esencial de todas las ciencias naturales. Otros cursos de ciencia que siguen usarán los mismos principios físicos, de modo que es importante que entienda y sea capaz de aplicar los diversos conceptos y teorías explicadas en el texto.

Conceptos y principios

Es esencial que entienda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver los problemas asignados. Esta meta la puede lograr al leer con cuidado el texto antes de asistir a su clase acerca del material cubierto. Cuando lea el texto, debe anotar aquellos puntos que no sean claros. También haga un intento diligente por responder las Preguntas rápidas, conforme las encuentra en su lectura. Hemos trabajado duro para preparar preguntas que le ayuden a juzgar por sí mismo qué tan bien entiende el material. Estudie cuidadosamente las preguntas **¿Qué pasaría si?** que aparecen en muchos de los ejemplos trabajados. Ellas le ayudarán a extender su comprensión más allá del simple acto de llegar a un resultado numérico. Las *Prevenciones de riesgos ocultos* también le ayudarán a alejarse de las malas interpretaciones comunes con respecto a la física. Durante la clase, tome notas y pregunte acerca de aquéllas ideas que no le sean claras. Tenga en mente que pocas personas son capaces de absorber todo el significado del material científico después de sólo una lectura; pueden ser necesarias muchas lecturas del texto y sus notas. Sus clases y trabajo de laboratorio complementan la lectura del libro y deben clarificar algo del material más difícil. Debe minimizar su memorización del material. La memorización exitosa de pasajes del texto, ecuaciones y derivaciones no necesariamente indican que comprende el material. Su comprensión del material mejorará mediante la combinación de hábitos eficientes de estudio, discusiones con otros estudiantes y con instructores, y su habilidad para resolver los problemas que se presentan en el libro. Pregunte siempre que crea que es necesario aclarar un concepto.

©Thomson Learning/Charles D. Winters.

Agenda de estudio

Es importante que configure una agenda de estudio regular, de preferencia que sea diaria. Verifique que lee el programa de estudio del curso y que éste coincide con el calendario establecido por el instructor. Las clases tendrán mucho más sentido si lee el texto correspondiente *antes* de asistir a ellas. Como regla general, debe dedicar aproximadamente dos horas de tiempo de estudio por cada hora que esté en clase. Si tiene problemas con el curso, busque el consejo del instructor u otros estudiantes que hayan tomado el curso. Puede ser necesario buscar más instrucción de estudiantes experimentados. Con mucha frecuencia, los instructores ofrecen sesiones de repaso, además de los periodos de clase regulares. Evite la práctica de demorar el estudio hasta un día o dos antes de un examen. Por lo general, este enfoque tiene resultados desastrosos. En lugar de emprender una sesión de estudio de toda la noche antes del examen, repase brevemente los conceptos y ecuaciones básicos, y luego tenga una buena noche de descanso.

Use las características

Debe usar por completo las diferentes características del texto explicadas en el Prefacio. Por ejemplo, las notas marginales son útiles para localizar y describir ecuaciones y conceptos importantes, y las negritas indican enunciados y definiciones importantes. En los apéndices hay muchas tablas útiles, pero la mayoría se incorpora al texto, donde su referencia es útil. El apéndice B es un repaso conveniente de técnicas matemáticas.

Las respuestas a los problemas con número impar se proporcionan al final del libro, las respuestas a las preguntas rápidas se ubican al final de cada capítulo y las soluciones a preguntas y problemas de fin de capítulo seleccionados se proporcionan en el paquete de recursos que acompañan al libro. La tabla de contenido proporciona un panorama de todo el texto y el índice le permite ubicar rápidamente material específico. En ocasiones se usan notas a pie de página para complementar el texto o citar otras referencias acerca del tema explicado.

Después de leer un capítulo, debe ser capaz de definir cualquier cantidad nueva introducida en dicho capítulo y explicar los principios y suposiciones que se usaron para llegar a ciertas relaciones clave. Los resúmenes de capítulo y las secciones de repaso le ayudan a este respecto. En algunos casos, puede encontrar necesario remitirse al índice del libro para ubicar ciertos temas. Debe ser capaz de asociar a cada cantidad física el símbolo correcto para representar dicha cantidad y la unidad en que se especifica la cantidad. Además, debe ser capaz de expresar cada ecuación importante en prosa concisa y exacta.

Resolución de problemas

R. P. Feynman, laureado Nobel en física, dijo una vez: "No sabes nada hasta que lo has practicado". Para estar de acuerdo con este enunciado, le recomendamos encarecidamente que desarrolle las habilidades necesarias para resolver una serie amplia de problemas. Su habilidad para resolver problemas será una de las principales pruebas de su conocimiento en física; por lo tanto, debe intentar resolver tantos problemas como sea posible. Es esencial que comprenda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver problemas. Es buena práctica intentar encontrar soluciones alternas al mismo problema. Por ejemplo, puede resolver problemas en mecánica usando las leyes de Newton, pero con mucha frecuencia un método alternativo que se apoye en consideraciones energéticas es más directo. No debe engañarse y creer que entiende un problema simplemente porque ha visto cómo se resolvió en clase. Debe ser capaz de resolver el problema y problemas similares por cuenta propia.

El enfoque para resolver problemas se debe planear cuidadosamente. Un plan sistemático es especialmente importante cuando un problema involucra muchos conceptos. Primero, lea el problema muchas veces hasta que esté seguro de que entiende qué se pide. Busque palabras clave que le ayuden a interpretar el problema y tal vez le posibiliten la formulación de ciertas suposiciones. Su habilidad para interpretar adecuadamente una pregunta es una parte integral de la resolución del problema. Segundo, debe adquirir el hábito de escribir la información conocida en un problema y aquellas cantidades que necesite encontrar; por ejemplo, puede construir una tabla que mencione tanto las cantidades conocidas como las cantidades a encontrar. Este procedimiento se usa a veces en los ejemplos trabajados del libro. Por último, después de decidir el método que considere apropiado para un problema determinado, proceda con su solución. La Estrategia General para Resolver Problemas le guiará a través de problemas complejos. Si sigue las etapas de este procedimiento (*Conceptualizar*, *Categorizar*, *Analizar*, *Finalizar*), le será más fácil llegar a una solución y ganará más por sus esfuerzos. Dicha estrategia, ubicada al final del capítulo 2, se usa en todos los ejemplos en los capítulos restantes, de modo que puede aprender cómo aplicarla. En el texto se incluyen estrategias específicas para resolución de problemas para ciertos tipos de situaciones y aparecen con un encabezado azul. Dichas estrategias específicas siguen el esbozo de la **Estrategia General para Resolver Problemas**.

Con frecuencia, los estudiantes fracasan en el reconocimiento de las limitaciones de ciertas ecuaciones o leyes físicas en una situación particular. Es muy importante que entienda y recuerde las suposiciones que subyacen a una teoría o formalismo particular. Por ejemplo, ciertas ecuaciones en cinemática sólo se aplican a una partícula en movimiento con aceleración constante. Estas ecuaciones no son válidas para describir el movimiento

©Thomson Learning/Charles D. Winters

cuya aceleración no sea constante, como el movimiento de un objeto conectado a un resorte o el movimiento de un objeto a través de un fluido. Estudie cuidadosamente los **Modelos de análisis para resolver problemas** en los resúmenes de capítulo, de modo que sepa cómo se aplica cada modelo a una situación específica.

Experimentos

La física es una ciencia que se apoya en observaciones experimentales. Por lo tanto, recomendamos que intente complementar el texto, realizando varios tipos de experimentos "prácticos", en casa o en el laboratorio. Estos experimentos se pueden usar para poner a prueba ideas y modelos explicados en clase o en el libro. Por ejemplo, el juguete común Slinky es excelente para estudiar ondas progresivas, una bola que se balancea en el extremo de una cuerda larga se puede usar para investigar el movimiento pendular, diferentes masas unidas al extremo de un resorte o banda de goma vertical se pueden usar para determinar su naturaleza elástica, un viejo par de lentes de sol y algunos lentes de desecho y una lupa son los componentes de diferentes experimentos en óptica, y una medida aproximada de la aceleración en caída libre se puede determinar simplemente al medir con un cronómetro el tiempo que una bola tarda en caer desde una altura conocida. La lista de tales experimentos es interminable. Cuando no estén disponibles modelos físicos, sea imaginativo e intente desarrollar modelos por cuenta propia.

Nuevos medios

Le recomendamos enormemente usar el sistema de aprendizaje basado en el paquete de recursos que acompaña a este libro. Es mucho más fácil comprender la física si la ve en acción, y estos nuevos materiales le permitirán volverte parte de dicha acción. Los medios descritos en el Prefacio, presentan un proceso de aprendizaje en tres pasos, que consisten en evaluación preliminar, plan de aprendizaje personalizado y una evaluación posterior.

Es nuestro sincero deseo que encuentre la física como una experiencia excitante y agradable, y que se beneficie de esta experiencia sin importar la profesión que elija.

El científico no estudia la naturaleza porque sea útil; la estudia porque se deleita en ella, y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, no valdría la pena vivir la vida.

—Henri Poincaré

Electricidad y magnetismo

Ahora estudiará la rama de la física que se ocupa de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Las leyes de la electricidad y del magnetismo desempeñan un papel muy importante en el funcionamiento de dispositivos como reproductores de MP3, televisiones, motores eléctricos, computadoras, aceleradores de alta energía y otros aparatos electrónicos. Incluso, en su forma más básica, las fuerzas interatómicas e intermoleculares responsables de la formación de sólidos y líquidos son, en su origen, eléctricas.

Evidencia encontrada en documentos de la antigua China sugiere que desde el año 2000 a.C., el magnetismo ya había sido observado. Los antiguos griegos observaron fenómenos eléctricos y magnéticos desde el año 700 a.C. Conocían las fuerzas magnéticas al observar la *magnetita* (Fe_3O_4), piedra de origen natural, que es atraída por el hierro. (La palabra *eléctrico* viene de *elecktron*, palabra griega para designar el "ámbar". La palabra *magnético* proviene de *Magnesia*, nombre de la provincia griega donde se encontró magnetita por primera vez.)

No fue sino hasta principios del siglo XIX que los científicos llegaron a la conclusión de que la electricidad y el magnetismo son fenómenos relacionados. En 1819, Hans Oersted descubrió que la aguja de la brújula se desvía si se coloca cerca de un circuito por el que se conduce una corriente eléctrica. En 1831, Michael Faraday y, en forma simultánea, Joseph Henry, demostraron que cuando se pone en movimiento un alambre cerca de un imán (o, de manera equivalente, cuando un imán se mueve cerca de un alambre), se establece una corriente eléctrica en dicho alambre. En 1873, James Clerk Maxwell aprovechó estas observaciones junto con otros experimentos para sustentar las leyes del electromagnetismo tal como se conocen hoy día. (*Electromagnetismo* es el nombre que se le da al estudio conjunto de la electricidad y del magnetismo.)

La contribución de Maxwell en el campo del electromagnetismo fue de especial relevancia, porque las leyes que formuló son fundamentales para explicar todas las formas de fenómenos electromagnéticos. Su trabajo tiene tanta importancia como las leyes del movimiento y la teoría de la gravitación universal.

Los rayos son un ejemplo dramático de los fenómenos eléctricos que se presentan en la naturaleza. Si bien los rayos que se generan en una tempestad no causan demasiada sorpresa, éstos también aparecen en otras situaciones, por ejemplo durante una erupción volcánica (en este caso, en el volcán Sakurajima de Japón). (M. Zhilin/M. Newman/Photo Researchers, Inc.)

Madre e hija disfrutan los efectos de cargar sus cuerpos eléctricamente. En sus cabezas cada cabello adquiere carga y ejerce una fuerza de repulsión sobre los demás, que resulta en el erizamiento que usted observa aquí. (Cortesía de Resonance Research Corporation.)

23 Campos eléctricos

Una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza es la electromagnética, la cual se da entre partículas con carga. El capítulo inicia con una descripción de las propiedades básicas de la fuerza eléctrica, una de las manifestaciones de la fuerza electromagnética. En seguida se explica la fundamental ley de Coulomb que gobierna las fuerzas eléctricas presentes entre dos partículas con carga. A continuación se introduce el concepto de un campo eléctrico asociado a una distribución de carga y se describe su efecto sobre otras partículas con carga. Después se muestra cómo utilizar la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico en una distribución de cargas conocida. El capítulo concluye con la explicación del movimiento de una partícula con carga en un campo eléctrico uniforme.

23.1 Propiedades de las cargas eléctricas

Hay una variedad de experimentos simples para demostrar la existencia de fuerzas eléctricas. Por ejemplo, después de frotar un globo contra el cabello en un día seco, observará que el globo atrae pequeños pedazos de papel. Con frecuencia la fuerza de atracción es lo suficientemente intensa que los pedazos de papel quedan suspendidos.

Cuando los materiales se comportan de esta manera, se dice que están *electrificados*, o que se han **cargado eléctricamente**. Usted puede electrificar su cuerpo con facilidad si frota con fuerza sus zapatos sobre una alfombra de lana; detectará la carga eléctrica de su cuerpo al tocar ligeramente (y sobresaltar) a un amigo. Bajo condiciones adecuadas, verá

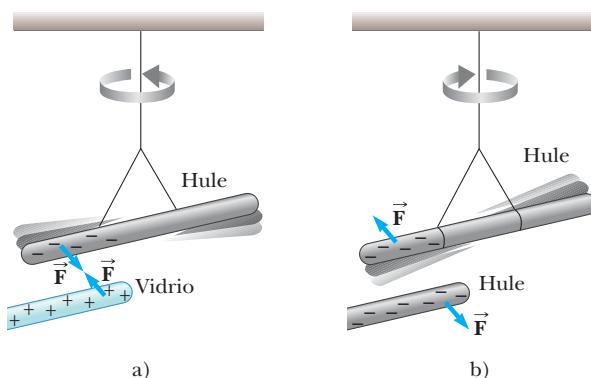



Figura 23.1 a) Una varilla de hule con carga negativa suspendida por en un hilo es atraída por una varilla de vidrio con carga positiva. b) Una varilla de hule con carga negativa es repelida por otra varilla de hule con carga negativa.

una chispa al momento de tocarlo y sentirán una ligera descarga. (Este tipo de experimentos funcionan mejor durante días secos, porque el exceso de humedad en el aire hace que cualquier carga que usted acumule en su cuerpo se "fugue" hacia la tierra.)

A partir de una serie de experimentos sencillos, Benjamín Franklin (1706-1790) determinó que existen dos tipos de cargas eléctricas, a las que dio el nombre de **positiva** y **negativa**. Los electrones tienen carga negativa y los protones positiva. Para comprobar la existencia de ambos tipos de carga, imagine una varilla rígida de hule que ha sido frotada contra un trozo de piel y que está suspendida de un hilo, como puede observar en la figura 23.1. Cuando acerca una varilla de vidrio que ha sido frotada con seda a una varilla de hule, ambas se atraen (figura 23.1a). Por otra parte, si acerca dos varillas de hule con carga (o dos varillas de vidrio con carga), como se observa en la figura 23.1b, ambas se repelen. Esta observación demuestra que el hule y el vidrio tienen dos tipos diferentes de carga. Con base en estas observaciones, se puede concluir que **cargas de un mismo signo se repelen y cargas de signos opuestos se atraen**.

Si aplica la regla establecida por Franklin, a la carga eléctrica en la varilla de vidrio se le denomina positiva y a la varilla de hule, negativa. Por lo tanto, cualquier objeto con carga que sea atraído por una varilla de hule con carga (o repelido por una varilla de vidrio con carga), deberá tener una carga positiva, y cualquier objeto con carga repelido por una varilla de hule con carga (o atraído por una varilla de vidrio con carga), deberá tener una carga negativa.

Otro aspecto importante de la electricidad que es evidente a partir de la observación experimental es que en un sistema aislado **la carga eléctrica siempre se conserva**. Es decir, cuando se frota un objeto contra otro, no se crea carga en este proceso. El estado de electrificación se debe a una *transferencia* de carga de uno de los objetos hacia el otro. Uno adquiere parte de la carga negativa en tanto que el otro adquiere la misma cantidad de carga, pero positiva. Por ejemplo, cuando una barra de vidrio es frotada con seda, como se aprecia en la figura 23.2, la seda adquiere una carga negativa igual en magnitud a la carga positiva de la barra de vidrio. Hoy día se sabe, gracias a la comprensión de la estructura del átomo, que en el proceso de frotación se transfieren electrones del vidrio a la seda. De manera similar, cuando el hule es frotado contra la piel, los electrones se transfieren al hule dándole una carga negativa neta y a la piel una carga positiva neta. Este proceso es consistente con el hecho de que la materia, neutra y sin carga, contiene tantas cargas positivas (protones en los núcleos de los átomos) como negativas (electrones).

◄ La carga eléctrica se conserva

Figura 23.2 Cuando una varilla de vidrio es frotada con seda, se transfieren electrones del vidrio a la seda. Debido a la conservación de la carga, cada electrón añade carga negativa a la seda, y una cantidad igual de carga positiva queda atrás en la varilla. También, ya que las cargas se transfieren en paquetes discretos, las cargas en ambos objetos son iguales a $\pm e$ o $\pm 2e$ o $\pm 3e$, y así en forma sucesiva.

En 1909 Robert Millikan (1868-1953) descubrió que las cargas eléctricas siempre se presentan como un entero múltiplo de una cantidad básica de carga e (véase la sección 25.7). En términos actuales se dice que la carga eléctrica q está **cuantizada**, y q es el símbolo de la variable para la carga; en otras palabras, la carga eléctrica existe en forma de "paquetes" discretos y se escribe $q = \pm Ne$, donde N es algún número entero. Otros experimentos del mismo periodo demostraron que el electrón tiene una carga $-e$ y el protón una carga de igual magnitud, pero de signo contrario, $+e$. Algunas partículas, como el neutrón, no poseen carga.

Pregunta rápida 23.1 Se colocan tres objetos, muy cerca uno del otro, dos al mismo tiempo. Cuando se juntan los objetos A y B, se repelen. Cuando se acercan los objetos B y C, se repelen. De los siguientes enunciados, ¿cuál es el verdadero? a) Los objetos A y C tienen cargas del mismo signo. b) Los objetos A y C poseen cargas de signos opuestos. c) Los tres objetos tienen cargas del mismo signo. d) Uno de los objetos es neutro. e) Es necesario llevar a cabo experimentos adicionales para determinar los signos de las cargas.

23.2 Objetos de carga mediante inducción

Es conveniente clasificar los materiales en función de la capacidad con que los electrones se mueven a través del material:

Los **conductores** eléctricos son aquellos materiales en los cuales algunos de los electrones son libres,[1] no están unidos a átomos y pueden moverse con libertad a través del material. Los **aislantes** eléctricos son aquellos materiales en los cuales todos los electrones están unidos a átomos y no pueden moverse libremente a través del material.

Materiales como el vidrio, el hule y la madera se incluyen en la categoría de aislantes eléctricos. Cuando estos materiales son frotados sólo la zona frotada se carga, y las partículas con carga no pueden moverse hacia otras zonas del material.

En contraste, materiales como el cobre, el aluminio y la plata son buenos conductores eléctricos. Cuando están con carga en alguna pequeña zona, la carga se distribuye de inmediato en toda la superficie del material.

Una tercera clase de materiales son los **semiconductores**, cuyas propiedades eléctricas se ubican entre las correspondientes a los aislantes y a los conductores. El silicio y el germanio son ejemplos muy conocidos de materiales semiconductores de uso común en la fabricación de una gran diversidad de chips electrónicos utilizados en computadoras, teléfonos celulares y estéreos. Las propiedades eléctricas de los semiconductores cambian, en varios órdenes de magnitud, a partir de la adición de cantidades controladas de ciertos átomos.

Para comprender cómo se carga un conductor mediante **inducción**, imagine una esfera conductora neutra (sin carga) aislada de la tierra, como se muestra en la figura 23.3a. En la esfera existe una cantidad igual de electrones y de protones, ya que la carga de la esfera es igual a cero. Cuando a la esfera se le acerca una varilla de hule con carga negativa, los electrones en la región más cercana a la varilla experimentan una fuerza de repulsión y emigran al lado opuesto de la esfera. Esto provoca que la región de la esfera cercana a la varilla se quede con carga positiva a causa del menor número de electrones, como se observa en la figura 23.3b. (El lado izquierdo de la esfera de la figura 23.3b queda con carga positiva, *como si* se hubieran trasladado a dicha región cargas positivas, pero recuerde que sólo los electrones tienen la libertad para moverse.) Esto se presenta aun cuando la varilla no toque la esfera. Si el mismo experimento se realiza con un alambre conductor conectado de la esfera a la tierra (figura 23.3c) algunos de los electrones en el conductor son repelidos con tal fuerza, por la presencia de la carga negativa de la varilla, que salen de la esfera a través del alambre hacia la tierra. El símbolo ⏚ al extremo en la figura 23.3c indica que el alambre está conectado a **tierra,** como un depósito, al igual que la tierra, que puede aceptar o proveer de electrones con libertad sin que se produzca un efecto significativo sobre sus características eléctricas. Si el alambre a tierra se retira (figura 23.3d), la esfera conductora se queda con un exceso de

a)

b)

c)

d)

e)

Figura 23.3 Carga de un objeto metálico mediante *inducción* (es decir, sin que un objeto toque otro). a) Esfera metálica neutra, con igual cantidad de cargas positivas y negativas. b) Al acercar una varilla de hule cargada, los electrones en la esfera neutra se redistribuyen. c) Al conectar la esfera a tierra, algunos de sus electrones se fugan a través del alambre a tierra. d) Al eliminar la conexión a la tierra, la esfera queda con demasiada carga positiva que no está distribuida de manera uniforme. e) Al retirar la varilla, se redistribuyen los electrones restantes y se tiene una distribución uniforme positiva neta sobre la esfera.

[1] Un átomo de metal tiene uno o más electrones exteriores, con una unión débil al núcleo. Cuando se combinan muchos átomos para formar un metal, los *electrones libres* son electrones exteriores, que no están unidos a ningún átomo y se mueven por el metal de una forma similar a como lo hacen las moléculas de gas en el interior de un recipiente.

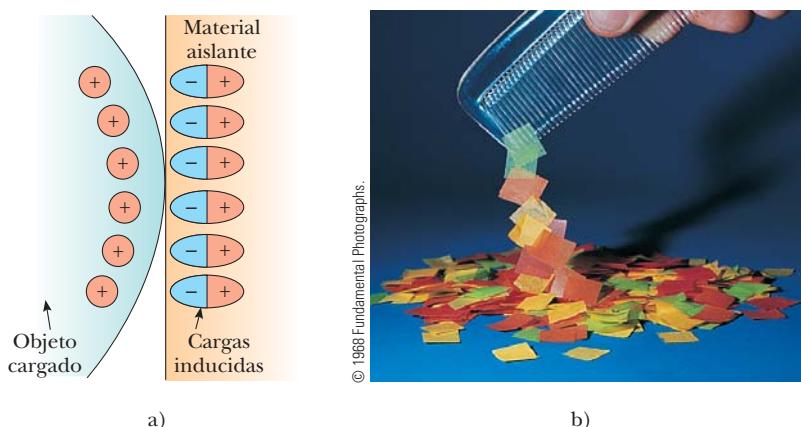



Figura 23.4 a) El objeto con carga de la izquierda induce una distribución de carga sobre la superficie de un material aislante debido a la realineación de las cargas en las moléculas. b) Un peine con carga atrae fragmentos de papel debido a que las cargas en las moléculas del papel se realinean.

carga positiva *inducida*, ya que tiene menos electrones de los que necesita para cancelar la carga positiva de los protones. Cuando la varilla de hule se aleja de la esfera (figura 23.3e), esta carga positiva inducida se queda en la esfera desconectada de la tierra. Observe que durante este proceso, la varilla de hule no pierde su carga negativa.

Para cargar un objeto por inducción no es necesario que tenga contacto con el objeto que induce la carga, a diferencia de cuando un objeto se carga por frotamiento (por *conducción*), en donde sí se requiere el contacto entre ambos objetos.

Un proceso similar a la inducción en los conductores se presenta en los materiales aislantes. En la mayoría de las moléculas neutras, el centro de la carga positiva coincide con el centro de la carga negativa. Sin embargo, en presencia de un objeto con carga, estos centros en el interior de cada molécula, en un material aislante, se desplazan ligeramente, lo que resulta en que un lado de la molécula tenga una carga más positiva que el otro. Este realineamiento de la carga en el interior de las moléculas produce una capa de carga sobre la superficie del material aislante, como observa en la figura 23.4a. Su conocimiento de inducción en los materiales aislantes, le ayuda a explicar por qué un peine que ha sido frotado contra el cabello, atrae fragmentos de papel eléctricamente neutros, como se muestra en la figura 23.4b.

Pregunta rápida 23.2 Se colocan tres objetos, muy cerca uno del otro **dos al mismo tiempo**. Cuando se juntan los objetos A y B, se atraen. Cuando se acercan los objetos B y C, se repelen. ¿Cuál de las siguientes opciones es necesariamente una verdad?: a) Los objetos A y C tienen cargas del mismo signo. b) Los objetos A y C tienen cargas de signo opuesto. c) Los tres objetos tienen cargas del mismo signo. d) Uno de los objetos es neutro. e) Es necesario llevar a cabo experimentos adicionales para determinar las cargas de los objetos.

23.3 Ley de Coulomb

Charles Coulomb (1736-1806) midió las magnitudes de las fuerzas eléctricas entre objetos con carga; para hacerlo usó la balanza de torsión, que él mismo inventó (figura 23.5). El principio de operación de la balanza de torsión es el mismo que el del aparato usado por Cavendish para medir la constante de la gravedad (véase la sección 13.1), con esferas eléctricamente neutras reemplazadas por esferas con carga. La fuerza eléctrica entre las esferas A y B de la figura 23.5 provoca que se atraigan o se repelan, y el movimiento resultante provoca que la fibra suspendida se tuerza. Gracias a que el momento de torsión de recuperación de la fibra torcida es proporcional al ángulo de rotación de la fibra, una lectura de este ángulo da una medida cuantitativa de la fuerza eléctrica de atracción o de repulsión. Una vez cargadas las esferas por frotación, la fuerza eléctrica entre ambas se vuelve muy grande en comparación con la atracción de la gravedad y, por lo tanto, esta última fuerza se puede ignorar.

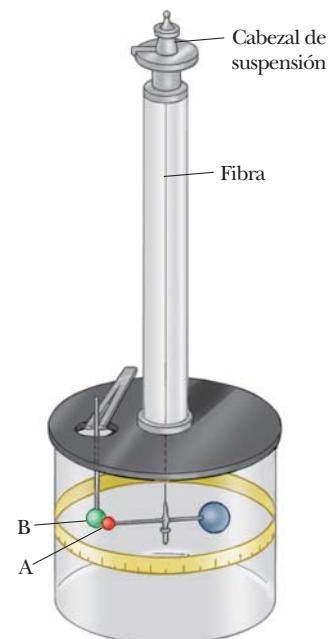



Figura 23.5 Balanza de torsión de Coulomb, utilizada para determinar la ley del cuadrado inverso para una fuerza eléctrica entre dos cargas.

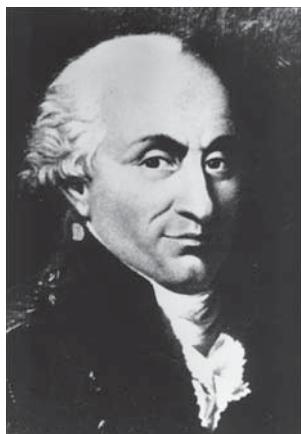
A partir de los experimentos de Coulomb, se generalizan las propiedades de la **fuerza eléctrica** entre dos partículas inmóviles con carga. Para ello se usa el término **carga puntual** que hace referencia a una partícula con carga de tamaño cero. El comportamiento eléctrico de electrones y protones queda muy bien descrito si se representan como cargas puntuales. Debido a observaciones experimentales es posible encontrar la magnitud de una fuerza eléctrica (a veces llamada *fuerza de Coulomb*) entre dos cargas puntuales establecidas por la **ley de Coulomb**:

Ley de Coulomb ▶

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \tag{23.1}$$

donde k_e es una constante conocida como **constante de Coulomb**. En sus experimentos, Coulomb demostró que el valor del exponente de r era 2, con una incertidumbre de unos cuantos puntos porcentuales. Experimentos recientes han comprobado que el exponente es 2, con una incertidumbre de unas cuantas partes en 10^{16}. Los experimentos también muestran que la fuerza eléctrica, como la fuerza de gravedad, es conservativa.

El valor de la constante de Coulomb depende de la elección de las unidades. La unidad de carga del SI es el **coulomb** (C). La constante de Coulomb k_e en unidades del SI tiene el valor

Constante de Coulomb ▶

$$k_e = 8.987\,6 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \tag{23.2}$$

Además esta constante se expresa como

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{23.3}$$

donde la constante ϵ_0 (griega minúscula épsilon) se conoce como la **permitividad del vacío**, cuyo valor es

$$\epsilon_0 = 8.854\,2 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \tag{23.4}$$

La unidad de carga más pequeña e conocida en la naturaleza,[2] es la carga de un electrón ($-e$) o de un protón ($+e$), con una magnitud de

$$e = 1.602\,18 \times 10^{-19} \text{C} \tag{23.5}$$

Por lo tanto, una carga igual a 1 C es aproximadamente igual a la carga de 6.24×10^{18} electrones o protones. Esta cantidad es muy pequeña en comparación con el número de electrones libres presentes en 1 cm^3 de cobre, que es del orden de 10^{23}. Aun así, 1 C es una cantidad de carga sustancial. En los experimentos en que se carga por frotación una varilla de hule o de vidrio, se obtiene una carga neta del orden de 10^{-6} C. En otras palabras, sólo una fracción muy pequeña de la carga total disponible se ha transferido entre la varilla y el material contra el que se frota.

Las cargas y masas del electrón, el protón y el neutrón aparecen en la tabla 23.1.

Cortesía de AIP Niels Bohr Library/E. Scott Bar Collection.

CHARLES COULOMB
Físico francés (1736-1806)
Las principales aportaciones a la ciencia de Charles Coulomb fueron en los campos de la electrostática y del magnetismo. En el transcurso de su vida, también investigó la resistencia de los materiales y determinó las fuerzas que afectan a objetos sobre vigas; así contribuyó al campo de la mecánica estructural. En el campo de la ergonomía, sus investigaciones lograron un discernimiento básico sobre las condiciones en que las personas y los animales pueden trabajar mejor.

TABLA 23.1

Carga y masa de electrones, protones y neutrones

Partícula	Carga (C)	Masa (kg)
Electrón (e)	$-1.602\,176\,5 \times 10^{-19}$	$9.109\,4 \times 10^{-31}$
Protón (p)	$+1.602\,176\,5 \times 10^{-19}$	$1.672\,62 \times 10^{-27}$
Neutrón (n)	0	$1.674\,93 \times 10^{-27}$

[2] En una partícula libre no ha sido posible detectar ninguna unidad de carga menor que e; sin embargo, las teorías actuales proponen la existencia de partículas de nombre *quarks* con cargas iguales a $-e/3$ y $2e/3$. Aunque existen muchas evidencias experimentales de estas partículas en el interior de materia nuclear, jamás se han detectado quarks *libres*. En el capítulo 46 se explican otras propiedades de los quarks.

EJEMPLO 23.1 El átomo de hidrógeno

El electrón y el protón de un átomo de hidrógeno están separados (en promedio) por una distancia de aproximadamente 5.3×10^{11} m. Encuentre las magnitudes de la fuerza eléctrica y la fuerza gravitacional entre las dos partículas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere que las dos partículas están separadas por la pequeña distancia dada en el enunciado del problema. En el capítulo 13 encontró que la fuerza gravitacional entre objetos pequeños es débil, por lo que es de esperar que la fuerza gravitacional entre el electrón y el protón sea significativamente menor que la fuerza eléctrica.

Categorizar Las fuerzas eléctrica y gravitacional se evaluarán a partir de leyes de fuerza universales, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ley de Coulomb para encontrar la magnitud de la fuerza eléctrica:

$$F_e = k_e \frac{|e||-e|}{r^2} = (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= \boxed{8.2 \times 10^{-8} \text{ N}}$$

Use la ley de gravitación universal de Newton y la tabla 23.1 (para las masas de las partículas) y encuentre la magnitud de la fuerza gravitacional:

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2}$$

$$= (6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= \boxed{3.6 \times 10^{-47} \text{ N}}$$

La relación $F_e/F_g \approx 2 \times 10^{39}$. Por lo tanto, la fuerza gravitacional entre partículas atómicas con carga es despreciable cuando se compara con la fuerza eléctrica. Observe las similtudes entre la ley de Newton de gravitación universal y la ley de Coulomb de fuerzas eléctricas. Aparte de la magnitud, ¿cuál es la diferencia fundamental entre las dos fuerzas?

Cuando se relaciona con la ley de Coulomb, es necesario recordar que la fuerza es una cantidad vectorial que deberá ser tratada como corresponde. La ley de Coulomb, expresada en forma vectorial para una fuerza eléctrica ejercida por una carga q_1 sobre una segunda carga q_2, rescrita como $\vec{\mathbf{F}}_{12}$, es

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad \textbf{(23.6)}$$

◀ Forma vectorial de la ley de Coulomb

donde $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ es un vector unitario dirigido de q_1 hacia q_2, como se puede observar en la figura 23.7a (en la página siguiente) ya que la fuerza eléctrica obedece a la tercera ley de Newton, la fuerza eléctrica ejercida por q_2 sobre q_1 es igual en magnitud pero en sentido opuesto a

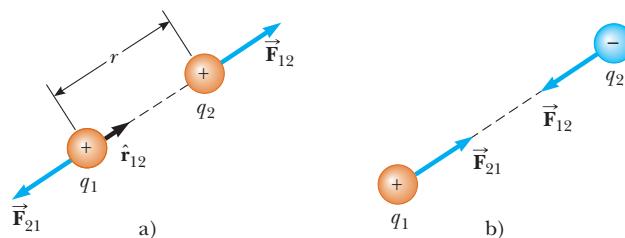



Figura 23.6

Dos cargas puntuales separadas por una distancia r ejercen una fuerza mutua que está determinada por la ley de Coulomb. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ ejercida por q_2 sobre q_1 es igual en magnitud pero en sentido opuesto a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ ejercida por q_1 sobre q_2. a) Cuando las cargas tienen el mismo signo, la fuerza es de repulsión. b) Cuando las cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción.

la fuerza ejercida por q_1 sobre q_2; es decir, $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$. Por último, en la ecuación 23.6, es claro que si q_1 y q_2 son del mismo signo, como se observa en la figura 23.6b, el producto q_1q_2 es positivo. Si q_1 y q_2 son de signos opuestos, como se muestra en la figura 23.7b, el producto q_1q_2 es negativo. Estos signos indican la dirección *relativa* de la fuerza, pero no la dirección *absoluta*. Un producto negativo indica que se trata de una fuerza de atracción, por lo que cada una de las cargas experimenta una fuerza hacia la otra. Un producto positivo indica que se trata de una fuerza de repulsión tal que cada carga experimenta una fuerza que la separa de la otra. La dirección *absoluta* de la fuerza sobre una carga depende de la posición de la otra carga. Por ejemplo, si el eje de las x está a lo largo de las dos cargas en la figura 23.6a, el producto q_1q_2 será positivo, pero $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ apunta en la dirección de $+x$ y $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ en la dirección de $-x$.

Cuando hay más de dos cargas presentes, la fuerza que se ejerce entre cualquier par de cargas está dada por la ecuación 23.6. Debido a eso, la fuerza resultante de cualquiera de ellas es igual a la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por las otras cargas individuales. Por ejemplo, si están presentes cuatro cargas, la fuerza resultante ejercida por las partículas 2, 3 y 4 sobre la partícula 1 es de

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_{31} + \vec{\mathbf{F}}_{41}$$

Pregunta rápida 23.3 El objeto A tiene una carga igual a $+2\ \mu$C y el objeto B una carga de $+16\ \mu$C. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a las fuerzas eléctricas ejercidas sobre los objetos? a) $\vec{\mathbf{F}}_{AB} = -3\vec{\mathbf{F}}_{BA}$, b) $\vec{\mathbf{F}}_{AB} = -\vec{\mathbf{F}}_{BA}$, c) $3\vec{\mathbf{F}}_{AB} = -\vec{\mathbf{F}}_{BA}$, d) $\vec{\mathbf{F}}_{AB} = 3\vec{\mathbf{F}}_{BA}$, e) $\vec{\mathbf{F}}_{AB} = \vec{\mathbf{F}}_{BA}$, f) $3\vec{\mathbf{F}}_{AB} = \vec{\mathbf{F}}_{BA}$.

EJEMPLO 23.2 Encuentre la fuerza resultante

Considere tres cargas puntuales ubicadas en las esquinas de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 23.7, donde $q_1 = q_3 = 5.0\ \mu$C, $q_2 = -2.0\ \mu$C y $a = 0.10$ m. Encuentre la fuerza resultante que se ejerce sobre q_3.

Figura 23.7 (Ejemplo 23.2) La fuerza que ejerce q_1 sobre q_2 es $\vec{\mathbf{F}}_{13}$. La fuerza que ejerce q_2 sobre q_3 es $\vec{\mathbf{F}}_{23}$. La fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}_3$ que se ejerce sobre q_3 es la suma vectorial $\vec{\mathbf{F}}_{13} + \vec{\mathbf{F}}_{23}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en la fuerza neta sobre q_3. Ya que la carga q_3 está cerca de otras dos cargas, experimentará dos fuerzas eléctricas.

Categorizar Ya que sobre la carga q_3 se ejercen dos fuerzas, este ejemplo se clasifica como un problema de suma vectorial.

Analizar Las direcciones de las fuerzas individuales ejercidas por q_1 y q_2 sobre q_3 se muestran en la figura 23.7. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{23}$ que q_2 ejerce sobre q_3 es de atracción porque q_2 y q_3 tienen signos opuestos. En el sistema coordenado que se muestra en la figura 23.7, la fuerza de atracción $\vec{\mathbf{F}}_{23}$ es hacia la izquierda (en la dirección x negativa).

La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{13}$ que q_1 ejerce sobre q_3 es de repulsión porque ambas cargas son positivas. La fuerza de repulsión $\vec{\mathbf{F}}_{13}$ forma un ángulo de 45° con el eje x.

Use la ecuación 23.1 para encontrar la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_{23}$:

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{a^2}$$

$$= (8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(2.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(5.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.10\ \text{m})^2} = 9.0\ \text{N}$$

Encuentre la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{13}$:

$$F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(\sqrt{2}a)^2}$$

$$= (8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\ \frac{(5.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(5.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{2(0.10\ \text{m})^2} = 11\ \text{N}$$

Encuentre las componentes x y y de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{13}$:

$$F_{13x} = F_{13} \cos 45° = 7.9 \text{ N}$$
$$F_{13y} = F_{13} \text{ sen } 45° = 7.9 \text{ N}$$

Hallar las componentes de la fuerza resultante que actúa sobre q_3:

$$F_{3x} = F_{13x} + F_{23x} = 7.9 \text{ N} + (-9.0 \text{ N}) = -1.1 \text{ N}$$
$$F_{3y} = F_{13y} + F_{23y} = 7.9 \text{ N} + 0 = 7.9 \text{ N}$$

Exprese la fuerza resultante que actúa sobre q_3 en forma de vectores unitarios:

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = (-1.1\hat{\mathbf{i}} + 7.9\hat{\mathbf{j}}) \text{ N}$$

Finalizar La fuerza neta sobre q_3 es hacia arriba y a la izquierda en la figura 23.7. Si q_3 se mueve en respuesta a la fuerza neta, cambian las distancias entre q_3 y las otras cargas, de modo que la fuerza neta cambia. En consecuencia, q_3 se puede modelar como una partícula bajo una fuerza neta en tanto se reconozca que la fuerza que se ejerce sobre q_3 *no* es constante.

¿Que pasaría si? ¿Y si los signos de las tres cargas cambiaran a los signos opuestos? ¿Cómo afectaría al resultado para $\vec{\mathbf{F}}_3$?

Respuesta La carga q_3 todavía sería atraída hacia q_2 y repelida de q_1, con fuerzas de la misma magnitud. En consecuencia, el resultado final para $\vec{\mathbf{F}}_3$ sería el mismo.

EJEMPLO 23.3 ¿Dónde es cero la fuerza neta?

Tres cargas puntuales se encuentran a lo largo del eje x, como se muestra en la figura 23.8. La carga positiva $q_1 = 15.0\ \mu$C está en $x = 2.00$ m, la carga positiva $q_2 = 6.00\ \mu$C está en el origen y la fuerza neta que actúa sobre q_3 es cero. ¿Cuál es la coordenada x de q_3?

Figura 23.8 (Ejemplo 23.3) Tres cargas puntuales se colocan a lo largo del eje x. Si la fuerza resultante que actúa sobre q_3 es cero, la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{13}$ que ejerce q_1 sobre q_3 debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{23}$ que q_2 ejerce sobre q_3.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que q_3 está cerca de otras dos cargas, experimenta dos fuerzas eléctricas. Sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior, en este problema las fuerzas se encuentran a lo largo de la misma línea, como se indica en la figura 23.8. Como q_3 es negativa, mientras que q_1 y q_2 son positivas, las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_{13}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{23}$ son de atracción.

Categorizar Ya que la fuerza neta sobre q_3 es cero, la carga puntual se modela como una partícula en equilibrio.

Analizar Escriba una expresión para la fuerza neta sobre la carga q_3 cuando está en equilibrio:

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = \vec{\mathbf{F}}_{23} + \vec{\mathbf{F}}_{13} = -k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2}\hat{\mathbf{i}} + k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2}\hat{\mathbf{i}} = 0$$

Mueva el segundo término a la derecha de la ecuación e iguale los coeficientes del vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$:

$$k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2}$$

Elimine k_e y $|q_3|$ y reordene la ecuación:

$$(2.00 - x)^2|q_2| = x^2|q_1|$$
$$(4.00 - 4.00x + x^2)(6.00 \times 10^{-6} \text{ C}) = x^2(15.0 \times 10^{-6} \text{ C})$$

Reduzca la ecuación cuadrática a una forma más simple:

$$3.00x^2 + 8.00x - 8.00 = 0$$

Resuelva la ecuación cuadrática para la raíz positiva:

$$x = 0.775 \text{ m}$$

Finalizar La segunda raíz de la ecuación cuadrática es $x = -3.44$ m, otra posición donde las *magnitudes* de las fuerzas sobre q_3 son iguales, aunque dichas fuerzas están en la misma dirección.

¿Que pasaría si? Suponga que q_3 se restringe a moverse sólo a lo largo del eje x. Desde su posición inicial en $x = 0.775$ m, se jala una pequeña distancia a lo largo del eje x. Cuando se libera, ¿regresa al equilibrio o se jala aún más desde el equilibrio? Es decir, ¿el equilibrio es estable o inestable?

Respuesta Si q_3 se mueve hacia la derecha, $\vec{\mathbf{F}}_{13}$ se vuelve mayor y $\vec{\mathbf{F}}_{23}$ menor. El resultado es una fuerza neta hacia la derecha, en la misma dirección que el desplazamiento. Por lo tanto, la carga q_3 continuaría moviéndose hacia la derecha y el equilibrio es *inestable*. (Véase la sección 7.9 para un repaso de los equilibrios estable e inestable.)

Si q_3 se restringe a permanecer en una coordenada *x fija* pero se le permite moverse arriba y abajo en la figura 23.8, el equilibrio es estable. En este caso, si la carga se jala hacia arriba (o hacia abajo) y se libera, se mueve de regreso hacia la posición de equilibrio y oscila en torno a este punto.

EJEMPLO 23.4 Encuentre la carga sobre las esferas

Dos pequeñas esferas idénticas cargadas, cada una con una masa de 3.0×10^{-2} kg, cuelgan en equilibrio como se muestra en la figura 23.9a. La longitud de cada cuerda es 0.15 m y el ángulo θ es 5.0°. Encuentre la magnitud de la carga sobre cada esfera.

Figura 23.9 (Ejemplo 23.4) a) Dos esferas idénticas, cada una con la misma carga q, suspendidas en equilibrio. b) Diagrama de cuerpo libre para la esfera a la izquierda del inciso a).

SOLUCIÓN

Coneptualizar La figura 23.9a ayuda a formar ideas de este ejemplo. Las dos esferas ejercen fuerzas de repulsión una sobre la otra. Si se mantienen cerca y se liberan, se mueven hacia afuera desde el centro y se establecen en la configuración de la figura 23.9a después de que las oscilaciones desaparecen debido a la resistencia del aire.

Categorizar La frase clave "en equilibrio" ayuda a modelar cada esfera como una partícula en equilibrio. Este ejemplo es similar a los problemas de partícula en equilibrio del capítulo 5, con la característica agregada de que una de las fuerzas sobre una esfera es una fuerza eléctrica.

Analizar En la figura 23.9b se muestra el diagrama de cuerpo libre para la esfera de la izquierda. La esfera está en equilibrio bajo la aplicación de las fuerzas $\vec{\mathbf{T}}$ de la cuerda, la fuerza eléctrica $\vec{\mathbf{F}}_e$ de la otra esfera y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$.

Escriba la segunda ley de Newton para la esfera de la izquierda en forma de componentes:

$$1)\quad \sum F_x = T\,\text{sen}\,\theta - F_e = 0 \quad\rightarrow\quad T\,\text{sen}\,\theta = F_e$$

$$2)\quad \sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \quad\rightarrow\quad T\cos\theta = mg$$

Divida la ecuación 1) entre la ecuación 2) para encontrar F_e:

$$\tan\theta = \frac{F_e}{mg} \quad\rightarrow\quad F_e = mg\tan\theta$$

Evalúe numéricamente la fuerza eléctrica:

$$F_e = (3.0 \times 10^{-2}\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)\tan(5.0°) = 2.6 \times 10^{-2}\ \text{N}$$

Use la geometría del triángulo rectángulo en la figura 23.9a para encontrar la correspondencia entre a, L y θ:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{a}{L} \quad\rightarrow\quad a = L\,\text{sen}\,\theta$$

Evalúe a:

$$a = (0.15\ \text{m})\ \text{sen}\,(5.0°) = 0.013\ \text{m}$$

Resuelva la ley de Coulomb (ecuación 23.1) para la carga $|q|$ en cada esfera:

$$F_e = k_e\frac{|q|^2}{r^2} \quad\rightarrow\quad |q| = \sqrt{\frac{F_e r^2}{k_e}} = \sqrt{\frac{F_e(2a)^2}{k_e}}$$

Sustituya valores numéricos: $$|q| = \sqrt{\frac{(2.6 \times 10^{-2}\ \text{N})[2(0.013\ \text{m})]^2}{8.99 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}} = 4.4 \times 10^{-8}\ \text{C}$$

Finalizar No es posible determinar el signo de la carga a partir de la información que se proporciona. De hecho, el signo de la carga no es importante. La situación es la misma ya sea que ambas esferas tengan carga positiva o carga negativa.

¿Que pasaría si? Suponga que su compañera de cuarto le propone resolver este problema sin la suposición de que las cargas son de igual magnitud. Ella afirma que la simetría del problema se destruye si las cargas no son iguales, de modo que las cuerdas formarían dos ángulos diferentes con la vertical y el problema sería mucho más complicado. ¿Cómo respondería?

Respuesta La simetría no se destruye y los ángulos no son diferentes. La tercera ley de Newton requiere que las magnitudes de las fuerzas eléctricas sobre las dos cargas sean iguales, sin importar la igualdad o desigualdad de las cargas. La solución al ejemplo aún es la misma: el valor de $|q|^2$ en la solución se sustituye por $|q_1 q_2|$ en la nueva situación, donde q_1 y q_2 son los valores de las cargas en las dos esferas. La simetría del problema se destruiría si las *masas* de la esferas no fueran iguales. En este caso, las cuerdas formarían diferentes ángulos con la vertical y el problema sería más complicado.

23.4 El campo eléctrico

Esta fotografía dramática captura la caída de un rayo sobre un árbol cerca de algunas casas en una zona rural. Los relámpagos están asociados con campos eléctricos muy intensos que se generan en la atmósfera.

Hasta ahora se ha hablado de dos fuerzas de campo: la fuerza gravitacional en el capítulo 13 y la fuerza eléctrica en el presente capítulo. Como se dijo antes, las fuerzas de campo actúan a través del espacio y producen algún efecto, aun cuando no exista contacto físico entre los objetos que interactúan. El campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ como un punto en el espacio debido a una fuente particular fue definido en la sección 13.4, como igual a la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ que actúa sobre una partícula de prueba de masa m dividida entre esa masa: $\vec{\mathbf{g}} \equiv \vec{\mathbf{F}}_g/m$. El concepto de campo fue desarrollado por Michael Faraday (1791-1867) en relación con las fuerzas eléctricas, y es de un valor tan práctico que en los siguientes capítulos recibe mucha atención. En este planteamiento, existe un **campo eléctrico** en la región del espacio que rodea a un objeto con carga: la **carga fuente**. Cuando otro objeto con carga **—la carga de prueba—** entra en este campo eléctrico, una fuerza eléctrica actúa sobre él. Para ejemplificar, observe la figura 23.10, que muestra una pequeña carga de prueba positiva q_0 colocada cerca de un segundo objeto con una carga positiva Q mucho mayor. El campo eléctrico provocado por la carga fuente en la carga de prueba se defince como la fuerza eléctrica sobre la carga de prueba *por carga unitaria*, o, para mayor claridad, **el vector $\vec{\mathbf{E}}$ del campo eléctrico** en un punto en el espacio se define como la fuerza eléctrica $\vec{\mathbf{F}}_e$, que actúa sobre una carga de prueba positiva q_0 colocada en ese punto, dividida entre la carga de prueba:[3]

◀ Definición de campo eléctrico

$$\vec{\mathbf{E}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_e}{q_0} \qquad \textbf{(23.7)}$$

El vector $\vec{\mathbf{E}}$ está en unidades del SI, newtons por cada coulomb (N/C). Observe que $\vec{\mathbf{E}}$ es el campo producido por una carga o distribución de carga *separada de* la carga de prueba; no es el campo producido por la propia carga de prueba, además observe que la existencia de un campo eléctrico es una propiedad de su fuente; la presencia de una carga de prueba no es necesaria para que el campo exista. La carga de prueba sirve como *detector* del campo eléctrico.

La dirección de $\vec{\mathbf{E}}$, como se muestra en la figura 23.10, es la dirección de la fuerza que experimenta una carga de prueba positiva cuando es colocada en el campo; **existe un campo eléctrico en un punto si una carga de prueba en dicho punto experimenta una fuerza eléctrica.**

Figura 23.10 Una pequeña carga de prueba positiva q_0 colocada en el punto P cerca de un objeto con una carga positiva Q mucho mayor experimenta un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en el punto P establecido por la carga fuente Q.

[3]Cuando use la ecuación 23.7, debe suponer que la carga de prueba q_0 es lo suficientemente pequeña como para no perturbar la distribución de cargas responsable por el campo eléctrico. Si la carga de prueba es suficientemente grande, la carga sobre la esfera metálica se redistribuye y el campo eléctrico que establece es diferente del campo que se establece en presencia de la carga de prueba mucho menor.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 23.1
Sólo partículas

La ecuación 23.8 sólo es válida para una *partícula* de carga q, es decir para un objeto de tamaño cero. Para un *objeto* de tamaño finito en un campo eléctrico, el campo puede variar en magnitud y dirección de acuerdo con el tamaño del objeto, por lo que la ecuación de fuerza correspondiente puede ser más complicada.

La ecuación 23.7 puede expresarse también como

$$\vec{\mathbf{F}}_e = q\vec{\mathbf{E}} \tag{23.8}$$

Esta ecuación proporciona la fuerza ejercida sobre una partícula con carga q colocada en un campo eléctrico. Si q es positiva, la fuerza tiene la misma dirección que el campo. Si es negativa, la fuerza y el campo tienen direcciones opuestas. Observe la similitud entre la ecuación 23.8 y la ecuación correspondiente a una partícula con masa colocada en un campo gravitacional, $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ (sección 5.5).Una vez que conoce la magnitud y la dirección del campo eléctrico en un punto determinado, puede calcular la fuerza eléctrica ejercida sobre *cualquier* partícula con carga ubicada en ese punto mediante la ecuación 23.8.

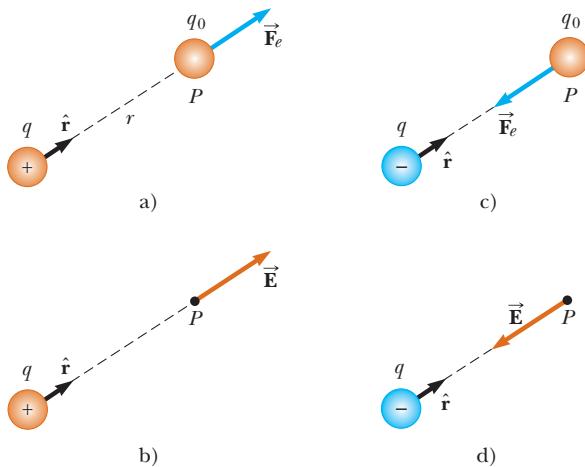
Para determinar la dirección que tiene un campo eléctrico, considere una carga puntual q como carga fuente. Esta carga produce un campo eléctrico en todos los puntos del espacio que la rodea. En el punto P, a una distancia r de la carga fuente, se coloca una carga de prueba q_0, tal como se observa en la figura 23.11a. Imagine el uso de la carga de prueba para determinar la dirección de la fuerza eléctrica y, por lo tanto, la dirección del campo eléctrico. De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza ejercida por q sobre la carga de prueba es

$$\vec{\mathbf{F}}_e = k_e \frac{qq_0}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

dónde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario con dirección de q hacia q_0. En la figura 23.11a esta fuerza se aleja de la carga fuente q. Ya que el campo eléctrico en P, que es la posición de la carga de prueba, queda definido por $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}_e/q_0$, el campo eléctrico en P establecido por q es

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{23.9}$$

Si la carga fuente q es positiva, la figura 23.11b muestra la situación al eliminar la carga de prueba: la carga fuente establece un campo eléctrico en el punto P, alejándose de q. Si q es negativa, como en el caso de la figura 23.11c, la fuerza sobre la carga de prueba está dirigida hacia la carga fuente, por lo que el campo eléctrico en P está dirigido hacia la carga fuente, como en la figura 23.11d.

Para calcular el campo eléctrico en un punto P debido a un grupo de cargas puntuales, primero determine los vectores del campo eléctrico en P, uno por uno; use la ecuación 23.9 y en seguida súmelos en forma vectorial. En otras palabras, en cualquier punto P, el campo eléctrico total debido a un grupo de cargas fuente es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos de todas las cargas. Este principio de sobreposición aplicado a los campos se deduce de la suma vectorial de las fuerzas eléctricas. Por lo tanto, el campo eléctrico en el punto P debido a un grupo de cargas fuente se expresa como la suma vectorial

Campo eléctrico debido a un número finito de cargas puntuales ▶

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i \tag{23.10}$$

Figura 23.11

Una carga de prueba q_0 en el punto P está a una distancia r de la carga puntual q. a) Si q es positiva, la fuerza en la carga de prueba se aleja de q. b) Para una carga fuente positiva, el campo eléctrico en P apunta radialmente hacia afuera de q. c) Si q es negativa, la fuerza en la carga de prueba se dirige hacia q. d) Para una carga fuente negativa, el campo eléctrico en P apunta radialmente hacia adentro en dirección a q.

donde r_i es la distancia desde la *i*-ésima carga fuente q_i hasta el punto P y $\hat{\mathbf{r}}_i$ es un vector unitario dirigido de q_i hacia P.

En el ejemplo 23.5 se explora el campo eléctrico debido a dos cargas a partir del principio de sobreposición. El inciso (B) del ejemplo se concentra en un **dipolo eléctrico**, que se define como una carga positiva q y una carga negativa $-q$ separadas por una distancia $2a$. El dipolo eléctrico es un buen modelo de muchas moléculas, como el ácido clorhídrico (HCl). Los átomos y moléculas neutros se comportan como dipolos cuando se colocan en un campo eléctrico externo. Además, muchas moléculas, como HCl, son dipolos permanentes. En el capítulo 26 se explica el efecto de tales dipolos sobre el comportamiento de los materiales sujetos a campos eléctricos.

Pregunta rápida 23.4 Una carga de prueba de valor $+3\ \mu$C está en un punto P donde un campo eléctrico externo es dirigido hacia la derecha con una magnitud de 4×10^6 N/C. Si la carga de prueba se reemplaza con otra de magnitud $-3\ \mu$C, ¿qué le sucede al campo eléctrico externo en P? a) no se ve afectado, b) invierte su dirección, c) cambia de un modo que no puede ser determinado.

EJEMPLO 23.5 Campo eléctrico debido a dos cargas

Las cargas q_1 y q_2 se ubican en el eje x, a distancias a y b, respectivamente, del origen, como se muestra en la figura 23.12.

A) Encuentre las componentes del campo eléctrico neto en el punto P, que está sobre el eje y.

Figura 23.12 (Ejemplo 23.5) el campo eléctrico totalen P es igual a la suma vectorial $\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2$, donde $\vec{\mathbf{E}}_1$ es el campo debido a la carga positiva q_1 y $\vec{\mathbf{E}}_2$ es el campo debido a la carga negativa q_2.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Compare este ejemplo con el ejemplo 23.2. Ahí, sumó los vectores fuerza para encontrar la fuerza neta sobre una partícula con carga. En este caso, sume los vectores de campo eléctrico para encontrar el campo eléctrico neto en un punto en el espacio.

Categorizar En dos cargas fuente se busca el campo eléctrico resultante, de modo que se puede clasificar este ejemplo como uno en el que se puede usar el principio de sobreposición representado por la ecuación 23.10.

Analizar Encuentre la magnitud del campo eléctrico en P debido a la carga q_1:

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{r_1^2} = k_e \frac{|q_1|}{(a^2 + y^2)}$$

Encuentre la magnitud del campo eléctrico en P debido a la carga q_2:

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} = k_e \frac{|q_2|}{(b^2 + y^2)}$$

Escriba los vectores de campo eléctrico para cada carga en forma de vector unitario:

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = k_e \frac{|q_1|}{(a^2 + y^2)} \cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + k_e \frac{|q_1|}{(a^2 + y^2)} \operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = k_e \frac{|q_2|}{(b^2 + y^2)} \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - k_e \frac{|q_2|}{(b^2 + y^2)} \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$

Escriba las componentes del vector de campo eléctrico neto:

$$1)\quad E_x = E_{1x} + E_{2x} = k_e \frac{|q_1|}{(a^2 + y^2)} \cos\phi + k_e \frac{|q_2|}{(b^2 + y^2)} \cos\theta$$

$$2)\quad E_y = E_{1y} + E_{2y} = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \operatorname{sen}\phi - k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \operatorname{sen}\theta$$

B) Evalúe el campo eléctrico en el punto P en el caso especial de que $|q_1| = |q_2|$ y $a = b$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 23.13 muestra la situación en este caso especial. Observe la simetría en la situación y que la distribución de carga ahora es un dipolo eléctrico.

Categorizar Ya que la figura 23.13 es un caso especial del caso general que se muestra en la figura 23.12, este ejemplo se clasifica como uno en el que se puede tomar el resultado del inciso A) y sustituir los valores apropiados de las variables.

Figura 23.13 (Ejemplo 23.5) Cuando las cargas en la figura 23.12 son de igual magnitud y equidistantes del origen, la situación se vuelve simétrica, como se muestra en este caso.

Analizar En función de la simetría de la figura 23.13, evalúe las ecuaciones 1) y 2) del inciso A) con $a = b$, $|q_1| = |q_2| = q$, y $\phi = \theta$:

$$3) \quad E_x = k_e \frac{q}{(a^2 + y^2)} \cos\theta + k_e \frac{q}{(a^2 + y^2)} \cos\theta = 2k_e \frac{q}{(a^2 + y^2)} \cos\theta$$

$$E_y = k_e \frac{q}{(a^2 + y^2)} \operatorname{sen}\theta - k_e \frac{q}{(a^2 + y^2)} \operatorname{sen}\theta = 0$$

De la geometría en la figura 23.13, evalúe $\cos\theta$:

$$4) \quad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}}$$

Sustituya la ecuación 4) en la ecuación 3):

$$E_x = 2k_e \frac{q}{(a^2 + y^2)} \frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}} = k_e \frac{2qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

C) Encuentre el campo eléctrico debido al dipolo eléctrico cuando el punto P está a una distancia $y \gg a$ desde el origen.

SOLUCIÓN

En la solución al inciso B), porque $y \gg a$, ignore a^2 en comparación con y^2 y escriba la expresión para E en este caso:

$$5) \quad E \approx k_e \frac{2qa}{y^3}$$

Finalizar De la ecuación 5) se ve que, en los puntos alejados de un dipolo, pero a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une las dos cargas, la magnitud del campo eléctrico producido por el dipolo varía como $1/r^3$, mientras que el campo que varía más lentamente de una carga puntual lo hace como $1/r^2$ (ecuación 23.9). Esto es porque en puntos distantes los campos de las dos cargas de igual magnitud y signo opuesto casi se cancelan mutuamente. La variación $1/r^3$ en E para el dipolo también se obtiene para un punto distante a lo largo del eje x (véase el problema 18) y para cualquier punto distante en general.

23.5 Campo eléctrico de una distribución de carga continua

Con mucha frecuencia, en un grupo de cargas, la distancia existente entre ellas es mucho más reducida que la distancia entre el grupo y el punto donde se desea calcular el campo eléctrico. En esta situación, el sistema de cargas se modela como si fuera

continuo. Es decir, el sistema de cargas espaciadas en forma compacta es equivalente a una carga total que es distribuida de forma continua a lo largo de alguna línea, sobre alguna superficie, o por todo el volumen.

Para establecer el proceso de evaluación del campo eléctrico producido por una distribución de carga continua, utilice el siguiente procedimiento: primero, divida la distribución de cargas en pequeños elementos, cada uno con una pequeña carga Δq, como se observa en la figura 23.14. Después, aplique la ecuación 23.9 para calcular el campo eléctrico debido a uno de estos elementos en el punto P. Por último, evalúe el campo eléctrico total en P debido a la distribución de carga al sumar las contribuciones de todos los elementos de carga (es decir, aplicando el principio de sobreposición).

Figura 23.14 El campo eléctrico en P debido a una distribución continua de carga es el vector suma de los campos $\Delta\vec{\mathbf{E}}$ debidos a todos los elementos Δq de la distribución de carga.

El campo eléctrico en P debido a un elemento de carga con una carga Δq es

$$\Delta\vec{\mathbf{E}} = k_e \frac{\Delta q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

donde r es la distancia desde el elemento de carga hasta el punto P y $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario dirigido desde el elemento de carga hasta P. El campo eléctrico total en P debido a todos los elementos en la distribución de carga es aproximadamente

$$\vec{\mathbf{E}} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$

donde el índice i se refiere al i-ésimo elemento de orden i en la distribución. Ya que la distribución de carga ha sido modelada como continua, el campo total en P en el límite $\Delta q_i \to 0$ es

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \textbf{(23.11)}$$

◀ Campo eléctrico debido a una distribución de carga continua

donde la integración es sobre toda la distribución de carga. La integración en la ecuación 23.11 es una operación vectorial y debe ser tratada en forma apropiada.

Este tipo de cálculo se ilustra con varios ejemplos en los que la carga está distribuida a lo largo de una línea, sobre una superficie, o en todo un volumen. Cuando realice estos cálculos es conveniente que use el concepto de *densidad de carga* junto con las siguientes observaciones:

- Si una carga Q tiene una distribución uniforme en un volumen V, la **densidad de carga volumétrica** ρ se define como

$$\rho \equiv \frac{Q}{V}$$

◀ Densidad de carga volumétrica

donde ρ está en coulombs por metro cúbico (C/m^3).

- Si una carga Q tiene una distribución uniforme sobre una superficie de área A, la **densidad de carga superficial** σ (griega minúscula sigma) se define como

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A}$$

◀ Densidad de carga superficial

donde σ está en coulombs por metro cuadrado (C/m^2).

- Si una carga Q tiene una distribución uniforme a lo largo de una línea de longitud ℓ, la **densidad de carga lineal** λ se define como

$$\lambda \equiv \frac{Q}{\ell}$$

◀ Densidad de carga lineal

donde λ está en coulombs por metro (C/m).

- Si la carga no tiene distribución uniforme en un volumen, superficie o línea, las cantidades de cargas dq en un elemento pequeño de volumen, superficie o longitud son

$$dq = \rho\ dV \qquad dq = \sigma\, dA \qquad dq = \lambda\, d\ell$$

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS — Cálculo del campo eléctrico

Se le recomienda el procedimiento siguiente para resolver problemas que incluyen la determinación de un campo eléctrico debido a cargas individuales o una distribución de carga:

1. *Conceptualizar.* Establezca una representación mental del problema: piense cuidadosamente en las cargas individuales o en la distribución de carga e imagine qué tipo de campo eléctrico produciría. Recurra a cualquier simetría en el arreglo de cargas para ayudarse a visualizar el campo eléctrico.

2. *Categorizar.* ¿Analiza un grupo de cargas individuales o una distribución de carga continua? La respuesta a esta pregunta le dice cómo proceder en la etapa Analizar.

3. *Analizar.*

a) *Si analiza un grupo de cargas individuales* use el principio de sobreposición: cuando están presentes muchas cargas puntuales, el campo resultante en un punto en el espacio es la *suma vectorial* de los campos individuales debidos a las cargas individuales (ecuación 23.10). Tenga mucho cuidado con la manipulación de las cantidades vectoriales. Puede serle útil revisar la suma vectorial en el capítulo 3. El ejemplo 23.5 demuestra este procedimiento.

b) *Si analiza una distribución de carga continua* sustituya las sumas vectoriales para evaluar el campo eléctrico total de las cargas individuales mediante integrales vectoriales. La distribución de carga se divide en piezas infinitesimales, y la suma vectorial se realiza al integrar sobre toda la distribución de carga (ecuación 23.11). Los ejemplos del 23.6 al 23.8 demuestran tales procedimientos.

Considere que hay simetría cuando trate con una distribución de cargas puntuales o con una distribución de carga continua. Saque ventaja de cualquier simetría en el sistema que observe la etapa Conceptualizar para simplificar sus cálculos. La cancelación de las componentes de campo perpendiculares al eje en el ejemplo 23.7 es un ejemplo de la aplicación de simetría.

4. *Finalizar.* Compruebe para ver si su expresión de campo eléctrico es consistente con su representación mental y si refleja alguna simetría que notara anteriormente. Imagine parámetros variables como la distancia del punto de observación desde las cargas o el radio de cualquier objeto circular para ver si el resultado matemático cambia en una forma razonable.

EJEMPLO 23.6 Campo eléctrico debido a una barra con carga

Una barra de longitud ℓ tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud λ y una carga total Q. Calcule el campo eléctrico en un punto P que se ubica a lo largo del eje largo de la barra y a una distancia a desde un extremo (figura 23.15).

Figura 23.15 (Ejemplo 23.6) El campo eléctrico en P debido a una barra con carga uniforme yace a lo largo del eje x. La magnitud del campo en P debido al segmento de carga dq es $k_e\, dq/x^2$. El campo total en P es la suma vectorial sobre todos los segmentos de la barra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El campo $d\vec{\mathbf{E}}$ en P debido a cada segmento de carga sobre la barra está en la dirección x negativa, porque cada segmento porta una carga positiva.

Categorizar Ya que la barra es continua, se evalúa el campo debido a una distribución de carga continua en lugar de a un grupo de cargas individuales. Ya que cada segmento de la barra produce un campo eléctrico en la dirección x negativa, la suma de sus aportaciones se puede manejar sin la necesidad de sumar vectores.

Analizar Suponga que la barra se encuentra a lo largo del eje x, dx es la longitud de un segmento pequeño y dq es la carga sobre dicho segmento. Como la barra tiene una carga por unidad de longitud λ, la carga dq sobre el pequeño segmento es $dq = \lambda\, dx$.

Encuentre la magnitud del campo eléctrico en P debido a un segmento de la barra que tenga una carga dq:

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2} = k_e \frac{\lambda\, dx}{x^2}$$

Encuentre el campo total en P usando[4] la ecuación 23.11:

$$E = \int_a^{\ell + a} k_e \lambda \frac{dx}{x^2}$$

Al notar que k_e y $\lambda = Q/\ell$ son constantes y se pueden verificar de la integral, evalúe la integral:

$$E = k_e \lambda \int_a^{\ell + a} \frac{dx}{x^2} = k_e \lambda \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{\ell + a}$$

$$1) \quad E = k_e \frac{Q}{\ell}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\ell + a}\right) = \frac{k_e Q}{a(\ell + a)}$$

Finalizar Si ℓ tiende a cero, la ecuación 1) se reduce al campo eléctrico debido a una carga puntual, como se da por la ecuación 23.9, que es lo esperado porque la barra se encoge a tamaño cero.

¿Qué pasaría si? Suponga que el punto P está muy lejos de la barra. ¿Cuál es la naturaleza del campo eléctrico en tal punto?

Respuesta Si P está lejos de la barra ($a >> \ell$), en tal caso se puede ignorar ℓ en el denominador de la ecuación 1) y $E \approx k_e Q/a^2$. Ésta es exactamente la forma que esperaría para una carga puntual. Por lo tanto, a valores grandes de a/ℓ, la distribución de carga parece ser una carga puntual de magnitud Q; el punto P está tan lejos de la barra que no es posible distinguir si tiene un tamaño. El uso de la técnica límite ($a/\ell \to \infty$) con frecuencia es un buen método para comprobar una expresión matemática.

[4]Para realizar integraciones de este tipo, primero exprese el elemento de carga dq en términos de las otras variables en la integral. (En este ejemplo, hay una variable, x, así que se hace el cambio $dq = \lambda\, dx$.) La integral debe ser sobre cantidades escalares; por lo tanto, exprese el campo eléctrico en términos de componentes, si es necesario. (En este ejemplo, el campo sólo tiene una componente x, así que ese detalle no es preocupante.) Luego, reduzca su expresión a una integral sobre una sola variable (o multiplique integrales, cada una sobre una sola variable). En los ejemplos que tienen simetría esférica o cilíndrica, la única variable es una coordenada radial.

EJEMPLO 23.7 Campo eléctrico de un anillo de carga uniforme

Un anillo de radio a porta una carga total positiva distribuida uniformemente. Calcule el campo eléctrico debido al anillo en un punto P que se encuentra a una distancia x de su centro, a lo largo del eje central perpendicular al plano del anillo (figura 23.16a).

Figura 23.16 (Ejemplo 23.7) Anillo cargado de manera uniforme con radio a. a) El campo en P sobre el eje de las x se debe a un elemento de carga dq. b) El campo eléctrico total en P se encuentra a lo largo del eje de las x. La componente perpendicular del campo en P debida al segmento 1 es cancelada por la componente perpendicular correspondiente debida al segmento 2.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 23.16a muestra la contribución del campo eléctrico $d\vec{\mathbf{E}}$ en P debido a un solo segmento de carga en lo alto del anillo. Este vector de campo se puede resolver en sus componentes dE_x paralelas al eje del anillo y $dE_\perp$ perpendicular al eje. La figura 23.16b muestra las aportaciones de campo eléctrico de dos segmentos en lados opuestos del anillo. Debido a la simetría de la situación, las componentes perpendiculares del campo se cancelan. Esto es cierto para todos los pares de segmentos alrededor del anillo, así que puede ignorar la componente perpendicular del campo y concentrarse en las componentes paralelas, que simplemente se suman.

Categorizar Ya que el anillo es continuo, se evalúa el campo debido a una distribución de carga continua en lugar de un grupo de cargas individuales.

Analizar Evalúe la componente paralela de una contribución de campo eléctrico de un segmento de carga dq sobre el anillo:

$$1)\quad dE_x = k_e \frac{dq}{r^2} \cos\theta = k_e \frac{dq}{(a^2 + x^2)} \cos\theta$$

A partir de la geometría en la figura 23.16a, evalúe cos θ:

$$2)\quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

Sustituya la ecuación 2) en la ecuación 1):

$$dE_x = k_e \frac{dq}{(a^2 + x^2)} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\, dq$$

Todos los segmentos del anillo realizan la misma aportación al campo en P porque todos son equidistantes a este punto. Integre para obtener el campo total en P:

$$E_x = \int \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\, dq = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dq$$

$$3)\quad E = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\, Q$$

Finalizar Este resultado muestra que el campo es cero en $x = 0$. ¿Esto es consistente con la simetría del problema? Además, observe que la ecuación 3) se reduce a k_eQ/x^2 si $x >> a$, de modo que el anillo actúa como una carga puntual para posiciones alejadas del anillo.

¿Qué pasaría si? Suponga que coloca una carga negativa en el centro del anillo en la figura 23.16 y la desplaza ligeramente una distancia $x \ll a$ a lo largo del eje x. Cuando libera la carga, ¿qué tipo de movimiento muestra?

Respuesta En la expresión para el campo debido a un anillo de carga, sea $x \ll a$, lo que resulta en

$$E_x = \frac{k_e Q}{a^3}\, x$$

Por lo tanto, de la ecuación 23.8, la fuerza sobre la carga $-q$ colocada cerca del centro del anillo es

$$F_x = -\frac{k_e q Q}{a^3}\, x$$

Ya que esta fuerza tiene la forma de la ley de Hooke (ecuación 15.1), ¡el movimiento de la carga negativa es *armónico simple*!

EJEMPLO 23.8 Campo eléctrico de un disco con carga uniforme

Un disco de radio R tiene una densidad de carga superficial uniforme σ. Calcule el campo eléctrico en un punto P que se encuentra a lo largo del eje perpendicular central del disco y a una distancia x del centro del disco (figura 23.17).

Figura 23.17 (Ejemplo 23.8) Un disco de radio R con carga uniforme. El campo eléctrico en un punto axial P se dirige a lo largo del eje central, perpendicular al plano del disco.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Si considera al disco como un conjunto de anillos concéntricos, puede usar el resultado del ejemplo 23.7, que da el campo producido por un anillo de radio a y sumar las aportaciones de todos los anillos que constituyen el disco. Por simetría, el campo en un punto axial debe estar a lo largo del eje central.

Categorizar Dado que el disco es continuo, se evalúa el campo debido a una distribución de carga continua en vez de un grupo de cargas individuales.

Analizar Encuentre la cantidad de carga dq en un anillo de radio r y ancho dr, como se muestra en la figura 23.17:

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r\, dr) = 2\pi\sigma r\, dr$$

Use este resultado en la ecuación dada para E_x en el ejemplo 23.7 (sustituya a con r y Q con dq) para encontrar el campo debido al anillo:

$$dE_x = \frac{k_e x}{(r^2 + x^2)^{3/2}}(2\pi\sigma r\, dr)$$

Para obtener el campo total en P, integre esta expresión en los límites $r = 0$ a $r = R$, y note que x es una constante en esta situación:

$$E_x = k_e x \pi\sigma \int_0^R \frac{2r\, dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$= k_e x \pi\sigma \int_0^R (r^2 + x^2)^{-3/2}\, d(r^2)$$

$$= k_e x \pi\sigma \left[\frac{(r^2 + x^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R = 2\pi k_e \sigma \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}\right]$$

Finalizar Este resultado es válido para todos los valores $x > 0$. Es posible calcular el campo cerca del disco a lo largo del eje al suponer que $R >> x$; debido a eso, la expresión entre corchetes se reduce a la unidad para dar la aproximación cercana al campo

$$E_x = 2\pi k_e \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

donde ϵ_0 es la permitividad del espacio libre. En el capítulo 24 obtendrá el mismo resultado para el campo producido por un plano infinito de carga con densidad de carga superficial uniforme.

23.6 Líneas de campo eléctrico

Con aplicación de la ecuación 23.7 se ha definido matemáticamente el campo eléctrico. Ahora debe explorar un medio para darle una representación gráfica. Una forma conveniente de visualizar los patrones de los campos eléctricos es el trazo de líneas conocidas como **líneas de campo eléctrico**, establecidas por primera vez por Faraday, las cuales relacionan el campo eléctrico con una región del espacio de la manera siguiente:

- El vector $\vec{\mathbf{E}}$ del campo eléctrico es tangente a la línea del campo eléctrico en cada punto. La dirección de la línea, indicada por una punta de flecha, es igual al vector del campo eléctrico. La dirección de la línea es la fuerza sobre una carga de prueba positiva colocada en el campo.
- El número de líneas por unidad de área que pasan a través de una superficie perpendicular a dichas líneas es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en dicha región. En consecuencia, las líneas de campo estarán cercanas donde el campo eléctrico sea intenso y separadas donde el campo sea débil.

Estas propiedades se ilustran en la figura 23.18. La densidad de las líneas de campo a través de la superficie A es mayor que la densidad de las líneas a través de la superficie B. Debido a eso, la magnitud del campo eléctrico es más grande en la superficie A que en la superficie B. Además, si las líneas en diferentes ubicaciones apuntan en distintas direcciones el campo no es uniforme.

¿La correspondencia entre la intensidad del campo eléctrico y la densidad de las líneas de campo es consistente con la ecuación 23.9, la expresión que obtuvo para el valor E mediante la ley de Coulomb? Para responder esta pregunta, piense en una superficie esférica imaginaria de radio r concéntrica con una carga puntual. Por simetría, la magnitud del campo eléctrico será la misma en cualquier parte de la superficie de la esfera. El número de líneas N que emergen de la carga es igual al número que penetra en la superficie esférica. Por tanto, el número de líneas por cada unidad de área sobre la esfera es $N/4\pi r^2$ (donde el área de la superficie de la esfera es $4\pi r^2$). Ya que E es proporcional al número de líneas por unidad de área, E varía de la forma $1/r^2$; este resultado es consistente con la ecuación 23.9.

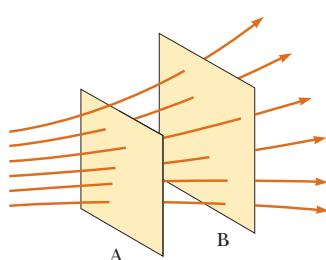
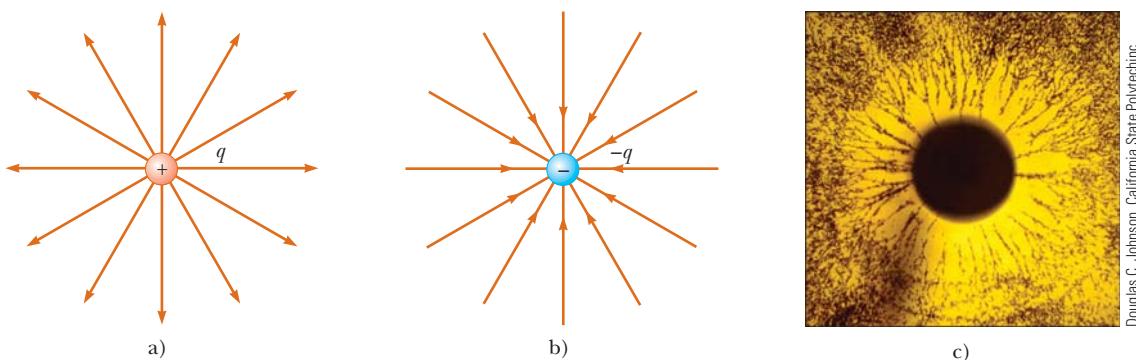



Figura 23.18 Líneas de campo eléctrico que atraviesan dos superficies. La magnitud del campo es mayor en la superficie A que en la B.

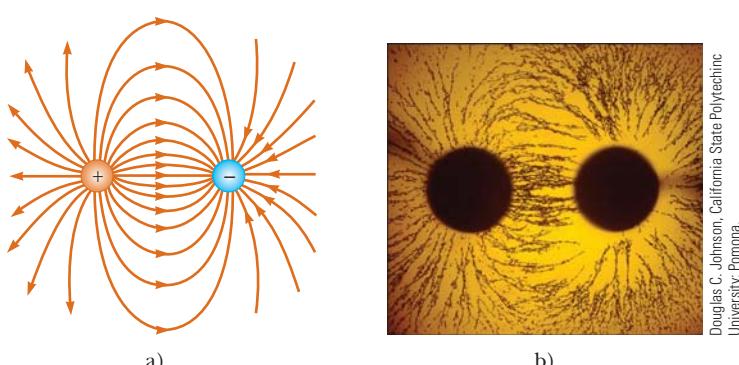
Figura 23.19 Líneas de campo eléctrico para una carga puntual. a) En el caso de una carga puntual positiva, las líneas son radiales hacia afuera. b) Para una carga puntual negativa, las líneas son radiales hacia adentro. Observe que las figuras sólo muestran aquellas líneas que están en el plano de la página. c) Las áreas oscuras son pequeñas partículas suspendidas en aceite que se alinean con el campo eléctrico producido por un pequeño conductor con carga en el centro.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 23.2

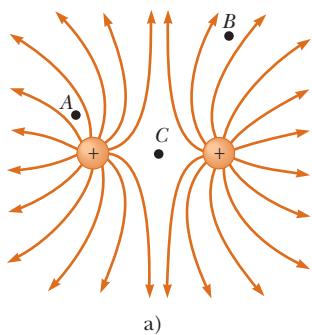
¡Las líneas de campo eléctrico no representan las trayectorias de las partículas!

Las líneas de campo eléctrico representan el campo en diferentes ubicaciones. Con excepción de casos muy especiales, *no* representan la trayectoria de una partícula con carga que se mueve en un campo eléctrico.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 23.3

Las líneas de campo eléctrico no son reales

La líneas de campo eléctrico no son objetos materiales. Son una representación gráfica para tener una descripción cualitativa del campo eléctrico. Puesto que sólo se puede dibujar un número finito de líneas que parten de cada carga, parecería que el campo fuera cuantizado y que sólo existe en ciertas partes del espacio. De hecho el campo es continuo (existe en todos los puntos). Debe evitar obtener una impresión equivocada de líneas de campo que parten de un dibujo bidimensional cuya finalidad sólo es describir una situación tridimensional.

En la figura 23.19a se muestran las líneas de campo eléctrico causadas por el campo creado por una sola carga puntual positiva. Este dibujo en dos dimensiones sólo muestra las líneas de campo que están en el plano que contiene a la carga puntual. De hecho, las líneas están dirigidas radialmente alejándose de la carga en todas las direcciones; por lo tanto, en lugar de una "rueda" plana de líneas, como la que se muestra, es necesario imaginar toda una distribución esférica de líneas. Si se colocara una carga de prueba positiva en este campo sería repelida por la carga fuente positiva, las líneas se alejarían radialmente de la carga fuente. Las líneas de campo eléctrico que representan al campo generado por una sola carga puntual negativa están dirigidas hacia la carga (figura 23.19b). En ambos casos las líneas siguen una dirección radial y se extienden hasta el infinito. Observe que las líneas se acercan entre sí conforme se aproximan a la carga; ello indica que la fuerza del campo se incrementa conforme se acercan hacia la carga fuente.

Las reglas para dibujar las líneas de un campo eléctrico son las siguientes:

- Las líneas deben empezar en una carga positiva y terminar en una carga negativa. En caso de que haya un exceso en cualquier carga, algunas líneas empezarán o terminarán en el infinito.
- El número de líneas dibujadas que salen de una carga positiva o se acercan a una carga negativa será proporcional a la magnitud de dicha carga.
- Dos líneas de campo no se pueden cruzar.

Decidimos que sea Cq el número de líneas de campo partiendo de cualquier objeto con carga positiva y $C|q|$ el número de líneas de campo que terminan en cualquier objeto con carga negativa, donde C es una constante de proporcionalidad arbitraria. Una vez seleccionada C, queda fijo el número de líneas. Por ejemplo, en un sistema de dos cargas, si el objeto 1 tiene una carga Q_1 y el objeto 2 tiene una carga Q_2, la relación del número

Figura 23.20 a) Líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales de igual magnitud y de signo opuesto (un dipolo eléctrico). El número de líneas que salen de la carga positiva es igual al número que termina en la carga negativa. b) Pequeñas partículas suspendidas en aceite se alinean con el campo eléctrico.

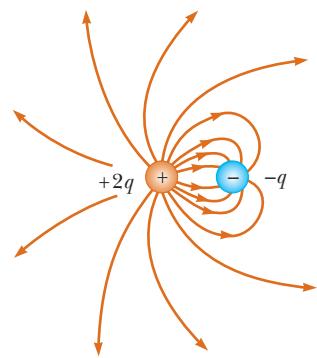



Figura 23.21 a) Líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales positivas. (Las ubicaciones A, B y C han sido analizadas en la Pregunta rápida 23.5.) b) Pequeñas partículas suspendidas en aceite se alinean con el campo eléctrico.

Figura 23.22

Líneas de campo eléctrico para una carga puntual $+2q$ y una segunda carga puntual $-q$. Observe que dos líneas salen de $+2q$ por cada una que termina en $-q$.

de líneas en contacto con las cargas es $N_2/N_1 = Q_2/Q_1$. Las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales de igual magnitud pero de signos opuestos (un dipolo eléctrico) se muestran en la figura 23.20. Ya que las cargas son de igual magnitud, el número de líneas que empiezan en la carga positiva debe ser igual al número que termina en la carga negativa. En lugares muy cercanos a las cargas, las líneas son prácticamente radiales. La elevada densidad de líneas entre las cargas indica un región con un campo eléctrico intenso.

La figura 23.21 muestra las líneas de campo eléctrico alrededor de dos cargas puntuales positivas iguales. De nuevo, las líneas son prácticamente radiales en puntos cercanos a cada carga, y el mismo número de líneas emerge de cada carga pues son de igual magnitud. A una distancia considerable de las cargas, el campo es casi igual al de una sola carga puntual de magnitud $2q$.

Por último, en la figura 23.22 aparece el esbozo de las líneas de campo eléctrico asociadas con una carga positiva $+2q$ y una carga negativa $-q$. En este caso, el número de líneas que salen de $+2q$ es de las que terminan en $-q$. En consecuencia, sólo la mitad de las líneas que abandonan la carga positiva llega a la carga negativa. La mitad restante termina en una carga negativa que se supone está en el infinito. Para distancias mucho mayores a la separación entre cargas, las líneas de campo eléctrico son equivalentes a las de una carga $+q$ única.

Pregunta rápida 23.5 Clasifique las magnitudes del campo eléctrico en los puntos A, B y C de la figura 23.21a (empiece por la magnitud mayor).

23.7 Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme

Cuando una partícula con carga q y masa m se coloca en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga es $q\vec{\mathbf{E}}$, de acuerdo con la ecuación 23.8. Si esta es la única fuerza ejercida sobre la partícula, con toda probabilidad se trata de la fuerza neta, la cual provoca que la partícula se acelere de acuerdo con el modelo de partícula bajo una fuerza neta. Así,

$$\vec{\mathbf{F}}_e = q\vec{\mathbf{E}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

la aceleración de la partícula es, por tanto,

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m} \qquad \textbf{(23.12)}$$

Si $\vec{\mathbf{E}}$ es uniforme (constante en magnitud y dirección), la fuerza eléctrica sobre la partícula es constante y se puede aplicar el modelo de partícula bajo aceleración constante. Si la partícula tiene carga positiva, su aceleración se produce en dirección del campo eléctrico. Si tiene carga negativa, su aceleración será en dirección opuesta al campo eléctrico.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 23.4

Sólo se trata de otra fuerza

Las fuerzas y los campos eléctricos podrán parecerle conceptos abstractos. Sin embargo, una vez que se evalúa $\vec{\mathbf{F}}_e$, es lo que provoca que una partícula se mueva, de acuerdo con los modelos de fuerzas y movimiento establecidos comprendido en los capítulos 2 a 6 del volumen I. Teniendo esto presente podrá resolver los problemas de este capítulo.

EJEMPLO 23.9 Carga positiva en aceleración

Un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ se dirige a lo largo del eje x entre placas paralelas de carga separadas una distancia d, como se muestra en la figura 23.23. Una carga puntual positiva q de masa m se libera desde el reposo en un punto Ⓐ junto a la placa positiva y acelera a un punto Ⓑ junto a la placa negativa.

Figura 23.23 (Ejemplo 23.9) Una carga puntual positiva q en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ experimenta aceleración constante en la dirección del campo.

A) Encuentre la rapidez de la partícula en Ⓑ al modelarla como una partícula bajo aceleración constante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Cuando la carga positiva se coloca en Ⓐ, experimenta una fuerza eléctrica hacia la derecha en la figura 23.23 debido al campo eléctrico dirigido hacia la derecha.

Categorizar Ya que el campo eléctrico es uniforme, una fuerza eléctrica constante actúa sobre la carga. Por lo tanto, el ejemplo es sobre una partícula con carga bajo aceleración constante.

Analizar Use la ecuación 2.17 para expresar la velocidad de la partícula como función de la posición:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) = 0 + 2a(d - 0) = 2ad$$

Resuelva para v_f y sustituya para la magnitud de la aceleración a partir de la ecuación 23.12:

$$v_f = \sqrt{2ad} = \sqrt{2\left(\frac{qE}{m}\right)d} = \boxed{\sqrt{\frac{2qEd}{m}}}$$

B) Encuentre la rapidez de la partícula en Ⓑ al modelarla como un sistema no aislado.

SOLUCIÓN

Categorizar El enunciado del problema dice que la carga es un sistema no aislado. A esta carga se le transfiere energía mediante el trabajo realizado por la fuerza eléctrica que se ejerce sobre la carga. La configuración inicial del sistema es cuando la partícula está en Ⓐ y la configuración final es cuando está en Ⓑ.

Analizar Escriba la reducción adecuada de la ecuación de conservación de energía, ecuación 8.2, para el sistema de la partícula con carga:

$$W = \Delta K$$

Sustituya el trabajo y las energías cinéticas con los valores adecuados para esta situación:

$$F_e\,\Delta x = K_{Ⓑ} - K_{Ⓐ} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0 \quad\rightarrow\quad v_f = \sqrt{\frac{2F_e\,\Delta x}{m}}$$

Sustituya la fuerza eléctrica F_e y el desplazamiento Δx:

$$v_f = \sqrt{\frac{2(qE)(d)}{m}} = \boxed{\sqrt{\frac{2qEd}{m}}}$$

Finalizar La respuesta al inciso B) es la misma que la del inciso A), como se esperaba.

EJEMPLO 23.10 **Un electrón acelerado**

Un electrón entra a la región de un campo eléctrico uniforme, como se muestra en la figura 23.24, con $v_i = 3.00 \times 10^6$ m/s y $E = 200$ N/C. La longitud horizontal de las placas es $\ell = 0.100$ m.

Figura 23.24

(Ejemplo 23.10) Un electrón se proyecta horizontalmente en un campo eléctrico uniforme producido por dos placas cargadas. El electrón experimenta una aceleración hacia abajo (opuesta a $\vec{\mathbf{E}}$) y su movimiento es parabólico mientras está entre las placas.

A) Encuentre la aceleración del electrón mientras está en el campo eléctrico.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este ejemplo difiere del precedente porque la velocidad de la partícula con carga inicialmente es perpendicular a las líneas de campo eléctrico. En el ejemplo 23.9, la velocidad de la partícula con carga siempre es paralela a las líneas de campo eléctrico. Como resultado, el electrón en este ejemplo sigue una trayectoria curva, como se muestra en la figura 23.24.

Categorizar Dado que el campo eléctrico es uniforme, se ejerce una fuerza eléctrica constante sobre el electrón. Para encontrar la aceleración del electrón, se le modela como una partícula bajo una fuerza neta.

Analizar La dirección de la aceleración del electrón es hacia abajo en la figura 23.24, opuesta a la dirección de las líneas de campo eléctrico.

Combine la segunda ley de Newton con la magnitud de la fuerza eléctrica conocida por la ecuación 23.8 para encontrar la componente y de la aceleración del electrón:

$$\sum F_y = ma_y \quad \rightarrow \quad a_y = \frac{\sum F_y}{m} = -\frac{eE}{m_e}$$

Sustituya valores numéricos:

$$a_y = -\frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(200\ \text{N/C})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}} = \boxed{-3.51 \times 10^{13}\ \text{m/s}^2}$$

B) Si supone que el electrón entra al campo en el tiempo $t = 0$, encuentre el tiempo cuando deja el campo.

SOLUCIÓN

Categorizar Como la fuerza eléctrica sólo actúa en la dirección vertical en la figura 23.24, el movimiento de la partícula en la dirección horizontal se puede analizar si la modela como una partícula bajo velocidad constante.

Analizar Resuelva la ecuación 2.7 para el tiempo cuando el electrón llega a los bordes derechos de las placas:

$$x_f = x_i + v_x t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x_f - x_i}{v_x}$$

Sustituya valores numéricos:

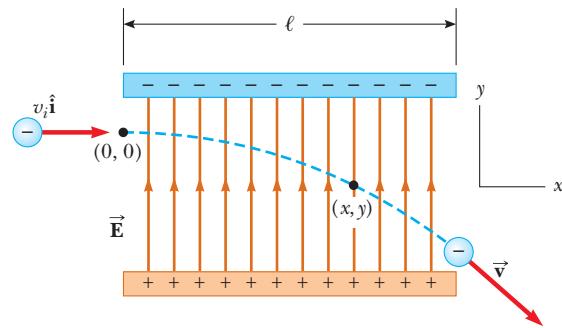
$$t = \frac{\ell - 0}{v_x} = \frac{0.100\ \text{m}}{3.00 \times 10^6\ \text{m/s}} = \boxed{3.33 \times 10^{-8}\ \text{s}}$$

C) Si supone que la posición vertical del electrón cuando entra al campo es $y_i = 0$, ¿cuál es la posición vertical cuando sale del campo?

SOLUCIÓN

Categorizar Ya que la fuerza eléctrica es constante en la figura 23.24, el movimiento de la partícula en la dirección vertical se analiza al modelarla como una partícula bajo aceleración constante.

Analizar Use la ecuación 2.16 para describir la posición de la partícula en cualquier tiempo t:

$$y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$y_f = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-3.51 \times 10^{13}\ \text{m/s}^2)(3.33 \times 10^{-8}\ \text{s})^2$$

$$= -0.019\,5\ \text{m} = \boxed{-1.95\ \text{cm}}$$

Finalizar Si el electrón entra justo abajo de la placa negativa en la figura 23.24, y la separación entre las placas es menor que el valor recién calculado, el electrón golpeará la placa positiva.

La fuerza gravitacional que actúa sobre el electrón fue ignorada, lo que representa una buena aproximación cuando se trata con partículas atómicas. Para un campo eléctrico de 200 N/C, la relación de la magnitud de la fuerza eléctrica eE a la magnitud de la fuerza gravitacional mg es del orden de 10^{12} para un electrón y del orden de 10^9 para un protón.

Resumen

DEFINICIONES

El **campo eléctrico** $\vec{\mathbf{E}}$ en algún punto del espacio se define como la fuerza eléctrica $\vec{\mathbf{F}}_e$ que actúa sobre una pequeña carga de prueba positiva colocada en dicho punto, dividida entre la magnitud q_0 de la carga de prueba:

$$\vec{\mathbf{E}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_e}{q_0} \quad \textbf{(23.7)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Las **cargas eléctricas** tienen las siguientes propiedades:

- Cargas de signos opuestos se atraen, y cargas del mismo signo se repelen.
- La carga total en un sistema aislado se conserva.
- La carga está cuantizada.

Los **conductores** son materiales donde los electrones se mueven libremente. Los **aisladores** son materiales donde los electrones no se mueven con libertad.

La **ley de Coulomb** afirma que la fuerza eléctrica que ejerce una carga puntual q_1 sobre una segunda carga puntual q_2 es

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \textbf{(23.6)}$$

donde r es la distancia entre las dos cargas y $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ es un vector unitario dirigido de q_1 hacia q_2. La constante k_e, que se llama **constante de Coulomb**, tiene el valor $k_e = 8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$.

La fuerza eléctrica sobre una carga q en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ es

$$\vec{\mathbf{F}}_e = q\vec{\mathbf{E}} \quad \textbf{(23.8)}$$

A una distancia r de una carga puntual q, el campo eléctrico generado por la carga es

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \textbf{(23.9)}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido desde la carga hacia el punto en cuestión. El campo eléctrico se dirige radialmente hacia afuera desde una carga positiva y radialmente hacia adentro hacia una carga negativa.

El campo eléctrico generado por un grupo de cargas puntuales se puede calcular al usar el principio de sobreposición: el campo eléctrico total en algún punto es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos de todas las cargas:

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i \quad \textbf{(23.10)}$$

El campo eléctrico en algún punto generado por una distribución de carga continua es

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \int \frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \textbf{(23.11)}$$

donde dq es la carga en un elemento de la distribución de carga y r es la distancia desde el elemento hasta el punto en cuestión.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. Explique el significado de la expresión "un átomo neutro". Explique el significado de "un átomo con carga negativa".

2. **O i)** Si a una moneda metálica se le da una carga eléctrica positiva, su masa: ¿a) aumenta mensurablemente, b) aumenta una cantidad muy pequeña para medirla directamente, c) permanece invariable, d) disminuye una cantidad muy pequeña para medirla directamente o e) disminuye mensurablemente? **ii)** Ahora, a la moneda, se le da una carga eléctrica negativa. ¿Qué ocurre con su masa? Elija entre las mismas posibilidades.

3. Un estudiante extranjero que haya crecido en un país tropical pero que estudie en Estados Unidos quizá no tenga ninguna experiencia con chispas o descargas de electricidad estática hasta que él o ella pasen un invierno en ese país. Explique por qué.

4. Explique las similitudes y diferencias entre la ley de la gravitación universal de Newton y la ley de Coulomb.

5. Un globo es cargado negativamente al frotarlo después se adhiere a la pared. ¿Significa que la pared tiene carga positiva? ¿Por qué el globo termina por caer?

6. **O** En la figura 23.8, suponga que los objetos con cargas q_2 y q_3 están fijos. Observe que no hay línea de visión desde la ubicación del objeto 2 hasta la ubicación del objeto 1. Podría decir que un insecto parado sobre q_1 es incapaz de ver q_2 porque se lo impide q_3. ¿Cómo calcularía la fuerza que se ejerce sobre el objeto con carga q_1? a) Encuentre sólo la fuerza que ejerce q_2 sobre la carga q_1. b) Encuentre sólo la fuerza que ejerce q_3 sobre la carga q_1. c) Sume la fuerza que q_2 ejercería por sí sola sobre la carga q_1 a la fuerza que q_3 ejercería por sí sola sobre la carga q_1. d) Sume la fuerza que q_3 ejercería por sí sola a cierta fracción de la fuerza que q_2 ejercería por sí sola. e) No hay una forma definida de encontrar la fuerza sobre la carga q_1.

7. **O** Una partícula con carga está en el origen de las coordenadas. La partícula produce un campo eléctrico de $4\hat{\mathbf{i}}$ kN/C en el punto con vector de posición $36\hat{\mathbf{i}}$ cm. **i)** ¿En qué posición el campo tiene el valor $1\hat{\mathbf{i}}$ kN/C? a) $9\hat{\mathbf{i}}$ cm, b) $18\hat{\mathbf{i}}$ cm, c) $72\hat{\mathbf{i}}$ cm, d) $144\hat{\mathbf{i}}$ cm, e) en ninguna parte **ii)**. ¿En qué posición el valor es $16\hat{\mathbf{i}}$ kN/C? Elija entre las mismas posibilidades.

8. ¿Es posible que un campo eléctrico exista en un espacio vacío? Explique. Considere el punto A en la figura 23.21a. ¿En este punto existe carga eléctrica? ¿Hay alguna fuerza en dicho punto? ¿Existe un campo en dicho punto?

9. **O i)** Clasifique las magnitudes de las fuerzas que la partícula con carga A ejerce sobre la partícula con carga B, ubicada a la distancia r de A, de mayor a menor, en los siguientes casos. En su clasificación anote cualquier caso de igualdad. a) q_A = 20 nC, q_B = 20 nC, r = 2 cm, b) q_A = 30 nC, q_B = 10 nC, r = 2 cm, c) q_A = 10 nC, q_B = 30 nC, r = 2 cm, d) q_A = 30 nC, q_B = 20 nC, r = 3 cm, e) q_A = 45 nC, q_B = 20 nC, r = 3 cm. **ii)** Clasifique las magnitudes de los campos eléctricos que genera la partícula con carga A en la posición de la partícula con carga B, a una distancia r de A, de mayor a menor, en los mismos casos. En su clasificación anote cualquier caso de igualdad.

10. **O** Tres partículas con carga se colocan en las esquinas de un cuadrado, como se muestra en la figura P23.10, con carga $-Q$ en las partículas de las esquinas superior izquierda e inferior derecha, y carga $+2Q$ en la partícula en la esquina inferior izquierda. **i)** ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en la esquina superior derecha, que es un punto en el espacio vacío? a) Es hacia arriba y a la derecha. b) Es recta hacia la derecha. c) Es recta hacia abajo. d) Es hacia abajo y a la izquierda. e) Es perpendicular hacia el plano de la imagen y hacia afuera. f) No hay dirección; no existe campo en esa esquina porque ahí no hay carga. g) No hay dirección; ahí el campo total es cero. **ii)** Suponga que se quita la carga $+2Q$ en la esquina inferior izquierda. En tal caso la magnitud del campo en la esquina superior derecha, ¿a) se vuelve mayor, b) se vuelve menor, c) permanece igual o d) su cambio es impredecible?

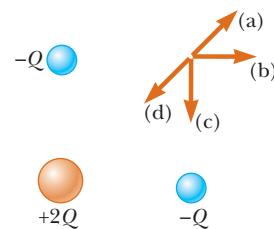



Figura P23.10

11. **O** Dos partículas con carga, A y B, están solas en el universo, separadas 8 cm. La carga de A es 40 nC. El campo eléctrico neto en cierto punto a 4 cm de A es cero. ¿Qué puede concluir acerca de la carga B? Elija las respuestas correctas. a) Puede ser 40 nC. b) Puede ser 120 nC. c) Puede ser 360 nC. d) Puede ser −40 nC. e) Puede ser −120 nC. f) Puede ser −360 nC. g) Puede tener entre un número infinito de valores. h) Puede tener entre muchos valores. i) Debe tener uno de tres valores. j) Debe tener uno de dos valores. k) Debe tener cierto valor. l) No existe un posible valor para q_B; la situación es imposible.

12. Explique por qué las líneas de un campo eléctrico jamás se cruzan. *Sugerencia*: empiece por explicar la razón de que en un punto en particular el campo eléctrico debe tener sólo una dirección.

13. Las figuras 23.12 y 23.13 muestran tres vectores de campo eléctrico en el mismo punto. Si extrapola la figura 23.19 podría obtener muchas líneas de campo eléctrico en el mismo punto. ¿Es cierto que "no es posible que dos líneas de campo se crucen"? ¿Están bien dibujados los diagramas? Explique sus respuestas.

14. **O** Un anillo circular de carga, con radio b, tiene carga total q distribuida uniformemente alrededor de él. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el centro del anillo? a) 0, b) $k_e q/b^2$, c) $k_e q^2/b^2$, d) $k_e q^2/b$. e) ninguna de estas respuestas.

15. **O** Suponga que un anillo de radio R con carga uniforme Q produce un campo eléctrico E_{anillo} en un punto P sobre su eje, a una distancia x del centro del anillo. Ahora la carga Q se dispersa uniformemente sobre el área circular que encierra el anillo y forma un disco plano de carga con el mismo radio. ¿Cómo se compara el campo E_{disco}, producido por el disco en P, con el campo producido por el anillo en el mismo punto? a) $E_{disco} < E_{anillok}$, b) $E_{disco} = E_{anillo}$, c) $E_{disco} > E_{anillo}$, d) imposible de determinar.

16. Un electrón y un protón libres son liberados en campos eléctricos idénticos. **i)** ¿Qué se compara las magnitudes de la fuerza eléctrica ejercida sobre las dos partículas? a) Es millones de veces más grande para el electrón. b) Es miles de veces mayor para el electrón. c) Son iguales. d) Es miles de veces menor para el electrón. e) Es millones de veces menor para el electrón. f) Que es cero para el electrón. g) Que es cero para el protón. **ii)** Compare las magnitudes de sus aceleraciones. Elija entre las mismas posibilidades.

17. Se coloca un objeto con carga negativa en una región del espacio donde el campo eléctrico vertical se dirige hacia arriba. ¿Cuál es la dirección de la fuerza eléctrica ejercida sobre esta carga? a) Hacia arriba. b) Hacia abajo. c) No hay fuerza. d) La fuerza puede ser en cualquier dirección.

18. Explique las diferencias entre densidad de carga lineal, superficial y volumétrica; dé ejemplos de cuándo deberá utilizarse cada una.

19. ¿La vida sería distinta si los electrones tuvieran carga positiva y los protones carga negativa? ¿La elección de los signos eléctricos tiene alguna importancia sobre las interacciones físicas y químicas? ¿Por qué?

20. Considere dos dipolos eléctricos en el espacio vacío. Cada dipolo tiene carga neta cero. ¿Existe entre los dipolos una fuerza eléctrica; es decir, dos objetos con carga neta cero pueden ejercer fuerzas eléctricas uno sobre otro? Si es así, ¿la fuerza es de atracción o de repulsión?

Problemas

Sección 23.1 Propiedades de las cargas eléctricas

1. a) Determine con una precisión de tres dígitos significativos la carga y la masa de un átomo de hidrógeno ionizado, representado como H^+. *Sugerencia*: primero busque la masa de un átomo neutro en la tabla periódica de los elementos en el apéndice C. b) Determine la carga y la masa de Na^+, un átomo de sodio con una sola ionización. c) Encuentre la carga y la masa promedio de un ion de cloro Cl^- que se une al Na^+ para formar una molécula de sal de mesa. d) Encuentre la carga y la masa de $Ca^{++} = Ca^{2+}$, un átomo de calcio doblemente ionizado. e) Usted puede representar el centro de una molécula de amoniaco como un ion N^{3-}. Determine su carga y su masa. f) El plasma de una estrella caliente contiene átomos de nitrógeno ionizados al cuádruplo, N^{4+}. Encuentre su carga y masas. g) Determine la carga y la masa del núcleo del átomo de nitrógeno. h) Encuentre la carga y la masa del ion molecular H_2O^-.

2. a) Calcule el número de electrones que contiene un pequeño alfiler eléctricamente neutro, hecho de plata con una masa de 10.0 g. La plata tiene 47 electrones por átomo, y su masa molar es de 107.87 g/mol. b) Se le agregan electrones al alfiler hasta que la carga neta negativa sea igual a 1.00 mC. ¿Cuántos electrones es necesario añadir por cada 10^9 electrones ya presentes?

Sección 23.2 Carga eléctrica de objetos mediante inducción

Sección 23.3 Ley de Coulomb

3. El premio Nobel Richard Feynman dijo en alguna ocasión que si dos personas se colocaban a la distancia de sus brazos una de la otra y cada una de ellas tuviera 1% más electrones que protones, la fuerza de repulsión entre ambos sería suficiente para levantar un "peso" equivalente al de toda la Tierra. Efectúe un cálculo de magnitudes para sustentar esta afirmación.

4. Una partícula con carga A ejerce una fuerza de 2.62 μN hacia la derecha sobre una partícula con carga B cuando las partículas están separadas 13.7 mm. La partícula B se mueve recta y lejos de A para hacer que la distancia entre ellas sea de 17.7 mm. ¿Qué vector de fuerza se ejerce en tal caso sobre A?

5. ● a) La separación entre dos protones en una molécula es de 3.80×10^{-10} m. Hallar la fuerza eléctrica ejercida entre ellos b) ¿Cómo se compara la magnitud de esta fuerza con la de la fuerza de gravitación que existe entre ambos protones? c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál deberá ser la relación carga-masa de una partícula si la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos de estas partículas es igual a la magnitud de la fuerza eléctrica que ejercen entre ellos?

6. Dos esferas de plata pequeñas, cada una con una masa de 10.0 g, están separadas 1.00 m. Calcule la fracción de electrones de una esfera que deberá ser transferida a la otra a fin de producir una fuerza de atracción de 1.00×10^4 N (casi una tonelada). (El número de electrones por átomo de plata es igual a 47, y el número de átomos por gramo es igual al número de Avogadro dividido entre la masa molar de la plata, 107.87 g/mol).

7. En las esquinas de un triángulo equilátero existen tres cargas puntuales, como se ve en la figura P23.7. Calcule la fuerza eléctrica total sobre la carga de valor 7.00 μC.

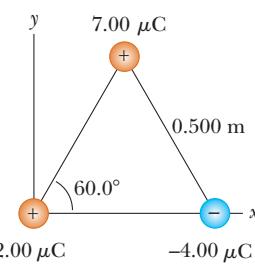



Figura P23.7 Problemas 7 y 14.

8. ● Dos esferas pequeñas con cargas positivas $3q$ y q están fijas en los extremos de una varilla aislante horizontal, que se extiende desde el origen hasta el punto $x = d$. Como se puede observar en la figura P23.8, existe una tercera esfera pequeña con carga que puede deslizarse con libertad sobre la varilla. ¿En qué posición deberá estar la tercera esfera para estar en equilibrio? Explique si puede estar en equilibrio estable.

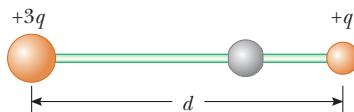



Figura P23.8

9. Dos pequeñas esferas conductoras idénticas se colocan de forma que sus centros se encuentren separados 0.300 m. A una se le da una carga de 12.0 nC y a la otra una carga de −18.0 nC. a) Determine la fuerza eléctrica que ejerce una esfera sobre la otra. b) **¿Qué pasaría si?** Las esferas están conectadas mediante un alambre conductor. Determine la fuerza eléctrica entre ellas una vez que alcanzan el equilibrio.

10. **Problema de repaso**. Dos partículas idénticas, cada una de ellas con un carga $+q$, están fijas en el espacio y separadas por una distancia d. Una tercera carga puntual $-Q$ tiene libertad de movimiento y en un principio está en reposo en la bisectriz perpendicular de ambas cargas fijas, a una distancia x del punto medio entre las dos cargas fijas (figura P23.10). a) Demuestre que si x es pequeña en comparación con d, el movimiento de $-Q$ será armónico simple a lo largo de la bisectriz perpendicular. Determine el periodo de dicho movimiento. b) ¿Qué tan rápido se moverá la carga $-Q$ cuando llegue al punto medio entre las dos cargas fijas, si fue liberada inicialmente a una distancia $a \ll d$ del punto medio?

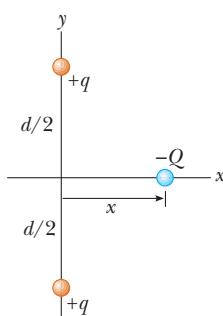



Figura P23.10

11. **Problema de repaso**. En la teoría de Bohr sobre el átomo de hidrógeno, un electrón se mueve en una órbita circular alrededor de un protón, el radio de la órbita es 0.529×10^{-10} m. a) Encuentre el valor de la fuerza eléctrica ejercida entre ambos. b) Si esta fuerza es la que causa la aceleración centrípeta del electrón, ¿cuál es su rapidez?

Sección 23.4 El campo eléctrico

12. En la figura P23.12, determine el punto (distinto del infinito) en el cual el campo eléctrico es igual a cero.

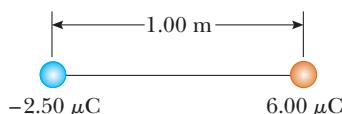



Figura P23.12

13. ¿Cuál será la magnitud y la dirección del campo eléctrico que equilibre el peso de a) un electrón y b) un protón? Use los datos de la tabla 23.1.

14. En los vértices de un triángulo equilátero existen tres cargas, según se muestra en la figura P23.7. a) Calcule el campo eléctrico en la posición de la carga de 2.00 μC debido al campo de las cargas de 7.00 μC y de −4.00 μC. b) Utilice la respuesta del inciso a) para determinar la fuerza ejercida sobre la carga de 2.00 μC.

15. ● Dos partículas con carga se encuentran sobre el eje x. La primera es una carga $+Q$ en $x = -a$. La segunda es una carga desconocida ubicada en $x = +3a$. El campo eléctrico neto que estas cargas producen en el origen tiene un valor de $2k_eQ/a^2$. Explique cuántos valores son posibles para la carga desconocida y encuentre los valores posibles.

16. Dos partículas con carga de 2.00 μC están localizadas sobre el eje x. Una está en $x = 1.00$ m y la otra en $x = -1.00$ m. a) Determine el campo eléctrico sobre el eje y en $y = 0.500$ m. b) Calcule la fuerza eléctrica ejercida sobre una carga de −3.00 μC colocada sobre el eje de las y en $y = 0.500$ m.

17. En las esquinas de un cuadrado de lado a, como se muestra en la figura P23.17, existen cuatro paríıculas con carga. a) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la ubicación de la carga q. b) ¿Cuál es la fuerza eléctrica total ejercida sobre q?

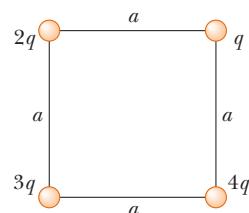



Figura P23.17

18. Considere el dipolo eléctrico que se ilustra en la figura P23.18. Demuestre que el campo eléctrico en un punto *distante* sobre el eje $+x$ es $E_x \approx -4k_eq_a/x^3$.

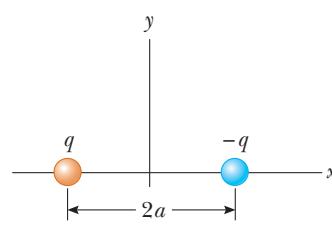



Figura P23.18

19. Considere n partículas con carga positivas iguales cada una de ellas con magnitud Q/n y colocadas de manera simétrica alrededor de un círculo de radio R. a) Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto a una distancia x del centro del círculo y sobre la línea que pasa a través del centro y que es perpendicular al plano del círculo. b) Explique por qué este resultado es idéntico al cálculo del ejemplo 23.7.

Sección 23.5 Campo eléctrico de una distribución de carga continua

20. A lo largo del eje x existe una línea de carga continua que se extiende desde $x = +x_0$ hasta infinito positivo. La línea tiene

una densidad de carga lineal uniforme λ_0. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el origen?

21. Una varilla de 14.0 cm de largo tiene una carga uniforme y su carga total es de $-22.0\ \mu$C. Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico a lo largo del eje de la varilla en un punto a 36.0 cm de su centro.

22. Demuestre que la magnitud máxima $E_{\text{máx}}$ del campo eléctrico existente a lo largo del eje de un anillo con carga uniforme se presenta en $x = a/\sqrt{2}$ (véase la figura 23.16) con un valor $Q/(6\sqrt{3}\,\pi\epsilon_0 a^2)$.

23. Un anillo con un radio de 10.0 cm con carga uniforme tiene una carga total igual a 75.0 μC. Determine el campo eléctrico sobre el eje del anillo a las siguientes distancias del centro del mismo: a) 1.00 cm, b) 5.00 cm, c) 30.0 cm y d) 100 cm.

24. Un disco con carga uniforme con un radio de 35.0 cm tiene una densidad de carga de 7.90×10^{-3} C/m^2. Calcule el campo eléctrico en el eje del disco a a) 5.00 cm, b) 10.0 cm, c) 50.0 cm y d) 200 cm del centro del mismo.

25. ● En el ejemplo 23.8 se dedujo la expresión exacta del campo eléctrico en un punto en el eje de un disco con carga uniforme. Considere un disco con un radio de $R = 3.00$ cm, y una carga uniformemente distribuida de $+5.20\ \mu$C. a) Utilice el resultado del ejemplo 23.8, calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje a 3.00 mm del centro. **¿Qué pasaría si?** Explique cómo se compara esta respuesta con el campo que se calculó con la aproximación al campo cercano $E = \sigma/2\epsilon_0$. b) Utilice el resultado del ejemplo 23.8 y calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje a 30.0 cm del centro del disco. **¿Qué pasaría si?** Explique cómo se compara su respuesta con el campo eléctrico obtenido al tratar al disco como una partícula cargada con $+5.20\ \mu$C a una distancia de 30.0 cm.

26. En el ejemplo 23.8 se calculó el campo eléctrico a lo largo del eje de un disco uniformemente cargado de radio R y con una carga total Q. Demuestre que el campo eléctrico a distancias x que sean lo suficientemente grandes en comparación con R, se acerca a una partícula con carga $Q = \sigma\pi R^2$. (*Sugerencia*: primero demuestre que $x/(x^2 + R^2)^{1/2} = (1 + R^2/x^2)^{-1/2}$ y utilice la expansión de binomios $(1 + \delta)^n \approx 1 + n\delta$ cuando $\delta \ll 1$.)

27. Una barra aisladora uniformemente cargada, de 14.0 cm de longitud, se dobla en la forma de un semicírculo, como se muestra en la figura P23.27. La barra tiene una carga total de $-7.50\ \mu$C. Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en O, el centro del semicírculo.

Figura P23.27

28. a) Considere un cilindro con una pared delgada uniformemente cargada con una carga total Q, radio R y una altura h. Determine el campo eléctrico en un punto a una distancia d del lado derecho del cilindro, como se muestra en la figura P23.28. (*Sugerencia:* use el resultado del ejemplo 23.7 y considere el cilindro como si lo formara un conjunto de anillos con carga). b) **¿Qué pasaría si?** Piense ahora en un cilindro sólido de las mismas dimensiones y con la misma carga distribuida uniformemente en su volumen. Use el resultado del ejemplo 23.8 para calcular el campo que genera en el mismo punto.

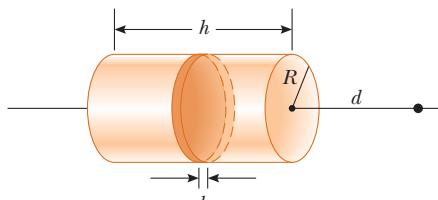



Figura P23.28

29. Una varilla delgada de longitud ℓ y con carga uniforme por unidad de longitud λ yace a lo largo del eje x, como se muestra en la figura P23.29. a) Demuestre que el campo eléctrico en P, a una distancia y de la varilla a lo largo de su bisectriz perpendicular, no tiene componente en x y está dado por $E = 2k_e\lambda \text{ sen } \theta_0/y$. b) **¿Qué pasaría si?** Utilice el resultado obtenido en el inciso a), demuestre que el campo de una varilla de longitud infinita es igual a $E = 2k_e\lambda/y$. (*Sugerencia:* primero calcule el campo en P debido a un elemento de longitud dx con una carga $\lambda\, dx$. A continuación cambie las variables de x a θ mediante las correspondencias $x = y \tan \theta$ y $dx = y \sec^2 \theta\, d\theta$, e integre a través de θ.)

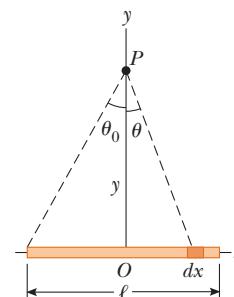



Figura P23.29

30. Tres cilindros sólidos de plástico tienen un radio de 2.50 cm y una longitud de 6.00 cm. Uno a) está cargado con una densidad uniforme 15.0 nC/m^2 en toda su superficie. Otro b) está cargado con la misma densidad uniforme sólo en su superficie lateral curva. El tercero c) está cargado con una densidad uniforme de 500 nC/m^3 en todo el plástico. Determine la carga de cada uno.

31. Ocho cubos sólidos de plástico, cada uno con aristas de 3.00 cm, están pegados para formar los objetos (i, ii, iii y iv) que se muestran en la figura P23.31. a) Suponga que cada objeto tiene una carga con una densidad uniforme de 400 nC/m^3 en todo su volumen, determine la carga de cada objeto. b) Cada objeto tiene una carga con una densidad uniforme de 15.0 nC/m^2 en todas sus superficies expuestas, determine la carga de cada

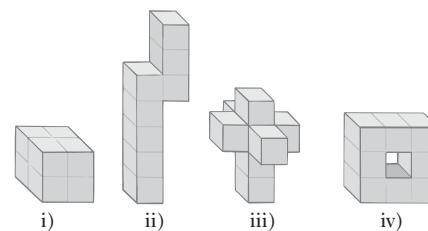



Figura P23.31

uno. c) Las cargas están colocadas sólo en las aristas donde coinciden dos superficies perpendiculares, con una densidad uniforme de 80.0 pC/m, determine la carga de cada uno.

Sección 23.6 Líneas de campo eléctrico

32. Un disco cargado positivamente tiene una carga uniforme por unidad de área según se describe en el ejemplo 23.8. Trace las líneas del campo eléctrico en un plano perpendicular al plano del disco a través de su centro.

33. Una varilla de carga negativa de longitud finita tiene una carga uniforme por unidad de longitud. Trace las líneas del campo eléctrico en el plano que contiene la varilla.

34. La figura P23.34 muestra las líneas de campo eléctrico correspondientes a dos partículas con una pequeña separación. a) Determine la relación q_1/q_2. b) ¿Cuáles son los signos de q_1 y de q_2?

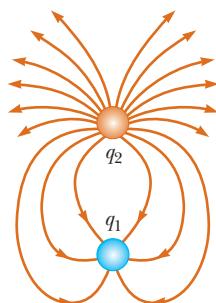



Figura P.23.34

35. Tres cargas q positivas identicas están ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a, como se muestra en la figura P23.35. a) Suponga que las tres cargas juntas producen un campo eléctrico. Dibuje las líneas de campo en el plano de las cargas. Determine la localización de un punto (distinto de ∞) donde el campo eléctrico es igual a cero. b) ¿Cuál es la magnitud y la dirección del campo eléctrico en P debido a las dos cargas ubicadas en la base?

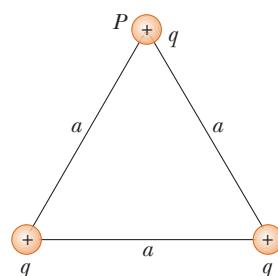



Figura P.23.35 Problemas 35 y 58.

Sección 23.7 Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme

36. Un protón es proyectado en la dirección positiva de x al interior de una región de un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}} = -6.00 \times 10^5\hat{\mathbf{i}}$ N/C en el instante $t = 0$. El protón recorre una distancia de 7.00 cm antes de llegar al reposo. Determine a) la aceleración del protón, b) su rapidez inicial y c) el intervalo de tiempo en el cual el protón queda en reposo.

37. Un protón se acelera a partir del reposo en un campo eléctrico uniforme de 640 N/C. Poco tiempo después su rapidez es de 1.20 Mm/s (no relativista, ya que v es mucho menor que la rapidez de la luz) a) Determine la aceleración del protón. b) ¿En qué intervalo de tiempo el protón alcanza esta rapidez? c) ¿Qué distancia recorre en ese intervalo de tiempo? d) ¿Cuál es su energía cinética al final del intervalo?

38. ● Dos placas metálicas horizontales, cada una de 100 mm de lado, están alineadas una sobre la otra con una separación de 10.0 mm. Se les proporciona cargas de igual magnitud y de signo opuesto de manera que se genere un campo eléctrico uniforme hacia abajo de 2000 N/C entre las placas. Una partícula con masa 2.00×10^{-16} kg y con una carga positiva de 1.00×10^{-6} C parten del centro de la placa negativa inferior con una rapidez inicial de 1.00×10^5 m/s en un ángulo de 37.0° sobre la horizontal. Describa la trayectoria de la partícula. ¿Contra qué placa se impactará?, ¿y dónde se impactará en relación con su punto de partida?

39. Los electrones en un haz de partículas tienen cada uno una energía cinética K. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico que detendrá a estos electrones en una distancia d?

40. Se proyectan varios protones con una rapidez inicial v_i = 9.55 km/s en una región donde está presente un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}} = (-720\hat{\mathbf{j}})$ N/C, como se muestra en la figura P23.40. Los protones deben alcanzar un objetivo que se encuentra a una distancia horizontal de 1.27 mm del punto por donde los protones atraviesan el plano y entran en el campo eléctrico. Determine a) los dos ángulos de proyección θ que logren el resultado esperado y b) el tiempo de vuelo (intervalo de tiempo durante el cual el protón pasa por encima del plano en la figura P23.40) para cada una de las trayectorias.

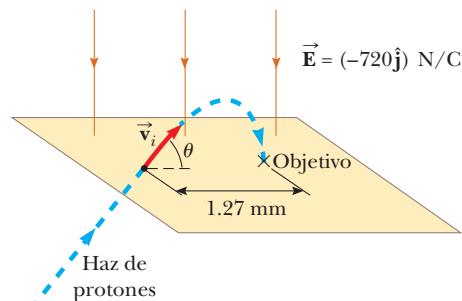



Figura P.23.40

41. Un protón se mueve a 4.50×10^5 m/s en dirección horizontal, y entra en un campo eléctrico vertical uniforme con una magnitud de 9.60×10^3 N/C. Si ignora cualquier efecto debido a la gravedad, determine a) el intervalo de tiempo requerido para que el protón recorra 5.00 cm horizontalmente, b) su desplazamiento vertical durante el periodo que viaja los 5.00 cm horizontalmente y c) las componentes horizontales y verticales de su velocidad después de haber recorrido dicha distancia.

Problemas adicionales

42. ● Dos cargas conocidas, $-12.0\ \mu$C y $45.0\ \mu$C, así como una tercera carga desconocida, se encuentran en el eje x. La carga de $-12.0\ \mu$C está ubicada en el origen y la carga $45.0\ \mu$C está en x = 15.0 cm. La carga desconocida debe ser colocada de tal forma que cada carga quede en equilibrio bajo la acción de las fuerzas eléctricas ejercidas por las otras dos cargas. ¿Es posible lo anterior? ¿Es posible de alguna otra forma? Explique. Encuentre la ubicación requerida, magnitud y signo de la carga desconocida.

43. Entre dos placas paralelas separadas 4.00 cm existe un campo eléctrico uniforme de magnitud 640 N/C. De manera simultánea se libera un protón de la placa positiva y un electrón de la negativa. a) Determine la distancia a la placa positiva en el momento en que ambos se cruzan. (Ignore la atracción eléc-

trica entre el protón y el electrón). b) **¿Qué pasaría si?** Repita el inciso a) ahora con un ion de sodio (Na^+) y con un ion de cloro (Cl^-).

44. Tres partículas con carga están alineadas a lo largo del eje x, según se muestra en la figura P23.44. Determine el campo eléctrico en a) la posición (2.00, 0) y b) la posición (0, 2.00).

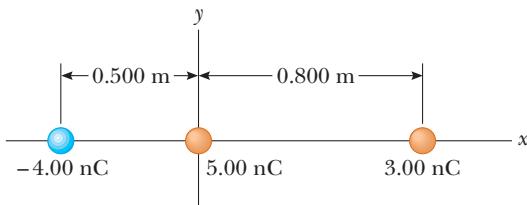



Figura P23.44

45. Una pelota de corcho cargada con 1.00 g de masa está suspendida de un hilo muy ligero en un campo eléctrico uniforme, como se observa en la figura P23.45. Cuando $\vec{\mathbf{E}} = (3.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}}) \times 10^5$ N/C, la pelota está en equilibrio en $\theta = 37.0°$. Determine a) la carga sobre la pelota y b) la tensión en el hilo.

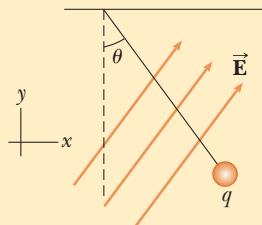



Figura P23.45 Problemas 45 y 46.

46. Una pelota de corcho cargada de masa m está suspendida de un hilo muy ligero en un campo eléctrico uniforme, como se observa en la figura P23.45. Cuando $\vec{\mathbf{E}} = (A\hat{\mathbf{i}} + B\hat{\mathbf{j}})$ N/C, donde A y B son números positivos, la pelota está en equilibrio cuando el ángulo es igual a θ. Determine a) la carga sobre la pelota y b) la tensión en el hilo.

47. En las esquinas de un rectángulo, según se muestra en la figura P23.47, se localizan cuatro cargas puntuales idénticas ($q = +10.0\ \mu$C). Las dimensiones del rectángulo son $L = 60.0$ cm y $W = 15.0$ cm. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica total ejercida por las otras tres cargas sobre la carga en la esquina inferior izquierda.

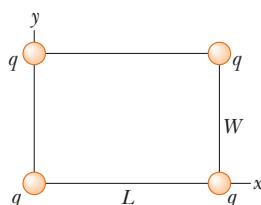



Figura P23.47

48. Inés decora el portón para la fiesta de los 15 años de su hermana. Amarra tres listones de seda juntos en la parte superior del portón y cuelga un globo de látex a cada listón (figura P23.48). A fin de incluir los efectos de las fuerzas de gravitación y de flotación sobre los globos, cada uno de ellos se representa como una partícula con 2.00 g de masa, con su centro a 50.0 cm del punto de soporte. Para destacar los colores de los globos, Inés frota la superficie completa de cada uno de los globos contra su bufanda de lana, para que cuelguen uno lejos del otro. Los centros de los globos colgantes forman un triángulo equilátero horizontal con lados de 30.0 cm de largo. ¿Cuál es la carga común de cada globo?

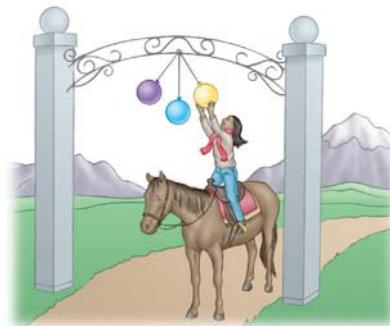



Figura P23.48

49. **Problema de repaso**. Dos bloques metálicos idénticos se encuentran en reposo sobre un superficie horizontal libre de fricción y están conectados por un resorte metálico ligero con una constante de resorte k, como se muestra en la figura P23.49a, y con una longitud no deformada L_i. Una carga total Q es colocada poco a poco en este sistema, lo cual hace que el resorte se estire hasta una longitud de equilibrio L, como se muestra en la figura P23.49b. Determine el valor de Q, si todas las cargas se encuentran en los bloques, y modele los bloques como partículas con carga.

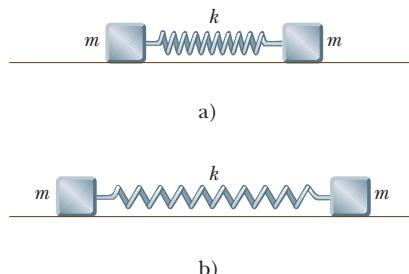



Figura P23.49

50. Imagine un polígono regular de 29 lados. La distancia desde el centro a cualquier vértice es a. En los 28 vértices del polígono se colocan cargas idénticas q. En el centro del polígono se coloca una carga Q. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza que experimenta la carga Q? (*Sugerencia:* podría utilizar el resultado del problema 60 del capítulo 3).

51. Dos varillas delgadas idénticas con una longitud $2a$ tienen cargas iguales $+Q$ uniformemente distribuidas a lo largo de sus longitudes. Las varillas yacen a lo largo del eje x, con sus centros separados por una distancia $b > 2a$ (figura P23.51). Demuestre que la magnitud de la fuerza ejercida por la varilla izquierda sobre la derecha está dada por

$$F = \left(\frac{k_e Q^2}{4a^2}\right) \ln\left(\frac{b^2}{b^2 - 4a^2}\right)$$

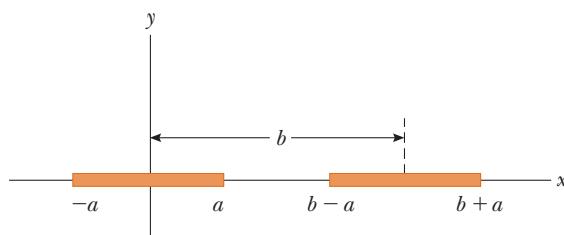



Figura P23.51

52. Dos pequeñas esferas cuelgan en equilibrio en los extremos inferiores de hilos de 40.0 cm de largo, que tienen sus extremos superiores amarrados al mismo punto fijo. Una esfera tiene 2.40 g de masa y +300 nC de carga. La otra esfera tiene la misma masa y una carga de +200 nC. Encuentre la distancia entre los centros de las esferas. Necesitará resolver numéricamente una ecuación.

53. Una línea de cargas positivas se distribuye en un semicírculo de radio $R = 60.0$ cm, como se observa en la figura P23.53. La carga por unidad de longitud a lo largo del semicírculo queda descrita por la expresión $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$. La carga total del semicírculo es de 12.0 μC. Calcule la fuerza total sobre una carga de 3.00 μC colocada en el centro de curvatura.

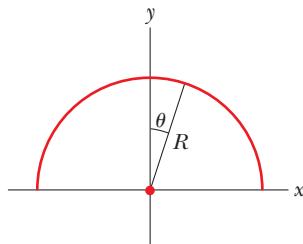



Figura P23.53

54. ● Dos partículas, cada una con 52.0 nC de carga, se ubican en el eje y en $y = 25.0$ cm y $y = -25.0$ cm. a) Encuentre el vector de campo eléctrico en un punto sobre el eje x, como función de x. b) Encuentre el campo en $x = 36.0$ cm. c) ¿En qué posición el campo es $1.00\hat{\mathbf{i}}$ kN/C? Es posible que necesite resolver numéricamente una ecuación. d) ¿En qué posición el campo es $16.0\hat{\mathbf{i}}$ kN/C? e) Compare este problema con la pregunta 7. Describa las similitudes y explique las diferencias.

55. ● Dos esferas pequeñas de masa m están suspendidas de hilos de longitud ℓ que están conectados en un punto común. Una de las esferas tiene una carga Q, la otra una carga $2Q$. Los hilos forman ángulos θ_1 y θ_2 con la vertical. a) ¿Cuál es la relación existente entre θ_1 y θ_2? b) Suponga que θ_1 y θ_2 son pequeños. Demuestre que la distancia r entre las esferas es aproximadamente

$$r \approx \left(\frac{4k_eQ^2\ell}{mg}\right)^{1/3}$$

56. Dos esferas pequeñas idénticas tienen una masa m y una carga q. Cuando se les coloca en un tazón de radio R y de paredes no conductoras y libres de fricción, las esferas se mueven, y cuando están en equilibrio se encuentran a una distancia R (figura P23.56). Determine la carga de cada esfera.

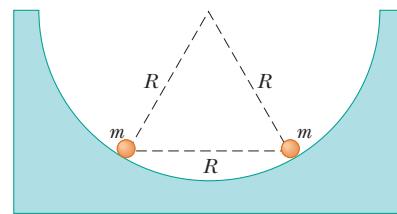



Figura P23.56

57. **Problema de repaso**. Una pelota de corcho de 1.00 g con una carga de 2.00 μC está suspendida verticalmente de un hilo ligero de 0.500 m de largo en un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo, de magnitud $E = 1.00 \times 10^5$ N/C. Si se desplaza ligeramente de la vertical, la pelota oscila como un péndulo simple. a) Determine el periodo de esta oscilación. b) ¿Deberán incluirse las fuerzas de la gravedad en el cálculo del inciso a? Diga por qué.

58. ● La figura P23.35 muestra tres cargas positivas iguales en las esquinas de un triángulo equilátero de lado $a = 3.00$ cm. Agregue una línea vertical a través de la carga superior en P, que divida en dos el triángulo. A lo largo de esta línea marque los puntos A, B, C, D, E y F, con A justo abajo de la carga en P; B en el centro del triángulo; B, C, D y E en orden y juntas, con E en el centro del lado inferior del triángulo; y F cerca y abajo de E. a) Identifique la dirección del campo eléctrico total en A, E y F. Identifique el campo eléctrico en B. Identifique la dirección del campo eléctrico en C. b) Argumente que las respuestas al inciso a) implican que el campo eléctrico debe ser cero en un punto cercano a D. c) Encuentre la distancia desde el punto E, en el lado inferior del triángulo, al punto alrededor de D, donde el campo eléctrico es cero. Necesitará resolver una ecuación trascendente.

59. Ocho partículas con carga, cada una de magnitud q, están situadas en las esquinas de un cubo de arista s, como se observa en la figura P23.59. a) Determine las componentes en x, y y z de la fuerza total ejercida por las demás cargas sobre la carga ubicada en el punto A. b) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de esta fuerza total?

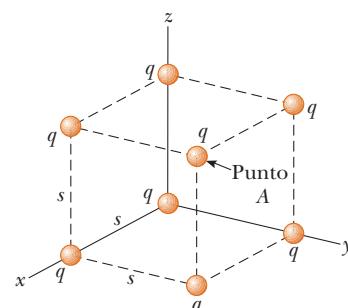



Figura P23.59

60. Considere la distribución de cargas que se muestra en la figura P23.59. a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico en el centro de cualquiera de las caras del cubo tiene un valor de $2.18\, k_eq/s^2$. b) ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en el centro de la cara superior del cubo?

61. **Problema de repaso**. Una partícula de carga negativa $-q$ está situada en el centro de un anillo con carga uniforme, que tiene una carga positiva total Q, como se mostró en el ejemplo 23.7. La partícula, limitada a moverse a lo largo del eje x, es

desplazada una pequeña distancia x (donde $x \ll a$) y luego se le libera. Demuestre que la partícula oscila en un movimiento armónico simple con una frecuencia conocida por

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k_e qQ}{ma^3}\right)^{1/2}$$

62. A lo largo de la línea $y = -15.0$ cm está colocada una carga de densidad uniforme igual a 35.0 nC/m, entre los puntos de coordenadas $x = 0$ y $x = 40.0$ cm. Determine el campo eléctrico que produce en el origen.

63. **Problema de repaso**. Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, como se observa en la figura P23.63, donde θ es pequeña. La separación entre cargas es $2a$, y el momento de inercia del dipolo es I. Si el dipolo es liberado de su posición, demuestre que su orientación angular exhibe un movimiento armónico simple de frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2qaE}{I}}$$

Figura P23.63

64. Considere un número infinito de partículas idénticas, cada una con carga q, colocadas a lo largo del eje x a distancias a, $2a$, $3a$, $4a$, . . . , desde el origen. ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen debido a esta distribución? *Sugerencia:* use el hecho de que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

65. Una línea de carga comienza en $x = +x_0$ y se extiende al infinito positivo. La densidad de carga lineal es $\lambda = \lambda_0 x_0/x$, donde λ_0 es una constante. Determine el campo eléctrico en el origen.

Respuestas a las preguntas rápidas

23.1 a), c) y e) El experimento muestra que A y B tienen cargas del mismo signo, así como los objetos B y C. Por lo tanto, los tres objetos tienen cargas del mismo signo. No obstante, con esta información no es posible determinar si dichas cargas son positivas o negativas.

23.2 e) En el primer experimento, los objetos A y B pueden tener cargas con signos opuestos, o uno de los objetos puede ser neutro. El segundo experimento muestra que B y C tienen cargas del mismo signo, por lo que B debe estar cargado. Pero aún no se sabe si A está cargado o es neutro.

23.3 b) Según la tercera ley de Newton, la fuerza eléctrica ejercida por el objeto B sobre el objeto A es de igual magnitud y de dirección opuesta a la fuerza ejercida por el objeto A sobre el objeto B.

23.4 a) Si la carga fuente que produce el campo no es afectada por sus acciones, no habrá efecto alguno sobre el campo eléctrico. Recuerde que el campo eléctrico está creado por una(s) carga(s) fuente (en este caso no se ilustran), y no por la(s) carga(s) de prueba.

23.5 *A*, *B*, *C*. En el punto A el campo es mayor, porque ahí es donde las líneas de campo están más cercanas entre sí. La ausencia de líneas cerca del punto *C* indica que ahí el campo eléctrico es cero.

Las líneas de color que emanan de una esfera de plasma son evidencia de campos eléctricos intensos. En este capítulo, mediante la ley de Gauss, se demuestra que el campo eléctrico que rodea a una esfera con carga es idéntico al de una carga puntual (Getty Images).

24 Ley de Gauss

En el capítulo anterior se mostró cómo calcular el campo eléctrico generado por una distribución de cargas conocida. En este capítulo se describe la *ley de Gauss,* así como un procedimiento alterno para calcular campos eléctricos. La ley de Gauss parte de que la fuerza electrostática que existe entre cargas exhibe un comportamiento cuadrático inverso. A pesar de que se trata de una consecuencia de la ley de Coulomb, la ley de Gauss es más útil para calcular los campos eléctricos de distribuciones de carga muy simétricas y permite hacer razonamientos cualitativos al tratar con problemas complicados.

24.1 Flujo eléctrico

En el capítulo 23 se describe de manera cualitativa el concepto de líneas de campo eléctrico. Ahora conviene ocuparse de las líneas de campo eléctrico con un enfoque más cuantitativo.

Considere un campo eléctrico que es uniforme tanto en magnitud como en dirección, similar al que se muestra en la figura 24.1. Las líneas de campo penetran en una superficie rectangular de área A, cuyo plano tiene una orientación perpendicular al campo. Recuerde de la sección 23.6 que el número de líneas por unidad de área (la *densidad de líneas*) es proporcional a la magnitud del campo eléctrico. Por lo tanto, el total de líneas que penetran en la superficie es proporcional al producto EA. A este producto de la magnitud

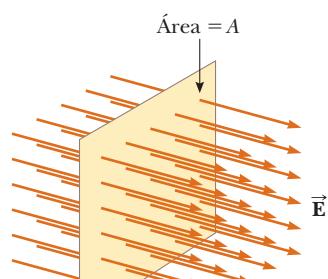



Figura 24.1 Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un plano de área A perpendicular al campo. El flujo eléctrico Φ_E que cruza esta superficie es igual a EA.

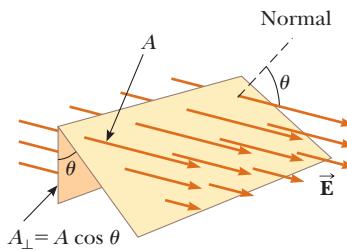



Figura 24.2 Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un área A la cual forma un ángulo u en relación con el campo. Ya que el número de líneas que atraviesan el área $A_{\perp}$ es el mismo número que pasa a través de A, el flujo a través de $A_{\perp}$ es igual al flujo que pasa a través de A y se conoce por $\Phi_E = EA\cos u$.

del campo eléctrico E y al área superficial A, perpendicular al campo, se le conoce como **flujo eléctrico** Φ_E (phi mayúscula):

$$\Phi_E = EA \tag{24.1}$$

Con base en las unidades del SI correspondientes a E y A, Φ_E se expresa en newtons por metros al cuadrado entre coulomb ($\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$). **El flujo eléctrico es proporcional al número de las líneas de campo eléctrico que penetran en una superficie**.

Si la superficie en cuestión no es perpendicular al campo, el flujo que pasa a través de él debe ser menor que el resultante si se utiliza la ecuación 24.1. Lo anterior es comprensible si toma en consideración la figura 24.2, donde la normal en relación con la superficie A forma un ángulo θ con el campo eléctrico uniforme. Observe que el número de líneas que atraviesan el área A es igual al número que atraviesa el área $A_{\perp}$, la cual es una proyección del área $A_{\perp}$ a un plano con orientación perpendicular al campo. Observe en la figura 24.2 que ambas áreas están relacionadas por la fórmula $A_{\perp} = A\cos u$. Dado que el flujo que atraviesa A es igual al flujo que atraviesa $A_{\perp}$, entonces el flujo que pasa a través de A es

$$\Phi_E = EA_{\perp} = EA\cos\theta \tag{24.2}$$

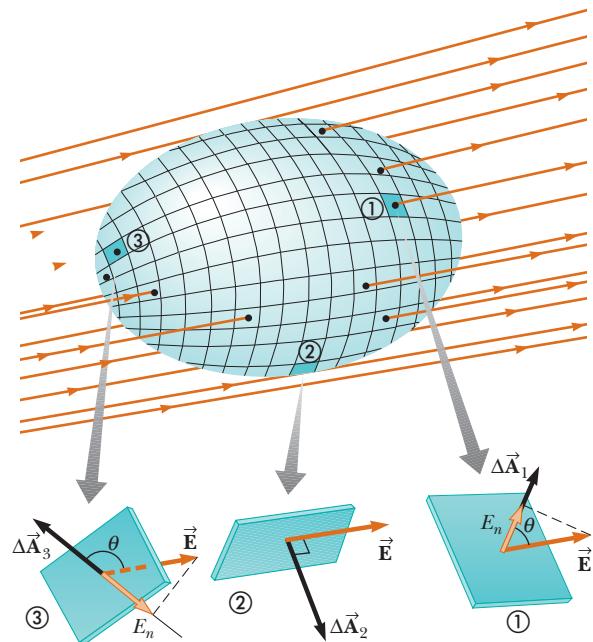
A partir de este resultado, se observa que el flujo que atraviesa una superficie de área A fija tiene un valor máximo EA cuando la superficie es perpendicular al campo (cuando la normal de la superficie es paralela al campo, $u = 0°$ en la figura 24.2); el flujo es cero si la superficie es paralela al campo (cuando la normal de la superficie es perpendicular al campo, $u = 90°$).

Figura 24.3 Elemento pequeño de área superficial ΔA_i. El campo eléctrico forma un ángulo u_i con el vector $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$, definido como normal al elemento de superficie, y el flujo a través del elemento es igual a $E_i\Delta A_i\cos u_i$.

En la explicación anterior se ha supuesto un campo eléctrico uniforme. En situaciones más generales, el campo eléctrico varía a lo largo de una superficie. Por lo tanto, la definición de flujo conocida en la ecuación 24.2 tiene significado sólo para un elemento de área pequeño sobre el cual el campo es casi constante. Considere una superficie dividida en un gran número de elementos pequeños, cada uno de área ΔA. Es conveniente definir un vector $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$ cuya magnitud representa el área del elemento *i*-ésimo sobre la superficie y cuya dirección está definida como *perpendicular* al elemento de superficie, como se muestra en la figura 24.3. El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}_i$ en la ubicación de este elemento forma un ángulo u_i con el vector $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$. El flujo eléctrico $\Delta\Phi_E$ a través de este elemento es

$$\Delta\Phi_E = E_i\,\Delta A_i\cos\theta_i = \vec{\mathbf{E}}_i\cdot\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$$

donde se utiliza la definición de producto escalar de dos vectores ($\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = AB\cos u$, véase el capítulo 7). Al sumar las contribuciones de todos los elementos, obtiene el flujo total a través de la superficie.

$$\Phi_E \approx \sum \vec{\mathbf{E}}_i\cdot\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$$

Si supone que el área de cada elemento se acerca a cero, en tal caso el número de elementos se acercaría al infinito y la suma se reemplaza por una integral. Debido a eso, la definición general del flujo eléctrico es

Definición de flujo eléctrico ▶

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{superficie}} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} \tag{24.3}$$

La ecuación 24.3 es una *integral de superficie*, lo que significa que debe ser evaluada sobre la superficie en cuestión. En general, el valor de Φ_E depende tanto del patrón de campo como de la superficie.

A menudo interesa la evaluación del flujo que pasa a través de una *superficie cerrada*, misma que se define como aquella que divide el espacio en una región exterior y una interior, de manera que no es posible pasar de una región a la otra sin atravesarla. Por ejemplo, la superficie de una esfera tiene una superficie cerrada.

En la superficie cerrada de la figura 24.4 los vectores $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$ apuntan en direcciones diferentes para diferentes elementos de superficies, pero en cada uno de ellos estos vectores son normales a la superficie, y, por convención, siempre apuntan hacia afuera. En el elemento identificado como ①, las líneas de campo cruzan la superficie del lado interno al externo y $u < 90°$; por lo tanto, el flujo $\Delta\Phi_E = \vec{\mathbf{E}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{A}}_1$ a través de este elemento es positivo. Por lo que se refiere al elemento ②, las líneas de campo rozan la superficie (perpendicular al vector $\Delta\vec{\mathbf{A}}_2$); por lo tanto $u = 90°$ y el flujo es igual a cero. Para elementos

Figura 24.4

Superficie cerrada dentro de un campo eléctrico. Los vectores de área son, por convención, normales a la superficie y apuntan hacia afuera. El flujo a través de un elemento de área puede ser positivo (elemento ①), cero (elemento ②) o negativo (elemento ③).

como el ③, donde las líneas de campo atraviesan la superficie del exterior al interior, 180° > *u* > 90° y el flujo es negativo porque el cos *u* también es negativo. El flujo *neto* a través de la superficie es proporcional al número neto de líneas que salen de la superficie, donde número neto significa *la cantidad de líneas que salen de la superficie menos la cantidad de líneas que entran*. Si salen más líneas de las que entran, el flujo neto es positivo. Si entran más líneas de las que salen, el flujo neto es negativo. Se utiliza el símbolo $\oint$ para representar una integral sobre una superficie cerrada, puede decir que el flujo neto Φ_E a través de una superficie cerrada es de la forma

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E_n \, dA \qquad \textbf{(24.4)}$$

donde E_n representa el componente del campo eléctrico normal a la superficie.

Pregunta rápida 24.1 Suponga que una carga puntual se ubica en el centro de una superficie esférica y que están determinados el campo eléctrico en la superficie de la esfera y el flujo total a través de la esfera. Ahora el radio de la esfera se reduce a la mitad. ¿Qué sucede con el flujo a través de la esfera y la magnitud del campo eléctrico en la superficie de la esfera? a) El flujo y el campo aumentan. b) El flujo y el campo disminuyen. c) El flujo aumenta y el campo disminuye. d) El flujo disminuye y el campo aumenta. e) El flujo permanece igual y el campo aumenta. f) El flujo disminuye y el campo permanece igual.

EJEMPLO 24.1 Flujo a través de un cubo

Considere un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ orientado en la dirección *x* en el espacio vacío. Encuentre el flujo eléctrico neto a través de la superficie de un cubo con arista ℓ, orientado como se muestra en la figura 24.5.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine con cuidado la figura 24.5. Observe que las líneas de campo eléctrico pasan perpendiculares a través de dos caras y son paralelas a las cuatro caras restantes del cubo.

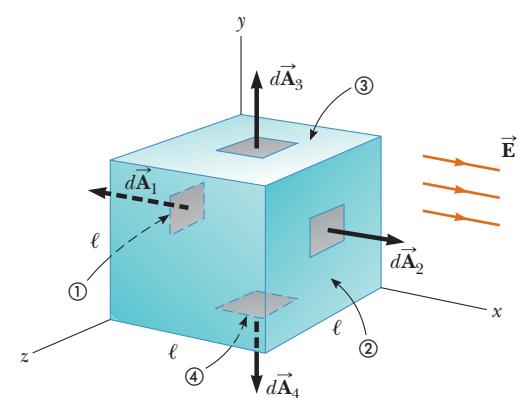



Figura 24.5 (Ejemplo 24.1) Superficie cerrada con forma de cubo en un campo eléctrico uniforme con orientación paralela al eje *x*. El lado ④, es la parte baja del cubo, y el lado ①, es el lado opuesto a ②.

Categorizar Evalúe el flujo a partir de su definición, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

El flujo a través de cuatro de las caras (③, ④ y las no numeradas) es cero porque $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo a las cuatro caras y por tanto perpendicular a $d\vec{\mathbf{A}}$ en estas caras.

Escriba las integrales para el flujo neto a través de las caras ① y ②:

$$\Phi_E = \int_1 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_2 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

Para la cara ①, $\vec{\mathbf{E}}$ es constante y se dirige hacia adentro, pero $d\vec{\mathbf{A}}$ se dirige hacia afuera (u = 180°). Encuentre el flujo a través de esta cara:

$$\int_1 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_1 E(\cos 180°)\, dA = -E \int_1 dA = -EA = -E\ell^2$$

Para la cara ②, $\vec{\mathbf{E}}$ es constante y hacia afuera en la misma dirección que $d\vec{\mathbf{A}}_2$ (u = 0°). Encuentre el flujo a través de esta cara:

$$\int_2 \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_2 E(\cos 0°)\, dA = E \int_2 dA = +EA = E\ell^2$$

Encuentre el flujo neto al sumar el flujo sobre las seis caras:

$$\Phi_E = -E\ell^2 + E\ell^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

24.2 Ley de Gauss

En esta sección se describe una correspondencia de tipo general entre el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada (con frecuencia considerada como *superficie gaussiana*) y la carga encerrada en la superficie. Esta correspondencia, conocida como *ley de Gauss*, es de importancia fundamental en el estudio de los campos eléctricos.

Suponga de nuevo una carga puntual positiva q ubicada en el centro de una esfera de radio r, como se observa en la figura 24.6. De la ecuación 23.9, sabe que la magnitud del campo eléctrico en todos los puntos de la superficie de la esfera es $E = k_e q/r^2$. Las líneas de campo están dirigidas radialmente hacia afuera y por tanto son perpendiculares a la superficie en todos sus puntos. Es decir, en cada punto de la superficie, $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo al vector $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$ que representa un elemento de área local ΔA_i que rodea al punto en la superficie. Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i = E\,\Delta A_i$$

y por la ecuación 24.4 encuentra que el flujo neto a través de la superficie gaussiana es igual a

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E\, dA = E \oint dA$$

donde se ha retirado E afuera de la integral ya que, por simetría, E es constante en la superficie y se conoce por $E = k_e q/r^2$. Además, en vista de que la superficie es esférica, $\oint dA = A = 4pr^2$. Por lo tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = k_e \frac{q}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

Recuerde de la sección 23.3 que $k_e = 1/4pe_0$, lo que permite escribir esta ecuación de la forma

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(24.5)}$$

Observe en la ecuación 24.5 que el flujo neto a través de la superficie esférica es proporcional a la carga existente en el interior. El flujo es independiente del radio r porque el área de la superficie esférica es proporcional a r^2, en tanto que el campo eléctrico es proporcional a $1/r^2$. En consecuencia, en el producto del área y el campo eléctrico, se elimina la dependencia con r.

KARL FRIEDRICH GAUSS

Matemático y astrónomo alemán (1777-1855)

En 1799 Karl Friedrich Gauss obtuvo un doctorado en matemáticas por la Universidad de Helmstedt. Además de su trabajo en el área del electromagnetismo, contribuyó en los campos de las matemáticas y la ciencia en la teoría de números, la estadística, la geometría no euclidiana y en la mecánica orbital de los cometas. Fue uno de los fundadores de la German Magnetic Union, la cual estudia en forma continua el campo magnético de la Tierra.

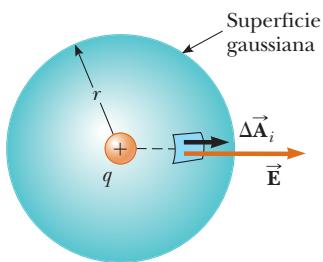



Figura 24.6 Superficie gaussiana esférica de radio *r* que rodea una carga puntual *q*. Cuando la carga está en el centro de la esfera, el campo eléctrico es normal a la superficie en todos los puntos y de magnitud constante.

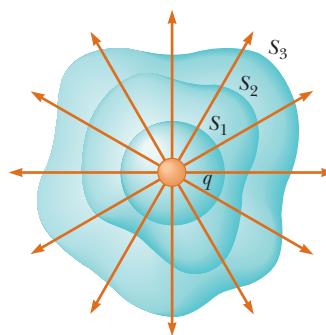



Figura 24.7 Superficies cerradas de diversas formas que rodean una carga *q*. El flujo eléctrico neto es el mismo a través de todas las superficies.

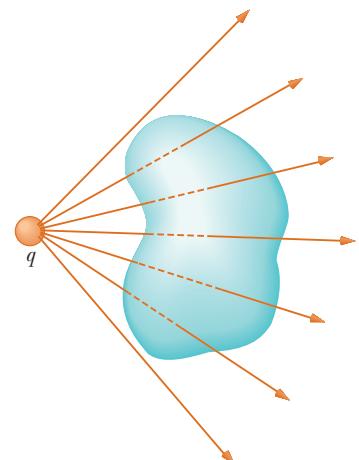



Figura 24.8 Carga puntual localizada *fuera* de una superficie cerrada. El número de líneas que entran a la superficie es igual al número de líneas que salen de la misma.

Ahora considere varias superficies cerradas que rodean una carga *q*, como se muestra en la figura 24.7. La superficie S_1 es esférica pero las superficies S_2 y S_3 no lo son. Por la ecuación 24.5, el flujo que pasa a través de S_1 tiene un valor de q/e_0. Como se explicó en la sección anterior, el flujo es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que atraviesan dicha superficie. La construcción de la figura 24.7 muestra que el número de líneas a través de S_1 es el mismo número de líneas que pasan a través de las superficies no esféricas S_2 y S_3. Por lo tanto, **el flujo neto a través de *cualquier* superficie cerrada que rodea a una carga puntual q tiene un valor de q/ϵ_0 y es independiente de la forma de la superficie.**

Ahora considere una carga puntual localizada en el exterior de una superficie cerrada con forma arbitraria, como se observa en la figura 24.8. Como puede ver, cualquier línea de campo eléctrico que entre en la superficie saldrá de la misma en algún otro punto. El número de líneas de campo eléctrico que entran en la superficie es igual al número de líneas que salen. Por lo tanto, **el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada que no rodea a ninguna carga es igual a cero.** Si aplica este resultado al ejemplo 24.1, es fácil constatar que el flujo neto a través del cubo es cero, porque no existe ninguna carga en su interior.

Figura 24.9 El flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada depende sólo de la carga en el *interior* de dicha superficie. El flujo neto a través de la superficie S es q_1/e_0, el flujo neto a través de S' es $(q_2 + q_3)/e_0$, y el flujo neto a través de la superficie S″ es igual a cero. La carga q_4 no contribuye al flujo por las superficies, ya que está en el exterior de todas ellas.

Despliegue estos argumentos a dos casos generalizados: 1) el correspondiente a muchas cargas puntuales y 2) el de una distribución continua de la carga. Utilice otra vez el principio de sobreposición, que dice que **el campo eléctrico debido a muchas cargas es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos producidos por cada una de las cargas individuales.** Por lo tanto, puede expresar el flujo a través de cualquier superficie cerrada de la forma

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \cdots) \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

donde $\vec{\mathbf{E}}$ es el campo eléctrico total en cualquier punto sobre la superficie, producido por la adición vectorial de los campos eléctricos en dicho punto, debido a las cargas individuales. Considere el sistema de cargas que se muestra en la figura 24.9. La superficie S rodea únicamente una carga, q_1; por lo que el flujo neto a través de S es q_1/e_0. El flujo a través de S debido a las cargas q_2, q_3 y q_4 exteriores a S es igual a cero porque cada una de las líneas de campo eléctrico que entran en S en algún punto salen por otro. La superficie S' rodea a las cargas q_2 y q_3; de ahí que el flujo neto a través de S' sea igual a $(q_2 + q_3)/e_0$. Por último, el flujo neto a través de la superficie S'' es igual a cero, ya que no existe carga alguna en su interior. Esto es, *todas* las líneas de campo eléctrico que entran en S'' en algún punto salen por otro. Observe que la carga q_4 no contribuye al flujo neto a través de ninguna de las superficies, ya que está en el exterior de todas ellas.

La **ley de Gauss,** que es una generalización de lo anterior, dice que el flujo neto a través de *cualquier* superficie cerrada es

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \tag{24.6}$$

◄ Ley de Gauss

donde q_{in} representa la carga neta en el interior de la superficie y $\vec{\mathbf{E}}$ el campo eléctrico en cualquier punto de la misma.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 24.1

Un flujo nulo no significa un campo nulo

Considere dos situaciones en las cuales a través de una superficie cerrada el flujo es cero, ya sea porque no hay partículas con carga rodeadas por la superficie, o porque existen partículas con carga rodeadas por la superficie, pero la carga neta interior es cero. En cualquiera de estas situaciones, es *incorrecto* concluir que el campo eléctrico sobre la superficie es igual a cero. La ley de Gauss dice que el *flujo* eléctrico es proporcional a la carga encerrada, no al *campo* eléctrico.

Al utilizar la ecuación 24.6, es necesario observar que a pesar de que la carga q_{in} es la carga neta en el interior de la superficie gaussiana, $\vec{\mathbf{E}}$ representa el *campo eléctrico total,* que incluye contribuciones provenientes tanto del interior como del exterior de la superficie.

En teoría, la ley de Gauss puede ser resuelta en función de $\vec{\mathbf{E}}$ para determinar el campo eléctrico debido a un sistema de cargas o a una distribución continua de las mismas, sin embargo, en la práctica, este tipo de solución sólo es aplicable a un número limitado de situaciones muy simétricas. En la siguiente sección se aplica la ley de Gauss para evaluar el campo eléctrico para distribuciones de carga con simetrías esféricas, cilíndricas o planares. Si es posible elegir con cuidado la superficie gaussiana que rodea a la distribución de cargas, se puede simplificar la integral de la ecuación 24.6.

Pregunta rápida 24.2 Si el flujo neto que pasa a través de una superficie gaussiana es cero, las cuatro declaraciones siguientes *podrían ser verdaderas.* ¿Cuál de ella es *cierta*? a) No hay cargas dentro de la superficie. b) La carga neta dentro de la superficie es cero. c) El campo eléctrico es cero en cualquier lugar de la superficie. d) El número de líneas del campo eléctrico que entra a la superficie es igual al número que sale de ella.

EJEMPLO CONCEPTUAL 24.2 Flujo debido a una carga puntual

Una superficie gaussiana esférica rodea a una carga puntual q. Describa qué le sucede al flujo total a través de la superficie, si **A)** la carga se triplica, **B)** se duplica el radio de la esfera, **C)** la superficie se cambia a la forma de un cubo, y **D)** la carga se mueve a otro punto dentro de la superficie.

SOLUCIÓN

A) El flujo que pasa a través de la superficie se triplica ya que el flujo es proporcional a la cantidad de carga dentro de la superficie.

B) El flujo no cambia, ya que todas las líneas de campo eléctrico pasan a través de la esfera, cualquiera que sea su radio.

C) El flujo no cambia, aun cuando la forma de la superficie gaussiana cambie, ya que todas las líneas de campo eléctrico de la carga pasan a través de la superficie, sin importar su forma.

D) El flujo no cambia cuando la carga se pasa a otra ubicación dentro de la superficie, ya que la ley de Gauss se refiere a la carga total encerrada, sin considerar la ubicación de la carga dentro de la esfera.

24.3 Aplicación de la ley de Gauss a varias distribuciones de carga

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 24.2

Las superficies gaussianas no son reales

La superficie gaussiana es una superficie imaginaria que se elige para satisfacer las condiciones mencionadas en este caso. No tiene que coincidir con una superficie física en una situación determinada.

Como se mencionó, la ley de Gauss es útil para determinar campos eléctricos cuando la distribución de carga está caracterizada por un alto grado de simetría. Los ejemplos siguientes muestran cómo escoger la superficie gaussiana que permita simplificar la integral de superficie conocida en la ecuación 24.6 y determinar el campo eléctrico. Al seleccionar la superficie, siempre debe aprovechar la simetría de la distribución de la carga de manera que retire a E de la integral y la resuelva. El objetivo en este tipo de cálculo es encontrar una superficie que satisfaga una o más de las condiciones siguientes:

1. Demostrar por simetría que el valor del campo eléctrico es constante sobre la superficie.
2. Que el producto punto de la ecuación 24.6 se expresa como un producto algebraico simple $E\,dA$, ya que $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\mathbf{A}}$ son paralelos entre sí.
3. Que el producto punto de la ecuación 24.6 es cero, ya que $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\mathbf{A}}$ son perpendiculares entre sí.
4. Que el campo eléctrico es igual a cero sobre la superficie.

Diferentes porciones de la superficie gaussiana satisfacen varias condiciones en tanto que cada porción satisfaga al menos una condición. Estas cuatro condiciones son utilizadas en los ejemplos del resto de este capítulo.

EJEMPLO 24.3 Distribución de carga con simetría esférica

Una esfera sólida aislante con radio a tiene una densidad de carga volumétrica uniforme r y tiene una carga positiva total Q (figura 24.10).

A) Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto afuera de la esfera.

Figura 24.10 (Ejemplo 24.3) Esfera aislante con carga uniforme de radio a y carga total Q. a) Para puntos afuera de la esfera, se dibuja una gran superficie gaussiana esférica concéntrica con la esfera. En diagramas como éste, la línea discontinua representa la intersección de la superficie gaussiana con el plano de la página. b) Para puntos adentro de la esfera, se dibuja una superficie gaussiana esférica más pequeña que la esfera.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe cómo difiere este problema de la explicación anterior de la ley de Gauss. El campo eléctrico debido a cargas puntuales se explicó en la sección 24.2. Ahora se considera el campo eléctrico debido a una distribución de carga. En el capítulo 23 encontró el campo para varias distribuciones, al integrar sobre la distribución. En este capítulo debe encontrar el campo eléctrico mediante la ley de Gauss.

Categorizar Puesto que la distribución de la carga es uniforme en toda la esfera, la distribución de carga tiene simetría esférica y se puede aplicar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico.

Analizar Para reflejar la simetría esférica, elija una superficie gaussiana esférica de radio r, concéntrica con la esfera, como se muestra en la figura 24.10a. Para esta elección, la condición 2) se satisface en cualquier parte sobre la superficie y $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{A} = EdA$

Sustituya $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{A}$ en la ley de Gauss con $E\,dA$:

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E\,dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por simetría, E es constante en todas partes sobre la superficie, lo que satisface la condición 1), de modo que se puede retirar E de la integral:

$$\oint E\,dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Al resolver para E:

$$1)\quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e\frac{Q}{r^2}\quad (\text{para } r > a)$$

Finalizar Este campo es idéntico al de una carga puntual. Por lo tanto, **el campo eléctrico debido a una esfera con carga uniforme en la región externa a la esfera es *equivalente* a una carga puntual ubicada en el centro de la esfera.**

B) Encuentre la magnitud del campo eléctrico en un punto adentro de la esfera.

SOLUCIÓN

Analizar En este caso, elija una superficie gaussiana esférica que tenga radio $r < a$, concéntrica con la esfera aislante (figura 24.10b). Sea V' el volumen de esta esfera más pequeña. Para aplicar la ley de Gauss en esta situación, reconozca que la carga q_{in} dentro de la superficie gaussiana de volumen V' es menor que Q.

Calcule q_{in} usando $q_{in} = \rho V'$:

$$q_{in} = \rho V' = \rho\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Observe que las condiciones 1) y 2) se satisfacen en todas partes sobre la superficie gaussiana en la figura 24.10b. Aplique la ley de Gauss en la región $r < a$:

$$\oint E\,dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Resuelva para E y sustituya para q_{in}:

$$E = \frac{q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r$$

Sustituya $\rho = Q/\frac{4}{3}\pi a^3$ y $\epsilon_0 = 1/4\pi k_e$:

$$(2) \quad E = \frac{(Q/\frac{4}{3}\pi a^3)}{3(1/4\pi k_e)} r = k_e \frac{Q}{a^3} r \quad (\text{para } r < a)$$

Finalizar Este resultado para E difiere del obtenido en el inciso A). Muestra que $E \to 0$ conforme $r \to 0$. Por lo tanto, el resultado elimina el problema que existiría en $r = 0$ si E variara como $1/r^2$ dentro de la esfera como lo hace afuera de la esfera. Es decir: si $E \propto 1/r^2$ para $r < a$, el campo sería infinito en $r = 0$, lo que es físicamente imposible.

¿Qué pasaría si? Suponga que la posición radial $r = a$ se alcanza desde adentro de la esfera y desde el exterior. ¿Se obtiene el mismo valor del campo eléctrico desde ambas direcciones?

Respuesta La ecuación 1) muestra que el campo eléctrico se aproxima a un valor desde el exterior conocido por

$$E = \lim_{r \to a} \left(k_e \frac{Q}{r^2} \right) = k_e \frac{Q}{a^2}$$

Desde el interior, la ecuación 2) proporciona

$$E = \lim_{r \to a} \left(k_e \frac{Q}{a^3} r \right) = k_e \frac{Q}{a^3} a = k_e \frac{Q}{a^2}$$

En consecuencia, el valor del campo es el mismo, ya sea que se llegue a la superficie desde ambas direcciones. En la figura 24.11 se muestra una gráfica de E en función de r. Observe que la magnitud del campo es continua.

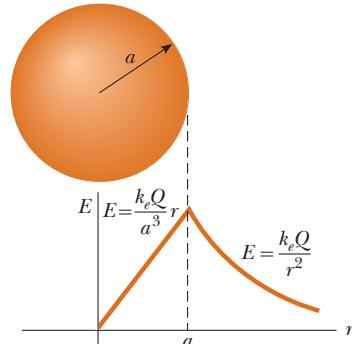



Figura 24.11 (Ejemplo 24.3) Gráfica de E en función de r para una esfera aislante con carga uniforme. El campo eléctrico dentro de la esfera ($r < a$) varía linealmente con r. El campo afuera de la esfera ($r > a$) es el mismo que el de una carga puntual Q ubicada en $r = 0$.

EJEMPLO 24.4 Distribución de carga con simetría cilíndrica

Encuentre el campo eléctrico a una distancia r desde una línea de carga positiva de longitud infinita y carga constante por unidad de longitud λ (figura 24.12a).

SOLUCIÓN

Conceptualizar La línea de carga es *infinitamente* larga. Por consiguiente, el campo es el mismo en todos los puntos equidistantes de la línea, sin importar la posición vertical del punto en la figura 24.12a.

Categorizar Ya que la carga está distribuida uniformemente a lo largo de la línea, la distribución de carga tiene simetría cilíndrica y se puede aplicar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico.

Figura 24.12 (Ejemplo 24.4) a) Línea infinita de carga rodeada por una superficie gaussiana cilíndrica concéntrica con la línea. b) Una vista lateral muestra que el campo eléctrico en la superficie cilíndrica es constante en magnitud y perpendicular a la superficie.

Analizar La simetría de la distribución de carga requiere que $\vec{\mathbf{E}}$ sea perpendicular a la línea de carga y dirigida hacia afuera, como se muestra en las figuras 24.12a y b. Para reflejar la simetría de la distribución de carga, elija una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud ℓ que sea coaxial con la línea de carga. Para la parte curva de esta superficie, $\vec{\mathbf{E}}$ es constante en magnitud y perpendicular a la superficie en cada punto, lo que satisface las condiciones 1) y 2). Además, el flujo a través de los extremos del cilindro gaussiano es cero porque $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo a estas superficies. Esta es la primera aplicación de la condición 3).

Debe tomar la integral de superficie en la ley de Gauss sobre toda la superficie gaussiana. Sin embargo, ya que $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ es cero para los extremos planos del cilindro, restrinja la atención sólo a la superficie curva del cilindro.

Aplique la ley de Gauss y las condiciones 1) y 2) para la superficie curva, y note que la carga total dentro de la superficie gaussiana es $\lambda\ell$:

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E \oint dA = EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$$

Sustituya el área $A = 2\pi r\ell$ de la superficie curva:

$$E(2\pi r\ell) = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$$

Resuelva para la magnitud del campo eléctrico:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e\frac{\lambda}{r} \quad \textbf{(24.7)}$$

Finalizar Este resultado muestra que el campo eléctrico que corresponde a una distribución de carga con simetría cilíndrica varía como $1/r$, mientras que el campo externo a una distribución de carga con simetría esférica varía al igual que $1/r^2$. La ecuación 24.7 también se puede deducir mediante integración directa sobre la distribución de carga. (Véase el problema 29 del capítulo 23.)

¿Qué pasaría si? ¿Y si el segmento de línea en este ejemplo no fuese infinitamente largo?

Respuesta Si la línea de carga de este ejemplo tuviese longitud finita, el campo eléctrico no se conocería por la ecuación 24.7. Una línea de carga finita no tiene suficiente simetría para utilizar la ley de Gauss, porque la magnitud del campo eléctrico ya no es constante sobre la superficie del cilindro gaussiano: el campo cerca de los extremos de la línea sería diferente de los que se encuentren lejos de los extremos. Por lo tanto, la condición 1) no se satisfaría en esta situación. Además, $\vec{\mathbf{E}}$ no es perpendicular a la superficie cilíndrica en todos los puntos: los vectores de campo cerca de los extremos tendrían un componente paralelo a la línea. Por consiguiente, la condición 2) no se satisfaría. Para puntos cerca de una línea de carga finita y lejos de los extremos, la ecuación 24.7 da una buena aproximación del valor del campo.

Se le deja demostrar (véase el problema 27) que el campo eléctrico dentro de una barra de radio finito y longitud infinita, con carga uniforme, es proporcional a r.

EJEMPLO 24.5 Plano de carga

Encuentre el campo eléctrico debido a un plano infinito de carga positiva con densidad de carga superficial uniforme σ.

Figura 24.13 (Ejemplo 24.5) Superficie gaussiana cilíndrica que penetra un plano infinito de carga. El flujo de EA a través de cada extremo de la superficie gaussiana y cero a través de su superficie curva.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe que el plano de carga es *infinitamente* largo. Por lo tanto, el campo eléctrico es el mismo en todos los puntos cerca del plano.

Categorizar Ya que la carga se distribuye de manera uniforme en el plano, la distribución de carga es simétrica; en consecuencia, se puede usar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico.

Analizar Por simetría, $\vec{\mathbf{E}}$ debe ser perpendicular al plano en todos los puntos. La dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ se aleja de las cargas positivas, lo que indica que la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ en un lado del plano debe ser opuesta a su dirección sobre el otro lado, como se muestra en la figura 24.13. Una superficie gaussiana que refleja la simetría es un pequeño cilindro cuyo eje es perpendicular al plano y cada uno de sus extremos tiene un área A y son equidistantes del plano. Ya que $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo a la superficie curva, y debido a eso perpendicular a $d\vec{\mathbf{A}}$ en todas partes sobre la superficie, la condición 3) se satisface y no hay aportación a la integral de superficie por parte de esta superficie. Para los extremos planos del cilindro, se satisfacen las condiciones 1) y 2). El flujo a través de cada extremo del cilindro es EA; por esto, el flujo total a través de toda la superficie gaussiana es justo la que atraviesa los extremos, $\Phi_E = 2EA$.

Escriba la ley de Gauss para esta superficie y observe que la carga encerrada es $q_{\text{in}} = \sigma A$:

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Resuelva para E:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \textbf{(24.8)}$$

Finalizar Ya que la distancia desde cada extremo plano del cilindro al plano no aparece en la ecuación 24.8, se concluye que $E = \sigma/2\epsilon_0$ está a *cualquier* distancia desde el plano. Es decir: el campo es uniforme en todas partes.

¿Qué pasaría si? Suponga que dos planos infinitos de carga son mutuamente paralelos, uno con carga positiva y el otro con carga negativa. Ambos planos tienen la misma densidad de carga superficial. ¿En esta situación a qué se parece el campo eléctrico?

Respuesta Los campos eléctricos debidos a los dos planos se suman en la región entre los planos, lo que resulta en un campo uniforme de magnitud σ/ϵ_0, y se cancela en otra parte para dar un campo de cero. Este método es una forma práctica de lograr campos eléctricos uniformes.

EJEMPLO CONCEPTUAL 24.6 ¡En este caso no utilice la ley de Gauss!

Explique por qué no es posible utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico cercano a un dipolo eléctrico, a un disco con carga o a un triángulo con una carga puntual en cada vértice.

SOLUCIÓN

Las distribuciones de carga de todas estas configuraciones no tienen una simetría suficiente que haga práctico el uso de la ley gaussiana. En este caso no es posible encontrar una superficie cerrada que rodee a cualquiera de las distribuciones y satisfaga una o más de las cuatro condiciones mencionadas al principio de esta sección.

24.4 Conductores en equilibrio electrostático

Como aprendió en la sección 23.2, un buen conductor eléctrico contiene cargas (electrones) que no se encuentran unidas a ningún átomo y debido a eso tienen la libertad de moverse en el interior del material. Cuando dentro de un conductor no existe ningún movimiento neto de carga, el conductor está en **equilibrio electrostático.** Un conductor en equilibrio electrostático tiene las siguientes propiedades:

Propiedades de un conductor en equilibrio electrostático ▶

1. En el interior del conductor el campo eléctrico es cero, si el conductor es sólido o hueco.
2. Si un conductor aislado tiene carga, ésta reside en su superficie.
3. El campo eléctrico justo fuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud s/e_0, donde s es la densidad de carga superficial en ese punto.
4. En un conductor de forma irregular, la densidad de carga superficial es máxima en aquellos puntos donde el radio de curvatura de la superficie es el menor.

En el análisis siguiente se comprueban las primeras tres propiedades. Se presenta la cuarta propiedad para tener una lista completa de las mismas para conductores en equilibrio electrostático (pero esta última no podrá ser comprobada sino hasta el capítulo 25.)

Es posible comprender la primera propiedad si piensan en una placa conductora colocada en un campo eléctrico externo $\vec{\mathbf{E}}$ (figura 24.14). El campo eléctrico en el interior del conductor *debe ser* igual a cero bajo la hipótesis de que existe equilibrio electrostático. En caso de que el campo no sea cero, los electrones libres en el interior del conductor experimentarían una fuerza eléctrica ($\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$) y, debido a ella, se acelerarían. Sin embargo, este movimiento de electrones, significaría que el conductor no está en equilibrio electrostático. Por lo tanto, la existencia de un equilibrio electrostático es consistente solamente cuando se tiene un campo cero dentro del conductor.

Figura 24.14 Placa conductora en un campo eléctrico externo $\vec{\mathbf{E}}$. Las cargas inducidas en las dos superficies de la placa producen un campo eléctrico que se opone al campo externo, lo que produce en el interior de la placa un campo eléctrico resultante igual a cero.

Vea cómo se da este campo cero. Antes de aplicar el campo externo, en todo el volumen del conductor están distribuidos electrones libres de manera uniforme. Al aplicar el campo externo, los electrones libres se aceleran hacia la izquierda, como se ve en la figura 24.14, lo que genera un plano con carga negativa que se acumula en la superficie izquierda. El movimiento de los electrones hacia la izquierda causa un plano de carga positiva en la superficie derecha. Estos planos de carga crean un campo eléctrico adicional en el interior del conductor que se opone al campo externo. Conforme se mueven los electrones, las densidades de carga superficial de las superficies izquierda y derecha se incrementan

hasta que la magnitud del campo interno es igual a la magnitud del externo, lo que resulta en un campo eléctrico cero en el interior del conductor. El tiempo que necesita un buen conductor para alcanzar el equilibrio es del orden de 10^{-16} s, lo que para la mayor parte de los efectos se considera instantáneo.

Si el conductor es hueco, el campo eléctrico dentro del conductor también es cero, ya sea que considere puntos en el conductor o en la cavidad dentro del conductor. El valor cero del campo eléctrico en la cavidad es más fácil de argumentar con el concepto de potencial eléctrico, así que este tema se abordará en la sección 25.6.

Es posible utilizar la ley de Gauss para verificar la segunda propiedad de un conductor en equilibrio electrostático. La figura 24.15 muestra un conductor de forma arbitraria. Se ha dibujado una superficie gaussiana en el interior del conductor, que puede acercarse a la superficie del conductor tanto como se desee. Como acaba de ver, el campo eléctrico en todos los puntos del interior del conductor es igual a cero cuando se encuentra en equilibrio electrostático. Por lo tanto, el campo eléctrico debe ser cero en todos los puntos de la superficie gaussiana, en cumplimiento de la condición 4) de la sección 24.3 y el flujo neto que pasa a través de la superficie gaussiana es cero. De este resultado y de la ley de Gauss se concluye que la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es cero. Ya que no puede existir ninguna carga neta en el interior de la superficie gaussiana (que colocó de manera arbitraria muy cerca de la superficie del conductor), **cualquier carga neta en el conductor deberá residir sobre su superficie.** La ley de Gauss no indica la forma en que esta carga excesiva se distribuye sobre la superficie del conductor; dice, exclusivamente, que reside sobre la superficie.

Figura 24.15 Conductor con forma arbitraria. La línea discontinua representa una superficie gaussiana que puede acercarse a la superficie del conductor tanto como uno lo desee.

También es posible utilizar la ley de Gauss para verificar la tercera propiedad. En primer término, debe notar que si el vector de campo $\vec{\mathbf{E}}$ tuviera algún componente paralelo a la superficie del conductor, los electrones libres estarían sujetos a una fuerza eléctrica y se moverían a lo largo de la superficie; en este caso, el conductor no estaría en equilibrio, por lo que el vector de campo debe ser perpendicular a la superficie. Para determinar la magnitud del campo eléctrico se dibujará una superficie gaussiana en forma de un pequeño cilindro cuyas caras extremas queden paralelas al conductor (figura 24.16). Parte del cilindro queda justo fuera del conductor y parte está en el interior. El campo es perpendicular a la superficie del conductor si parte de la condición de equilibrio electrostático. Por lo tanto, ha satisfecho la condición 3) de la sección 24.3 en lo que se refiere a la parte curva de la superficie gaussiana cilíndrica: no existe flujo a través de esta parte de la superficie gaussiana, ya que $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo a la superficie. A través de la cara plana del cilindro en el interior del conductor no existe flujo porque en este caso $\vec{\mathbf{E}} = 0$; con ello se satisface la condición 4). Por esto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana corresponde al flujo a través de la cara plana en la parte exterior del conductor, donde el campo es perpendicular a la superficie gaussiana. Si para esta cara utiliza las condiciones 1) y 2), el flujo es igual a EA, siendo E el campo eléctrico justo fuera del conductor y A el área de la cara del cilindro. Al aplicar la ley de Gauss a esta superficie, obtiene

Figura 24.16 A fin de calcular el campo eléctrico que existe justo afuera de un conductor con carga se utiliza una superficie gaussiana con forma de un cilindro pequeño. El flujo a través de la superficie gaussiana es EA. Recuerde que en el interior del conductor $\vec{\boldsymbol{E}}$ es igual a cero.

$$\Phi_E = \oint E\,dA = EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

donde aprovecha que $q_{\text{in}} = \sigma$A. Si resuelve para E obtiene el campo eléctrico justo afuera de un conductor con carga

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(24.9)}$$

Pregunta rápida 24.3 Su pequeño hermano gusta de frotar sus pies sobre la alfombra para después tocarlo y darle una descarga. Mientras usted intenta escapar, descubre en el sótano un cilindro hueco de metal, lo suficientemente grande como para introducirse en su interior. ¿En qué casos *no* sufrirá descarga alguna? a) Si se encuentra en el interior del cilindro, y hace contacto con la superficie interior y su hermano con carga toca la superficie metálica exterior del cilindro; b) Si su hermano con carga está en el interior y toca la superficie interior de metal y usted está en el exterior y toca la superficie exterior del cilindro; c) Si ambos están en el exterior del cilindro y tocan la superficie exterior de metal pero sin tocarse directamente entre ustedes.

EJEMPLO 24.7 Una esfera dentro de un cascarón esférico

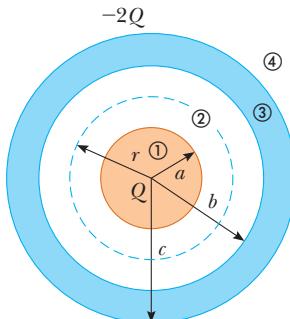
Una esfera aislante sólida, de radio a, tiene una carga positiva neta Q distribuida de manera uniforme por todo su volumen. Un cascarón esférico conductor, con radio interior b y radio exterior c, es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga neta $-2Q$. Con la aplicación de la ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico en las regiones marcadas, ①, ②, ③ y ④ en la figura 24.17 y la distribución de carga en el cascarón, cuando todo el sistema está en equilibrio electrostático.

Figura 24.17 (Ejemplo 24.7) Una esfera aislante de radio a y que porta una carga Q está rodeada por un cascarón esférico conductor que porta una carga $-2Q$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe cómo este problema difiere del ejemplo 24.3. La esfera con carga de la figura 24.10 ahora está rodeada por un cascarón que tiene una carga de $-2Q$.

Categorizar La carga está distribuida uniformemente en toda la esfera y se sabe que la carga en el cascarón conductor se distribuye de manera uniforme sobre las superficies. Por lo tanto, el sistema tiene simetría esférica y la ley de Gauss es aplicable para encontrar el campo eléctrico.

Analizar En la región ②, entre la superficie de la esfera sólida y la superficie interna del cascarón, se construye una superficie gaussiana esférica de radio r, donde $a < r < b$, y observe que la carga dentro de esta superficie es $+Q$ (la carga en la esfera sólida). Debido a la simetría esférica, las líneas de campo eléctrico se deben dirigir radialmente hacia afuera y ser constantes en magnitud sobre la superficie gaussiana.

La carga sobre el cascarón conductor crea campo eléctrico cero en la región $r < b$, así que el cascarón no tiene efecto sobre el campo debido a la esfera. En consecuencia, escriba una expresión para el campo en la región ② como si se debiera a la esfera del inciso A) del ejemplo 24.3:

$$E_2 = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{para } a < r < b)$$

Puesto que el cascarón conductor crea un campo cero en su interior, tampoco tiene efecto sobre el campo adentro de la esfera. Por lo tanto, escriba una expresión para el campo en la región ① como si se debiera a la esfera del inciso B) del ejemplo 24.3:

$$E_1 = k_e \frac{Q}{a^3} r \quad (\text{para } r < a)$$

En la región ④, donde $r > c$, construya una superficie gaussiana esférica; esta superficie rodea una carga total de $q_{\text{in}} = Q + (-2Q) = -Q$. Por lo tanto, modele la distribución de carga como una esfera con carga $-Q$ y escriba una expresión para el campo en la región ④ del inciso A) del ejemplo 24.3:

$$E_4 = -k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{para } r > c)$$

En la región ③, el campo eléctrico debe ser cero porque el cascarón esférico es un conductor en equilibrio:

$$E_3 = 0 \quad (\text{para } b < r < c)$$

Construya una superficie gaussiana de radio r, donde $b < r < c$, y observe que q_{in} debe ser cero porque $E_3 = 0$. Encuentre la cantidad de carga q_{interior} en la superficie interior del cascarón:

$$q_{\text{in}} = q_{\text{esfera}} + q_{\text{interior}}$$

$$q_{\text{interior}} = q_{\text{in}} - q_{\text{esfera}} = 0 - Q = -Q$$

Finalizar La carga sobre la superficie interior del cascarón esférico debe ser $-Q$ para cancelar la carga $+Q$ sobre la esfera sólida y dar un campo eléctrico cero en el material del cascarón. Ya que la carga neta en el cascarón es $-2Q$, su superficie exterior debe tener una carga $-Q$.

¿Qué pasaría si? ¿Cómo diferirían los resultados de este problema si la esfera fuese conductora en lugar de aisladora?

Respuesta El único cambio sería en la región ①, donde $r < a$. Puesto que no puede haber carga dentro de un conductor en equilibrio electrostático, $q_{in} = 0$ para una superficie gaussiana de radio $r < a$; por lo tanto, sobre la base de la ley de Gauss y simetría, $E_1 = 0$. En las regiones ②, ③ y ④, no habría forma de determinar si la esfera es conductora o aislante.

Resumen

DEFINICIONES

El flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que penetran una superficie. Si el campo eléctrico es uniforme y forma un ángulo θ con la normal a una superficie de área A, el flujo eléctrico a través de la superficie es

$$\Phi_E = EA\cos\theta \qquad \textbf{(24.2)}$$

En general, el flujo eléctrico a través de una superficie es

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{superficie}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad \textbf{(24.3)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **ley de Gauss** dice que el flujo eléctrico neto Φ_E a través de cualquier superficie gaussiana cerrada es igual a la carga *neta* q_{in} dentro de la superficie, dividida por ϵ_0:

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(24.6)}$$

Al usar la ley de Gauss, se puede calcular el campo eléctrico debido a varias distribuciones de carga simétricas.

Un conductor en **equilibrio electrostático** tiene las siguientes propiedades:

1. El campo eléctrico es cero en todas partes dentro del conductor, ya sea que el conductor sea sólido o hueco.
2. Si un conductor aislado tiene una carga, la carga reside en su superficie.
3. El campo eléctrico justo afuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud σ/ϵ_0, donde σ es la densidad de carga superficial en dicho punto.
4. En un conductor con forma irregular, la densidad de carga superficial es mayor en posiciones donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño.

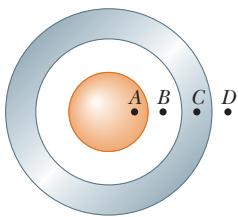
Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. En invierno, el sol está en el cielo más abajo que en verano. ¿Cómo incide lo anterior en el flujo de luz solar sobre un área determinada de la superficie de la Tierra? ¿Cómo afecta lo anterior al clima?
2. Si de una superficie gaussiana salen más líneas de campo eléctrico de las que entran, ¿qué se puede concluir acerca de la carga neta encerrada en la superficie?
3. En una región del espacio en la cual no existen cargas hay un campo eléctrico uniforme. ¿Qué se puede concluir acerca del flujo eléctrico neto a través de una superficie gaussiana colocada en esta región del espacio?
4. **O** Una partícula con carga q se ubica dentro de una superficie gaussiana cúbica. No hay otras cargas en las cercanías. **i)** Si la partícula está en el centro del cubo, ¿cuál es el flujo a través de cada una de las caras del cubo? a) 0, b) q/ϵ_0, c) $q/2\,\epsilon_0$, d) $q/4\epsilon_0$, e) $q/6\epsilon_0$, f) $q/8\epsilon_0$, g) depende del tamaño del cubo. **ii)** Si la partícula se puede mover a cualquier punto dentro del cubo, ¿qué valor máximo puede alcanzar el flujo a través de una cara? Elija entre las mismas posibilidades. **iii)** Si la partícula se puede mover a cualquier parte dentro del cubo o sobre su superficie, ¿cuál es el mínimo flujo posible a través de una cara? Elija entre las mismas posibilidades.
5. **O** Una superficie gaussiana cúbica rodea un largo filamento recto con carga que pasa perpendicularmente a través de dos caras opuestas. No hay otras cargas en las cercanías. **i)** ¿En cuántas caras del cubo el campo eléctrico es cero? a) 0, b) 2, c) 4, d) 6. **ii)** ¿A través de cuántas de las caras del cubo el flujo eléctrico es cero? Elija entre las mismas posibilidades.

6. **O** Una superficie gaussiana cúbica se divide en dos partes mediante una gran hoja con carga, paralela a sus caras superior e inferior. No hay otras cargas en las cercanías. **i)** ¿Sobre cuántas de las caras del cubo el campo eléctrico es cero? a) 0, b) 2, c) 4, d) 6. **ii)** ¿A través de cuántas de las caras del cubo el flujo eléctrico es cero? Elija entre las mismas posibilidades.
7. **O** Dos esferas sólidas, ambas de 5 cm de radio, portan cargas totales idénticas de 2 μC. La esfera A es un buen conductor. La esfera B es un aislador, y su carga se distribuye de manera uniforme en todo su volumen. **i)** ¿Cómo comparar las magnitudes de los campos eléctricos que crean por separado a una distancia radial de 6 cm? a) $E_A > E_B = 0$, b) $E_A > E_B > 0$, c) $E_A = E_B > 0$, d) $E_A = E_B = 0$, e) $0 < E_A < E_B$, f) $0 = E_A < E_B$. **ii)** ¿Cómo comparar las magnitudes de los campos eléctricos que crean por separado radios de 4 cm? Elija entre las mismas posibilidades.
8. Si se conoce la carga total en el interior de una superficie cerrada pero no se especifica la distribución de la carga, ¿puede utilizar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico? Explique.
9. Explique por qué el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que tiene una carga encerrada conocida es independiente del tamaño o forma de la superficie.
10. Respecto a la naturaleza repulsiva de la fuerza que se genera entre cargas iguales y a la libertad de movimiento de las cargas dentro de un conductor, explique por qué un exceso de carga en un conductor aislado debe residir sobre su superficie.
11. **O** Una esfera aislante sólida de 5 cm de radio, tiene una carga eléctrica distribuida uniformemente en todo su volumen. Concéntrico con la esfera hay un cascarón esférico conductor sin carga neta, como se muestra en la figura P24.11. El radio interior del cascarón mide 10 cm, y el radio exterior 15 cm. No hay otras cargas en las cercanías. a) Clasifique la magnitud del campo eléctrico en los puntos A (a un radio de 4 cm), B (radio de 8 cm), C (radio de 12 cm) y D (radio 16 cm) de mayor a menor. Muestre cualquier caso de igualdad en su clasificación. b) De igual modo, clasifique el flujo eléctrico a través de las superficies esféricas concéntricas a través de los puntos A, B, C y D.

Figura P24.11 Pregunta 11 y problema 44.

12. **O** Un cable coaxial consiste de un filamento recto largo rodeado por cubierta conductora cilíndrica, coaxial larga. Suponga que la carga Q está en el filamento, sobre la cubierta la carga neta es cero y el campo eléctrico es $E_1\hat{\mathbf{i}}$ en un punto particular P a la mitad entre el filamento y la superficie interior de la cubierta. A continuación, coloque el cable en un campo externo uniforme $-E_1\hat{\mathbf{i}}$. En tal caso, ¿cuál es el componente x del campo eléctrico P? a) 0, b) entre 0 y E_1, c) E_1, d) mayor que E_1, e) entre 0 y $-E_1$, f) $-E_1$, g) menor que $-E_1$.
13. Una persona entra en una gran esfera metálica hueca aislada de la tierra. Si a la esfera se le deposita una carga considerable, ¿la persona resultará lastimada si toca el interior de la esfera? Explique qué pasaría si la persona tiene además una carga inicial cuyo signo es opuesto al de la carga de la esfera.
14. **O** Una gran cubierta metálica y esférica no tiene carga. Se apoya sobre una base aislante y tiene un pequeño orificio en la parte superior. Una pequeña tachuela con carga Q se baja mediante un hilo de seda a través del orificio hacia el interior de la cubierta. **i)** ¿Ahora cuál es la carga sobre la superficie interior de la cubierta? a) Q, b) $Q/2$, c) 0, d) $-Q/2$, e) $-Q$. Elija sus respuestas a las siguientes partes entre las mismas posibilidades. **ii)** ¿Cuál es la carga sobre la superficie exterior de la cubierta? **iii)** Ahora la tachuela se baja hasta tocar la superficie interior de la cubierta. Después de este contacto, ¿cuál es la carga sobre la tachuela? **iv)** ¿Ahora cuál es la carga sobre la superficie interior de la cubierta? **v)** ¿Ahora cuál es la carga sobre la superficie exterior de la cubierta?
15. Una demostración consiste en cargar un globo de látex, que es un aislante, al frotarlo con el cabello de alguien, y después pegarlo al techo o a la pared, que también son aislantes. La atracción eléctrica entre el globo con carga y la pared neutra da como resultado que el globo se adhiera a la pared. Imagine ahora dos láminas planas infinitamente grandes de material aislante. Una de las láminas tiene carga y la otra es neutra. Si éstas son puestas en contacto, ¿existirá una fuerza de atracción entre ellas, como ocurrió entre el globo y la pared?

Problemas

Sección 24.1 Flujo eléctrico

1. En un campo eléctrico uniforme se hace girar una espira de 40.0 cm de diámetro hasta encontrar la posición en la cual existe el máximo flujo eléctrico. El flujo en esta posición tiene un valor de 5.20×10^5 N · m^2/C. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?
2. Existe un campo eléctrico vertical, de 2.00×10^4 N/C de magnitud, sobre la superficie de la Tierra en un día con tormenta eléctrica. Un automóvil, con dimensión rectangular de 6.00 m por 3.00 m, viaja a lo largo de un camino de grava seca que se inclina hacia abajo a 10.0°. Determine el flujo eléctrico en el chasis del automóvil.
3. Un campo eléctrico uniforme $a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}$ atraviesa por una superficie de área A. ¿Cuál es el flujo que pasa a través de esta área si la superficie se encuentra a) en el plano yz, b) en el plano xz, c) en el plano xy?
4. Considere una caja triangular cerrada en reposo dentro de un campo eléctrico horizontal con una magnitud $E = 7.80 \times 10^4$ N/C, como se muestra en la figura P24.4. Calcule el flujo

eléctrico a través de a) la superficie rectangular vertical, b) la superficie inclinada, y c) la superficie total de la caja.

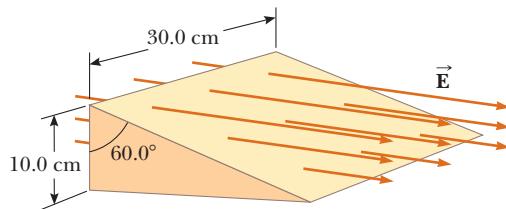



Figura P24.4 Pregunta 11 y problema 44.

5. Una pirámide de base horizontal cuadrada, de 6.00 m de lado, y con una altura de 4.00 m está colocada en un campo eléctrico vertical de 52.0 N/C. Calcule el flujo eléctrico total que pasa a través de las cuatro superficies inclinadas de la pirámide.

Sección 24.2 Ley de Gauss

6. ● El campo eléctrico presente en la superficie total de una cubierta esférica delgada de 0.750 m de radio tiene un valor de 890 N/C y apunta radialmente hacia el centro de la esfera. a) ¿Cuál es la carga neta en el interior de la superficie de la esfera? b) ¿Qué se puede concluir en relación con la naturaleza y distribución de la carga en el interior de la cubierta esférica?
7. Las siguientes cargas están localizadas en el interior de un submarino: 5.00 *m*C, −9.00 *m*C, 27.0 *m*C y −84.0 *m*C. a) Calcule el flujo eléctrico neto a través del casco del submarino. b) ¿El número de líneas de campo eléctrico que salen en comparación con las que entran es: mayor, igual o menor?
8. ● a) A una distancia d de un plano infinito está localizada una carga puntual q. Determine el flujo eléctrico a través del plano debido a la carga puntual. b) **¿Qué pasaría si?** Una carga puntual q está localizada *muy cerca* del centro de un cuadrado *muy grande* sobre la línea perpendicular a dicho cuadrado y que pasa por su centro. Determine el flujo eléctrico aproximado que pasa a través del cuadrado que se espera de la carga puntual. c) Explique por qué las respuestas a los incisos a) y b) son idénticas.
9. En la figura P24.9 se muestran cuatro superficies cerradas, S_1 a S_4, así como las cargas $-2Q$, Q y $-Q$. (Las líneas de color son las intersecciones de las superficies con el plano de la página.) Determine el flujo eléctrico a través de cada superficie.

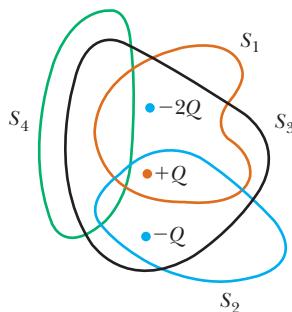



Figura P24.9

10. Una carga puntual de 12.0 *m*C está colocada en el centro de una cubierta esférica de 22.0 cm de radio. ¿Cuál es el flujo eléctrico total que pasa a través de a) la superficie del cascarón y b) cualquier superficie hemisférica de la misma? c) ¿Los resultados dependen del radio de la cubierta? Explique su respuesta.
11. Una carga puntual Q se localiza justo por encima del centro de la cara plana de un hemisferio de radio R, como se muestra en la figura P24.11. ¿Cuál es el flujo eléctrico que pasa a) a través de la superficie curva y b) a través de la cara plana?

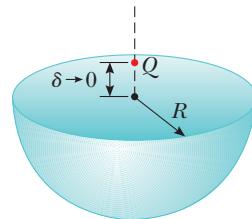



Figura P24.11

12. El aire que está por encima de cierta región a una altitud sobre el nivel del suelo de 500 m, el campo eléctrico es de 120 N/C en dirección hacia abajo. A una altitud de 600 m sobre el nivel del suelo, el campo es de 100 N/C hacia abajo. ¿Cuál es la densidad de carga volumétrica promedio de la capa de aire entre estas dos alturas? ¿Es positiva o negativa?
13. Una carga puntual $Q = 5.00$ *m*C se localiza en el centro de un cubo de arista $L = 0.100$ m. Además, simétricamente alrededor de Q, como se muestra en la figura P24.13, existen otras seis cargas puntuales idénticas $q = -1.00$ *m*C. Determine el flujo eléctrico a través de una de las caras del cubo.

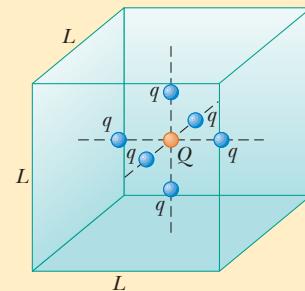



Figura P24.13 Problemas 13 y 14.

14. Una carga puntual positiva Q está en el centro de un cubo de arista L. Además, otras seis cargas puntuales negativas idénticas $-q$ están colocadas simétricamente alrededor de Q como se muestra en la figura P24.13. Determine el flujo eléctrico a través de una de las caras del cubo.
15. Una carga lineal infinitamente larga tiene carga uniforme por cada unidad de longitud l y se localiza a una distancia d del punto O, como se muestra en la figura P24.15. Determine el flujo eléctrico total a través de la superficie de una esfera de radio R con centro en O como resultado de la carga lineal. Tome en cuenta cuando $R < d$ y $R > d$.

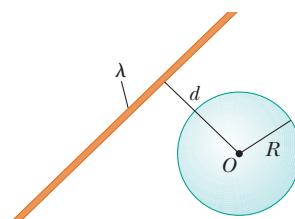



Figura P24.15

16. Una esfera hueca no conductora sin carga, con un radio de 10.0 cm, rodea una carga de 10.0 *m*C localizada en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano. Una broca de radio 1.00 mm es alineada a lo largo del eje de las *z* y se hace una perforación en la esfera. Calcule el flujo eléctrico a través de la perforación.

17. ● Una carga de 170 *m*C está en el centro de un cubo con una arista de 80.0 cm. Sin cargas en los alrededores a) Determine el flujo a través de cada una de las caras del cubo. b) Encuentre el flujo a través de la superficie total del cubo. c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cambiarían sus respuestas a los incisos a) y b) en caso de que la carga no estuviera ubicada en el centro? Explique por qué.

Sección 24.3 Aplicación de la ley de Gauss a varias distribuciones de carga

18. Una esfera sólida con un radio 40.0 cm tiene una carga positiva total de 26 *m*C con distribución uniforme en su volumen. Calcule la magnitud del campo eléctrico a las siguientes distancias del centro de la esfera: a) 0 cm, b) 10.0 cm, c) 40.0 cm y d) 60.0 cm.

19. Determine la magnitud del campo eléctrico en la superficie de un núcleo de plomo-208, que contiene 82 protones y 126 neutrones. Suponga que el núcleo de plomo tiene un volumen igual a 208 veces el volumen de un protón, considere al protón como una esfera de radio 1.20×10^{-15} m.

20. Un filamento largo y recto tiene una carga por unidad de longitud de -90.0 *m*C/m. Determine el campo eléctrico a las siguientes distancias del filamento, medidas perpendicularmente a la longitud del mismo: a) 10.0 cm, b) 20.0 cm y c) 100 cm.

21. Una hoja con carga grande horizontal y plana tiene una carga por unidad de superficie de 9.00 *m*C/m^2. Determine el campo eléctrico justo por encima del centro de la hoja.

22. Una cubierta cilíndrica con un radio de 7.00 cm y longitud de 240 cm tiene una carga con distribución uniforme sobre su superficie curva. La magnitud del campo eléctrico en un punto que está a 19.0 cm radialmente hacia afuera de su eje (medido a partir del punto medio de la cubierta) es de 36.0 kN/C. Determine a) la carga neta sobre la cubierta y b) el campo eléctrico que existe en un punto a 4.00 cm del eje, medido radialmente hacia afuera del punto medio de la cubierta.

23. Un trozo de Styrofoam de 10.0 g tiene una carga neta de -0.700 *m*C y flota por encima del centro de una gran lámina horizontal de plástico que tiene una densidad de carga uniforme en su superficie. ¿Cuál es la carga por unidad de superficie presente en la lámina de plástico?

24. a) Escriba un problema para el que la siguiente ecuación dé la solución. Incluya los datos requeridos en su enunciado de problema e identifique la única incógnita.

$$2\pi(3 \text{ cm})(8 \text{ cm})E\cos 0° + 0 + 0 = \frac{\pi(2 \text{ cm})^2(8 \text{ cm})(5 \times 10^{-6} \text{ C/m}^3)}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

b) Resuelva la ecuación para la incógnita.

25. **Problema de repaso.** Una partícula con una carga de -60.0 nC está colocada en el centro de una cubierta esférica no conductora con un radio interior igual a 20.0 cm y un radio exterior de 25.0 cm. La cubierta esférica tiene una carga con una densidad uniforme de -1.33 *m*C/m^3. Un protón se mueve en órbita circular justo en el exterior de la cubierta esférica. Calcule la rapidez del protón.

26. ● Un muro no conductor tiene una carga con densidad uniforme de 8.60 *m*C/cm^2. ¿Cuál es el campo eléctrico a 7.00 cm del muro? ¿El resultado cambia si se modifica la distancia a la pared?

27. Considere una distribución de carga cilíndrica larga de radio R con una densidad de carga uniforme r. Encuentre el campo eléctrico a una distancia r del eje, cuando $r < R$.

28. En la fisión nuclear, un núcleo de uranio 238 que contiene 92 protones puede dividirse en dos esferas más pequeñas, cada una con 46 protones y con un radio de 5.90×10^{-15} m. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica de repulsión que separa las dos esferas?

29. Considere una cubierta esférica delgada con un radio de 14.0 cm y una carga total de 32.0 *m*C con distribución uniforme sobre su superficie. Determine el campo eléctrico a) a 10.0 cm y b) a 20.0 cm del centro de distribución de la carga.

30. Llene dos globos con aire. Sujete los extremos de las cuerdas de la misma longitud desde el mismo punto, con los otros extremos unidos a los globos. Frote cada uno de ellos con lana o con su cabello, de forma que cuelguen separados por un espacio visible entre ambos. Haga estimaciones de orden de magnitud de a) la fuerza en cada uno, b) la carga de cada globo, c) el campo que cada uno de ellos genera en el centro del otro y d) el flujo total de campo eléctrico creado por cada globo. Establezca las cantidades que ha considerado como datos y los valores medidos o estimados para los mismos.

31. Un filamento recto con carga uniforme de 7.00 m de longitud tiene una carga positiva total de 2.00 *m*C. Un cilindro de cartón sin carga de 2.00 cm de longitud y 10.0 cm de radio, rodea el filamento en su parte central, y lo tiene como el eje del cilindro. A partir de aproximaciones razonables, determine a) el campo eléctrico en la superficie del cilindro y b) el flujo eléctrico total a través de dicho cilindro.

Sección 24.4 Conductores en equilibrio electrostático

32. Una placa muy grande delgada y plana de aluminio con área A tiene una carga total Q, con distribución uniforme sobre sus superficies. Existe una carga igual distribuida uniformemente sobre la superficie *superior* de una placa de vidrio idéntica en todo, compare los campos eléctricos justo por encima del centro de la cara superior de cada una de las placas.

33. Una varilla de metal larga y recta tiene un radio de 5.00 cm y una carga por unidad de longitud de 30.0 nC/m. Determine el campo eléctrico a las siguientes distancias, medidas perpendicularmente al eje de la varilla: a) 3.00 cm, b) 10.0 cm y c) 100 cm.

34. ● Una esfera sólida de cobre con un radio de 15.0 cm tiene una carga de 40.0 nC. Determine el campo eléctrico a) a 12.0 cm, b) a 17.0 cm y c) a 75.0 cm del centro de la esfera. d) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuáles serían sus respuestas si la esfera fuese hueca?

35. Una placa cuadrada de cobre de 50.0 cm de lado tiene una carga neta igual a cero y está colocada en una región de un campo eléctrico uniforme de 80.0 kN/C dirigido perpendicularmente a la placa. Determine a) la densidad de carga en cada una de las caras de la placa y b) la carga total en cada placa.

36. En cierta región del espacio, el campo eléctrico es $\vec{\mathbf{E}} = 6\,000x^2\hat{\mathbf{i}}$ N/C $\cdot$ m^2. Encuentre la densidad volumétrica de la carga eléctrica en $x = 0.300$ m. *Sugerencia:* Aplique la ley de Gauss a una caja entre $x = 0.300$ m y $x = 0.300$ m $+ dx$.

37. Dos esferas conductoras idénticas con un radio de 0.500 cm están conectadas por un alambre conductor ligero de 2.00 m de largo. En una de las esferas se coloca una carga de 60.0 *m*C. Suponga que la distribución de la carga superficial en cada una es uniforme. Determine la tensión en el alambre.

38. ● Una esfera metálica sólida, de radio a, tiene carga total Q sin otra carga en los alrededores. El campo eléctrico justo afue-

ra de su superficie es k_eQ/a^2 radialmente hacia afuera. ¿El campo eléctrico en este caso también se conoce por σ/ϵ_0? ¿Por $\sigma/2\epsilon_0$? Explique si debe esperar que sea igual a alguna de estas cantidades.

39. Un alambre largo y recto, rodeado por un cilindro de metal hueco cuyo eje coincide con el suyo, tiene una carga por unidad de longitud l, y el cilindro una carga por unidad de longitud $2l$. Con esta información, utilice la ley de Gauss para determinar a) la carga por unidad de longitud en las superficies interna y externa del cilindro y b) el campo eléctrico exterior al cilindro, a una distancia r de su eje.

40. Una carga puntual positiva se encuentra a una distancia $R/2$ del centro de una cubierta esférica conductora delgada, sin carga y de radio R. Dibuje las líneas de campo eléctrico que se establecen debido a este sistema tanto adentro como afuera de la cubierta.

41. Una delgada placa conductora y cuadrada de 50.0 cm de lado se encuentra sobre el plano xy. Se deposita una carga total de 4.00×10^{-8} C sobre la placa. Determine a) la densidad de carga sobre la placa, b) el campo eléctrico justo por encima de la placa y c) el campo eléctrico justo por debajo de la misma. Puede suponer que la densidad de carga es uniforme.

Problemas adicionales

42. Un campo eléctrico no uniforme tiene la expresión

$$\vec{\mathbf{E}} = ay\hat{\mathbf{i}} + bz\hat{\mathbf{j}} + cx\hat{\mathbf{k}}$$

donde a, b y c son constantes. Determine el flujo eléctrico a través de una superficie rectangular en el plano xy, que se extiende de $x = 0$ hasta $x = w$ y de $y = 0$ hasta $y = h$.

43. Una esfera de radio R rodea una partícula con carga Q, ubicada en su centro. a) Demuestre que el flujo eléctrico a través de un casquete circular de semiángulo θ (figura P24.43) es

$$\Phi_E = \frac{Q}{2\epsilon_0}(1 - \cos\theta)$$

¿Cuál es el flujo para b) $\theta = 90°$ y c) $\theta = 180°$?

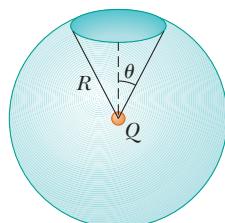



Figura P24.43

44. Una esfera aislante y sólida, de 5.00 cm de radio, tiene una carga positiva neta de 3.00 μC, con distribución uniforme en todo su volumen. Concéntrico a la esfera hay una cubierta esférica conductora con radio interior de 10.0 cm y radio exterior de 15.0 cm, que tiene carga neta de -1.00 μC, como se muestra en la figura Q24.11. a) Considere una superficie gaussiana esférica de 16.0 cm de radio y encuentre la carga neta encerrada por esta superficie. b) ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en el punto D, a la derecha de la cubierta y a un radio de 16 cm? c) Encuentre la magnitud del campo eléctrico en el punto D. d) Encuentre el vector de campo eléctrico en el punto C, a 12.0 cm de radio. e) Considere una superficie gaussiana esférica a través del punto C y encuentre la carga neta encerrada por esta superficie. f) Considere una superficie gaussiana esférica de 8.00 cm de radio y encuentre la carga neta encerrada por esta superficie. g) Encuentre el vector de campo eléctrico en el punto B, a 8 cm de radio. h) Considere una superficie gaussiana esférica a través del punto A, a 4.00 cm de radio, y encuentre la carga neta encerrada por esta superficie. i) Encuentre el vector de campo eléctrico en el punto A. j) Determine la carga sobre la superficie interior de la cubierta conductora. k) Determine la carga sobre la superficie exterior de la cubierta conductora. l) Bosqueje una gráfica de la magnitud del campo eléctrico en términos de r.

45. ● Una cubierta esférica metálica y hueca tiene radio exterior de 0.750 m, sin carga neta y está apoyado sobre una base aislante. El campo eléctrico en todas partes justo afuera de su superficie es 890 N/C radialmente hacia el centro de la esfera. a) Explique qué puede concluir acerca de la cantidad de carga sobre la superficie exterior de la esfera y sobre la distribución de esta carga. b) Explique qué puede concluir acerca de la cantidad de carga sobre la superficie interior de la esfera y su distribución. c) Explique qué puede concluir acerca de la cantidad de carga dentro de la cubierta y su distribución.

46. ● Imagine dos esferas conductoras idénticas cuyas superficies se encuentran a una pequeña distancia una de la otra. A una esfera se le da una gran carga positiva neta, en tanto que a la otra se le da una pequeña carga neta, también positiva. Se descubre que la fuerza existente entre ambas esferas es de atracción, aun cuando las dos tienen cargas netas del mismo signo. Explique por qué es posible.

47. Una esfera aislante y sólida, de radio a, tiene una densidad de carga uniforme r y una carga total Q. Colocada en forma concéntrica a esta esfera existe otra esfera hueca, conductora pero descargada, de radios interno y externo b y c, respectivamente, como se observa en la figura P24.57. a) Determine la magnitud del campo eléctrico en las regiones $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ y $r > c$. b) Determine la carga inducida por unidad de superficie en las superficies interna y externa de la esfera hueca.

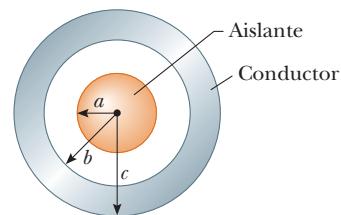



Figura P24.47 Problemas 47 y 63.

48. **Problema de repaso.** Uno de los primeros modelos (incorrecto) del átomo de hidrógeno, sugerido por J. J. Thomson, suponía que una nube positiva con carga $+e$ estaba distribuida de manera uniforme en todo el volumen de una esfera de radio R, con el electrón (una partícula con carga negativa $-e$ de igual magnitud) en el centro. a) Con la aplicación de la ley de Gauss, demuestre que el electrón estaría en equilibrio en el centro y, en caso de ser desplazado del centro una distancia $r < R$, experimentaría una fuerza de restauración de la forma $F = -Kr$, siendo K una constante. b) Demuestre que $K = k_e e^2/R^3$. c)

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▢ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

Encuentre una expresión para la frecuencia f de oscilaciones armónicas simples que podría sufrir un electrón de masa m_e si fuera desplazado y después liberado en una pequeña distancia ($<R$) desde el centro. d) Calcule un valor numérico para R, como resultado de una frecuencia de 2.47×10^{15} Hz, que es la frecuencia de la luz que irradia la línea más intensa del espectro del hidrógeno.

49. Una partícula de masa m y carga q se mueve con magnitud de velocidad alta a lo largo del eje x. Inicialmente se localiza cerca de $x = -\infty$, y termina cerca de $x = +\infty$. Una segunda carga Q se encuentra fija en el punto $x = 0$, $y = -d$. Cuando la carga en movimiento pasa por la carga estacionaria, su componente x de velocidad no sufre una modificación significativa, pero adquiere una velocidad pequeña en la dirección y móvil. Determine el ángulo en que la carga se desvía. *Sugerencia:* La integral a la que llegue al determinar v_y puede ser evaluada aplicando la ley de Gauss a un cilindro largo de radio d, centrado sobre la carga estacionaria.

50. Dos láminas infinitas de carga, no conductoras, se encuentran paralelas entre sí, como se observa en la figura P24.50. La lámina de la izquierda tiene una densidad de carga superficial uniforme s, y la de la derecha tiene una densidad de carga uniforme $-s$. Calcule el campo eléctrico a) a la izquierda de, b) entre, y c) a la derecha de las dos láminas.

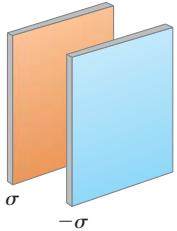



Figura P24.50

51. **¿Qué pasaría si?** Repita el cálculo del problema 50 en el caso de que ambas láminas tuvieran densidades de carga superficiales uniformes *positivas* de valor s.

52. Una esfera de radio $2a$ está hecha de un material no conductor con una densidad de carga volumétrica uniforme r. (Suponga que el material no afecta al campo eléctrico.) Se efectúa en seguida una cavidad de radio a en la esfera, como se muestra en la figura P24.52. Demuestre que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dado por $E_x = 0$ y $E_y = ra/3e_0$. *Sugerencia:* El campo en el interior de la cavidad es la sobreposición del campo debido a la esfera original sin perforación mas el campo debido a una esfera del tamaño de la cavidad con una densidad de carga negativa uniforme de $-r$.

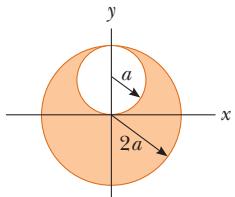



Figura P24.52

53. Una cubierta esférica con carga uniforme de densidad superficial s tiene una pequeña perforación en su superficie. El radio de la perforación es pequeño en comparación con el radio de la esfera. ¿Cuál es el campo eléctrico en el centro de la perforación? *Sugerencia*: Este problema, al igual que el problema 52, se resuelve con la idea de la sobreposición.

54. Una superficie cerrada de dimensiones $a = b = 0.400$ m y $c = 0.600$ m está colocada como se observa en la figura P24.54. La arista izquierda de la superficie cerrada está ubicada en la posición $x = a$. El campo eléctrico en toda la región no es uniforme y se conoce por $\vec{\mathbf{E}} = (3.0 + 2.0x^2)\hat{\mathbf{i}}$ N/C, donde x está expresado en metros. Calcule el flujo eléctrico neto que sale de la superficie cerrada. ¿Cuál es la carga neta que se encuentra dentro de la superficie?

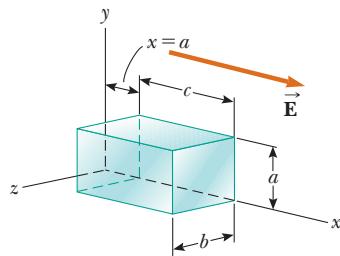



Figura P24.54

55. Una esfera aislante y sólida de radio R tiene una densidad de carga no uniforme que varía en función de r de acuerdo con la expresión $r = Ar^2$, donde A es una constante y $r < R$ está medida desde el centro de la esfera. a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico exterior de la esfera ($r > R$) es igual a $E = AR^5/5e_0r^2$. b) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico interior de la esfera ($r < R$) es igual a $E = Ar^3/5e_0$. *Sugerencia:* La carga total Q de la esfera es igual a la integral de $r\,dV$, donde r se extiende desde cero hasta R; también la carga q dentro de un radio $r < R$ es inferior a Q. Para evaluar las integrales, observe que el elemento de volumen dV para una cubierta esférica de radio r y de espesor dr es igual a $4\,pr^2dr$.

56. Una carga puntual Q está localizada sobre el eje de un disco de radio R a una distancia b del plano del disco (figura P24.56). Demuestre que en el caso de que una cuarta parte del flujo eléctrico de la carga pasara a través del disco, R sería igual a $\sqrt{3}b$.

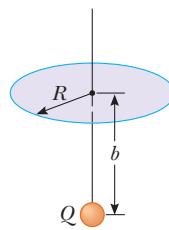



Figura P24.56

57. Una distribución de carga de simetría esférica tiene una densidad de carga expresada por $r = a/r$, siendo a una constante. Determine el campo eléctrico como una función de r. *Sugeren-*

cia: La carga en el interior de una esfera de radio R es igual a la integral de $r\ dV$, donde r se extiende de 0 hasta R. Para evaluar la integral, recuerde que el elemento de volumen dV de una cubierta esférica de radio r y de un espesor dr es igual a $4\ \pi r^2 dr$.

58. Un cilindro aislante de longitud infinita y de radio R tiene una densidad de carga volumétrica que varía en función del radio de la forma siguiente:

$$\rho = \rho_0\left(a - \frac{r}{b}\right)$$

siendo r_0, a y b constantes positivas y r la distancia al eje del cilindro. Utilice la ley de Gauss para determinar la magnitud del campo eléctrico a las siguientes distancias radiales a) $r < R$ y b) $r > R$.

59. Problema de repaso. Una placa de material aislante (con dos de sus tres dimensiones infinitas) tiene una densidad de carga uniforme positiva r. Una vista lateral de la placa se muestra en la figura P24.59. a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico a una distancia x de su centro y en el interior de la placa es $E = r\text{x}/e_0$. b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que un electrón de carga $-e$ y de masa m_e puede moverse con libertad en el interior de la placa. Si le libera del reposo a una distancia x del centro, demuestre que el electrón despliega un movimiento armónico simple con una frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho e}{m_e \epsilon_0}}$$

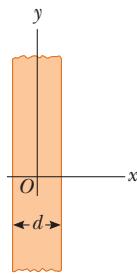



Figura P24.59 Problemas 59 y 60.

60. Una placa de material aislante tiene una densidad de carga positiva no uniforme $\rho = Cx^2$, donde x se mide a partir del centro de la placa como se muestra en la figura P24.59, y C es constante. La placa es infinita en las direcciones y y z. Deduzca expresiones para el campo eléctrico en a) las regiones externas y b) la región interna de la placa $(-d/2 < x < d/2)$.

61. a) Utilizando la similitud matemática entre la ley de Coulomb y la ley de la gravitación universal de Newton, demuestre que la ley de Gauss para la gravitación se puede escribir de la forma

$$\oint \vec{\mathbf{g}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = -4\pi G m_{\text{in}}$$

donde m_{in} es la masa neta existente en el interior de la superficie de Gauss y $\vec{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{F}}_g/m$ representa el campo gravitacional en cualquier punto de la superficie gaussiana. b) Determine el campo gravitacional a una distancia r del centro de la Tierra, donde $r < R_E$, y suponiendo que la densidad de masa de la Tierra es uniforme.

62. Una esfera sólida aislante, de radio a, tiene una densidad de carga volumétrica uniforme y tiene una carga positiva total Q. Una superficie gaussiana de radio r, que comparte un centro común con la esfera aislante, se infla partiendo de $r = 0$. a) Encuentre una expresión para el flujo eléctrico que pasa a través de la superficie de la esfera gaussiana como función de r para $r < a$. b) Encuentre una expresión para el flujo eléctrico para $r > a$. c) Grafique el flujo en términos de r.

63. Para la configuración que aparece en la figura P24.47, suponga que $a = 5.00$ cm, $b = 20.0$ cm y $c = 25.0$ cm. Además, suponga que el campo eléctrico en un punto 10.0 cm del centro tiene un valor medido de 3.60×10^3 N/C, radial y hacia adentro, en tanto que el campo eléctrico en un punto a 50.0 cm del centro es de 2.00×10^2 N/C radial y hacia afuera. Con esta información, encuentre a) la carga existente en la esfera aislante, b) la carga neta de la esfera conductora hueca y c) las cargas en las superficies interna y externa de la esfera conductora hueca.

64. Una cubierta aislante cilíndrica de longitud infinita, con radios interno y externo a y b, respectivamente, tiene una densidad de carga volumétrica uniforme r. Una línea de densidad de carga lineal uniforme l está colocada a lo largo del eje de la cubierta. Determine el campo eléctrico en todo los sitios.

65. Considere un campo eléctrico que es uniforme en dirección en todo el volumen. ¿Puede ser uniforme en magnitud? ¿Debe ser uniforme en magnitud? Responda estas preguntas a) si supone que el volumen está lleno con un material aislante que tiene carga descrita por una densidad de carga volumétrica y b) si supone que el volumen es espacio vacío. Establezca el razonamiento para probar sus respuestas.

Respuestas a las preguntas rápidas

24.1 e) En cualquier esfera, sin importar el tamaño, pasa el mismo número de líneas de campo. El campo es más intenso porque los puntos que están en la superficie de la esfera están más cerca de la carga.

24.2 b) y d) La afirmación a) no es necesariamente verdadera, porque dentro de la superficie podría estar presente un número igual de cargas positivas y negativas. La afirmación c) no es necesariamente verdadera, como se puede ver a partir de la figura 24.8: por toda la superficie existe un campo eléctrico distinto de cero, pero la carga no está encerrada en el interior de la superficie, por tanto, el flujo neto es igual a cero.

24.3 a) Las cargas que su hermano añade al cilindro metálico residen en la superficie exterior del cilindro conductor. Si usted está en el interior, estas cargas no se transferirán a usted desde la superficie interna. Por esta misma razón usted estará seguro dentro de un automóvil metálico durante una tormenta eléctrica.

Los procesos que suceden durante las tormentas eléctricas generan grandes diferencias de potencial eléctrico entre una nube y la tierra. El resultado son las descargas eléctricas conocidas como relámpagos, igual que aparece aquí sobre Tucson, Arizona (© Keith Kent/Photo Researchers, Inc.).

25 Potencial eléctrico

El concepto de energía potencial fue analizado en el capítulo 7 en relación con algunas fuerzas conservativas como la fuerza gravitacional y la fuerza elástica ejercidas por un resorte. Al aplicar la ley de conservación de energía, es posible evitar el trabajar directamente con fuerzas al resolver diferentes problemas de mecánica. además el concepto de energía potencial es de gran valor para el estudio de la electricidad. Ya que la fuerza electrostática es conservativa, los fenómenos de esta clase pueden describirse de manera conveniente en términos de una energía potencial eléctrica. Esta idea permite definir una cantidad escalar conocida como *potencial eléctrico.* Ya que el potencial eléctrico en un punto cualquiera de un campo eléctrico es una cantidad escalar, es posible aplicar esto para describir los fenómenos electrostáticos de una manera más simple que si tuviera que depender sólo del campo eléctrico y las fuerzas eléctricas. El concepto de potencial eléctrico tiene un gran valor práctico en la operación de circuitos eléctricos y aparatos que estudiará en capítulos posteriores.

25.1 Diferencia de potencial y potencial eléctrico

Cuando se coloca una carga de prueba q_0 en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ producido por alguna distribución de carga fuente, la fuerza eléctrica que actúa sobre ella es $q_0\vec{\mathbf{E}}$. La fuerza $q_0\vec{\mathbf{E}}$

es conservativa, ya que la fuerza entre cargas descrita por la ley de Coulomb es conservativa. Cuando se traslada la carga de prueba por algún agente externo en el campo, el trabajo consumido por el campo en la carga es igual al trabajo invertido por el agente externo que origina el desplazamiento, pero con signo negativo. Esto es semejante a lo que se presenta cuando se levanta un objeto con masa en un campo gravitacional: el trabajo invertido por el agente externo es igual a mgh y el trabajo consumido por la fuerza gravitacional es $-mgh$.

Al analizar los campos eléctricos y magnéticos, es común utilizar la notación $d\vec{\mathbf{s}}$ para representar un vector de desplazamiento infinitesimal que tiene una orientación tangente a una trayectoria a través del espacio. Esta trayectoria puede ser recta o curva, y la integral calculada a lo largo de esta trayectoria se conoce como *integral de la trayectoria,* o bien, *integral de línea* (los dos términos son sinónimos).

Para un desplazamiento infinitesimal $d\vec{\mathbf{s}}$ de una carga puntual q_0 inmersa en un campo eléctrico, el trabajo realizado por un campo eléctrico sobre la misma es $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = q_0\vec{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{s}$. Conforme el campo consume esta cantidad de trabajo, la energía potencial del sistema carga-campo cambia en una cantidad $dU = -q_0\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Para un desplazamiento finito de la carga desde el punto Ⓐ al punto Ⓑ, el cambio en energía potencial del sistema $\Delta U = U_{Ⓑ} - U_{Ⓐ}$ es

$$\Delta U = -q_0 \int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \textbf{(25.1)}$$

Cambio en la energía potencial eléctrica de un sistema

La integración se lleva a cabo a lo largo de la trayectoria que q_0 sigue al pasar de Ⓐ a Ⓑ. Porque la fuerza $q_0\vec{\mathbf{E}}$ es conservativa, **la integral de línea no depende de la trayectoria de Ⓐ *a* Ⓑ.**

Para una posición conocida de la carga de prueba en el campo, el sistema carga-campo tiene una energía potencial U relativa a la configuración del sistema definido como $U = 0$. Al dividir la energía potencial entre la carga de prueba se obtiene una cantidad física que depende sólo de la distribución de carga fuente y tiene un valor en cada uno de los puntos de un campo eléctrico. Esta cantidad se conoce como **potencial eléctrico** (o simplemente **potencial**) V:

$$V = \frac{U}{q_0} \qquad \textbf{(25.2)}$$

Ya que la energía potencial es una cantidad escalar el potencial eléctrico también es una cantidad escalar.

Como queda descrito en la ecuación 25.1, si la carga de prueba es desplazada entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ en un campo eléctrico, el sistema carga-campo experimenta un cambio en su energía potencial. La **diferencia de potencial** $\Delta V = V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ}$ entre los puntos Ⓐ y Ⓑ de un campo eléctrico se define como el cambio en energía potencial en el sistema al mover una carga de prueba q_0 entre los puntos, dividido entre la carga de prueba:

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \textbf{(25.3)}$$

La diferencia de potencial entre dos puntos

Al igual que en el caso de la energía potencial, sólo las *diferencias* en el potencial eléctrico tienen significado. A menudo conviene hacer que en algún punto el valor del potencial eléctrico sea igual a cero.

La diferencia de potencial no debe confundirse con la diferencia en energía potencial. La diferencia de potencial entre Ⓐ y Ⓑ depende sólo de la distribución de carga fuente (considere los puntos Ⓐ y Ⓑ *sin* la presencia de la carga de prueba), mientras que la diferencia en energía potencial existe sólo si se desplaza una carga de prueba entre los puntos.

Si un agente externo traslada una carga de prueba de Ⓐ a Ⓑ sin modificar la energía cinética de ésta, el agente realiza un trabajo que modifica la energía potencial del sistema: $W = \Delta U$. Imagine una carga q arbitraria localizada en un campo eléctrico. Por la ecuación 25.3, el trabajo consumido por un agente externo al desplazar una carga q a través de un campo eléctrico con una velocidad constante es

$$W = q\Delta V \qquad \textbf{(25.4)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.1

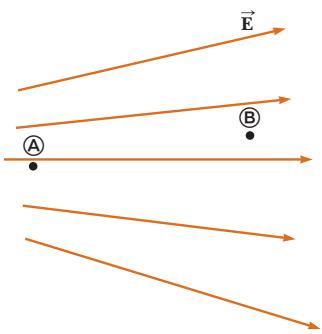
Potencial y energía potencial

El *potencial es sólo una característica del campo* sin importar cualquier partícula de prueba con carga que pueda estar colocada en el campo. *La energía potencial es característica del sistema carga-campo* debido a la interacción del campo con una partícula con carga colocada en el mismo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.2
Voltaje

Para describir la diferencia de potencial entre dos puntos se utiliza una gran variedad de términos; el más común es **voltaje,** que surge de la unidad utilizada para el potencial. Un voltaje *aplicado* a un aparato, como una televisión, o *a las terminales* de un aparato, es lo mismo que la diferencia de potencial aplicada a las terminales del dispositivo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.3
El electrón volt

El electrón volt es una unidad de *energía*, NO de potencial. La energía de cualquier sistema puede expresarse en eV, pero esta unidad es la más conveniente para describir la emisión y absorción de la luz visible de los átomos. A menudo las energías en los procesos nucleares se expresan en MeV.

Ya que el potencial eléctrico es una medida de la energía potencial por unidad de carga, la unidad del SI, tanto del potencial eléctrico como de la diferencia de potencial, es joules por cada coulomb, que se define como un **volt** (V):

$$1 \text{ V} \equiv 1 \text{ J/C}$$

Es decir, se deberá realiza 1 J de trabajo para trasladar 1 C de carga a causa de una diferencia de potencial de 1 V.

Además la ecuación 25.3 muestra que la diferencia de potencial tiene unidades de campo eléctrico multiplicadas por la distancia. De esto se concluye que la unidad del SI del campo eléctrico (N/C) también puede expresarse en volts por cada metro:

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$$

Por lo tanto, **el campo eléctrico es una medida de la relación de cambio en función de la posición del potencial eléctrico.**

Una unidad de energía comúnmente utilizada en física atómica y nuclear es el **electrón volt** (eV), que se define como **la energía que un sistema carga-campo gana o pierde cuando se desplaza una carga de magnitud *e* (un electrón o un protón) a causa de una diferencia de potencial de 1 V.** Porque 1 V = 1 J/C y la carga fundamental es 1.60×10^{-19} C, el electrón volt se relaciona con el joule de esta manera:

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J} \qquad \textbf{(25.5)}$$

Por ejemplo, un electrón en el haz de un cinescopio alcanza una rapidez de 3.0×10^7 m/s. Esto corresponde a la energía cinética de 4.1×10^{-16} J, que es equivalente a 2.6×10^3 eV. Para alcanzar esta rapidez, el electrón tendrá que ser acelerado desde el reposo por medio de una diferencia de potencial de 2.6 kV.

Pregunta rápida 25.1 En la figura 25.1, dos puntos, Ⓐ y Ⓑ, se ubican dentro de una región en la que hay un campo eléctrico. **i)** ¿Cómo describiría la diferencia de potencial $\Delta V = V_Ⓑ - V_Ⓐ$? a) Es positiva. b) Es negativa. c) Es cero. **ii)** Se coloca una carga negativa en Ⓐ y luego se mueve hacia Ⓑ. ¿Cómo describiría el cambio en energía potencial del sistema carga-campo para este proceso? Elija entre las mismas posibilidades.

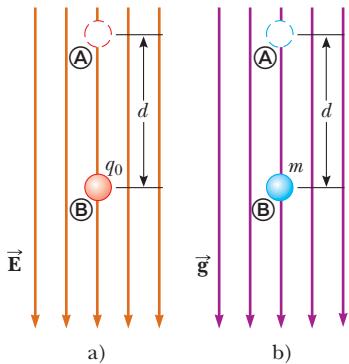
Figura 25.1 (Pregunta rápida 25.1) Dos puntos en un campo eléctrico.

25.2 Diferencias de potencial en un campo eléctrico uniforme

Las ecuaciones 25.1 y 25.3 son válidas en todos los campos eléctricos, sean uniformes o variables, pero estas ecuaciones se simplifican si el campo es uniforme. Primero, imagine un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje negativo *y*, como se muestra en la figura 25.2a. Calcule la diferencia de potencial entre dos puntos Ⓐ y Ⓑ separados por una distancia $|\vec{\mathbf{s}}| = d$, donde $\vec{\mathbf{s}}$ es paralela a las líneas de campo. La ecuación 25.3 da

$$V_Ⓑ - V_Ⓐ = \Delta V = -\int_Ⓐ^Ⓑ \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int_Ⓐ^Ⓑ (E \cos 0°)\, ds = -\int_Ⓐ^Ⓑ E\, ds$$

Porque *E* es constante, puede retirarla de la integral; esto lo conduce a

Diferencia de potencial entre dos puntos en un campo eléctrico uniforme ►

$$\Delta V = -E \int_Ⓐ^Ⓑ ds = -Ed \qquad \textbf{(25.6)}$$

El signo negativo indica que el potencial eléctrico en el punto Ⓑ es inferior al del punto Ⓐ; es decir, $V_Ⓑ < V_Ⓐ$. **Las líneas de campo eléctrico siempre apuntan en dirección en que disminuye el potencial eléctrico,** como se muestra en la figura activa 25.2a.

Ahora suponga que una carga de prueba q_0 se mueve desde Ⓐ hacia Ⓑ, se puede calcular cambio en la energía potencial del sistema carga–campo con las ecuaciones 25.3 y 25.6:

$$\Delta U = q_0 \, \Delta V = -q_0 E d \qquad \textbf{(25.7)}$$

Este resultado, muestra que si q_0 es positiva, en tal caso *U* es negativa. Debido a eso,

Figura 25.2
a) Cuando el campo eléctrico $\vec{E}$ se dirige hacia abajo, el punto Ⓑ está en un potencial eléctrico menor que el punto Ⓐ. Cuando una carga de prueba positiva se mueve del punto Ⓐ al punto Ⓑ, la energía potencial eléctrica del sistema carga-campo disminuye. b) Cuando un objeto de masa m se mueve hacia abajo en la dirección del campo gravitacional $\vec{g}$, la energía potencial gravitacional del sistema objeto-campo disminuye.

un sistema consistente de una carga positiva y un campo eléctrico pierde energía potencial eléctrica cuando la carga se mueve en la dirección del campo. Esto significa que un campo eléctrico realiza trabajo en una carga positiva cuando ésta se mueve en la dirección del campo eléctrico. (Esto es similar al trabajo que realiza un campo gravitacional en un objeto en caída, como se muestra en la figura 25.2b.) Si una carga de prueba positiva en reposo es liberada en este campo eléctrico, experimenta una fuerza eléctrica $q_0\vec{E}$ en la dirección de $\vec{E}$ (hacia abajo en la figura 25.2a). En consecuencia, se acelerará hacia abajo, adquiriendo energía cinética. **Conforme esta partícula con carga adquiere energía cinética, el sistema carga-campo pierde una cantidad igual de energía potencial.** Esto no debe sorprenderle, simplemente es la conservación de la energía mecánica en un sistema aislado, como se vio en el capítulo 8.

Si q_0 es negativa, en tal caso ΔU en la ecuación 25.7 es positiva y la situación se invierte: **Un sistema formado por una carga negativa y un campo eléctrico adquiere energía potencial eléctrica cuando la carga se mueve en la dirección del campo.** Si se libera una carga negativa desde el reposo en un campo eléctrico, se acelera en la dirección opuesta a la dirección del campo. Para que una carga negativa se mueva en la dirección del campo, deberá existir un agente externo que aplique una fuerza y realice un trabajo positivo en la carga.

Figura 25.3 Campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje positivo de las x. El punto Ⓑ está a un potencial eléctrico inferior al punto Ⓐ. Los puntos Ⓑ y Ⓒ están al *mismo* potencial eléctrico.

Ahora considere el caso más general de una partícula con carga que se mueve entre Ⓐ y Ⓑ en un campo eléctrico uniforme, en el cual el vector $\vec{s}$ no es paralelo a las líneas de campo, como se muestra en la figura 25.23. En este caso, la ecuación 25.5 da

$$\Delta V = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\vec{s} \quad \textbf{(25.8)}$$

◀ Cambio en la energía potencial cuando se desplaza una partícula con carga en un campo eléctrico uniforme

donde una vez más se retira $\vec{E}$ de la integral ya que es una constante. El cambio en la energía potencial del sistema carga-campo es

$$\Delta U = q_0\,\Delta V = -q_0\vec{E}\cdot\vec{s} \quad \textbf{(25.9)}$$

Por último, se concluye por la ecuación 25.8 que todos los puntos en un plano perpendicular a un campo eléctrico uniforme tienen el mismo potencial eléctrico. Se puede reconocer en la figura 25.3, donde la diferencia de potencial $V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ}$ es equivalente a la diferencia de potencial $V_{Ⓒ} - V_{Ⓐ}$. (Puede comprobarlo si resuelve el producto punto $\vec{E}\cdot\vec{s}$ para $\vec{s}_{Ⓐ\rightarrow Ⓑ}$, donde el ángulo θ entre $\vec{E}$ y $\vec{s}$ es arbitrario, como se muestra en la figura 25.3, y el producto punto en el caso de $\vec{s}_{Ⓐ\rightarrow Ⓒ}$, donde $\theta = 0$.) Debido a eso, $V_{Ⓑ} = V_{Ⓒ}$. **A cualquier superficie formada por una distribución continua de puntos con el mismo potencial eléctrico se le denomina superficie equipotencial.**

Las superficies equipotenciales de un campo eléctrico uniforme consisten en una familia de planos paralelos, todos ellos perpendiculares al campo. En secciones posteriores se describen superficies equipotenciales asociadas con campos que tienen otras simetrías.

Pregunta rápida 25.2 Los puntos marcados en figura 25.4 están sobre una serie de superficies equipotenciales asociadas con un campo eléctrico. Clasifique (del mayor al menor) el trabajo realizado por el campo eléctrico en una partícula con carga positiva que se mueve desde Ⓐ hasta Ⓑ; de Ⓑ a Ⓒ; de Ⓒ a Ⓓ; de Ⓓ a Ⓔ.

Figura 25.4 (Pregunta rápida 25.2) Cuatro superficies equipotenciales.

EJEMPLO 25.1 Campo eléctrico entre dos placas paralelas de carga opuesta

Una batería tiene una diferencia de potencial específica ΔV entre sus terminales y se establece dicha diferencia de potencial entre los conductores unidos a las terminales. Una batería de 12 V se conecta entre dos placas paralelas, como se muestra en la figura 25.5. La separación entre las placas es $d = 0.30$ cm y se supone que el campo eléctrico entre las placas es uniforme. (Esta suposición es razonable si la separación de las placas es pequeña en relación con las dimensiones de las placas y no se consideran ubicaciones cerca de los bordes de las placas.) Encuentre la magnitud del campo eléctrico entre las placas.

Figura 25.5 (Ejemplo 25.1) Una batería de 12 V conectada a dos placa paralelas. El campo eléctrico entre las placas tiene una magnitud determinada por la diferencia de potencial ΔV dividida entre la separación de placa d.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En capítulos anteriores investigó el campo eléctrico uniforme entre placas paralelas. La nueva característica a esta problema es que el campo eléctrico se relaciona con el concepto reciente de potencial eléctrico.

Categorizar El campo eléctrico se evalúa a partir de una correspondencia entre campo y potencial conocido en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 25.6 para evaluar la magnitud del campo eléctrico entre las placas:

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12\text{ V}}{0.30 \times 10^{-2}\text{ m}} = \boxed{4.0 \times 10^3\text{ V/m}}$$

La configuración de las placas en la figura 25.5 se llama *capacitor de placas paralelas* y se examina con mayor detalle en el capítulo 26.

EJEMPLO 25.2 Movimiento de un protón en un campo eléctrico uniforme

Un protón se libera desde el reposo en el punto Ⓐ en un campo eléctrico uniforme que tiene una magnitud de 8.0×10^4 V/m (figura 25.6). El protón se somete a un desplazamiento de 0.50 m al punto Ⓑ en la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$. Encuentre la rapidez del protón después de completar el desplazamiento de 0.50 m.

Figura 25.6 (Ejemplo 25.2) Un protón acelera de Ⓐ a Ⓑ en la dirección del campo eléctrico.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Visualice el protón en la figura 25.6 en movimiento hacia abajo a causa de la diferencia de potencial. La situación es análoga a un objeto que cae libre a través de un campo gravitacional.

Categorizar El sistema del protón y las dos placas en la figura 25.6 no interactúan con el ambiente, así que se le modela como un sistema aislado.

Analizar Use la ecuación 25.6 para encontrar la diferencia de potencial entre los puntos Ⓐ y Ⓑ:

$$\Delta V = -Ed = -(8.0 \times 10^4\text{ V/m})(0.50\text{ m}) = -4.0 \times 10^4\text{ V}$$

Escriba la reducción adecuada de la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de la energía, para el sistema aislado de la carga y el campo eléctrico:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Sustituya los cambios en energía para ambos términos:

$$(\tfrac{1}{2}mv^2 - 0) + e\,\Delta V = 0$$

Resuelva para la rapidez final del protón:

$$v = \sqrt{\frac{-2e\,\Delta V}{m}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v = \sqrt{\frac{-2(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(-4.0 \times 10^{4}\ \text{V})}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}}$$

$$= \boxed{2.8 \times 10^{6}\ \text{m/s}}$$

Finalizar Ya que ΔV es negativa, ΔU también es negativa. El valor negativo de ΔU significa que la energía potencial del sistema disminuye conforme el protón se mueve en la dirección del campo eléctrico. Conforme el protón acelera en la dirección del campo, adquiere energía cinética y el sistema pierde energía potencial eléctrica al mismo tiempo.

La figura 25.6 se orienta de modo que el protón cae hacia abajo. El movimiento del protón es análogo al de un objeto que cae en un campo gravitacional. Aunque el campo gravitacional siempre es hacia abajo en la superficie de la Tierra, un campo eléctrico puede estar en cualquier dirección, dependería de la orientación de las placas que producen el campo. Por lo tanto, la figura 25.6 podría girarse 90 o 180°, ¡y el protón caería horizontalmente o iría hacia arriba en el campo eléctrico!

25.3 Potencial eléctrico y energía potencial a causa de cargas puntuales

En la sección 23.4 se explicó el hecho de que una carga puntual positiva q produce un campo eléctrico que está dirigido radialmente alejándose de la carga. Para determinar el potencial eléctrico en un punto ubicado a una distancia r de la carga, inicie con la expresión general para la diferencia de potencial:

$$V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Figura 25.7 La diferencia de potencial entre los puntos Ⓐ y Ⓑ a causa de una carga puntual q depende *sólo* de las coordenadas radiales $r_{Ⓐ}$ y $r_{Ⓑ}$ inicial y final. Los dos círculos discontinuos representan las intersecciones de las superficies equipotenciales esféricas con la página.

donde Ⓐ y Ⓑ son los dos puntos arbitrarios que se muestran en la figura 25.7. En cualquier punto en el espacio, el campo eléctrico a causa de la carga puntual es $\vec{\mathbf{E}} = (k_e q/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ (ecuación 23.9), donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido desde la carga hacia el punto. La cantidad $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ puede expresarse como

$$\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = k_e \frac{q}{r^2}\, \hat{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Ya que la magnitud de $\hat{\mathbf{r}}$ es 1, el producto punto $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = ds \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre $\hat{\mathbf{r}}$ y d**s.** Además, $ds \cos \theta$ es la proyección de $d\vec{\mathbf{s}}$ sobre $\hat{\mathbf{r}}$; debido a eso $ds \cos \theta = dr$. Es decir, cualquier desplazamiento $d\vec{\mathbf{s}}$ a lo largo de la trayectoria del punto Ⓐ al punto Ⓑ produce un cambio dr en la magnitud de $\hat{\mathbf{r}}$, el vector de posición del punto en relación con la carga que crea el campo. Con estas sustituciones, $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = (k_e q/r^2)\, dr$; en consecuencia, la expresión de la diferencia de potencial se convierte en

$$V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ} = -k_e q \int_{r_{Ⓐ}}^{r_{Ⓑ}} \frac{dr}{r^2} = k_e \frac{q}{r}\bigg|_{r_{Ⓐ}}^{r_{Ⓑ}}$$

$$V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ} = k_e q \left[\frac{1}{r_{Ⓑ}} - \frac{1}{r_{Ⓐ}}\right] \qquad \textbf{(25.10)}$$

Esta ecuación muestra que la integral de $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ es *independiente* de la trayectoria entre los puntos Ⓐ y Ⓑ. Al multiplacar por una carga q_0 que se mueve entre los puntos Ⓐ y Ⓑ, la integral de $q_0\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ también es independiente de la trayectoria. Esta última integral representa el trabajo realizado por la fuerza eléctrica, que señala que la fuerza eléctrica es conservativa (véase la sección 7.7). Al campo que se relaciona con una fuerza conservativa se le define como **campo conservativo.** Debido a eso, la ecuación 25.10 indica que el campo eléctrico de una carga puntual fija es conservativo. Además, la ecuación 25.10 expresa el resultado importante de que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera Ⓐ y Ⓑ en un campo producido por una carga puntual depende sólo de las

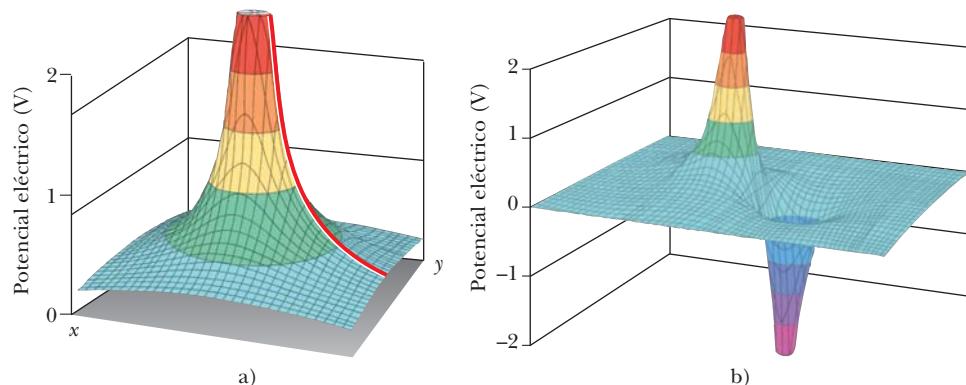



Figura 25.8 El potencial eléctrico en el plano alrededor de una simple carga positiva está trazado sobre el eje vertical. (La función potencial eléctrico para una carga negativa se vería como un agujero, no como una colina.) La línea roja muestra la naturaleza $1/r$ del potencial eléctrico, como se observa en la ecuación 25.11. b) El potencial eléctrico en el plano que contiene un dipolo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.4

Advertencia respecto a ecuaciones similares

No confunda la ecuación 25.11, para el potencial eléctrico de una carga puntual, con la ecuación 23.9, relativa al campo eléctrico de una carga puntual. El potencial es proporcional a $1/r$, en tanto que el campo es proporcional a $1/r^2$. El efecto de una carga sobre el espacio que la rodea puede describirse de dos maneras: la carga establece un vector de campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, relacionado con la fuerza que experimenta una carga de prueba colocada en el campo, y establece también un potencial escalar V, que se relaciona con la energía potencial del sistema de dos cargas, cuando en el campo se coloca una carga de prueba.

coordenadas radiales $r_Ⓐ$ y $r_Ⓑ$. Por lo común se elige la referencia del potencial eléctrico de una carga puntual, de forma que sea $V = 0$ en $r_Ⓐ = \infty$. Con esta referencia, el potencial eléctrico establecido por una carga puntual a cualquier distancia r de la carga es

$$V = k_e \frac{q}{r} \tag{25.11}$$

La figura 25.8 muestra el trazo del potencial eléctrico sobre el eje vertical para una carga positiva ubicada en el plano xy. Considere la siguiente analogía en relación con el potencial gravitacional: piense que intenta rodar una canica hacia la cima de una colina de forma similar a la de la superficie de la figura 25.8a. Empujar la canica colina arriba es semejante a empujar un objeto con carga positiva hacia otro objeto con carga positiva. De manera similar, la gráfica del potencial eléctrico de la región que rodea una carga negativa es análoga a un "agujero" respecto a cualesquier objeto con carga positiva acercándose. Un objeto con carga debe estar infinitamente alejado de otra carga antes de que la superficie de la figura 25.8a sea "plana" y tenga un potencial eléctrico igual a cero.

El potencial eléctrico resultante de dos o más cargas puntuales se obtiene mediante la aplicación del principio de sobreposición. Es decir, el potencial eléctrico total en algún punto P debido a varias cargas puntuales es la suma de los potenciales debidos a las cargas individuales. Para un grupo de cargas puntuales, puede expresar el potencial eléctrico total en P como

Potencial eléctrico debido a varias cargas puntuales ▶

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{25.12}$$

donde el potencial es otra vez igual a cero en el infinito y r_i es la distancia del punto P a la carga q_i. Observe que la suma de la ecuación 25.12 es una suma algebraica de escalares en lugar de ser una suma vectorial (la cual se utiliza para calcular el campo eléctrico de un grupo de cargas). Por lo tanto, a menudo es más sencillo evaluar V que evaluar $\vec{\mathbf{E}}$. El potencial eléctrico alrededor de un dipolo se ilustra en la figura 25.8b. Observe la pendiente exagerada del potencial entre las cargas, que representa una región de un campo eléctrico intenso.

Considerar ahora la energía potencial de un sistema formado por dos partículas con carga. Si V_2 es el potencial eléctrico en un punto P debido a la carga q_2, por lo tanto el trabajo que debe realizar un agente externo para traer una segunda carga q_1 desde el infinito hasta P sin aceleración es igual a $q_1 V_2$. Este trabajo representa una transferencia de energía hacia el interior del sistema y aparece en éste como energía potencial U cuando

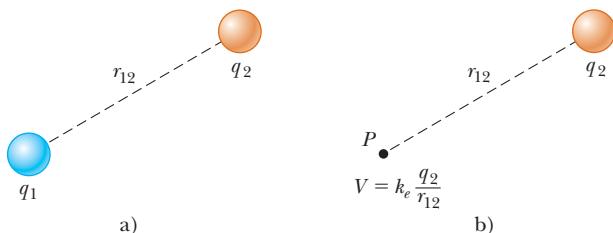



Figura 25.9

a) Si dos cargas puntuales están separadas una distancia r_{12}, la energía potencial del par de cargas se conoce por $k_e q_1 q_2/r_{12}$. b) Si se retira la carga q_1, existe un potencial $k_e q_2/r_{12}$ en el punto P debido a la carga q_2.

las partículas están separadas una distancia r_{12} (figura 25.9a). Por lo tanto, exprese la energía potencial del sistema como[1]

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad \textbf{(25.13)}$$

Observe que si las cargas son del mismo signo, U es positiva, un agente externo debe realizar un trabajo positivo sobre un sistema para acercar las dos cargas (ya que cargas del mismo signo se repelen). Si las cargas son de signos opuestos, U es negativa; un agente externo deberá realizar un trabajo negativo en contra de la fuerza de atracción entre cargas de signo opuesto al acercar la una a la otra; debe aplicarse una fuerza opuesta al desplazamiento para impedir que q_1 se acelere hacia q_2.

En la figura 25.9b, se ha retirado la carga q_1. En la posición donde se encontraba previamente la carga, el punto P, se puede utilizar las ecuaciones 25.2 y 25.13 para definir el potencial debido a la carga q_2 como $V = U/q_1 = k_e q_2/r_{12}$. Esta expresión es consistente con la ecuación 25.11.

Si el sistema consiste en más de dos partículas con carga, se obtiene la energía potencial total si calcula U para cada par de cargas y suma los términos algebraicamente. Como un ejemplo, la energía potencial total del sistema de tres cargas que se muestra en la figura 25.10 es

$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \qquad \textbf{(25.14)}$$

Físicamente, puede interpretar el resultado como sigue: imagine que q_1 está fija en la posición que se muestra en la figura 25.10 pero que q_2 y q_3 están en el infinito. El trabajo que deberá realizar un agente externo para traer a q_2 del infinito a una posición cerca de q_1 es $k_e q_1 q_2/r_{12}$, que es el primer término de la ecuación 25.14. Los dos últimos términos representan el trabajo requerido para mover a q_3 del infinito a una posición cerca de q_1 y q_2. (El resultado es independiente del orden en el cual se transporten las cargas.)

Pregunta rápida 25.3 En la figura 25.9a, considere q_1 como la fuente de carga negativa y q_2 como la carga de prueba. **i)** Si q_2 inicialmente es positiva y cambia a una carga de la misma magnitud pero negativa, ¿qué ocurre con el potencial en la posición de q_2 debido a q_1? a) Aumenta. b) Disminuye. c) Permanece igual. **ii)** Cuando q_2 cambia de positiva a negativa, ¿qué ocurre con la energía potencial del sistema de dos cargas? Elija entre las mismas posibilidades.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.5

¿Cuál trabajo?

Existe una diferencia entre el trabajo realizado *por un elemento de un sistema sobre otro elemento* y el trabajo realizado *por un agente externo sobre un sistema*. En la explicación que se relaciona a la ecuación 25.14 considere el grupo de cargas como el sistema; el agente externo realiza trabajo sobre el sistema para mover las cargas desde una separación infinita a una separación más pequeña.

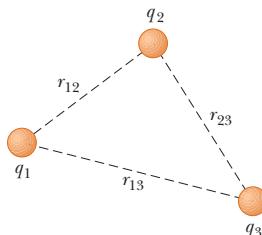



Figura 25.10 Tres cargas puntuales están fijas en las posiciones que se muestran. La energía potencial de este sistema de cargas se conoce por la ecuación 25.14.

[1] La expresión de la energía potencial eléctrica de un sistema formado por dos cargas puntuales, la ecuación 25.13, es de la *misma* estructura que la ecuación de la energía potencial gravitacional de un sistema formado por dos masas puntuales: Gm_1m_2/r (véase el capítulo 13 del volumen I). La similitud no es sorprendente en vista de que ambas expresiones se deducen de una ley de fuerzas del cuadrado inverso.

EJEMPLO 25.3 Potencial eléctrico debido a dos cargas puntuales

Como se muestra en la figura 25.11a, una carga $q_1 = 2.00\ \mu\text{C}$ se ubica en el origen y una carga $q_2 = -6.00\ \mu\text{C}$ se ubica en (0, 3.00) m.

A) Encuentre el potencial eléctrico total debido a estas cargas en el punto P, cuyas coordenadas son (4.00, 0) m.

Figura 25.11 (Ejemplo 25.3) a) El potencial eléctrico en P debido a las dos cargas q_1 y q_2 es la suma algebraica de los potenciales debidos a las cargas individuales. b) Una tercera carga $q_3 = 3.00\ \mu\text{C}$ se lleva desde el infinito al punto P.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Reconozca que las cargas de $2.00\ \mu\text{C}$ y de $-6.00\ \mu\text{C}$ son cargas fuente y establecen un campo eléctrico así como un potencial en todos los puntos del espacio, incluido el punto P.

Categorizar El potencial se evalúa con una ecuación desarrollada en este capítulo, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 25.12 para el sistema de dos cargas fuente:

$$V_P = k_e\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

Sustituya valores numéricos:

$$V_P = (8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{2.00 \times 10^{-6}\ \text{C}}{4.00\ \text{m}} + \frac{-6.00 \times 10^{-6}\ \text{C}}{5.00\ \text{m}}\right)$$

$$= \boxed{-6.29 \times 10^3\ \text{V}}$$

B) Encuentre el cambio en energía potencial del sistema de dos cargas más una tercera carga $q_3 = 3.00\ \mu\text{C}$ conforme la última carga se mueve del infinito al punto P (figura 25.11b).

SOLUCIÓN

Asigne $U_i = 0$ para el sistema en una configuración en que la carga q_3 está en el infinito. Use la ecuación 25.2 para evaluar la energía potencial para la configuración en que la carga está en P:

$$U_f = q_3 V_P$$

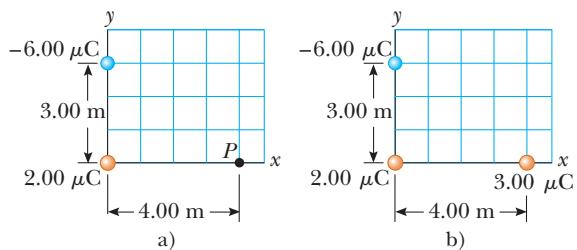
Sustituya valores numéricos para evaluar ΔU:

$$\Delta U = U_f - U_i = q_3 V_P - 0 = (3.00 \times 10^{-6}\ \text{C})(-6.29 \times 10^3\ \text{V})$$

$$= \boxed{-1.89 \times 10^{-2}\ \text{J}}$$

Por lo tanto, ya que la energía potencial del sistema disminuyó, un agente externo tiene que hacer trabajo positivo para retirar la carga del punto P de regreso al infinito.

¿Qué pasaría si? Trabaja este ejemplo con una compañera de clase y ella le dice: "¡Espera un minuto! En el inciso B) se ignoró la energía potencial asociada con el par de cargas q_1 y q_2!". ¿Cómo respondería?

Respuesta Dado el enunciado del problema, no es necesario incluir esta energía potencial porque en el inciso B) pide el *cambio* en energía potencial del sistema conforme q_3 se lleva desde el infinito. Ya que la configuración de las cargas q_1 y q_2 no cambia en el proceso, no hay ΔU asociada con estas cargas. Sin embargo, si el inciso B) hubiese pedido encontrar el cambio en energía potencial cuando *las tres* cargas inician separadas desde el infinito y después se llevan a las posiciones en la figura 25.11b, tendría que calcular el cambio usando la ecuación 25.14.

25.4 Obtención del valor del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico

El campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ y el potencial eléctrico V están relacionados, como se mostró en la ecuación 25.3 que se usa para enconrart ΔV si el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ se conoce. Ahora se muestra cómo calcular el valor del campo eléctrico en una región específica si el potencial eléctrico se conoce.

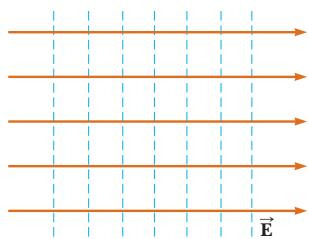
Mediante la ecuación 25.3 exprese la diferencia de potencial dV entre dos puntos separados una distancia ds como

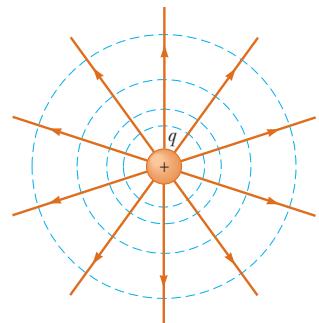
$$dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \tag{25.15}$$

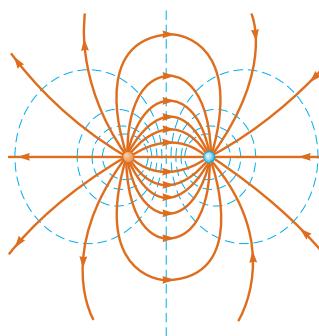
Si el campo eléctrico tiene sólo una componente E_x, en tal caso $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = E_x\, dx$. Por tanto, la ecuación 25.15 se convierte en $dV = -E_x\, dx$, o

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \tag{25.16}$$

Es decir, la componente en x del campo eléctrico es igual al negativo de la derivada del potencial eléctrico respecto a x. Pueden hacerse enunciados similares acerca de las componentes en y y en z. La ecuación 25.16 es la afirmación matemática del hecho de que el campo eléctrico es una medida de la relación de cambio del potencial eléctrico con su posición, como se mencionó en la sección 25.1.

Experimentalmente, el potencial eléctrico y la posición se pueden medir con facilidad si utiliza un voltímetro (véase la sección 28.5) y una regleta de medición. En consecuencia, un campo eléctrico se determina al medir el potencial eléctrico en varias posiciones en el campo y dibujando una gráfica de los resultados. De acuerdo con la ecuación 25.16, la pendiente de la gráfica de V en función de x en un punto determinado nos proporciona la magnitud del campo eléctrico en ese punto.

Cuando una carga de prueba se somete a un desplazamiento $d\vec{\mathbf{s}}$ a lo largo de una superficie equipotencial, en tal caso $dV = 0$ ya que el potencial es constante en una superficie equipotencial. Por la ecuación 25.15, se reconoce que $dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$; por lo tanto, $\vec{\mathbf{E}}$ debe ser perpendicular al desplazamiento a lo largo de la superficie equipotencial. Esto demuestra que las **superficies equipotenciales siempre deben ser perpendiculares a las líneas de campo eléctrico que pasan a través de ellas.**

Como se mencionó al final de la sección 25.2, las superficies equipotenciales para un campo eléctrico uniforme están constituidas en una familia de planos perpendiculares a las líneas de campo. La figura 25.12a muestra algunas superficies equipotenciales representativas de esta situación.

Si la distribución de carga que origina un campo eléctrico tiene simetría esférica tal que la densidad de carga volumétrica depende sólo de la distancia radial r, el campo eléctrico es radial. En este caso, $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = E_r\, dr$, y se puede expresar dV en la forma $dV = -E_r\, dr$. Por lo tanto,

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \tag{25.17}$$

Por ejemplo, el potencial eléctrico de una carga puntual es $V = k_e q/r$. Debido a que V es sólo función de r, la función potencial tiene simetría esférica. Al aplicar la ecuación 25.17, encuentra que el campo eléctrico debido a la carga puntual es $E_r = k_e q/r^2$, un resultado familiar. Observe que el potencial sólo cambia en dirección radial, no en cualquier dirección perpendicular a r. Por tanto, V (igual que E_r) sólo es función de r. De nuevo, esto es consistente con la idea **de que las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo.** En este caso, las superficies equipotenciales forman una familia de esferas concéntricas con la distribución de carga de simetría esférica (figura 25.12b). Las superficies equipotenciales para un dipolo eléctrico se trazan en la figura 25.12c.

a)

b)

c)

Figura 25.12 Superficies equipotenciales (las líneas azules punteadas son las intersecciones de estas superficies con la página) y las líneas de campo eléctrico para a) un campo eléctrico uniforme producido por un plano infinito de carga, b) una carga puntual, y c) un dipolo eléctrico. En todos los casos, las superficies equipotenciales son *perpendiculares* a las líneas de campo eléctrico en todos los puntos.

En general, el potencial eléctrico es una función de las tres coordenadas espaciales. Si $V(r)$ se da en coordenadas cartesianas, las componentes E_x, E_y y E_z del campo eléctrico pueden ser determinadas fácilmente a partir de $V(x, y, z)$ como derivadas parciales[2]

Determinación del campo eléctrico a partir del potencial

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{25.18}$$

Pregunta rápida 25.4 En cierta región del espacio el potencial eléctrico es igual a cero en todos los puntos a lo largo del eje x. De ello es posible concluir que en esta región la componente en x del campo eléctrico es: a) cero, b) en la dirección de $+x$, o c) en la dirección de $-x$.

EJEMPLO 25.4 Potencial eléctrico debido a un dipolo

Un dipolo eléctrico consiste de dos cargas de igual magnitud y signo opuesto separadas por una distancia $2a$ como se muestra en la figura 25.13. El dipolo está a lo largo del eje x y tiene centro en el origen.

Figura 25.13 (Ejemplo 25.4) Dipolo eléctrico ubicado sobre el eje x.

A) Calcule el potencial eléctrico en el punto P sobre el eje y.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Compare esta situación con la del inciso B) del ejemplo 23.5. Es la misma situación, pero en este caso se busca el potencial eléctrico en lugar del campo eléctrico.

Categorizar Ya que el dipolo consiste sólo en dos cargas fuente, el potencial eléctrico se puede evaluar al sumar los potenciales debidos a las cargas individuales.

Analizar Use la ecuación 25.12 para hallar el potencial eléctrico en P debido a la dos cargas:

$$V_P = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e\left(\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right) = 0$$

B) Calcule el potencial eléctrico en el punto R sobre el eje $+x$.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 25.12 para encontrar el potencial eléctrico en R debido a las dos cargas:

$$V_R = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e\left(\frac{-q}{x-a} + \frac{q}{x+a}\right) = -\frac{2k_e q a}{x^2 - a^2}$$

C) Calcule V y E_x en un punto sobre el eje x lejos del dipolo.

SOLUCIÓN

Para el punto R lejos del dipolo tal que $x >> a$, ignore a^2 en el denominador de la respuesta al inciso B) y escriba V en este límite:

$$V_R = \lim_{x \gg a}\left(-\frac{2k_e q a}{x^2 - a^2}\right) \approx -\frac{2k_e q a}{x^2} \quad (x \gg a)$$

[2]En notación vectorial, a menudo $\vec{\mathbf{E}}$ se escribe en los sistemas de coordenadas cartesianas de la forma

$$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla V = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

donde ∇ es conocido como el *operador gradiente*.

Use la ecuación 25.16 y este resultado para calcular la componente x del campo eléctrico en un punto sobre el eje x lejos del dipolo:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{2k_e qa}{x^2}\right)$$
$$= 2k_e qa \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4k_e qa}{x^3} \quad (x \gg a)$$

Finalizar Los potenciales en los incisos B) y C) son negativos, porque los puntos sobre el eje $+x$ están más cerca de la carga negativa que de la carga positiva. Por la misma razón, la componente x del campo eléctrico es negativa. Compare el resultado del inciso C) con la del problema 18 en el capítulo 23, donde el campo eléctrico sobre el eje x debido a un dipolo se calculó directamente.

¿Qué pasaría si? Suponga que quiere encontrar el campo eléctrico en un punto P sobre el eje y. En el inciso A), se encontró que el potencial eléctrico es cero para todos los valores de y. El campo eléctrico, ¿es cero en todos los puntos sobre el eje y?

Respuesta No. Que no haya cambio en el potencial a lo largo del eje y dice sólo que la componente y del campo eléctrico es cero. Vea de nuevo la figura 23.13 en el ejemplo 23.5. Se demostró que el campo eléctrico de un dipolo sobre el eje y sólo tiene una componente x. No se puede encontrar la componente x en el ejemplo actual porque no se tiene una expresión para el potencial cerca del eje y como función de x.

25.5 Potencial eléctrico debido a distribuciones de carga continuas

Existen dos maneras de calcular el potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua. Si conoce la distribución de carga, considere el potencial debido a un elemento de carga dq pequeño, y trate a este elemento como una carga puntual (figura 25.14). Por la ecuación 25.11 el potencial eléctrico dV en algún punto P, debido al elemento de carga dq, es

$$dV = k_e \frac{dq}{r} \qquad \textbf{(25.19)}$$

donde r es la distancia desde el elemento de carga al punto P. Para tener el potencial total en el punto P, integre la ecuación 25.19 a fin de incluir las contribuciones de todos los elementos de la distribución de carga. Ya que cada elemento está, por lo general, a una distancia diferente del punto P, y k_e es constante, exprese V como

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \qquad \textbf{(25.20)}$$

◀ Potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua

En efecto, ha reemplazado la suma en la ecuación 25.12 por una integral. En esta expresión para V el potencial eléctrico se supone igual a cero cuando el punto P se encuentra infinitamente lejos de la distribución de carga.

Si debido a otras consideraciones, como la ley de Gauss, el campo eléctrico ya es conocido, con la ecuación 25.3 es posible calcular el potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua. Si la distribución de la carga tiene suficiente simetría, primero, mediante la ley de Gauss, evalúe $\vec{\mathbf{E}}$ y después sustituya el valor obtenido en la ecuación 25.3, para determinar la diferencia de potencial ΔV entre dos puntos cualesquiera. A continuación se elige el valor del potencial eléctrico V de cero en algún punto conveniente.

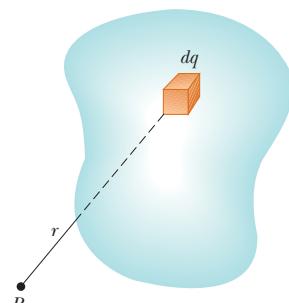



Figura 25.14 Es posible calcular el potencial eléctrico en el punto P debido a una distribución de carga continua, al dividir la distribución de carga en los elementos de carga dq y sumar las contribuciones del potencial eléctrico de todos ellos.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Cálculo de potencial eléctrico

El siguiente procedimiento se recomienda para resolver problemas que involucren la determinación de un potencial eléctrico debido a una distribución de carga.

1. *Conceptualizar.* Piense cuidadosamente en las cargas individuales o en la distribución de carga que plantea el problema e imagine qué tipo de potencial sería establecido. Recurra a cualquier simetría en el ordenamiento de cargas para ayudarse a visualizar el potencial.

2. *Categorizar.* ¿Analiza un grupo de cargas individuales o una distribución de carga continua? La respuesta a esta pregunta le dirá cómo proceder en la etapa *Analizar.*

3. *Analizar.* Cuando trabaje problemas que involucren potencial eléctrico, recuerde que es una *cantidad escalar*, de modo que no hay componentes a considerar. Por tanto, cuando use el principio de sobreposición para evaluar el potencial eléctrico en un punto, simplemente tome la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga. Sin embargo, debe acordarse de los signos.

   Igual que con la energía potencial en mecánica, sólo son significativos los *cambios* en el potencial eléctrico; por ende, el punto donde el potencial se establece en cero es arbitrario. Cuando se trata con cargas puntuales o una distribución de carga de tamaño finito, por lo general se define $V = 0$ como un punto infinitamente alejado de las cargas. No obstante, si la distribución de carga en sí se extiende hasta el infinito, se debe seleccionar algún otro punto cercano como el punto de referencia.

   a) *Si analiza un grupo de cargas individuales:* use el principio de sobreposición, que afirma que cuando están presentes varias cargas puntuales, el potencial resultante en un punto en el espacio es la *suma algebraica* de los potenciales individuales debidos a las cargas individuales (ecuación 25.12). El ejemplo 25.4 demostró este procedimiento.

   b) *Si analiza una distribución de carga continua:* sustituya las sumas para evaluar el potencial total en algún punto P a partir de cargas individuales mediante integrales (ecuación 25.20). La distribución de carga se divide en elementos infinitesimales de carga dq ubicados a una distancia r del punto P. En tal caso un elemento se trata como una carga puntual, de modo que el potencial en P debido al elemento es $dV = k_e\, dq/r$. El potencial total en P se obtiene al integrar sobre toda la distribución de carga. Para muchos problemas es posible, al realizar la integración, expresar dq y r en términos de una sola variable. Para simplificar la integración tenga especial cuidado con la geometría involucrada en el problema. Los ejemplos del 25.5 al 25.7 demuestran tal procedimiento.

   Para obtener el potencial a partir del campo eléctrico: otro método utilizado para obtener el potencial es comenzar con la definición de la diferencia de potencial dada por la ecuación 25.3. Si conoce $\vec{\mathbf{E}}$ o lo puede obtener fácilmente (como a partir de la ley de Gauss), se puede evaluar la integral de línea de $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$.

4. *Finalizar.* Compruebe para ver si su expresión para el potencial es consistente con la representación mental y refleja cualquier simetría notada previamente. Imagine variar parámetros tales como la distancia del punto de observación desde las cargas o el radio de cualquier objeto circular para saber si el resultado matemático cambia en una forma razonable.

EJEMPLO 25.5 Potencial eléctrico debido a un anillo con carga uniforme

A) Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en un punto P ubicado so-bre el eje central perpendicular de un anillo con carga uniforme de radio a y carga total Q.

Figura 25.15 (Ejemplo 25.5) Un anillo de radio a con carga uniforme, yace en un plano perpendicular al eje x. Todos los elementos dq del anillo están a la misma distancia de un punto P que se encuentra sobre el eje x.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 25.15, en la que el anillo se orienta de modo que su plano es perpendicular al eje x y su centro está en el origen.

Categorizar Ya que el anillo consiste en una distribución continua de carga en lugar de un conjunto de cargas discretas, en este ejemplo debe usar la técnica de integración representada por la ecuación 25.20.

Analizar Tome el punto P a una distancia x desde el centro del anillo, como se muestra en la figura 25.15. Observe que todos los elementos de carga dq están a la misma distancia $\sqrt{a^2 + x^2}$ del punto P.

Aplique la ecuación 25.20 para expresar V en términos de la geometría:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Al notar que a y x son constantes, quite $\sqrt{a^2 + x^2}$ de la integral e integre sobre el anillo:

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{a^2 + x^2}} \tag{25.21}$$

B) Hallar una expresión para la magnitud del campo eléctrico en el punto P.

SOLUCIÓN

A partir de la simetría, Observe que, a lo largo del eje x, $\vec{\mathbf{E}}$ puede tener sólo una componente x. Por lo tanto, aplique la ecuación 25.16 a la ecuación 25.21:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx}(a^2 + x^2)^{-1/2}$$

$$= -k_e Q(-\tfrac{1}{2})(a^2 + x^2)^{-3/2}(2x)$$

$$E_x = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} Q \tag{25.22}$$

Finalizar La única variable en las expresiones para V y E_x es x. Esto no es de sorprender porque los cálculos son válidos sólo para puntos a lo largo del eje x, donde y y z son cero. Este resultado para el campo eléctrico concuerda con el obtenido mediante integración directa (ejemplo 23.7).

EJEMPLO 25.6 Potencial eléctrico debido a un disco con carga uniforme

Un disco con carga uniforme tiene radio R y densidad de carga superficial σ.

A) Encuentre el potencial eléctrico en un punto P a lo largo del eje central perpendicular del disco.

Figura 25.16 (Ejemplo 25.6) Un disco de radio R, con carga uniforme, yace en un plano perpendicular al eje x. El cálculo del potencial eléctrico en cualquier punto P sobre el eje x se simplifica al dividir el disco en muchos anillos de radio r y ancho dr, con área $2\pi r\, dr$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Si considera que el disco es un conjunto de anillos concéntricos, es posible usar el resultado del ejemplo 25.5 que da el potencial establecido por un anillo de radio a y sumar las aportaciones de todos los anillos que conforman el disco.

Categorizar Ya que el disco es continuo, se evalúa el potencial debido a una distribución de carga continua en lugar de un grupo de cargas individuales.

Analizar Encuentre la cantidad de carga dq en un anillo de radio r y ancho dr, como se muestra en la figura 25.16:

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r\, dr) = 2\pi\sigma r\, dr$$

Use este resultado en la ecuación dada por V en el ejemplo 25.5 (con r en lugar de a y dq en lugar de Q) para encontrar el potencial debido al anillo:

$$dV = \frac{k_e dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k_e 2\pi\sigma r\, dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Para obtener el potencial total en P, integre esta expresión sobre los límites $r = 0$ a $r = R$, y observe que x es una constante:

$$V = \pi k_e \sigma \int_0^R \frac{2r\, dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \pi k_e \sigma \int_0^R (r^2 + x^2)^{-1/2}\, 2r\, dr$$

Esta integral es de la forma común $\int u^n\, du$ y tiene el valor $u^{n+1}/(n + 1)$, donde $n = -½$ y $u = r^2 + x^2$. Use este resultado para evaluar la integral:

$$V = 2\pi k_e \sigma[(R^2 + x^2)^{1/2} - x] \tag{25.23}$$

B) Encuentre la componente x del campo eléctrico en un punto P a lo largo del eje central perpendicular del disco.

SOLUCIÓN

Como en el ejemplo 25.5, use la ecuación 25.16 para encontrar el campo eléctrico en cualquier punto axial:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k_e \sigma \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}\right] \quad \textbf{(25.24)}$$

Finalizar Compare la ecuación 25.24 con el resultado del ejemplo 23.8. El cálculo de V y $\vec{\mathbf{E}}$ para un punto arbitrario fuera del eje x es más difícil de realizar y en este libro no se trata dicha situación.

EJEMPLO 25.7 Potencial eléctrico debido a una línea de carga finita

Una barra de longitud ℓ ubicada a lo largo del eje x tiene una carga total Q y una densidad de carga lineal uniforme $\lambda = Q/\ell$. Encuentre el potencial eléctrico en un punto P ubicado sobre el eje y a una distancia a del origen (figura 25.17).

Figura 25.17 (Ejemplo 25.7) Línea de carga uniforme, de longitud ℓ, ubicada a lo largo del eje x. Para calcular el potencial eléctrico en P, la línea de carga se divide en segmentos, cada uno de longitud dx y carga $dq = \lambda\, dx$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El potencial en P debido a cada segmento de carga sobre la barra es positivo porque cada segmento tiene una carga positiva.

Categorizar Ya que la barra es continua, evalúe el potencial debido a una distribución de carga continua en lugar de un grupo de cargas individuales.

Analizar En la figura 25.17, la barra se encuentra a lo largo del eje x, dx es la longitud de un segmento pequeño y dq es la carga en dicho segmento. Ya que la barra tiene una carga por cada unidad de longitud λ, la carga dq sobre el segmento pequeño es $dq = \lambda\, dx$.

Encuentre el potencial en P debido a un segmento de la barra:

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Encuentre el potencial total en P al integrar esta expresión sobre los límites $x = 0$ a $x = \ell$:

$$V = \int_0^\ell k_e \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Observe que k_e y $\lambda = Q/\ell$ son constantes y se pueden retirar de la integral, evalúe la integral con la ayuda del apéndice B:

$$V = k_e \lambda \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{Q}{\ell} \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\Big|_0^\ell$$

Evalúe el resultado entre los límites:

$$V = k_e \frac{Q}{\ell}\left[\ln\left(\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}\right) - \ln a\right] = k_e \frac{Q}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a}\right) \quad \textbf{(25.25)}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si se le pide encontrar el campo eléctrico en el punto P? ¿Sería un cálculo simple?

Respuesta Calcular el campo eléctrico mediante la ecuación 23.11 sería un poco engorroso. No hay simetría que se pueda usar y la integración sobre la línea de carga representaría una suma vectorial de campos eléctricos en el punto P. Al usar la ecuación 25.18 podría encontrar E_y al sustituir a con y en la ecuación 25.25 y realizar la diferenciación respecto a y. Puesto que la barra con carga de la figura 25.17 yace por completo a la derecha de $x = 0$, el campo eléctrico en el punto P tendría una componente x a la izquierda si la barra está cargada positivamente. Sin embargo, no puede usar la ecuación 25.18 para

encontrar la componente x del campo, porque el potencial debido a la barra se evaluó en un valor específico de x ($x = 0$) en lugar de un valor general de x. Tendría que encontrar el potencial como función tanto de x como de y para ser capaz de encontrar las componentes x y y del campo eléctrico con la ecuación 25.25.

25.6 Potencial eléctrico a causa de un conductor con carga

En la sección 24.4 descubrió que cuando un conductor sólido en equilibrio tiene una carga neta, la carga se encuentra en la parte externa de la superficie del conductor. Además, que el campo eléctrico justo en el exterior del conductor es perpendicular a la superficie y que el campo en el interior es igual a cero.

Ahora aprenderá que **cada punto de la superficie de un conductor cargado en equilibrio tiene el mismo potencial eléctrico.** Examine dos puntos Ⓐ y Ⓑ sobre la superficie de un conductor con carga, como se muestra en la figura 25.18. En una trayectoria superficial que conecta estos puntos, $\vec{\mathbf{E}}$ siempre es perpendicular al desplazamiento $d\vec{\mathbf{s}}$; por tanto $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$. Con este resultado y la ecuación 25.3, concluya que la diferencia de potencial entre Ⓐ y Ⓑ es necesariamente igual a cero:

$$V_{Ⓑ} - V_{Ⓐ} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$$

Este resultado es válido para dos puntos cualesquiera sobre la superficie. Por tanto, V es constante en cualquier punto de la superficie de un conductor con carga en equilibrio. Es decir,

> la superficie en cualquier conductor con carga en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial. Además, ya que el campo eléctrico es igual a cero en el interior del conductor, el potencial eléctrico es constante en cualquier punto en el interior del conductor y en la superficie es equivalente a su valor.

El valor constante del potencial, no requiere ningún trabajo para mover una carga de prueba del interior de un conductor con carga a su superficie.

Considere una esfera conductora metálica sólida de radio R con una carga total positiva Q, como se muestra en la figura 25.19a. Como se determinó en el inicio A) del ejemplo 24.3, el campo eléctrico en el exterior de esta esfera es k_eQ/r^2 y apunta radialmente hacia afuera ya que el campo exterior de una distribución de carga con simetría esférica es idéntico al de una carga puntual, debe esperar que el potencial también sea de una carga puntual, k_eQ/r. En la superficie de la esfera conductora de la figura 25.19a, el potencial debe ser k_eQ/R. Porque que existe el mismo potencial en toda la esfera, el potencial en cualquier punto dentro de la esfera debe ser k_eQ/R. La figura 25.19b es una gráfica del potencial eléctrico como una función de r, y la figura 25.19c muestra la forma en que el campo eléctrico varía en función de r.

Cuando se coloca una carga neta en un conductor esférico, la densidad de carga superficial es uniforme, como se indica en la figura 25.19a. Sin embargo, si el conductor no es esférico, como en la figura 25.18, la densidad de carga superficial es elevada donde el radio de curvatura es pequeño (como se vio en la sección 24.4), y es reducida donde el radio de curvatura es grande.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.6

El potencial puede no ser igual a cero

En la figura 25.18 el potencial eléctrico en el interior del conductor no necesariamente es igual a cero, a pesar de que el campo eléctrico es cero. La ecuación 25.15, muestra que un valor cero del campo da como resultado un potencial sin *cambio* de un punto a otro en el interior del conductor. Por tanto, el potencial en todo el interior del conductor, incluso en la superficie, tiene el mismo valor, que puede o no ser cero, depende de dónde se ha definido el cero del potencial.

Figura 25.18 Conductor de forma arbitraria con una carga positiva. Cuando el conductor se encuentra en equilibrio electrostático, la totalidad de la carga reside en la superficie, $\vec{\mathbf{E}} = 0$ en el interior del conductor, y la dirección de $\vec{\mathbf{E}}$ justo afuera del conductor es perpendicular a la superficie. El potencial eléctrico es constante en el interior del conductor y es igual al potencial en la superficie. Observe que, por el espaciamiento de los signos positivos, la densidad de carga superficial no es uniforme.

Figura 25.19 a) La carga excedente en una esfera conductora de radio R está uniformemente distribuida sobre su superficie. b) Potencial eléctrico en función de la distancia r desde el centro de la esfera conductora con carga. c) Magnitud del campo eléctrico en función de la distancia r desde el centro de la esfera conductora con carga.

Debido a que el campo eléctrico justo afuera del conductor es proporcional a la densidad de carga superficial, **el campo eléctrico es grande cerca de puntos convexos que tienen pequeños radios de curvatura y alcanza valores muy elevados en puntos puntiagudos.** En el ejemplo 25.8 se explora matemáticamente la correspondencia entre campo eléctrico y radio de curvatura.

EJEMPLO 25.8 Dos esferas con carga conectadas

Dos conductores esféricos, con radios r_1 y r_2, están separados un distancia mucho mayor que el radio de cualquier esfera. Las esferas están conectadas mediante un alambre conductor, como se muestra en la figura 25.20. Las cargas en las esferas en equilibrio son q_1 y q_2, y están uniformemente cargadas. Encuentre la relación de las magnitudes de los campos eléctricos en las superficies de las esferas.

Figura 25.20 (Ejemplo 25.8) Dos conductores esféricos con carga están conectados por un alambre conductor. Las esferas están al *mismo* potencial eléctrico V.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que las esferas están mucho más alejadas de lo que se muestra en la figura 25.20. Puesto que están tan separadas, el campo de una no afecta la distribución de carga sobre la otra. El alambre conductor entre ellas garantiza que ambas esferas tengan el mismo potencial eléctrico.

Categorizar Como las esferas están muy alejadas, la distribución de carga sobre ellas se modela como esféricamente simétrica y el campo y el potencial afuera de las esferas se modela como el debido a cargas puntuales.

Analizar Iguale los potenciales eléctricos en las superficies de las esferas:

$$V = k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2}$$

Resuelva para la proporción de cargas en las esferas:

$$1) \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Escriba expresiones para las magnitudes de los campos eléctricos en las superficies de las esferas:

$$E_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^{\,2}} \quad \text{y} \quad E_2 = k_e \frac{q_2}{r_2^{\,2}}$$

Evalúe la proporción de estos dos campos:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1}{q_2}\frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}$$

Sustituya para la razón de cargas de la ecuación 1):

$$2) \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}} = \frac{r_2}{r_1}$$

Finalizar El campo es más intenso en la vecindad de la esfera más pequeña aun cuando los potenciales eléctricos en las superficies de ambas son iguales.

Una cavidad dentro de un conductor

Ahora considere que un conductor de forma arbitraria contiene una cavidad como se muestra en la figura 25.21. Suponga que no hay cargas en el interior de la cavidad. **En este caso, el campo eléctrico en el interior de la cavidad debe ser igual a cero,** sin importar la distribución de la carga en la superficie exterior del conductor, como se mencionó en la sección 24.4. Además, el campo en la cavidad es igual a cero aun si existe un campo eléctrico en el exterior del conductor.

Para probarlo, recuerde que todos los puntos del conductor tienen el mismo potencial eléctrico y, por tanto, dos puntos cualesquiera Ⓐ y Ⓑ en la superficie de la cavidad

deben de estar al mismo potencial. Ahora imagine que existe un campo $\vec{\mathbf{E}}$ en la cavidad y evalúe la diferencia de potencial $V_{\text{Ⓑ}} - V_{\text{Ⓐ}}$ definida en la ecuación 25.3:

$$V_{\text{Ⓑ}} - V_{\text{Ⓐ}} = -\int_{\text{Ⓐ}}^{\text{Ⓑ}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Debido a que $V_{\text{Ⓑ}} - V_{\text{Ⓐ}} = 0$, la integral de $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ debe ser cero para todas las trayectorias entre dos puntos cualesquiera Ⓐ y Ⓑ en el conductor. La única manera de que esto pueda ser válido para *todas* las trayectorias es si $\vec{\mathbf{E}}$ es igual a cero *en cualquier sitio* de la cavidad. Entonces, **una cavidad rodeada por paredes conductoras es una región libre de campo eléctrico, siempre y cuando no existan cargas en el interior de la misma.**

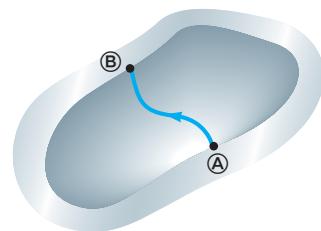



Figura 25.21 Un conductor en equilibrio electrostático con una cavidad. El campo eléctrico en el interior de la cavidad es igual a cero, sin importar la carga en el conductor.

Efecto corona

El fenómeno conocido como **efecto corona** se observa a menudo cerca de un conductor como el de una línea de transmisión de energía de alto voltaje. Cuando el campo eléctrico es suficientemente intenso en las cercanías del conductor, los electrones que resultan de las ionizaciones al azar de las moléculas del aire que están cerca del conductor se aceleran y alejan de sus moléculas madre. Estos electrones de movimiento rápido ionizan otras moléculas cercanas al conductor, crean más electrones libres. El resplandor observado (descarga en corona) resulta de la combinación de estos electrones libres con las moléculas de aire ionizadas. Si un conductor tiene una forma irregular, el campo eléctrico puede ser muy elevado cerca de las puntas o los bordes afilados del conductor; en consecuencia, lo más probable es que el proceso de ionización y el efecto corona se presenten cerca de esos puntos.

El efecto corona se utiliza en la industria de la transmisión eléctrica para localizar componentes rotos o defectuosos. Por ejemplo, un aislante roto en una torre de transmisión tiene bordes filosos donde es muy probable que se presente este efecto. De manera similar, el mismo efecto ocurrirá en el extremo puntiagudo de un filamento conductor roto. Observar estas descargas es difícil, porque la radiación visible emitida es débil y la mayor parte de la radiación está en la zona ultravioleta. (En la sección 34.7 se explica la radiación ultravioleta y otras secciones del espectro electromagnético.) Incluso la utilización de cámaras ultravioleta tradicionales resulta de poca ayuda porque la radiación a causa de la descarga en corona es opacada por la radiación ultravioleta del sol. Aparatos de espectro dual de reciente desarrollo combinan una cámara ultravioleta de banda angosta con una cámara de luz visible para mostrar una vista a la luz de día del efecto corona en la ubicación real de la torre o cable de transmisión. La porción ultravioleta de la cámara está diseñada para operar en un intervalo de longitud de onda en que la radiación solar es muy débil.

25.7 El experimento de la gota de aceite de Millikan

De 1909 a 1913 Robert Millikan realizó brillantes experimentos en los cuales midió la magnitud de la carga elemental de un electrón *e*, y demostró la naturaleza cuantizada de esta carga. Sus aparatos, ilustrados en la figura 25.22, contienen dos placas metálicas

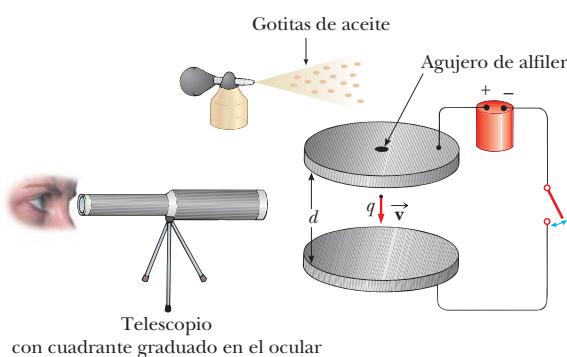



Figura 25.22 Dibujo esquemático del aparato de Millikan.

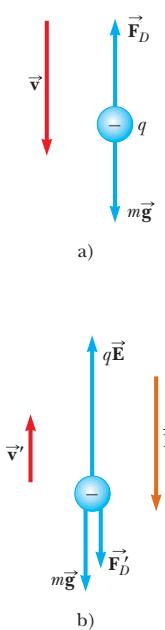



Figura 25.23 Fuerzas que actúan sobre una gotita de aceite negativamente cargada en el experimento de Millikan. a) Con el campo eléctrico desactivado, la gotita cae a una velocidad terminal $\vec{v}$, bajo la influencia de las fuerzas gravitacionales y de arrastre. b) Cuando el campo eléctrico está activado, la gotita se mueve hacia arriba a una velocidad terminal $\vec{v}'$ bajo la influencia de las fuerzas eléctrica, gravitacional y de arrastre.

paralelas. Un atomizador permite pasar gotitas de aceite a través de un orificio pequeño en la placa superior. Millikan utilizó rayos X para ionizar el aire en la cámara; así, los electrones liberados se adhieren a las gotitas de aceite y las cargan negativamente. Se aplicó un haz de luz dirigido en forma horizontal para iluminar las gotas de aceite, que son observadas a través de un telescopio cuyo eje mayor es perpendicular al haz de luz. Cuando las gotitas se observan de esta manera, dan la apariencia de estrellas luminosas contra un fondo oscuro, lo cual permite determinar la rapidez a la cual cae cada gota.

Considere una sola gota con masa m y carga negativa q que es observada. Si no hay un campo eléctrico presente entre las placas, las dos fuerzas que actúan sobre la carga son la fuerza gravitacional $m\vec{g}$, que actúa hacia abajo,[3] y la fuerza de arrastre viscosa $\vec{F}_D$, que actúa hacia arriba, como se indica en la figura 25.23a. La fuerza de arrastre es proporcional a la rapidez de caída como se explicó en la sección 6.4. Cuando la gota alcanza su rapidez terminal v, las dos fuerzas se equilibran ($mg = F_D$).

Ahora suponga que una batería conectada a las placas crea un campo eléctrico entre éstas de forma que la placa superior quede con el potencial eléctrico más elevado. En este caso, una tercera fuerza $q\vec{E}$ actúa sobre la gota con carga. Porque q es negativa y $\vec{E}$ se dirige hacia abajo, la fuerza eléctrica se dirige hacia arriba, como se muestra en la figura 25.23b. Si esta fuerza hacia arriba es lo suficientemente intensa, la gota se moverá hacia arriba y la fuerza de arrastre $\vec{F}'_D$ actuará hacia abajo. Cuando la fuerza eléctrica $q\vec{E}$ hacia arriba equilibra la suma de la fuerza de la gravedad y la fuerza de arrastre hacia abajo $\vec{F}'_D$, la gota alcanzará una nueva rapidez terminal v' hacia arriba.

Con el campo activado, una gotita se mueve lentamente hacia arriba, a centésimos de un centímetro por segundo, la rapidez de caída en ausencia de un campo es comparable. En consecuencia, uno puede seguir una gotita durante horas, subiendo y bajando alternativamente, sólo con activar o desactivar el campo eléctrico.

Después de registrar las mediciones de miles de gotas, Millikan y sus ayudantes encontraron que todas las gotitas tenían, con aproximadamente 1% de precisión, una carga igual a algún entero múltiplo de la carga elemental e:

$$q = ne \quad n = 0, -1, -2, -3, \ldots$$

donde $e = 1.60 \times 10^{-19}$C. El experimento de Millikan produce evidencia concluyente de que la carga está subdividida en cantidades discretas (cuantizada). Por este trabajo, obtuvo el premio Nobel de Física en 1923.

25.8 Aplicaciones de la electrostática

La aplicación práctica de la electrostática está representada por aparatos como pararrayos y precipitadores electrostáticos y por procesos como la xerografía y la pintura de automóviles. Los aparatos científicos según los principios de la electrostática incluyen los generadores electrostáticos, el microscopio iónico de efecto de campo y los motores de cohete iónico.

El generador Van de Graaff

Los resultados experimentales han demostrado que cuando un conductor con carga se pone en contacto con el interior de un conductor hueco, toda la carga del conductor con carga se transfiere al conductor hueco. En principio, la carga en el conductor hueco y su potencial eléctrico pueden incrementarse sin límite mediante la repetición del proceso.

En 1929 Robert J. Van de Graaff (1901-1967) utilizó este principio para diseñar y construir un generador electrostático; una representación esquemática aparece en la figura 25.24. Este tipo de generador tiene una intensa utilización en la investigación de la física nuclear. La carga es llevada continuamente a un electrodo a un alto potencial por medio de una banda transportadora hecha de material aislante. El electrodo de alto vol-

[3]También existe una fuerza de flotación en la gota de aceite debida al aire que la rodea. Esta fuerza se incorpora como una corrección a la fuerza gravitacional $m\vec{g}$ sobre la gota, así que para este análisis no se tomará en cuenta.

taje es un domo metálico hueco montado sobre una columna aislante. La banda se carga en el punto Ⓐ por medio de un efecto corona entre unas agujas metálicas parecidas a un peine y una rejilla a tierra. Las agujas se mantienen a un potencial eléctrico positivo que es de 10^4 V. La carga positiva de la banda transportadora se transfiere al domo mediante un segundo peine de agujas en el punto Ⓑ. Ya que el campo eléctrico en el interior del domo es despreciable, la carga positiva de la banda se transfiere con facilidad al conductor a pesar del potencial del conductor. En la práctica es posible aumentar el potencial eléctrico del domo hasta que se presenta una descarga eléctrica a través del aire. Porque la "ruptura" del campo eléctrico del aire es casi de 3×10^6 V/m, el potencial de una esfera de 1m de radio se eleva a un máximo de 3×10^6 V. Este potencial se incrementa aún más si aumenta el radio del domo y coloca todo el sistema en un recipiente lleno de gas a presión alta.

Los generadores de Van de Graaff producen diferencias de potencial de hasta 20 millones de volts. Los protones acelerados a través de diferencias de potencial tan grandes, reciben suficiente energía para iniciar reacciones nucleares entre ellos y entre diferentes núcleos objetivo. Con frecuencia los generadores pequeños están en los salones de clases de ciencia y en los museos. Si una persona no hace contacto con tierra y toca la esfera de un generador Van de Graaff, es posible elevar el potencial eléctrico de su cuerpo de manera considerable. El cabello adquiere una carga positiva neta, y cada mechón repele a todos los demás, como se muestra en la fotografía de introducción del capítulo 23.

Figura 25.24 Diagrama esquemático de un generador Van de Graaff. La carga se transfiere al domo metálico en la parte superior por medio de una banda transportadora. La carga se deposita en la banda en el punto Ⓐ y se transfiere al conductor hueco del punto Ⓑ.

El precipitador electrostático

Una aplicación importante de la descarga eléctrica en los gases es el *precipitador electrostático*. Este aparato retira partículas de materia de los gases de combustión, por lo que reduce la contaminación en el aire. Los precipitadores son de especial utilidad en plantas eléctricas que consumen carbón y en operaciones industriales que generan grandes cantidades de humo. Los sistemas actuales son capaces de eliminar más de 99% de la ceniza del humo.

La figura 25.25a muestra un diagrama esquemático de un precipitador electrostático. Entre un alambre que corre hacia abajo en el centro de un ducto y las paredes del mismo, que están a tierra, se mantiene una diferencia de potencial elevada (de 40 a 100 kV). El alambre se mantiene a un potencial eléctrico negativo respecto a las paredes, así que el campo eléctrico está dirigido hacia el alambre. Los valores del campo cercano al alambre se elevan lo suficiente para causar un efecto producidos alrededor del alambre; el aire cerca del alambre contiene iones positivos, electrones y iones negativos, como por ejemplo el O_2^-. El aire que hay que limpiar entra al ducto y se mueve cerca del cable. Conforme los electrones y los iones negativos producidos por la descarga aceleran hacia la pared exterior debido al campo eléctrico, las partículas de polvo en el aire se

© Ray Stubblebine/Reuters/Corbis
Rei O'Hara/Black Star/PNI.
© Alexander Tolstykh/Shutterstock

Figura 25.25 a) Diagrama esquemático de un precipitador electrostático. El elevado potencial eléctrico negativo que se mantiene en el alambre en espiral del centro crea un efecto corona cerca de él. Compare la contaminación del aire cuando un precipitador electrostático está b) en operación y c) inactivo.

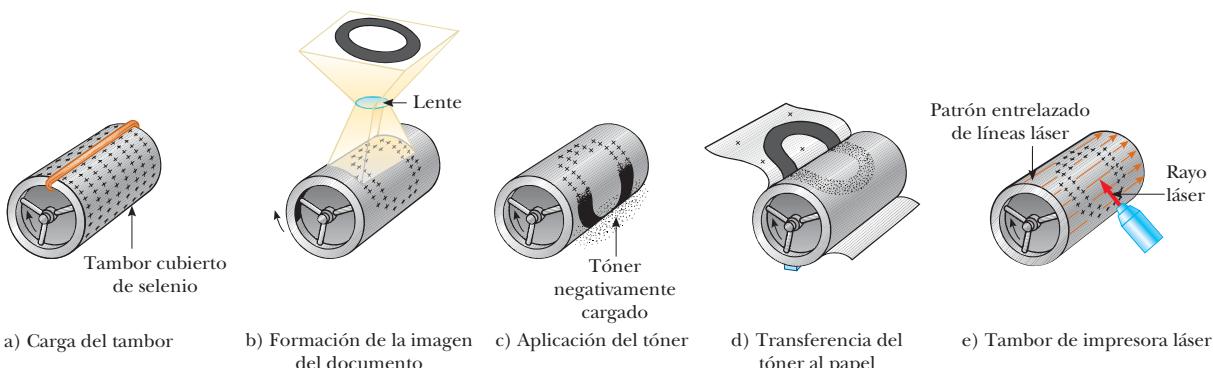



Figura 25.26 El proceso xerográfico: a) La superficie fotoconductora del tambor está positivamente cargada. b) Mediante el uso de una fuente de luz y de una lente, en la superficie se forma una imagen constituida por cargas positivas. c) La superficie que contiene la imagen se cubre con polvo negativamente cargado, el cual se adhiere sólo al área de la imagen. d) Un pedazo de papel se coloca sobre la superficie y se le da una carga positiva que transfiera la imagen al papel ya que las partículas de polvo negativamente cargadas emigran hacia el papel. Después se somete el papel a un tratamiento térmico para "fijar" el polvo. e) Una impresora láser opera de manera similar excepto que la imagen es producida mediante la conexión y desconexión de un haz láser conforme éste pasa sobre el tambor recubierto de selenio.

cargan por colisiones y captura de iones. Ya que la mayoría de las partículas de polvo cargadas son negativas, éstas también son atraídas hacia las paredes del ducto por el campo eléctrico. Si el ducto es sacudido de manera periódica, las partículas se sueltan y se recolectan en el fondo.

Además de reducir el nivel de partículas de materia en la atmósfera (compare las figuras 25.25b y c), el precipitador electrostático recupera materiales valiosos en forma de óxidos metálicos.

Xerografía e impresoras láser

La idea básica de la xerografía[4] fue desarrollada por Chester Carlson, al que se le concedió en 1940 la patente del proceso xerográfico. La característica distintiva de este proceso es el uso de un material fotoconductor para formar una imagen. (Un *fotoconductor* es un material que es un mal conductor eléctrico en la oscuridad pero que se convierte en buen conductor cuando es expuesto a la luz.)

El proceso de xerografía se ilustra en las partes de la a) a la d) en la figura 25.26. Primero, a la superficie de una placa o de un tambor que ha sido recubierto con una película delgada de un material fotoconductor (selenio o algún compuesto de éste) se le da una carga electrostática positiva en la oscuridad. Después, la página a copiar es enfocada por una lente sobre la superficie con carga. La superficie fotoconductora se convierte en conductora sólo en las áreas donde es tocada por la luz. En estas áreas, la luz produce portadores de carga en el fotoconductor que mueven la carga positiva del tambor. Sin embargo, quedan las cargas positivas en aquellas áreas donde el fotoconductor no fue expuesto a la luz, dejando una imagen latente del objeto en forma de una distribución superficial de carga positiva.

Después, sobre la superficie fotoconductora se esparce un polvo cargado negativamente, llamado *tóner*. El polvo con carga se adhiere sólo a aquellas áreas de la superficie que contienen la imagen positivamente cargada. Por lo tanto, el tóner (y por ende la imagen) es transferido a la superficie de una hoja de papel positivamente cargada.

Por último, el tóner se "fija" a la superficie del papel al derretirse cuando pasa por unos rodillos de temperatura alta. Esto da como resultado una copia permanente del original.

Una impresora láser (figura 25.26e) funciona con el mismo principio, excepto que se utiliza un haz láser dirigido por computadora para iluminar el fotoconductor en lugar de hacerlo mediante una lente.

[4]El prefijo *xero* viene de la palabra griega que significa "seco". Note que en la xerografía no se utiliza tinta líquida.

Resumen

DEFINICIONES

La **diferencia de potencial** ΔV entre los puntos Ⓐ y Ⓑ en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ se define como

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (25.3)$$

donde ΔU se conoce por la ecuación 25.1 abajo. El **potencial eléctrico** $V = U/q_0$ es una cantidad escalar y tiene las unidades de joules por cada coulomb, donde J/C ≡ 1 V.

Una **superficie equipotencial** es aquella donde todos los puntos tienen el mismo potencial eléctrico. Las superficies equipotenciales son perpendiculares a líneas de campo eléctrico.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cuando una carga de prueba positiva q_0 se mueve entre los puntos Ⓐ y Ⓑ en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, el **cambio en la energía potencial del sistema carga-campo** es

$$\Delta U = -q_0 \int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (25.1)$$

La diferencia de potencial entre dos puntos Ⓐ y Ⓑ separados una distancia d en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$, donde $\vec{\mathbf{s}}$ es un vector que apunta de Ⓐ a Ⓑ y es paralelo a $\vec{\mathbf{E}}$, es

$$\Delta V = -E \int_{Ⓐ}^{Ⓑ} ds = -Ed \qquad (25.6)$$

Si define $V = 0$ en $r = \infty$, el potencial eléctrico debido a una carga puntual a cualquier distancia r desde la carga es

$$V = k_e \frac{q}{r} \qquad (25.11)$$

El potencial eléctrico asociado con un grupo de cargas puntuales se obtiene al sumar los potenciales debidos a las cargas individuales.

La **energía potencial asociada con un par de cargas puntuales** separadas una distancia r_{12} es

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (25.13)$$

La energía potencial de una distribución de cargas puntuales se obtiene al sumarlas como en la ecuación 25.13 sobre todos los pares de partículas.

Si conoce el potencial eléctrico como función de las coordenadas x, y y z, puede obtener las componentes del campo eléctrico al tomar la derivada negativa del potencial eléctrico respecto a las coordenadas. Por ejemplo, la componente x del campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \qquad (25.16)$$

El **potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua** es

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \qquad (25.20)$$

Cada punto en la superficie de un conductor cargado en equilibrio electrostático tiene el mismo potencial eléctrico. El potencial es constante en todas partes dentro del conductor e igual a su valor en la superficie.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. Explique la diferencia entre potencial eléctrico y energía potencial eléctrica.
2. **O** En cierta región del espacio, un campo eléctrico uniforme está en la dirección x. Una partícula con carga negativa es llevada de x = 20 cm a x = 60 cm. **i)** ¿La energía potencial del sistema carga-campo a) aumenta, b) permanece constante, c) disminuye o d) cambia de manera impredecible? **ii)** ¿La partícula se mueve a una posición donde el potencial es a) mayor que antes, b) no cambia, c) menor que antes o d) impredecible?
3. **O** Considere las superficies equipotenciales que se muestran en la figura 25.4. En esta región del espacio, ¿cuál es la dirección aproximada del campo eléctrico? a) afuera de la página, b) hacia la página, c) hacia la

derecha, d) hacia la izquierda, e) hacia lo alto de la página, f) hacia la parte baja de la página, g) el campo es cero.

4. **O** Una partícula con carga −40 nC, está en el eje x en el punto con coordenada $x = 0$. Una segunda partícula, con carga −20 nC, está en el eje x en $x = 500$ mm. **i)** ¿Existe algún punto a una distancia finita donde el campo eléctrico sea cero? a) Sí, está a la izquierda de $x = 0$. b) Sí, está entre $x = 0$ y $x = 500$ mm. c) Sí, está a la derecha de $x = 500$ mm. d) No. **ii)** ¿El potencial eléctrico es cero en este punto? a) No, es positivo. b) Sí. c) No, es negativo. d) No existe tal punto. **iii)** ¿Existe algún punto a una distancia finita donde el potencial eléctrico sea cero? a) Sí, está a la izquierda de $x = 0$. b) Sí, está entre $x = 0$ y $x = 500$ mm. c) Sí, está a la derecha de $x = 500$ mm. d) No. **iv)** ¿El campo eléctrico es cero en este punto? a) No, apunta a la derecha. b) Sí. c) No, apunta a la izquierda. d) No existe tal punto.

5. Dé una explicación física de por qué la energía potencial de un par de cargas con el mismo signo es positiva, en tanto que la energía potencial del par de cargas con signos opuestos es negativa.

6. Describa las superficies equipotenciales de a) una línea de carga infinita y b) una esfera uniformemente cargada.

7. **O** En cierta región del espacio, el campo eléctrico es cero. A partir de este hecho, ¿qué puede concluir acerca del potencial eléctrico en esta región? a) Es cero. b) Es constante. c) Es positivo. d) Es negativo. e) Ninguna de estas respuestas es necesariamente cierta.

8. **O** Un filamento, continuo a lo largo del eje x desde el origen hasta $x = 80$ cm, conduce carga eléctrica con densidad uniforme. En el punto P, con coordenadas ($x = 80$ cm, $y = 80$ cm), este filamento establece un potencial de 100 V. Ahora agrega otro filamento a lo largo del eje y, continuo del origen hasta $y = 80$ cm, y porta la misma cantidad de carga con la misma densidad uniforme. En el mismo punto P, ¿el par de filamentos establece un potencial a) mayor que 200 V, b) 200 V, c) entre 141 y 200 V, d) 141 V, e) entre 100 y 141 V, f) 100 V, g) entre 0 y 100 V, o h) 0?

9. **O** En diferentes ensayos experimentales, un electrón, un protón o un átomo de oxígeno doblemente cargado (O^{--}) se dispara dentro de un tubo de vacío. La trayectoria de la partícula la lleva a un punto donde el potencial eléctrico es de 40 V y luego a un punto con un potencial diferente. Clasifique cada uno de los siguientes casos de acuerdo con el cambio de energía cinética de la partícula sobre esta parte de su vuelo, de mayor aumento a mayor disminución de energía cinética. a) Un electrón se mueve de 40 a 60 V. b) Un electrón se mueve de 40 a 20 V. c) Un protón se mueve de 40 a 20 V. d) Un protón se mueve de 40 a 10 V. e) Un ion O^{--} se mueve de 40 a 50 V. f) Un ion O^{--} se mueve de 40 a 60 V. Para comparar, incluya también en su clasificación g) cambio cero y h) +10 electrón volts de cambio en energía cinética. También despliegue cualquier caso de igualdad.

10. ¿Qué determina el potencial máximo al cual puede elevarse el domo de un generador Van de Graaff?

11. **O i)** Una esfera metálica A, de 1 cm de radio, está a varios centímetros de distancia de una cubierta esférica metálica B de 2 cm de radio. Sobre A se coloca una carga de 450 nC, sin carga en B o en los alrededores. A continuación, los dos objetos se unen mediante un alambre metálico largo y delgado (como se muestra en la figura 25.20) y al final se quita el alambre. ¿Cómo se comparte la carga entre A y B? a) 0 en A, 450 nC en B, b) 50 nC en A y 400 nC en B, con iguales densidades de carga volumétrica, c) 90 nC en A y 360 nC en B, con iguales densidades de carga superficial, d) 150 nC en A y 300 nC en B, e) 225 nC en A y 225 nC en B, f) 450 nC en A y 0 en B, g) en alguna otra forma predecible, h) en alguna forma impredecible. **ii)** Una esfera metálica A, de 1 cm de radio, con 450 nC de carga, cuelga de un hilo aislante dentro de una cubierta esférica delgada metálica sin carga B, de 2 cm de radio. A continuación, A toca temporalmente la superficie interior de B. ¿Cómo comparten la carga? Elija las mismas posibilidades. Arnold Arons, hasta ahora el único profesor de física cuya fotografía aparece en la portada de la revista *Time*, sugirió la idea para esta pregunta.

12. Estudie la figura 23.3, así como el texto al pie de la figura sobre la explicación de cargas por inducción. Puede también compararlo con la figura 3.24. Cuando en la figura 23.3c el alambre a tierra toca el punto más a la derecha de la esfera, los electrones salen de la esfera y la dejan positivamente cargada. En vez de lo anterior, suponga que el alambre a tierra toca el punto más a la izquierda de la esfera. Si así ocurre, ¿los electrones seguirán acercándose más a la varilla negativamente cargada? ¿Qué clase de carga, si es que existe alguna,

Problemas

Sección 25.1 Diferencia de potencial y potencial eléctrico

1. a) Calcule la rapidez de un protón acelerado desde el reposo a causa de una diferencia de potencial de 120 V. b) Calcule la rapidez de un electrón que se acelera a causa de la misma diferencia de potencial.

2. ¿Cuánto trabajo realiza una batería, un generador o alguna otra fuente de diferencia de potencial, al mover el número de Avogadro de electrones desde un punto inicial, donde el potencial eléctrico es 9.00 V a un punto donde el potencial es

de −5.00 V? (En cada caso el potencial se mide en relación con un punto de referencia común.)

Sección 25.2 Diferencias de potencial en un campo eléctrico uniforme

3. La diferencia de potencial entre las placas aceleradoras del cañón de electrones de un cinescopio de televisión es de aproximadamente 25 000 V. Si la distancia entre estas placas es de 1.50 cm, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico uniforme en esta región?

4. En la figura P25.4, un campo eléctrico uniforme de magnitud 325 V/m está dirigido hacia el lado negativo de las y. Las coordenadas del punto A son (−0.200, −0.300) m, y las del punto B son (0.400, 0.500) m. Calcule, utilizando la trayectoria azul, la diferencia de potencial $V_B - V_A$.

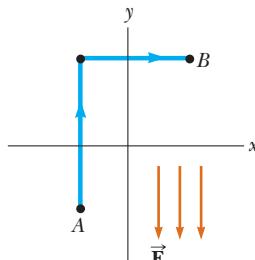



Figura P25.4

5. Un electrón que se mueve paralelamente al eje de las x tiene una rapidez inicial de 3.70×10^6 m/s en el origen. Su rapidez se reduce a 1.40×10^5 m/s en el punto $x = 2.00$ cm. Calcule la diferencia de potencial entre el origen y ese punto. ¿Cuál de los puntos está a mayor potencial?

6. ● A partir de la definición de trabajo, demuestre que en todos los puntos de una superficie equipotencial, ésta debe ser perpendicular al campo eléctrico existente en ese punto.

7. **Problema de repaso.** Un bloque de masa m y carga $+Q$ está conectado a un resorte que tiene una constante k. El bloque se encuentra en una pista horizontal aislada libre de fricción, y el sistema está dentro de un campo eléctrico uniforme de magnitud E, dirigido como se muestra en la figura P25.7. Si el bloque se libera del reposo cuando el resorte no está estirado (en $x = 0$): a) ¿Cuál es la cantidad máxima que se estirará el resorte? b) ¿Cuál es la posición de equilibrio del bloque? c) Demuestre que el movimiento del bloque es un movimiento armónico simple, y determine su periodo. d) **¿Qué pasaría si?** Repita el inciso a), si el coeficiente de la fricción cinética entre bloque y superficie es μ_k.

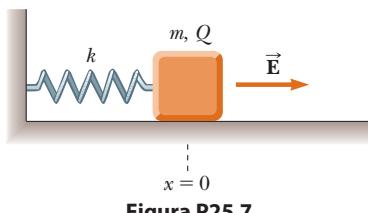



Figura P25.7

8. Una partícula con una carga $q = +2.00$ μC y masa $m = 0.010\,0$ kg está conecta a un hilo que tiene $L = 1.50$ m de largo y está atado en el punto de pivote P en la figura P25.8. La partícula, hilo y el punto de giro yacen en una mesa horizontal libre de fricción. La partícula es liberada del reposo cuando el hilo forma un ángulo $\theta = 60.0°$ con un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = 300$ V/m. Determine la rapidez de la partícula cuando el hilo es paralelo al campo eléctrico (punto a de la figura P25.8).

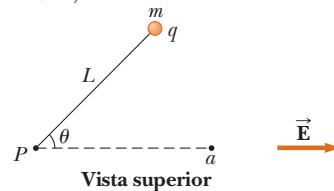



Figura P25.8

9. ● Una varilla aislante con una densidad de carga lineal $\lambda = 40.0$ μC/m y densidad de masa lineal $\mu = 0.100$ kg/m se libera del reposo en un campo eléctrico uniforme $E = 100$ V/m dirigido perpendicularmente a la varilla (figura P25.9). a) Determine la rapidez de la varilla después de que ha recorrido 2.00 m. b) **¿Qué pasaría si?** ¿De qué manera cambiaría su respuesta al inciso a) si el campo eléctrico no fuera perpendicular a la varilla? Explique.

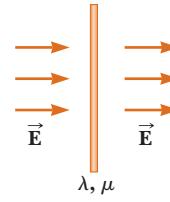



Figura P25.9

Sección 25.3 Potencial eléctrico y energía potencial debidos a cargas puntuales.

Nota: a no ser que se exprese de otra manera, se supone que el nivel de referencia del potencial es $V = 0$ en $r = \infty$.

10. Dadas dos cargas de 2.00 μC, como se muestra en la figura P25.10, y una carga de prueba positiva $q = 1.28 \times 10^{-18}$ C colocada en el origen, a) ¿cuál es la fuerza neta ejercida por las dos cargas de 2.00 μC sobre la carga de prueba q?; b) ¿cuál es el campo eléctrico en el origen debido a las dos cargas de 2.00 μC?, y c) ¿cuál es el potencial eléctrico en el origen debido a las dos cargas de 2.00 μC?

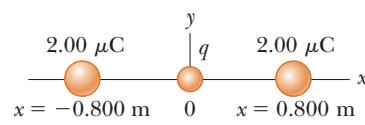



Figura P25.10

11. a) Determine el potencial a una distancia de 1 cm de un protón. b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos que se encuentren a 1.00 y 2.00 cm, de un protón? c) **¿Qué pasaría si?** Repita los incisos a) y b) pero para un electrón.

12. Una partícula con carga $+q$ está en el origen. Una partícula con carga $-2q$ está en $x = 2.00$ m sobre el eje x. a) ¿Para qué valores finitos de x el campo eléctrico es cero? b) ¿Para qué valores finitos de x el potencial eléctrico es cero?

13. A cierta distancia de una partícula con carga, la magnitud del campo eléctrico es de 500 V/m y el potencial eléctrico es de −3.00 kV. a) ¿Cuál es la distancia a la partícula? b) ¿Cuál es la magnitud de la carga?

14. ● Dos partículas cargadas, Q_1 = +5.00 nC y Q_2 = −3.00 nC, están separadas 35.0 cm. a) ¿Cuál es la energía potencial del par? ¿Cuál es el significado del signo algebraico en su respuesta? b) ¿Cuál es el potencial eléctrico en un punto a medio camino entre las partículas con carga?

15. Las tres partículas con carga de la figura P25.15 están en los vértices de un triángulo isósceles. Calcule el potencial eléctrico en el punto medio de la base, si q = 7.00 μC.

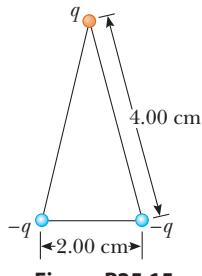



Figura P25.15

16. *Compare este problema con el problema 16 del capítulo 23.* Dos partículas con carga, cada una de ellas con una magnitud de 2.0 μC, se localizan en el eje de las x. Una está a x = 1.00 m, y la otra está a x = −1.00 m. a) Determine el potencial eléctrico sobre el eje de las y en el punto y = 0.500 m. b) Calcule el cambio en la energía potencial eléctrica del sistema al traer una tercera carga de −3.00 μC desde un punto infinitamente lejano a una posición en el eje de las y en y = 0.500 m.

17. *Compare este problema con el problema 47 del capítulo 23.* Cuatro partículas con carga idénticas (q = +10.0 μC) están ubicadas en las esquinas de un rectángulo, como se muestra en la figura P23.47. Las dimensiones del rectángulo son L = 60.0 cm y W = 15.0 cm. Calcule el cambio en la energía potencial eléctrica del sistema cuando la partícula del vértice inferior izquierdo en la figura P23.47 se coloca en esta posición trayéndola desde el infinito. Suponga que las otras tres partículas en la figura P23.47 permanecen fijas en su posición.

18. Dos partículas con carga tienen efectos en el origen, descritos por las expresiones

$$8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \left[-\frac{7 \times 10^{-9}\text{ C}}{(0.07\text{ m})^2} \cos 70° \hat{\mathbf{i}} - \frac{7 \times 10^{-9}\text{ C}}{(0.07\text{ m})^2} \text{sen } 70° \hat{\mathbf{j}} + \frac{8 \times 10^{-9}\text{ C}}{(0.03\text{ m})^2} \hat{\mathbf{j}} \right]$$

y

$$8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \left[\frac{7 \times 10^{-9}\text{ C}}{0.07\text{ m}} - \frac{8 \times 10^{-9}\text{ C}}{0.03\text{ m}} \right]$$

a) Identifique las posiciones de las partículas y las cargas sobre ellas. b) Encuentre la fuerza sobre una partícula con carga −16.0 nC colocada en el origen. c) Encuentre el trabajo requerido para mover esta tercera partícula cargada al origen desde un punto muy distante.

19. Demuestre que la cantidad de trabajo requerida para colocar cuatro partículas con carga idénticas de magnitud Q en las esquinas de un cuadrado de lado s es igual a 5.41 k_eQ^2/s.

20. *Compare este problema con el problema 19 del capítulo 23.* Cinco partículas con carga negativas idénticas $-q$ están colocadas simétricamente alrededor de un círculo de radio R. Calcule el potencial eléctrico en el centro del círculo.

21. *Compare este problema con el problema 35 del capítulo 23.* Tres partículas con cargas positivas iguales q se encuentran en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a, como se muestra en la figura P23.35. a) ¿En qué punto, si es que hay uno, del plano de las cargas, existe un potencial eléctrico igual a cero? b) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto P debido a las dos cargas que se encuentran en la base del triángulo?

22. Dos cargas puntuales de igual magnitud están localizadas a lo largo del eje de las y a iguales distancias por encima y por debajo del eje de las x, como se muestra en la figura P25.22. a) Trace una gráfica del potencial en puntos a lo largo del eje de las x en el intervalo $-3a < x < 3a$. Debe trazar el potencial en unidades de k_eQ/a. b)Permita que la carga localizada en $y = -a$ sea negativa y trace el potencial a lo largo del eje de las y en el intervalo $-4a < y < 4a$.

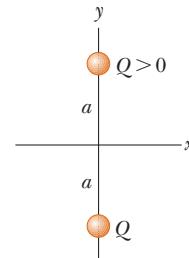



Figura P25.22

23. ● **Problema de repaso.** Dos esferas aislantes tienen radios de 0.300 cm y 0.500 cm, con masas de 0.100 kg y 0.700 kg, y cargas uniformemente distribuidas de −2.00 μC y 3.00 μC. Cuando sus centros están separados una distancia de 1 m, estas esferas se liberan partiendo del reposo. a) ¿Cuáles serán sus velocidades cuando entren en colisión? (*Sugerencia:* considere la conservación de la energía, así como el momento lineal.) b) **¿Qué pasaría si?** Si las esferas fueran conductoras, ¿las velocidades serían mayores o menores que las calculadas en el inciso a)? Explique.

24. ● **Problema de repaso.** Dos esferas aislantes tienen radios r_1 y r_2, masas m_1 y m_2, y cargas uniformemente distribuidas $-q_1$ y q_2. Cuando sus centros están separados por una distancia d, son liberadas del reposo. a) ¿Qué tan rápida se moverá cada una cuando entren en colisión? (*Sugerencia:* considere la conservación de la energía y la conservación de la cantidad de movimiento lineal.) b) **¿Qué pasaría si?** Si las esferas fueran conductoras, ¿sus magnitudes de velocidad serían mayores o menores que las calculadas en el inciso a)? Explique.

25. **Problema de repaso.** Un resorte ligero sin tensar tiene una longitud d. Dos partículas idénticas, cada una con carga q, están conectadas a los extremos opuestos del resorte. Las partículas se mantienen inmóviles separadas una distancia d, y luego son liberadas simultáneamente. El sistema, entonces, oscila en una mesa horizontal libre de fricción. El resorte tiene un poco de fricción cinética interna, por lo que su oscilación es amortiguada. Las partículas al final dejan de vibrar cuando están separadas una distancia 3d. Determine el incremento en energía interna en el resorte durante las oscilaciones. Suponga que el sistema del resorte y de las dos partículas cargadas es un sistema aislado.

26. En 1911 Ernest Rutherford y sus ayudantes Geiger y Marsden llevaron a cabo un experimento en el cual dispersaron partículas alfa provenientes de láminas delgadas de oro. Una partícula alfa, con una carga de $+2e$ y una masa de 6.64 $\times 10^{-27}$ kg, es el producto de ciertos decaimientos radioactivos. Los resultados del experimento llevaron a Rutherford a la idea de que la mayor parte de la masa de un átomo existe en un núcleo muy pequeño, con electrones en órbita a su alrededor; su modelo planetario del átomo. Suponga que una partícula alfa, inicialmente muy alejada de un núcleo de oro, es lanzada a una velocidad de 2.00×10^7 m/s hacia el núcleo (carga $+79e$). ¿Cuánto se acerca la partícula alfa al núcleo antes de retroceder? Suponga que el núcleo de oro se mantiene inmóvil.

27. Cuatro partículas idénticas cada una tienen una carga q y una masa m. Son liberadas del reposo desde los vértices de un cuadrado de lado L. ¿Qué tan rápido se mueve cada carga cuando se duplica su distancia al centro del cuadrado?

28. ¿Cuánto trabajo se requiere para colocar ocho partículas con cargas idénticas, cada una de ellas de magnitud q, en las esquinas de un cubo de lado s?

Sección 25.4 Obtención del valor del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico

29. El potencial en una región entre $x = 0$ y $x = 6.00$ m es $V = a + bx$, donde $a = 10.0$ V y $b = -7.00$ V/m. Determine a) el potencial en $x = 0$, 3.00 m, y 6.00 m, y b) la magnitud y dirección del campo eléctrico en $x = 0$, 3.00 m, y 6.00 m.

30. El potencial eléctrico en el interior de un conductor esférico cargado de radio R se conoce por $V = k_eQ/R$, y el potencial en el exterior se conoce por $V = k_eQ/r$. A partir de $E_r = -dV/dr$, derive el campo eléctrico a) en el interior y b) en el exterior de esta distribución de carga.

31. En cierta región del espacio, el potencial eléctrico es $V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$. Determine las expresiones correspondientes para las componentes en x, y y z del campo eléctrico en esa región. ¿Cuál es la magnitud del campo en el punto P cuyas coordenadas son (1, 0, −2) m?

32. ● La figura P25.32 muestra varias líneas equipotenciales cada una de ellas marcadas por su potencial en volts. La distancia entre líneas de la rejilla cuadriculada representa 1.00 cm. a) ¿La magnitud del campo es mayor en A o en B? Explique su razonamiento. b) Explique lo que puede establecer respecto a $\vec{\mathbf{E}}$ en B? c) Represente la forma en que se vería el campo al dibujar por lo menos ocho líneas de campo.

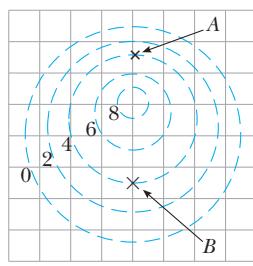



Figura P25.32

33. En el ejemplo 25.7 se demuestra que el potencial en un punto P a una distancia a por encima de un extremo de una varilla uniforme con carga de longitud que está a lo largo del eje x es

$$V = k_e \frac{Q}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a}\right)$$

Utilice este resultado para derivar una expresión para la componente en y del campo eléctrico en P. (*Sugerencia:* reemplace a por y.)

Sección 25.5 Potencial eléctrico debido a distribuciones de carga continuas

34. Imagine un anillo de radio R con una carga total Q con distribución uniforme en su perímetro. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el punto del centro del anillo y un punto en el eje a una distancia $2R$ del centro?

35. Una varilla de longitud L (figura P25.35) yace a lo largo del eje de las x, con su extremo izquierdo en el origen. Además tiene una densidad de carga no uniforme $\lambda = \alpha x$, donde α es una constante positiva. a) ¿Cuáles son las unidades de α? b) Calcule el potencial eléctrico en A.

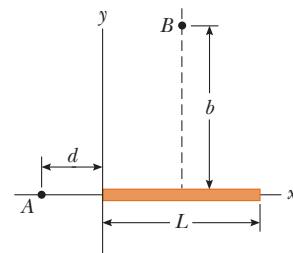



Figura P25.35 Problemas 35 y 36.

36. Para el arreglo descrito en el problema 35, calcule el potencial eléctrico en el punto B, que está en la bisectriz perpendicular de la varilla, a una distancia b por encima del eje de las x.

37. *Compare este problema con el problema 27 del capítulo 23.* Una varilla aislante con carga uniforme con una longitud de 14.0 cm se dobla en forma de semicírculo, como se muestra en la figura P23.27. La varilla tiene una carga total de −7.50 μC. Determine el potencial eléctrico en O, el centro del semicírculo.

38. Un alambre con una densidad de carga lineal uniforme λ se dobla como se muestra en la figura P25.38. Determine el potencial eléctrico en el punto O.

Figura P25.38

Sección 25.6 Potencial eléctrico debido a un conductor con carga

39. Un conductor de forma esférica tiene un radio de 14.0 cm y una carga de 26.0 μC. Calcule el campo eléctrico y el potencial eléctrico a las siguientes distancias del centro a) $r = 10.0$ cm, b) $r = 20.0$ cm, y c) $r = 14.0$ cm.

40. ¿Cuántos electrones deben retirarse de un conductor de forma esférica inicialmente sin carga, de radio 0.300 m, para producir un potencial de 7.50 kV en la superficie?

41. El campo eléctrico sobre la superficie de un conductor con forma irregular varía de 56.0 kN/C a 28.0 kN/C. Calcule la densidad de carga superficial local en el punto sobre la superficie donde el radio de curvatura de la superficie es a) mayor y b) menor.

42. Una aeronave en vuelo puede acumular una carga eléctrica. Quizás haya observado la presencia de extensiones metálicas en forma de aguja en las puntas de las alas y en la cola del avión. Su propósito es permitir que la carga se disperse antes de que se acumule una gran cantidad. El campo eléctrico que rodea una aguja es mucho mayor que el campo que rodea el fuselaje del avión, y puede llegar a ser tan grande como para producir una ruptura dieléctrica en el aire, lo que descargaría al avión. Para representar este proceso, suponga que dos conductores esféricos cargados están interconectados mediante un alambre conductor largo, y en la combinación se coloca una carga de 1.20 μC. Una esfera, que representa el fuselaje del avión, tiene un radio de 6.00 cm, y la otra, que representa la punta de la aguja, tiene un radio de 2.00 cm. a) ¿Cuál es el potencial eléctrico de cada esfera? b) ¿Cuál es el campo eléctrico en la superficie de cada esfera?

Sección 25.8 Aplicaciones de la electrostática

43. Los relámpagos son estudiados con un generador Van de Graaff, que consiste esencialmente en un domo esférico en el cual se deposita carga en forma continua mediante una banda transportadora. Se añde carga hasta que el campo eléctrico en la superficie del domo sea igual a la resistencia dieléctrica del aire. Cualquier carga adicional será dispersada en forma de chispas, como se muestra en la figura P25.43. Suponga que el domo tiene un diámetro de 30.0 cm y está rodeado por aire seco, con una resistencia dieléctrica de 3.00×10^6 V/m. a) ¿Cuál es el potencial máximo del domo? b) ¿Cuál es la carga máxima del domo?

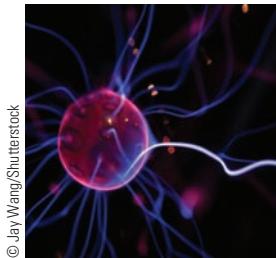



Figura P25.43

44. Un tubo Geiger-Mueller es un detector de radiación que consiste en un cilindro metálico cerrado y hueco (el cátodo) de radio interior r_a y un alambre cilíndrico coaxial (el ánodo) de radio r_b (figura P25.44). La carga por cada unidad de longitud sobre el ánodo es λ, y la carga por cada unidad de longitud sobre el cátodo es $-\lambda$. Entonces un gas llena el espacio entre los electrodos. Cuando una partícula elemental de alta energía pasa a través de este espacio, ioniza un átomo del gas. La intensidad del campo eléctrico hace que el ion y electrón resultantes aceleren en direcciones opuestas; golpean otras moléculas del gas y las ionizan, lo que produce una avalancha de descarga eléctrica. El pulso de la corriente eléctrica entre el alambre y el cilindro se cuenta mediante un circuito externo. a) Demuestre que la magnitud de la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro es

$$\Delta V = 2k_e\lambda \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

b) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre cátodo y ánodo es

$$E = \frac{\Delta V}{\ln (r_a/r_b)}\left(\frac{1}{r}\right)$$

donde r es la distancia desde el eje del ánodo al punto donde se calcula el campo.

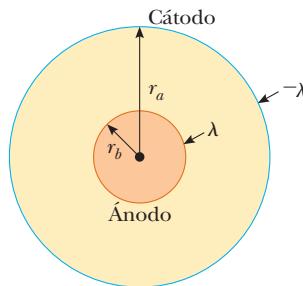



Figura P25.44 Problemas 44 y 45.

45. Los resultados del problema 44 también aplican a un precipitador electrostático (figuras 25.25 y P25.44). Una diferencia de potencial aplicado $\Delta V = V_a - V_b = 50.0$ kV debe producir un campo eléctrico de 5.50 MV/m de magnitud en la superficie del alambre central. Suponga que la pared cilíndrica exterior tiene radio uniforme $r_a = 0.850$ m. a) ¿Cuál debe ser el radio r_b del alambre central? Necesitará resolver una ecuación trascendental. b) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en la pared exterior?

Problemas adicionales

46. ● **Problema de repaso.** Desde una gran distancia, una partícula de 2.00 g de masa y 15.0 μC de carga se dispara a $21.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s directo hacia una segunda partícula, originalmente estacionaria pero libre de moverse, con 5.00 g de masa y 8.50 μC de carga. a) En el instante de máximo acercamiento, ambas partículas se moverán a la misma velocidad. Explique por qué. b) Encuentre esta velocidad. c) Encuentre la distancia de máximo acercamiento. d) Encuentre las velocidades de ambas partículas después de que se separan de nuevo.

47. El modelo de la gota líquida del núcleo atómico sugiere que las oscilaciones de alta energía de ciertos núcleos pueden dividir el núcleo en dos fragmentos desiguales, además de algunos neutrones. Los productos de la fisión adquieren energía cinética gracias a la repulsión mutua de Coulomb. Calcule la energía potencial eléctrica (en electrón volts) de dos fragmentos esféricos de un núcleo de uranio con las siguientes cargas y radios: $38e$ y 5.50×10^{-15} m; $54e$ y 6.20×10^{-15} m. Suponga que la carga está distribuida uniformemente en todo el volumen de cada fragmento esférico y que inmediatamente antes de separarse están en reposo con sus superficies en contacto. Puede ignorar los electrones que rodean el núcleo.

48. Cuando hay buen clima, el campo eléctrico en el aire en una ubicación particular inmediatamente sobre la superficie de la Tierra es de 120 N/C dirigidos hacia abajo. a) ¿Cuál es la densidad de carga superficial en el suelo? ¿Es positiva o negativa? b) Imagine que la atmósfera se retira y que la densidad de carga superficial es uniforme en todo el planeta. ¿Cuál es en tal caso la carga de toda la superficie de la Tierra? c) ¿Cuál es el potenci al eléctrico de la Tierra? d) ¿Cuál es la diferencia en potencial entre la cabeza y los pies de una persona de 1.75 m de alto? e) Imagine que la Luna, con 27.3% del radio de la Tierra, tiene una carga de 27.3%, con el mismo signo. Encuentre la fuerza eléctrica que la Tierra ejercería sobre la Luna. f) Establezca cómo se compara la respuesta del inciso e) con la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre la Luna. g) Una partícula de polvo de 6.00 mg de masa está en el aire cer-

ca de la superficie de la esfera terrestre. ¿Qué carga debe tener la partícula de polvo para estar suspendida en equilibrio entre las fuerzas eléctrica y gravitacional ejercidas sobre ella? Ignore la fuerza de flotación. h) La Tierra no es una esfera perfecta, tiene un abultamiento ecuatorial debido a su rotación, de modo que el radio de curvatura de la Tierra es ligeramente mayor en los polos que en el ecuador. ¿La partícula de polvo en la parte g) requeriría más o menos carga para estar suspendida en el ecuador, en comparación con su suspención en uno de los polos? Explique su respuesta con referencia a variaciones tanto en la fuerza eléctrica como en la fuerza gravitacional.

49. El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno afirma que un electrón solitario sólo puede existir en ciertas órbitas permitidas alrededor del protón. El radio de cada órbita de Bohr es $r = n^2$ (0.052 9 nm), donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Calcule la energía potencial eléctrica de un átomo de hidrógeno cuando el electrón está en a) la primera órbita permitida, con $n = 1$, b) la segunda órbita permitida, con $n = 2$, y c) ha salido del átomo, con $r = \infty$. Exprese sus respuestas en electrón volts.

50. En un día seco de invierno frota las suelas de sus zapatos contra una alfombra y recibe una descarga cuando extiende la punta de uno de sus dedos en dirección a la perilla de una puerta metálica. Si la habitación está oscura, podrá ver una chispa de aproximadamente 5 mm de largo. Haga estimaciones de orden de magnitud a) del potencial eléctrico del cuerpo y b) de la carga en el cuerpo antes de tocar el metal. Explique su razonamiento.

51. El potencial eléctrico inmediatamente afuera de una esfera conductora con carga es 200 V, y 10.0 cm, más lejos del centro de la esfera el potencial es 150 V. a) ¿Esta información es suficiente para determinar la carga en la esfera y su radio? Explique. b) El potencial eléctrico inmediatamente afuera de otra esfera conductora con carga es 210 V y 10.0 cm, más lejos del centro de la magnitud del campo eléctrico es 400 V/m. ¿Esta información es suficiente para determinar la carga en la esfera y su radio? Explique.

52. Como se muestra en la figura P25.52, dos grandes placas paralelas, conductoras, colocadas verticalmente, están separadas por una distancia d y están cargadas de forma de que sus potenciales sean $+V_0$ y $-V_0$. Una pequeña esfera conductora de masa m y radio R (donde $R << d$) está colgada en el punto medio entre las placas. El hilo de longitud L que soporta la esfera es un alambre conductor conectado a tierra, de forma que el potencial de la esfera se ha fijado en $V = 0$. Cuando V_0 es lo suficientemente pequeño la esfera cuelga hacia abajo y en equilibrio estable. Demuestre que el equilibrio de la esfera es inestable si V_0 excede el valor crítico $k_e d^2 mg\,(4RL)$. (*Sugerencia:* considere las fuerzas que actúan sobre la esfera cuando ésta es desplazada una distancia $x << L$.)

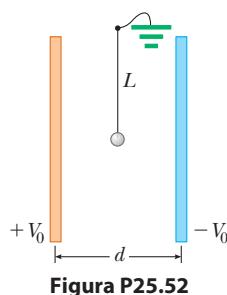



Figura P25.52

53. El potencial eléctrico en todas partes del plano xy se conoce por

$$V = \frac{36}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} - \frac{45}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}}$$

donde V está en volts y x y y en metros. Determine la posición y carga en cada una de las partículas que establecen este potencial.

54. *Compare este problema con el problema 28 del capítulo 23.* a) Una cubierta cilíndrica con carga uniforme tiene una carga total Q, radio R y altura h. Determine el potencial eléctrico en el punto a una distancia d del extremo derecho del cilindro, como se muestra en la figura P25.54. (*Sugerencia:* utilice el resultado del ejemplo 25.5 que considera el cilindro como si fuera un conjunto de anillos con carga.) b) **¿Qué pasaría si?** Utilice el resultado del ejemplo 25.6 para resolver el mismo problema pero con un cilindro sólido.

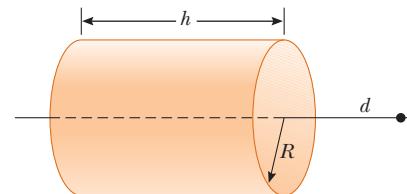



Figura P25.54

55. Calcule el trabajo que debe realizarse para cargar una cubierta esférica de radio R hasta alcanzar una carga total Q.

56. ● a) Use el resultado exacto del ejemplo 25.4 para encontrar el potencial eléctrico establecido por el dipolo descrito en el punto $(3a, 0)$. b) Explique cómo se compara esta respuesta con el resultado de la expresión aproximada que es válida cuando x es mucho mayor que a.

57. De la ley de Gauss, el campo eléctrico establecido por una línea de carga uniforme es

$$\vec{\mathbf{E}} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta radialmente alejándose de la línea y λ es la densidad de carga lineal a lo largo de la línea. Derive una expresión para la diferencia de potencial entre $r = r_1$ y $r = r_2$.

58. Cuatro esferas, cada una con masa m, están conectadas por cuatro hilos no conductores para formar un cuadrado de lado a, como se muestra en la figura P25.58. Todo el ensamble se coloca en una superficie horizontal libre de fricción y no conductora. Las esferas 1 y 2 tienen carga q, y las esferas 3 y 4 no tienen carga. Determine la rapidez máxima de las esferas 3 y 4 después de cortar el hilo que conecta las esferas 1 y 2.

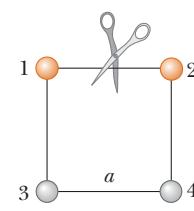
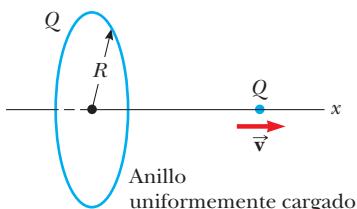
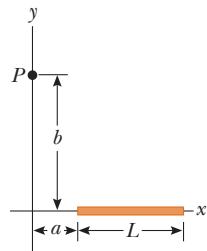



Figura P25.58

59. El eje de las x es el eje de simetría de un anillo inmóvil con carga uniforme de radio R y de carga Q (figura P25.59). Al inicio en el centro del anillo se ubica una partícula Q de masa M. Cuando ésta es desplazada ligeramente, la partícula se acelera

a lo largo del eje de las x hacia el infinito. Demuestre que la rapidez final de la partícula es

$$v = \left(\frac{2k_eQ^2}{MR}\right)^{1/2}$$

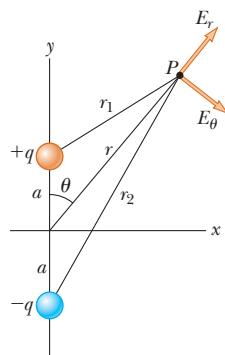



Figura P25.59

60. La varilla delgada con carga uniforme que se muestra en la figura P25.60 tiene una densidad de carga lineal λ. Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en el punto P.

Figura P25.60

61. Un dipolo eléctrico se ubica a lo largo del eje de las y, como se muestra en la figura P25.61. La magnitud del momento eléctrico del dipolo se define como $p = 2qa$. a) En el punto P, que está lejos del dipolo ($r >> a$), demuestre que el potencial eléctrico es igual a

$$V = \frac{k_e p \cos \theta}{r^2}$$

b) Calcule la componente radial E_r y la componente perpendicular E_θ del campo eléctrico asociado. Observe que $E_\theta = -(1/r)(\partial V/\partial \theta)$. ¿Para $\theta = 90°$ y $0°$, le parecen razonables estos resultados? ¿Para $r = 0$? c) Para el dipolo mostrado, exprese V en función de coordenadas cartesianas con $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ y

$$\cos \theta = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Figura P25.61

A apartir de estos resultados y de nuevo con $r >> a$, calcule las componentes del campo E_x y E_y.

62. Una esfera sólida de radio R tiene una densidad de carga uniforme r y una carga total Q. Derive una expresión para su energía potencial eléctrica total. (*Sugerencia:* imagine que la esfera está construida por capas sucesivas de cubiertas concéntricas de carga $dq = (4\pi r^2\, dr)\rho$, y utilice $dU = V\, dq$).

63. Un disco de radio R (figura P25.63) tiene una densidad de carga superficial no uniforme $\sigma = Cr$, donde C es una constante y r se mide a partir del centro del disco a un punto en la superficie del disco. Determine (por integración directa) el potencial en P.

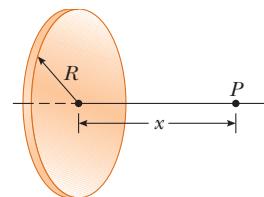



Figura P25.63

64. ● Un filamento con carga uniforme yace a lo largo del eje x entre $x = a = 1.00$ m y $x = a + \ell = 3.00$ m, como se muestra en la figura 23.15. La carga total en el filamento es 1.60 nC. Calcule aproximaciones sucesivas para el potencial eléctrico en el origen, al modelar el filamento como a) una sola partícula con carga en $x = 2.00$ m, b) dos partículas cargadas de 0.800 nC en $x = 1.5$ m y $x = 2.5$ m, y c) cuatro partículas cargadas de 0.400 nC en $x = 1.25$ m, $x = 1.75$ m, $x = 2.25$ m y $x = 2.75$ m. A continuación, escriba y ejecute un programa de computadora que reproduzca los resultados de las partes a), b) y c) y extienda su cálculo a d) 32 y e) 64 partículas con carga igualmente espaciadas. f) Explique cómo se comparan los resultados con el potencial dado por la expresión exacta

$$V = \frac{k_eQ}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + a}{a}\right)$$

65. Dos placas paralelas con cargas de igual magnitud pero de signo opuesto están separadas 12.0 cm. Cada placa tiene una densidad de carga superficial de 36.0 nC/m^2. De la placa positiva se libera un protón que parte del reposo. Determine a) la diferencia de potencial entre las placas, b) la energía cinética del protón cuando se impacte en la placa negativa, c) la rapidez del protón justo antes de impactar la placa negativa, d) la aceleración del protón, y e) la fuerza ejercida sobre el protón. f) A partir de la fuerza, determine la magnitud del campo eléctrico y demuestre que es igual al campo eléctrico existente, debido a las densidades de carga en las placas.

66. Una partícula con carga q se ubica en $x = -R$, y una partícula con carga $-2q$ se ubica en el origen. Pruebe que la superficie equipotencial que tiene potencial cero es una esfera con centro en $(-4R/3, 0, 0)$ y tiene radio $r = 2R/3$.

67. Cuando una esfera conductora sin carga de radio a se coloca en el origen de un sistema de coordenadas xyz que se encuentra en un campo eléctrico inicialmente uniforme $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{k}}$, el potencial eléctrico resultante es $V(x, y, z) = V_0$, para puntos en el interior de la esfera, y

$$V(x, y, z) = V_0 - E_0 z + \frac{E_0 a^3 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

para puntos en el exterior de la esfera, donde V_0 es el potencial eléctrico (constante) en el conductor. Utilice esta ecuación para determinar las componentes x, y y z del campo eléctrico resultante.

Respuestas a las preguntas rápidas

25.1 **i**) a) De la ecuación 25.3, $\Delta U = q_0\,\Delta V$, por lo que si se traslada una carga de prueba negativa a través de una diferencia de potencial negativa, el cambio en la energía potencial será positiva. Debe realizarse un trabajo para mover la carga en dirección opuesta a la fuerza eléctrica aplicada sobre ésta. **ii**) b) Cuando se mueven en línea recta de Ⓐ a Ⓑ, $\vec{\mathbf{E}}$ y $d\vec{\mathbf{s}}$ apuntarán hacia la derecha. Debido a eso, el producto punto $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ de la ecuación 25.3 es positivo y ΔV es negativo.

25.2 Ⓑ a Ⓒ, Ⓒ a Ⓓ, Ⓐ a Ⓑ, Ⓓ a Ⓔ. Al trasladarse de Ⓑ a Ⓒ se reduce el potencial eléctrico en 2 V, por lo que el campo eléctrico realiza 2 J de trabajo por cada coulomb de carga positiva que se mueva. Al trasladarse de Ⓒ a Ⓓ se reduce el potencial eléctrico en 1 V, por lo que el campo realiza 1 J de trabajo. No es necesario realizar ningún trabajo para mover la carga de Ⓐ a Ⓑ, debido a que el potencial eléctrico no cambia. Al trasladarse de Ⓓ a Ⓔ se incrementa el potencial eléctrico en 1 V, y entonces el campo realiza -1 J de trabajo por unidad de carga positiva que se mueve.

25.3 **i**) c) El potencial lo establece la carga fuente y es independiente de la carga de prueba. **ii**) a) La energía potencial del sistema de dos cargas es negativa al inicio, debido a los productos de cargas de signos opuestos de la ecuación 25.13. Cuando el signo de q_2 cambia, ambas cargas son negativas, y la energía potencial del sistema es positiva.

25.4 a) Si el potencial es constante (cero en este caso), su derivada a lo largo de esta dirección es igual a cero.

Estos dispositivos son capacitores que almacenan carga y energía. Un capacitor es uno de los elementos simples del circuito que en combinación con otros forman circuitos eléctricos. (Paul Silverman/ Fundamental Photographs)

26 Capacitancia y materiales dieléctricos

Este capítulo analiza el primero de los tres *elementos simples de circuitos* que se interconectan mediante alambres para formar un circuito eléctrico. Los circuitos eléctricos son la base de la gran mayoría de los dispositivos que se utilizan el día de hoy. Analizará los *capacitores*, dispositivos que almacenan carga eléctrica. Esta explicación se complementará en el capítulo 27 con el estudio de los *resistores* y en el capítulo 32 con el estudio de los *inductores*. En capítulos consecutivos verá elementos de circuito más complejos, como los *diodos* y los *transistores*.

Los capacitores se usan de manera regular en diversidad de circuitos eléctricos. Por ejemplo, se usan para sintonizar la frecuencia de los receptores de radio, en filtros de fuentes de energía eléctrica, para eliminar las chispas en los sistemas de encendido de los automóviles y como dispositivos de almacenamiento de energía en unidades de destello electrónico.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.1
La capacitancia es una capacidad

A fin de comprender mejor la capacitancia, piense en conceptos similares que usan una palabra parecida. La *capacidad* de un cartón de leche es el volumen de leche que almacena. La *capacidad térmica* de un objeto es la cantidad de energía que el objeto almacena por unidad de diferencia de temperatura. La *capacitancia* de un capacitor es la carga que éste almacena por unidad de diferencia de potencial.

26.1 Definición de capacitancia

Considere dos conductores como se observa en la figura 26.1. Esta combinación de dos conductores se conoce como **capacitor**. Los conductores son las *placas*. Si los conductores llevan carga de igual magnitud y signo opuesto existe una diferencia de potencial ΔV entre ellos.

¿Qué determina cuánta carga existe en las placas de un capacitor para cierto voltaje? Los experimentos han demostrado que la cantidad de carga Q en un capacitor[1] es linealmente proporcional a la diferencia de potencial entre los conductores; es decir,

[1]Aunque la carga total en el capacitor sea cero (debido a que existe tanta carga positiva en exceso en un conductor como existe carga negativa en exceso en el otro), es común referirse a la magnitud de la carga de cualquiera de los conductores como "carga del capacitor".

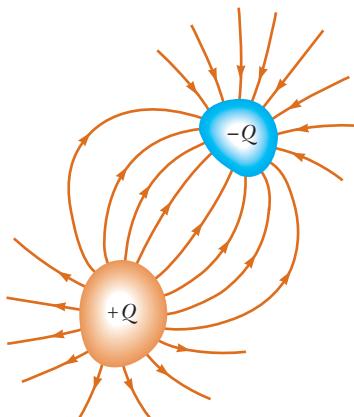



Figura 26.1 Un capacitor está formado por dos conductores. Cuando está cargado, cada conductor tiene una carga de igual magnitud y de signos opuestos.

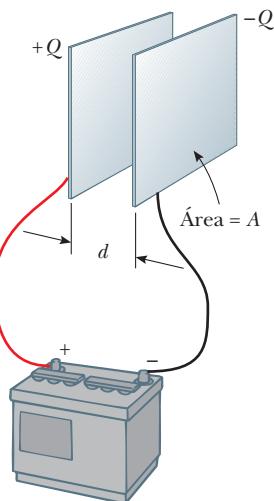



Figura 26.2 Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con una superficie A, separadas una distancia d. Cuando se carga el capacitor al conectar las placas a las terminales de una batería, las placas adquieren cargas de igual magnitud. Una de las placas tiene carga positiva y la otra carga negativa.

$Q \propto \Delta V$. La constante de proporcionalidad depende de la forma y separación de los conductores.[2] Esta relación se escribe como $Q = C\,\Delta V$ si define la capacitancia de la siguiente manera:

◀ Definición de capacitancia

La **capacitancia** C de un capacitor se define como la relación de la magnitud de la carga en cualquiera de los conductores a la magnitud de la diferencia de potencial entre dichos conductores:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \quad \textbf{(26.1)}$$

Por definición, la *capacitancia siempre es una cantidad positiva*. Además, la carga Q y la diferencia de potencial ΔV siempre se expresan en la ecuación 26.1 como cantidades positivas.

Por la ecuación 26.1, es claro que en unidades del SI la capacitancia se expresa en coulombs por cada volt. La unidad del SI para capacitancia es el **farad** (F), nombre puesto en honor de Michael Faraday:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$$

El farad es una unidad de capacitancia muy grande. En la práctica, los dispositivos representativos tienen capacitancias con intervalos entre microfarads (10^{-6} F) a picofarads (10^{-12} F). Para representar los microfarads utilice el símbolo μF. A fin de evitar el uso de letras griegas, a menudo los capacitores se marcan como "mF" si se trata de microfarads y "mmF" si se trata de micromicrofarads, o su equivalente, "pF" para picofarads.

Piense en un capacitor formado por un par de placas paralelas, como se ilustra en la figura 26.2. Cada placa está conectada a una de las terminales de una batería, que actúa como fuente de diferencia de potencial. Si al inicio el capacitor no está cargado, la batería establece una campo eléctrico en los alambres de conexión cuando se cierra el circuito. Centre su atención en la placa conectada a la terminal negativa de la batería. El campo eléctrico aplica una fuerza sobre los electrones en el alambre justo en el exterior de esta placa; esta fuerza hace que los electrones se muevan sobre la placa. Dicho movimiento continúa hasta que la placa, el alambre y la terminal quedan a un mismo potencial eléctrico. Una vez alcanzada esta condición de equilibrio, ya no existirá diferencia de potencial entre la terminal y la placa; lo cual resulta en un campo eléctrico nulo en el alambre, y la detención del movimiento de los electrones. La placa tiene ahora una carga negativa. Un proceso similar se presenta en la otra placa del capacitor, donde los electrones se mueven de la placa hacia el alambre, dejando la placa con carga positiva. En esta configuración final, la diferencia de potencial entre las capas del capacitor es la misma que existe entre las terminales de la batería.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.2

La diferencia de potencial es ΔV, no V

Para identificar la diferencia de potencial presente en un elemento de circuito o en un dispositivo utilice el símbolo ΔV, ya que es consistente con la definición de diferencia de potencial, así como con el significado de la letra Δ. Es común utilizar el símbolo V sin la letra Δ para representar tanto la potencia como la diferencia de potencial; no obstante, esto origina confusiones. Téngalo en cuenta cuando consulte otros libros.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.3

Demasiadas letras C

No confunda la *C cursiva* que corresponde a la capacitancia con la C no cursiva que corresponde al coulomb.

[2]Se puede comprobar la proporcionalidad entre ΔV y Q a partir de la ley de Coulomb o con experimentos.

Pregunta rápida 26.1 Un capacitor almacena carga Q una diferencia de potencial ΔV. ¿Qué pasa si el voltaje que suministra una batería al capacitor se duplica a $2\,\Delta V$? a) La capacitancia disminuye hasta la mitad de su valor inicial y la carga se mantiene igual. b) Tanto la capacitancia como la carga disminuyen hasta la mitad de sus valores iniciales. c) Tanto la capacitancia como la carga se duplican. d) La capacitancia permanece igual pero la carga se duplica.

26.2 Cálculo de la capacitancia

Es posible deducir una expresión para la capacitancia producida por un par de conductores de cargas opuestas con una carga de magnitud Q, de la siguiente manera: primero calcule la diferencia de potencial utilizando las técnicas descritas en el capítulo 25. A continuación utilice la expresión $C = Q/\Delta V$ a fin de evaluar la capacitancia. Este cálculo es fácil si la geometría del capacitor es sencilla.

Sin embargo, la situación más común es que de dos conductores, solo un conductor también tenga capacitancia. Por ejemplo, imagine un conductor esférico con carga. Las líneas del campo eléctrico alrededor de este conductor son exactamente las mismas que si se tratara de una cubierta conductora, esférica de radio infinito, concéntrico con la esfera, y con una carga de la misma magnitud pero de signo opuesto. Por lo tanto, identifique esta cubierta imaginaria como el segundo conductor de un capacitor de dos conductores. El potencial eléctrico de una esfera de radio a es simplemente k_eQ/a, y si $V = 0$ en el caso de la cubierta infinitamente grande, tiene

Capacitancia de una esfera con carga y aislada ▶

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{k_eQ/a} = \frac{a}{k_e} = 4\pi\epsilon_0 a \qquad \textbf{(26.2)}$$

Esta expresión muestra que la capacitancia de una esfera con carga y aislada es proporcional a su radio y es independiente tanto de la carga de la esfera como de la diferencia de potencial.

La capacitancia de un par de conductores se ilustra mediante tres geometrías comunes, sobre todo, placas paralelas, cilindros concéntricos y esferas concéntricas. En estos ejemplos, suponga que los conductores cargados están separados por un espacio vacío.

Capacitor de placas paralelas

Dos placas metálicas paralelas de igual área A están separadas por una distancia d, como se muestra en la figura 26.2. Una placa tiene una carga $+Q$ y la otra tiene una carga $-Q$. La densidad de carga superficial en cada placa es $\sigma = Q/A$. Si las placas están muy juntas (en comparación con su longitud y ancho), se puede suponer que el campo eléctrico es uniforme entre las placas y cero en cualquier otra parte. De acuerdo con el apartado **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 24.5, el valor del campo eléctrico entre las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Ya que el campo entre las placas es uniforme, la magnitud de la diferencia de potencial entre las placas es igual a Ed (véase la ecuación 25.6); por lo tanto,

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 26.1, se encuentra que la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/\epsilon_0 A}$$

Capacitancia de placas paralelas ▶

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad \textbf{26.3}$$

Es decir, **la capacitancia de un capacitor de placas paralelas es proporcional al área de sus placas e inversamente proporcional a la separación de las placas.**

Considere cómo la geometría de estos conductores influye en la capacidad del par de placas para almacenar carga. Conforme un capacitor adquiere carga mediante una batería, los electrones fluyen hacia la placa negativa y salen de la placa positiva. Si las placas del capacitor son grandes, las cargas acumuladas son capaces de distribuirse sobre un área sustancial y la cantidad de carga que se puede almacenar sobre una placa para una diferencia de potencial conocida aumenta conforme el área de placa aumenta. Por lo tanto, es razonable que la capacitancia sea proporcional al área de placa A, como en la ecuación 26.3.

Ahora considere la región que separa las placas. Imagine que acerca más las placas. Considere la situación antes de que cualquier carga haya tenido oportunidad de moverse en respuesta a este cambio. Ya que no se ha movido carga alguna, el campo eléctrico entre las placas tiene el mismo valor pero se extiende sobre una distancia reducida. En consecuencia, la magnitud de la diferencia de potencial entre las placas $\Delta V = Ed$ (ecuación 25.6) es menor. La diferencia entre este nuevo voltaje de capacitor y el voltaje terminal de la batería aparece como una diferencia de potencial a través de los alambres que conectan la batería al capacitor, lo que resulta en un campo eléctrico en los alambres que impulsa más carga hacia las placas y aumenta la diferencia de potencial entre las placas. Cuando la diferencia de potencial entre las placas de nuevo coincide con la de la batería, el flujo de carga se detiene. En consecuencia, acercar más las placas hace que la carga sobre el capacitor aumente. Si d aumenta, la carga disminuye. Como resultado, la relación inversa entre C y d en la ecuación 26.3 es razonable.

Pregunta rápida 26.2 Muchas piezas en el teclado de una computadora están fabricadas como capacitores, como se observa en la figura 26.3. Cuando oprime una tecla, se comprime el aislante blando colocado entre la placa móvil y la fija. ¿Cuando la tecla es presionada, qué le pasa a la capacitancia? a) aumenta, b) disminuye o c) cambia de manera indeterminada, ya que el complejo circuito eléctrico conectado a la tecla puede causar cambio en ΔV.

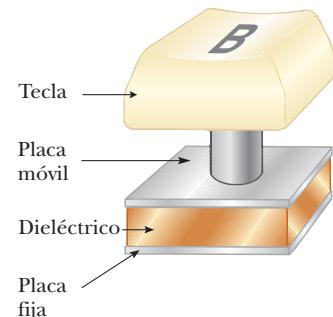



Figura 26.3 (Pregunta rápida 26.2) Un tipo de tecla en el teclado de una computadora.

EJEMPLO 26.1 Capacitor cilíndrico

Un conductor cilíndrico sólido, de radio a y carga Q, es coaxial con una cubierta cilíndrica de grosor despreciable, radio $b > a$ y carga $-Q$ (figura 26.4a). Encuentre la capacitancia de este capacitor cilíndrico si su longitud es ℓ.

Figura 26.4 (Ejemplo 26.1) a) Un capacitor cilíndrico consiste en un conductor cilíndrico sólido de radio a y longitud ℓ rodeado por un cascarón cilíndrico coaxial de radio b. b) Vista superior de un extremo. Las líneas de campo eléctrico son radiales. La línea discontinua representa el extremo de la superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud ℓ.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Recuerde que cualquier par de conductores califica como capacitor, de modo que el sistema descrito en este ejemplo califica como tal. La figura 26.4b ayuda a visualizar el campo eléctrico entre los conductores.

Categorizar Debido a la simetría cilíndrica del sistema, se pueden usar resultados de estudios previos de sistemas cilíndricos para encontrar la capacitancia.

Analizar Si supone que ℓ es mucho mayor que a y b, puede despreciar los efectos de borde. En este caso, el campo eléctrico es perpendicular al largo eje de los cilindros y está confinado a la región entre ellos (figura 26.4b).

Escriba una expresión para la diferencia de potencial entre los dos cilindros de la ecuación 25.3:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Aplique la ecuación 24.7 para el campo eléctrico afuera de una distribución de carga con simetría cilíndrica y observe de la figura 26.4b que $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo a $d\vec{\mathbf{s}}$ a lo largo de una línea radial:

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r\,dr = -2k_e\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = -2k_e\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sustituya el valor absoluto de ΔV en la ecuación 26.1 y use $\lambda = Q/\ell$:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{(2k_eQ/\ell)\ln(b/a)} = \frac{\ell}{2k_e \ln(b/a)} \qquad \textbf{(26.4)}$$

Finalizar La capacitancia es proporcional a la longitud de los cilindros. Como se esperaría, la capacitancia también depende de los radios de los dos conductores cilíndricos. La ecuación 26.4 muestra que la capacitancia por unidad de longitud de una combinación de conductores cilíndricos concéntricos es

$$\frac{C}{\ell} = \frac{1}{2k_e \ln(b/a)} \qquad \textbf{(26.5)}$$

Un ejemplo de este tipo de arreglo geométrico es un *cable coaxial*, que consiste en dos conductores cilíndricos concéntricos separados por un aislador. Probablemente tenga un cable coaxial unido a su televisor o VCR si es suscriptor de televisión por cable. El cable coaxial es especialmente útil para blindar señales eléctricas de cualquier posible influencia externa.

¿Qué pasaría si? Suponga que $b = 2.00a$ para el capacitor cilíndrico. Le gustaría aumentar la capacitancia y puede hacerlo al elegir aumentar ℓ en 10% o a en 10%. ¿Cuál elección es más efectiva para aumentar la capacitancia?

Respuesta De acuerdo con la ecuación 26.4, C es proporcional a ℓ, así que aumentar ℓ en 10% resulta en 10% de aumento en C. Para el resultado del cambio en a, use la ecuación 26.4 para establecer una relación de la capacitancia C' para el radio de cilindro alargado a' a la capacitancia original:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\ell/2k_e \ln(b/a')}{\ell/2k_e \ln(b/a)} = \frac{\ln(b/a)}{\ln(b/a')}$$

Ahora sustituya $b = 2.00a$ y $a' = 1.10a$, que representa un aumento de 10% en a:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\ln(2.00a/a)}{\ln(2.00a/1.10a)} = \frac{\ln 2.00}{\ln 1.82} = 1.16$$

que corresponde a 16% de aumento en capacitancia. Por lo tanto, es más efectivo aumentar a que aumentar ℓ.

Observe dos extensiones más de este problema. Primero, es ventajoso aumentar a sólo para un intervalo de correspondencia entre a y b. Si $b > 2.85a$, aumentar ℓ en 10% es más efectivo que aumentar a (véase el problema 66). Segundo, si b disminuye, la capacitancia aumenta. Aumentar a o disminuir b tiene el efecto de acercar más las placas, lo que aumenta la capacitancia.

EJEMPLO 26.2 Capacitor esférico

Un capacitor esférico consiste en una cubierta conductora esférica de radio b y carga $-Q$ concéntrico con una esfera conductora más pequeña de radio a y carga Q (figura 26.5). Encuentre la capacitancia de este dispositivo.

Figura 26.5 (Ejemplo 26.2) Un capacitor esférico consiste en una esfera interior de radio a rodeada por una cubierta esférica concéntrica de radio b. El campo eléctrico entre las esferas se dirige radialmente hacia afuera cuando la esfera interior tiene carga positiva.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Como con el ejemplo 26.1, este sistema involucra un par de conductores y califica como capacitor.

Categorizar Debido a la simetría esférica del sistema, puede usar los resultados de estudios previos de sistemas esféricos para encontrar la capacitancia.

Analizar Como se muestra en el capítulo 24, la magnitud del campo eléctrico afuera de una distribución de carga con simetría esférica es radial y se conoce por la expresión $E = k_eQ/r^2$. En este caso, el resultado se aplica al campo *entre* las esferas ($a < r < b$).

Escriba una expresión para la diferencia de potencial entre los dos conductores a partir de la ecuación 25.3:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Aplique el resultado del ejemplo 24.3 para el campo eléctrico afuera de una distribución de carga con simetría esférica y observe que $\vec{\mathbf{E}}$ es paralelo a $d\vec{\mathbf{s}}$ a lo largo de una línea radial:

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r\,dr = -k_eQ\int_a^b \frac{dr}{r^2} = k_eQ\left[\frac{1}{r}\right]_a^b$$

$$1)\quad V_b - V_a = k_eQ\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = k_eQ\frac{a-b}{ab}$$

Sustituya el valor absoluto de ΔV en la ecuación 26.1:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{|V_b - V_a|} = \frac{ab}{k_e(b-a)} \qquad \textbf{(26.6)}$$

Finalizar La diferencia de potencial entre las esferas en la ecuación 1) es negativa debido a la selección de signos en las esferas. Por lo tanto, en la ecuación 26.6, cuando se toma el valor absoluto, $a - b$ cambia a $b - a$. El resultado es un número positivo porque $b > a$.

¿Qué pasaría si? Si el radio b de la esfera exterior tiende a infinito, ¿cuál es la capacitancia?

Respuesta En la ecuación 26.6, sea $b \to \infty$:

$$C = \lim_{b\to\infty} \frac{ab}{k_e(b-a)} = \frac{ab}{k_e(b)} = \frac{a}{k_e} = 4\pi\epsilon_0 a$$

Note que esta expresión es la misma que la ecuación 26.2, la capacitancia de un conductor esférico aislado.

26.3 Combinaciones de capacitores

En los circuitos eléctricos con frecuencia se combinan dos o más capacitores. Es posible calcular la capacitancia equivalente de ciertas combinaciones utilizando los métodos descritos en esta sección, en donde supondrá que los capacitores a combinar están inicialmente descargados.

Para el estudio de los circuitos eléctricos utilizará una representación gráfica simplificada que se conoce como **diagrama del circuito.** Este diagrama usa **símbolos de circuitos** para representar diversos elementos dentro de los circuitos. Los símbolos están conectados entre sí mediante líneas rectas que representan los alambres existentes entre los elementos del circuito. En la figura 26.6 aparecen los símbolos de circuito usados para capacitores, baterías e interruptores así como el código de colores que se utilizan en este libro para su representación. El símbolo correspondiente al capacitor es un reflejo de la geometría del modelo más común, un par de placas paralelas. La terminal positiva de la batería es el potencial más alto y se representa mediante una línea vertical más larga.

Figura 26.6 Símbolos de los circuitos correspondientes a capacitores, baterías e interruptores. Observe que los capacitores están en color azul y que las baterías y los interruptores están en rojo. El interruptor cerrado lleva corriente y el abierto no.

Combinación en paralelo

Dos capacitores conectados como se muestra en la figura 26.7a (página 728) se conocen como **combinación en paralelo** de capacitores. La figura 26.7b muestra un diagrama de circuito para esta combinación de capacitores. Las placas izquierdas de los capacitores se conectan a la terminal positiva de la batería mediante un alambre conductor y debido a eso están con el mismo potencial eléctrico que la terminal positiva. Del mismo modo, las placas derechas se conectan a la terminal negativa y por tanto están con el mismo potencial que la terminal negativa. En consecuencia, **las diferencias de potencial individuales a través de capacitores conectados en paralelo son las mismas e iguales a la diferencia de potencial aplicada a través de la combinación.** Es decir,

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

donde ΔV es el voltaje de terminal de la batería.

Figura 26.7

a) Una combinación en paralelo de dos capacitores en un circuito eléctrico en el cual la diferencia de potencial entre las terminales de la batería, es igual a ΔV. b) Diagrama de circuito para esta combinación en paralelo. c) La capacitancia equivalente se conoce por la ecuación 26.8.

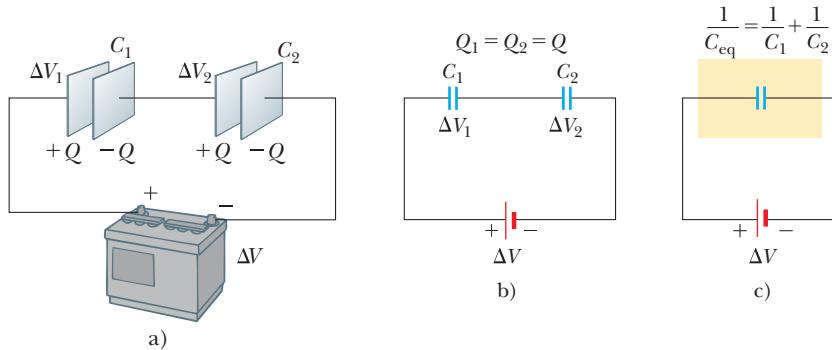
Después de que la batería se une al circuito, los capacitors rápidamente alcanzan su carga máxima. Sean las cargas máximas en los dos capacitores Q_1 y Q_2. La *carga total* Q_{tot} almacenada por los dos capacitores es

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 \tag{26.7}$$

Es decir, **la carga total en capacitores conectados en paralelo es la suma de las cargas en los capacitores individuales.**

Suponga que quiere sustituir estos dos capacitores por un *capacitor equivalente* que tenga una capacitancia C_{eq}, como en la figura 26.7c. El efecto que este capacitor equivalente tiene sobre el circuito debe ser exactamente el mismo que el efecto de la combinación de los dos capacitores individuales. Es decir: el capacitor equivalente debe almacenar carga Q_{tot} cuando se conecte a la batería. La figura 26.7c muestra que el voltaje a través del capacitor equivalente es ΔV porque el capacitor equivalente se conecta directamente a través de las terminales de la batería. Por lo tanto, para el capacitor equivalente,

$$Q_{tot} = C_{eq}\,\Delta V$$

Al sustituir para las cargas en la ecuación 26.7 se obtiene

$$C_{eq}\,\Delta V = C_1\,\Delta V_1 + C_2\,\Delta V_2$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad \text{(combinación en paralelo)}$$

donde se cancelan los voltajes porque todos son iguales. Si este tratamiento se extiende a tres o más capacitores conectados en paralelo, se encuentra que la capacitancia equivalente es

Capacitores en paralelo ►

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \quad \text{(combinación en paralelo)} \tag{26.8}$$

En consecuencia, **la capacitancia equivalente de una combinación de capacitores en paralelo es 1) la suma algebraica de las capacitancias individuales y 2) mayor que cualquiera de las capacitancias individuales.** El enunciado 2) tiene sentido porque en esencia se combinan las áreas de todas las placas del capacitor cuando se conectan con alambre conductor, y la capacitancia de placas paralelas es proporcional al área (ecuación 26.3).

Figura 26.8

a) Combinación en serie de dos capacitores. Las cargas en ambos capacitores son iguales. b) Diagrama del circuito para la combinación en serie. c) La capacitancia equivalente se calcula a partir de la ecuación 26.10.

Combinación en serie

Dos capacitores conectados como se muestra en la figura 26.8a, así como el diagrama de circuito equivalente de la figura 26.8b, se conocen como **combinación en serie** de capacitores. La placa izquierda del capacitor 1 y la placa derecha del capacitor 2 están conectadas a las terminales de una batería. Las otras dos placas están conectadas entre sí y a nada más; por esto, forman un sistema aislado que inicialmente estan sin carga y que debe seguir con una carga neta igual a cero. Para explicar esta combinación, primero considere los capacitores sin carga y vea lo que ocurre justo después de conectar la batería al circuito. Al conectar la batería, se transfieren electrones que salen de la placa izquierda de C_1 y entran en la placa derecha de C_2. Conforme se acumula esta carga negativa en la placa derecha de C_2, una cantidad equivalente de carga negativa es expulsada de la placa izquierda de C_2 y esta placa izquierda resulta con un exceso de carga positiva. La carga negativa que sale de la placa izquierda de C_2 hace que se acumulen cargas negativas en la placa derecha de C_1. Como resultado, todas las placas derechas terminan con una carga $-Q$ y las izquierdas con una carga $+Q$. Por lo tanto, **las cargas de los capacitores conectados en serie son iguales**.

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

donde Q es la carga que se movió entre un alambre y la placa exterior conectada de uno de los capacitores.

La figura 26.8a muestra que el voltaje total ΔV_{tot} a través de la combinación se divide entre los dos capacitores:

$$\Delta V_{\text{tot}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \qquad \textbf{(26.9)}$$

donde ΔV_1 y ΔV_2 son las diferencias de potencial presentes en los capacitores C_1 y C_2, respectivamente. En general, **la diferencia de potencial total aplicada a cualquier cantidad de capacitores conectados en serie es la suma de las diferencias de potencial presentes entre cada uno de los capacitores individuales.**

Suponga que el simple capacitor individual equivalente de la figura 26.8c ejerce un efecto idéntico sobre el circuito que la combinación en serie cuando está conectado a la batería. Una vez que está totalmente cargado, el capacitor equivalente deberá tener una carga igual a $-Q$ en su placa derecha y una carga de $+Q$ en su placa izquierda. Al aplicar la definición de capacitancia al circuito de la figura 26.8c, se tiene

$$\Delta V_{\text{tot}} = \frac{Q}{C_{\text{eq}}}$$

Al sustituir por el voltaje en la ecuación 26.9 se tiene

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Se cancelan las cargas porque son las mismas

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{(combinaciones en serie)}$$

Cuando es aplicado este análisis a una combinación de tres o más capacitores conectados en serie, la correspondencia para la capacitancia equivalente es

Capacitores en serie ▶

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \quad \text{(combinaciones en serie)} \qquad \textbf{(26.10)}$$

Esto demuestra que **1) el inverso de la capacitancia equivalente es igual a la suma algebraica de los inversos de las capacitancias individuales y 2) la capacitancia equivalente de una combinación en serie siempre es menor que cualquiera de las capacitancias individuales incluidas en la combinación.**

Pregunta rápida 26.3 Dos capacitores idénticos pueden ser conectados en serie o en paralelo. Si lo que usted quiere es la capacitancia equivalente *más pequeña* de la combinación, ¿los conectará en a) serie, b) paralelo, o bien c) de cualquier forma, porque ambas combinaciones tienen la misma capacitancia?

EJEMPLO 26.3 Capacitancia equivalente

Encuentre la capacitancia equivalente entre a y b para la combinación de capacitores que se muestra en la figura 26.9a. Todas las capacitancias están en microfarads.

Figura 26.9 (Ejemplo 26.3) Para encontrar la capacitancia equivalente de los capacitores en a), se reducen las combinaciones en etapas, como se indica en b), c) y d), mediante las reglas en serie y paralelo descritas en el texto.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie cuidadosamente la figura 26.9a y asegúrese de entender cómo se conectan los capacitores.

Categorizar La figura 26.9a muestra que el circuito contiene conexiones en serie y en paralelo, así que se usan las reglas para combinaciones en serie y en paralelo explicadas en esta sección.

Analizar Con las ecuaciones 26.8 y 26.10, reduzca la combinación etapa por etapa como se indica en la figura.

Los capacitores de 1.0 μF y 3.0 μF en la figura 26.9a están en paralelo. Encuentre la capacitancia equivalente a partir de la ecuación 26.8:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 4.0\,\mu\text{F}$$

Los capacitores de 2.0 μF y 6.0 μF en la figura 26.9a también están en paralelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 8.0\,\mu\text{F}$$

Ahora el circuito se parece a la figura 26.9b. Los dos capacitores de 4.0 μF en la rama superior están en serie. Encuentre la capacitancia equivalente a partir de la ecuación 26.10:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4.0\,\mu\text{F}} + \frac{1}{4.0\,\mu\text{F}} = \frac{1}{2.0\,\mu\text{F}}$$

$$C_{eq} = 2.0\,\mu\text{F}$$

Los dos capacitores de 8.0 μF en la rama inferior también están en serie. Encuentre la capacitancia equivalente a partir

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{8.0\,\mu\text{F}} + \frac{1}{8.0\,\mu\text{F}} = \frac{1}{4.0\,\mu\text{F}}$$

$$C_{eq} = 4.0\,\mu\text{F}$$

de la ecuación 26.10:
Ahora el circuito se parece a la figura 26.9c. Los capacitores de 2.0 μF y 4.0 μF están en paralelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6.0\ \mu\text{F}$$

Finalizar Este valor final es el del simple capacitor equivalente que se muestra en la figura 26.9d. Para mayor práctica en el tratamiento de circuitos con combinaciones de capacitores, imagine que una batería se conecta entre los puntos a y b de modo que a través de la combinación se establece una diferencia de potencial ΔV. ¿Puede encontrar el voltaje y la carga a través de cada capacitor?

26.4 Energía almacenada en un capacitor con carga

Ya que las cargas positiva y negativa están separadas en el sistema de dos conductores en un capacitor, en el sistema se almacena energía potencial eléctrica. Muchos de quienes trabajan con equipo electrónico alguna vez han verificado que un capacitor puede almacenar energía. Si las placas de un capacitor con carga se conectan mediante un conductor como un alambre, la carga se mueve entre cada placa y su alambre conector hasta que el capacitor se descarga. Con frecuencia, la descarga se observa como una chispa visible. Si por accidente toca las placas opuestas de un capacitor con carga, sus dedos actúan como ruta para descarga y el resultado es un choque eléctrico. El grado de choque que reciba dependerá de la capacitancia y el voltaje aplicados al capacitor. Tal choque podría ser fatal si hay presentes voltajes altos, como en la fuente de poder de un televisor. Ya que las cargas se pueden almacenar en un capacitor aun cuando el aparato esté apagado, desconectar el televisor no lo hace seguro al abrir la cubierta y tocar los componentes internos.

La figura 26.10a muestra una batería conectada a un solo capacitor de placas paralelas, con un interruptor en el circuito. Identifique el circuito como un sistema. Cuando el interruptor se cierra (figura 26.10b), la batería establece un campo eléctrico en los alambres y circula carga entre ellos y el capacitor. Conforme esto se presenta, existe una

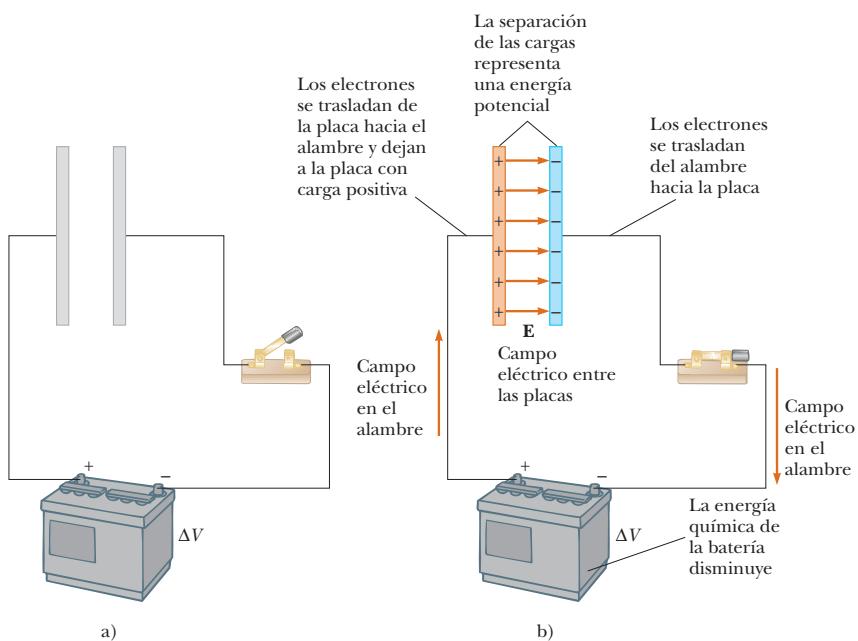



Figura 26.10

a) Circuito que consiste en un capacitor, una batería y un interruptor. b) Cuando el interruptor se cierra, la batería establece un campo eléctrico en el alambre que hace que los electrones se muevan de la placa izquierda hacia el alambre y hacia la placa derecha desde el alambre. Como resultado, en las placas existe una separación de carga, lo que representa un aumento en la energía potencial eléctrica del sistema del circuito. Esta energía en el sistema se transformó a partir de energía química en la batería.

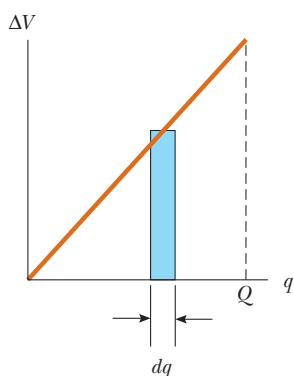



Figura 26.11 La gráfica de la diferencia de potencial en función de la carga en un capacitor, es una línea recta que tiene una pendiente $1/C$. El trabajo requerido para mover la carga dq a causa de la diferencia de potencial ΔV existente en el instante a través de las placas del capacitor, se conoce de manera aproximada por el área del rectángulo sombreado. El trabajo total requerido para cargar el capacitor hasta una carga final Q es el área triangular que está por debajo de la línea recta, $W = \frac{1}{2}Q\,\Delta V$. (No debe olvidar que 1 V = 1J/C; por eso la unidad para el área triangular es el joule).

transformación de energía dentro del sistema. Antes de que el interruptor se cierre, la energía se almacena como energía química en la batería. Esta energía se transforma durante la reacción química que se presenta dentro de la batería cuando funciona en un circuito eléctrico. Cuando el interruptor se cierra parte de la energía química en la batería se convierte en energía potencial eléctrica asociada con la separación de cargas positivas y negativas en las placas.

Con el fin de calcular la energía almacenada en el capacitor, se considera un proceso de carga distinto del proceso real descrito en la sección 26.1, pero que logra el mismo resultado final. Esta suposición es posible porque la energía presente en la configuración final no depende del proceso real para la transferencia de la carga.[3] Imagine que la carga se transfiere de manera mecánica a través del espacio existente entre las placas como sigue. Toma una pequeña cantidad de carga positiva de la placa conectada a la terminal negativa y aplica una fuerza que hace que esta carga positiva se mueva hasta la placa conectada a la terminal positiva. Por lo tanto, realizó un trabajo sobre la carga al transferirla de una placa a la otra. En principio, no se requiere trabajo para transferir una pequeña cantidad de carga dq de una placa a la otra;[4] sin embargo, una vez transferida esta carga, aparecerá entre las placas una pequeña diferencia de potencial. Debido a eso, deberá invertir algo de trabajo para mover una carga adicional a causa de esta diferencia de potencial. Conforme más y más carga sea transferida de una placa a la otra, la diferencia de potencial aumentará proporcionalmente y se requerirá más trabajo.

Suponga que q es la carga del capacitor en un determinado instante durante el proceso de carga. En ese mismo momento, la diferencia de potencial a través del capacitor es $\Delta V = q/C$. De la sección 25.1, se sabe que el trabajo necesario para transferir un incremento de carga dq de la placa que tiene una carga $-q$ a la placa que tiene una carga q (que está con el potencial eléctrico más elevado) es

$$dW = \Delta V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

Esto se ilustra en la figura 26.11. El trabajo total requerido para cargar el capacitor desde $q = 0$ hasta una carga final $q = Q$ es

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

El trabajo invertido al cargar el capacitor se presenta como una energía potencial eléctrica U almacenada en el mismo. Mediante el uso de la ecuación 26.1, es posible expresar la energía potencial almacenada en el capacitor con carga como:

Energía almacenada en un capacitor cargado ►

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}Q\,\Delta V = \tfrac{1}{2}C(\Delta V)^2 \qquad \textbf{(26.11)}$$

Este resultado es aplicable a cualquier capacitor, sea cual fuere su geometría. Para una capacitancia determinada, la energía almacenada aumenta al incrementarse la carga y la diferencia de potencial. En la práctica, existe un límite para la energía (o carga) máxima que se puede almacenar, ya que en un valor lo suficientemente grande de ΔV ocurrirá finalmente una descarga entre las placas. Es por esta causa que los capacitores por lo general se marcan con un voltaje de operación máximo.

Considere la energía almacenada en un capacitor como si estuviera almacenada en el campo eléctrico producido entre las placas al cargar el capacitor. Esta descripción es aceptable porque el campo eléctrico es proporcional a la carga del capacitor. En el caso de un capacitor de placas paralelas, la diferencia de potencial está relacionada con el cam-

[3] Esta explicación es similar a las variables de estado en termodinámica. El cambio en una variable de estado, como la temperatura, es independiente de la trayectoria seguida entre el estado inicial y el final. La energía potencial de un capacitor (o de cualquier sistema) también es una variable de estado, así que no depende del proceso real seguido para cargar el capacitor.

[4] Utilice la q minúscula como la carga que varía con el tiempo del capacitor mientras éste se carga, a fin de distinguirla de la Q mayúscula, que es la carga total del capacitor una vez que está completamente cargado.

po eléctrico mediante la correspondencia $\Delta V = Ed$. Además, su capacitancia es $C = \epsilon_0 A/d$ (ecuación 26.3). Si sustituye estas expresiones en la ecuación 26.11, obtiene

$$U = \tfrac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}(E^2 d^2) = \tfrac{1}{2}(\epsilon_0 Ad)E^2 \qquad \textbf{(26.12)}$$

En vista de que el volumen ocupado por el campo eléctrico es Ad, la *energía por cada unidad de volumen* $u_E = U/Ad$, conocida como *densidad de energía*, es

Densidad de energía en un campo eléctrico

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad \textbf{(26.13)}$$

Aunque la ecuación 26.13 fue deducida para un capacitor de placas paralelas, esta expresión es válida de manera general, independientemente de la fuente del campo eléctrico. Es decir, **la densidad de energía en cualquier campo eléctrico en un punto dado es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico.**

Pregunta rápida 26.4 Considere tres capacitores y una batería. ¿En cuál de las siguientes combinaciones de tres capacitores se almacenará la máxima energía posible cuando la combinación esté conectada a la batería? a) En serie, b) en paralelo, o c) no hay diferencia, porque ambas combinaciones almacenarán la misma cantidad de energía.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.4

No se trata de un nuevo tipo de energía

La energía conocida en la ecuación 26.13 no es un nuevo tipo de energía. La ecuación describe la familiar energía potencial eléctrica asociada con un sistema de cargas fuente separadas. La ecuación 26.13 proporciona una nueva *interpretación*, o una nueva forma de *modelar* la energía. Además la ecuación describe correctamente la energía asociada con *cualquier* campo eléctrico, sin importar la fuente.

EJEMPLO 26.4 Rehacer el circuito de dos capacitores con carga

Dos capacitores, C_1 y C_2, donde $C_1 > C_2$, están cargados con la misma diferencia de potencial inicial ΔV_i. Los capacitores con carga se retiran de la batería y sus placas se conectan con polaridad opuesta, como en la figura 26.12a. Después los interruptores S_1 y S_2 se cierran como en la figura 26.12b.

A) Hallar la diferencia de potencial final ΔV_f entre a y b después de cerrar los interruptores.

a)

b)

Figura 26.12 (Ejemplo 26.4) a) Dos capacitores se cargan con la misma diferencia de potencial inicial y se conectan uno con otro con las placas de signo opuesto en contacto cuando los interruptores se cierran. b) Cuando los interruptores se cierran, las cargas se redistribuyen.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 26.12 ayuda a entender las configuraciones inicial y final del sistema.

Categorizar En la figura 26.12b, puede parecer como si los capacitores se conectaran en paralelo, pero no hay batería en este circuito para aplicar un voltaje a través de la combinación. Debido a eso, este problema *no se puede* clasificar como uno en el que los capacitores estén conectados en paralelo. Se le *puede* clasificar como un problema que involucra un sistema aislado para carga eléctrica. Las placas izquierdas de los capacitores forman un sistema aislado porque no se conectan a las placas derechas mediante conductores.

Analizar Escriba una expresión para la carga total en las placas izquierdas del sistema antes de que los interruptores se cierren, y observe que es necesario un signo negativo para Q_{2i} porque la carga en la placa izquierda del capacitor C_2 es negativa:

$$1)\quad Q_i = Q_{1i} + Q_{2i} = C_1\,\Delta V_i - C_2\,\Delta V_i = (C_1 - C_2)\Delta V_i$$

Después de que los interruptores se cierran, las cargas en los capacitores individuales cambian a nuevos valores Q_{1f} y Q_{2f} tal que la diferencia de potencial de nuevo es la misma a través de ambos capacitores, ΔV_f. Escriba una expresión para la carga total en las placas izquierdas del sistema después de que los interruptores se cierran:

$$2)\quad Q_f = Q_{1f} + Q_{2f} = C_1\,\Delta V_f + C_2\,\Delta V_f = (C_1 + C_2)\,\Delta V_f$$

Ya que el sistema está aislado, las cargas inicial y final del sistema deben ser las mismas. Use esta condición y las ecuaciones 1) y 2) resolver para ΔV_f:

$$Q_f = Q_i \rightarrow (C_1 + C_2)\Delta V_f = (C_1 - C_2)\Delta V_i$$

$$3) \quad \Delta V_f = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)\Delta V_i$$

B) Encuentre la energía total almacenada en los capacitores antes y después de que los interruptores se cierran y determine la relación de la energía final a la energía inicial.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 26.11 para encontrar una expresión para la energía total almacenada en los capacitores antes de que los interruptores se cierren:

$$4) \quad U_i = \tfrac{1}{2}C_1(\Delta V_i)^2 + \tfrac{1}{2}C_2(\Delta V_i)^2 = \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2)(\Delta V_i)^2$$

Escriba una expresión para la energía total almacenada en los capacitores después de cerrar los interruptores:

$$U_f = \tfrac{1}{2}C_1(\Delta V_f)^2 + \tfrac{1}{2}C_2(\Delta V_f)^2 = \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2)(\Delta V_f)^2$$

Use los resultados del inciso A) para rescribir esta expresión en términos de ΔV_i:

$$5) \quad U_f = \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2)\left[\left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)\Delta V_i\right]^2 = \tfrac{1}{2}\frac{(C_1 - C_2)^2(\Delta V_i)^2}{(C_1 + C_2)}$$

Divida la ecuación 5) entre la ecuación 4) para obtener la relación de las energías almacenadas en el sistema:

$$\frac{U_f}{U_i} = \frac{\tfrac{1}{2}(C_1 - C_2)^2(\Delta V_i)^2/(C_1 + C_2)}{\tfrac{1}{2}(C_1 + C_2)(\Delta V_i)^2}$$

$$6) \quad \frac{U_f}{U_i} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2$$

Finalizar La relación de energías es *menor* que la unidad, lo que indica que la energía final es *menor* que la energía inicial. Al principio, puede pensar que se violó la ley de conservación de la energía, pero este no es el caso. La energía "perdida" se transfiere afuera del sistema mediante el mecanismo de ondas electromagnéticas (T_{RE} en la ecuación 8.2), como se verá en el capítulo 34.

¿Qué pasaría si...? ¿Y si los dos capacitores tienen la misma capacitancia? ¿Qué ocurrirá cuando se cierren los interruptores?

Respuesta Ya que ambos capacitores tienen la misma diferencia de potencial inicial aplicada a ellos, las cargas en los capacitores tienen la misma magnitud. Cuando los capacitores con polaridades opuestas se conectan uno con otro, las cargas de igual magnitud se deben cancelar mutuamente, lo que deja los capacitores sin carga.

Pruebe los resultados para ver si este es el caso matemáticamente. En la ecuación 1), dado que las capacitancias son iguales, la carga inicial Q_i en el sistema de las placas izquierdas es cero. La ecuación 3) muestra que $\Delta V_f = 0$, que es consistente con capacitores sin carga. Por último, la ecuación 5) muestra que $U_f = 0$, lo que también es consistente con capacitores sin carga.

Adam Hart-Davis/SPL/Custom Medical Stock

Figura 26.13 En el lugar de un accidente o en un hospital es posible ver cómo se revive a un paciente utilizando un desfibrilador. Las paletas del desfibrilador se aplican sobre el pecho del paciente y se hace pasar una descarga eléctrica a través de la cavidad torácica. El objetivo de esta maniobra es restaurar el patrón rítmico normal del corazón.

Un dispositivo en el cual los capacitores desempeñan un papel importante es el *desfibrilador* portátil (figura 26.13). Cuando la fibrilación cardiaca (contracciones aleatorias) se presenta, el corazón produce un patrón rápido e irregular de contracciones. Una rápida descarga de energía a través del corazón puede devolverle a éste su patrón normal de contracciones. Los equipos médicos de emergencia utilizan desfibriladores portátiles con baterías capaces de cargar un capacitor a un voltaje elevado. (El circuito eléctrico está organizado para que el capacitor se cargue a un voltaje mucho más elevado que el de la batería). En un desfibrilador totalmente cargado es posible almacenar hasta 360 J en el campo eléctrico de su enorme capacitor. La energía almacenada se libera a través del corazón mediante electrodos conductores, conocidos como paletas, que se colocan en los costados del tórax de la víctima. El desfibrilador puede suministrar toda esta energía a un paciente en aproximadamente 2 ms (¡esto es más o menos equivalente a 3000 veces la energía suministrada a un foco de 60 W!). Los paramédicos deben esperar entre cada aplicación de la energía, debido al tiempo que se necesita para que los capacitores se carguen por completo. En estas aplicaciones y otras (las unidades de destello de las cámaras, así como los láser para experimentos de fusión), los capacitores sirven como depósitos de energía

que se pueden cargar poco a poco para después descargarse rápidamente a fin de proporcionar grandes cantidades de energía en un pulso breve.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.5

¿El capacitor está conectado o no a una batería?

En aquellos problemas en los que se modifica un capacitor (mediante la inserción de un material dieléctrico, por ejemplo), debe advertir si estas modificaciones se llevan a cabo mientras el capacitor está conectado a una batería o cuando el capacitor está desconectado. Si el capacitor se ha mantenido conectado a la batería, se conserva, por necesidad, el mismo voltaje aplicado al capacitor. Si lo desconecta antes de efectuar cualquier modificación, el capacitor forma un sistema aislado y conserva su misma carga.

26.5 Capacitores con material dieléctrico

Un **dieléctrico** es un material no conductor, como el hule, el vidrio o el papel encerado. El siguiente experimento muestra el efecto que causa un dieléctrico en un capacitor. Consideremos un capacitor de placas paralelas que, sin dieléctrico, tiene una carga Q_0 y una capacitancia C_0. La diferencia de potencial en las terminales del capacitor es $\Delta V_0 = Q_0/C_0$. Esta situación se ilustra en la figura 26.14a. La diferencia de potencial se mide con un *voltímetro*, dispositivo que se explica con mayor detalle en el capítulo 28. Observe que en la figura no hay batería; también, debe suponer que a través de un voltímetro ideal no puede fluir carga alguna. De lo anterior, se concluye que no existe trayectoria por la cual pueda fluir la carga y modificar la misma en el capacitor. Si ahora se inserta un material dieléctrico entre las placas, como se observa en la figura 26.14b, el voltímetro indica que el voltaje entre las placas disminuye un valor ΔV. Los voltajes con y sin dieléctrico están relacionados mediante el factor κ como sigue:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\kappa}$$

Ya que $\Delta V < \Delta V_0$, se ve que $\kappa > 1$. El factor adimensional κ se llama **constante dieléctrica** del material. La constante dieléctrica varía de un material a otro. En esta sección se explica este cambio en capacitancia en términos de parámetros eléctricos como carga eléctrica, campo eléctrico y diferencia de potencial; la sección 26.7 describe el origen microscópico de estos cambios.

Ya que la carga Q_0 en el capacitor no cambia, la capacitancia debe cambiar al valor

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\Delta V_0/\kappa} = \kappa\frac{Q_0}{\Delta V_0}$$

$$C = \kappa C_0 \qquad \textbf{(26.14)}$$

◀ Capacitancia de un capacitor lleno con un material que tiene una constante dieléctrica κ

Es decir, la capacitancia *aumenta* en un factor κ cuando el material dieléctrico llena por completo la región entre placas.[5] En el caso de un capacitor de placas paralelas, donde

Figura 26.14 Un capacitor cargado a) antes y b) después de haber insertado un material dieléctrico entre las placas. La carga existente sobre las placas se conserva sin cambio, pero la diferencia de potencial disminuye de ΔV_0 a $\Delta V = \Delta V_0/\kappa$. Por lo tanto, la capacitancia se incrementa de C_0 a κC_0.

[5] Si el material dieléctrico se introduce mientras la batería mantiene constante la diferencia de potencial, la carga aumentará a un valor $Q = \kappa Q_0$. La carga adicional proviene de los alambres conectados al capacitor,

$C_0 = \epsilon_0 A/d$ (ecuación 26.3), se expresa la capacitancia cuando el capacitor está lleno de material dieléctrico como sigue:

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{26.15}$$

De las ecuaciones 26.3 y 26.15, parece posible obtener un capacitor muy grande al reducir d, que es la distancia entre las placas. En la práctica, el valor más pequeño de d se encuentra limitado por la descarga eléctrica que puede presentarse a través del medio dieléctrico que separa las placas. Para cualquier separación d conocida, el voltaje máximo que puede aplicarse a un capacitor sin causar una descarga depende de la **resistencia dieléctrica** (campo eléctrico máximo) del dieléctrico. Si la magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico excede la resistencia dieléctrica, las propiedades aislantes fallan, y el dieléctrico empieza a conducir.

Los capacitores físicos tienen una especificación que se conoce mediante una gran diversidad de nombres, incluyendo *voltaje de servicio, voltaje de ruptura* y *tensión nominal*. Este parámetro representa el voltaje más elevado que se puede aplicar al capacitor sin exceder la resistencia dieléctrica del material dieléctrico en el capacitor. En consecuencia, cuando seleccione un capacitor para una aplicación determinada, es necesario considerar la capacitancia así como el voltaje esperado a través del capacitor en el circuito y asegurarse de que el voltaje esperado sea inferior que el voltaje nominal del capacitor. En la fotografía al inicio de este capítulo se puede observar el voltaje nominal de varios capacitores.

Los materiales aislantes tienen valores de κ superiores a la unidad y resistencias dieléctricas mayores que la del aire, como se indica en la tabla 26.1. Entonces, un dieléctrico tiene las siguientes ventajas:

- Incrementa la capacitancia.
- Incrementa el voltaje máximo de operación.
- Proporciona un posible soporte mecánico entre las placas, lo que permite que estén cerca una de la otra sin tocarse, así reduce d y aumenta C.

TABLA 26.1

Constantes dieléctricas y resistencias dieléctricas aproximadas de diversos materiales a temperatura ambiente

Material	Constante dieléctrica κ	Intensidad dieléctrica[a] (10^6 V/m)
Aceite de silicón	2.5	15
Agua	80	—
Aire (seco)	1.000 59	3
Baquelita	4.9	24
Cloruro de polivinilo	3.4	40
Cuarzo fundido	3.78	8
Hule de neopreno	6.7	12
Mylar	3.2	7
Nylon	3.4	14
Papel	3.7	16
Papel impregnado en parafina	3.5	11
Poliestireno	2.56	24
Porcelana	6	12
Teflón	2.1	60
Titanato de estroncio	233	8
Vacío	1.000 00	—
Vidrio pirex	5.6	14

[a] La resistencia dieléctrica es igual al campo eléctrico máximo que puede existir en un dieléctrico sin que se rompa el aislamiento. Observe que estos valores dependen en gran medida de si existen o no impurezas o defectos en los materiales.

Lámina metálica
Placas
Recipiente
Electrolito
Contactos
Aceite
Papel
Lámina metálica + capa de óxido
a) b) c)

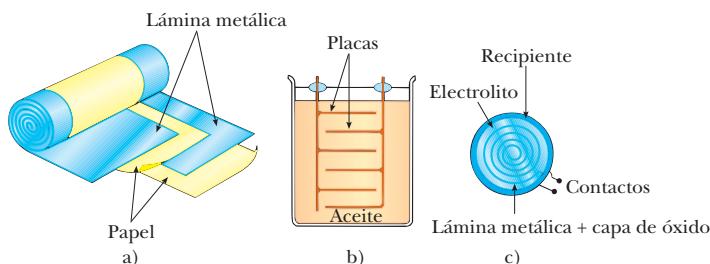



Figura 26.15 Tres diseños de capacitores comerciales. a) Capacitor tubular, cuyas placas están separadas por un papel y después enrolladas en un cilindro. b) Capacitor para alto voltaje formado por muchas placas paralelas separadas por aceite aislante. c) Capacitor electrolítico.

©Thomson Learning/George Semple.

Figura 26.16 Capacitor variable. La capacitancia de este dispositivo varía cuando se hace girar uno de los conjuntos de placas metálicas de manera que quede entre el conjunto fijo de placas.

Tipos de capacitores

Es frecuente fabricar capacitores para uso comercial a partir de lámina metálica separada por hojas delgadas de papel impregnado en parafina, o utilizando Mylar como material dieléctrico. Estas capas alternadas de lámina metálica y dieléctrico se enrollan en forma de cilindro, para formar un pequeño paquete (figura 26.15a). Por lo común, los capacitores para alto voltaje están hechos de una cierta cantidad de placas metálicas entretejidas, inmersas en aceite de silicón figura (26.15b). Los capacitores más pequeños con frecuencia están fabricados de material cerámico.

Con frecuencia, para almacenar grandes cantidades de carga a voltajes relativamente bajos, se utilizan *capacitores electrolíticos*. Estos dispositivos, como puede ver en la figura 26.15c, están constituidos por una lámina metálica que está en contacto con un *electrolito*, una solución que gracias al movimiento de los iones que contiene conduce electricidad. Cuando se aplica un voltaje entre la lámina y el electrolito, sobre la lámina se forma una capa delgada de óxido metálico (material aislante) que sirve como dieléctrico. Es posible obtener valores muy grandes de capacitancia en un capacitor elecrolítico ya que el dieléctrico es muy delgado y, por lo tanto, la separación entre placas es muy reducida.

Los capacitores electrolíticos no son reversibles, como lo son muchos otros, ya que tienen polaridad, la cual se indica mediante los signos positivo y negativo que se marcan sobre el propio dispositivo. Cuando estos capacitores se utilizan en circuitos, la polaridad debe alinearse correctamente. Si la polaridad del voltaje aplicado es opuesta a la indicada, la capa de óxido desaparece y el capacitor, en vez de almacenar carga, conduce electricidad.

Por lo general, los capacitores variables (típicamente de 10 a 500 pF), están constituidos por dos conjuntos de placas metálicas entrelazadas, una fija y la otra móvil, y utilizan aire como dieléctrico (figura 26.16). Estos capacitores se utilizan a menudo en circuitos de sintonización de radio.

Figura 26.17 (Pregunta rápida 26.5) Localizador de montantes. a) Los materiales entre las placas del capacitor son la tabla roca y el aire. b) Cuando el capacitor se coloca frente a un montante, los materiales entre las placas son la tabla roca y la madera. El cambio en la constante dieléctrica hace que se active una señal luminosa.

Pregunta rápida 26.5 Si ha intentado alguna vez colgar un cuadro o un espejo, sabrá que es difícil localizar los montantes de madera sobre los que hay que fijar el clavo o el tornillo. Un localizador de montantes de carpintero es básicamente un capacitor que tiene sus placas una al lado de la otra en vez de una enfrente de la otra, como se puede observar en la figura 26.17. ¿Cuando el dispositivo pasa frente a un montante, la capacitancia a) aumenta o b) disminuye?

EJEMPLO 26.5 Energía almacenada antes y después

Un capacitor de placas paralelas se carga con una batería y adquiere una carga Q_0. Después se retira la batería y entre las placas se inserta una lámina de material que tiene una constante dieléctrica κ. Identifique el sistema como el capacitor y el dieléctrico. Encuentre la energía almacenada en el sistema antes y después de insertar el dieléctrico.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en lo que ocurre cuando se inserta el dieléctrico entre las placas. Ya que la batería se retiró, la carga en el capacitor debe permanecer igual. Sin embargo ya sabe, por la explicación anterior, que la capacitancia debe cambiar. Debido a eso, se espera un cambio en la energía del sistema.

Categorizar Ya que se espera que la energía del sistema cambie, se le modela como un sistema no aislado.

Analizar A partir de la ecuación 26.11, encuentre la energía almacenada en ausencia del dieléctrico:

$$U_0 = \frac{Q_0^{\,2}}{2C_0}$$

Encuentre la energía almacenada en el capacitor después de que el dieléctrico se inserta entre las placas:

$$U = \frac{Q_0^{\,2}}{2C}$$

Use la ecuación 26.14 para sustituir la capacitancia C:

$$U = \frac{Q_0^{\,2}}{2\kappa C_0} = \frac{U_0}{\kappa}$$

Finalizar Ya que $\kappa > 1$, la energía final es menor que la energía inicial. Se puede explicar la energía "perdida" al notar que el dieléctrico, cuando se inserta, se jala hacia el dispositivo. Para evitar que el dieléctrico acelere, un agente externo debe realizar trabajo negativo (W en la ecuación 8.2) sobre el dieléctrico, que es simplemente la diferencia $U - U_0$.

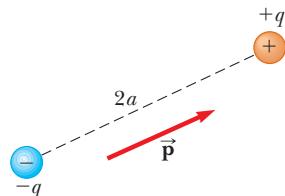



Figura 26.18 Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas de magnitudes iguales y signos opuestos separados por una distancia $2a$. El momento del dipolo eléctrico $\vec{\mathbf{p}}$ está orientado desde $-q$ hacia $+q$.

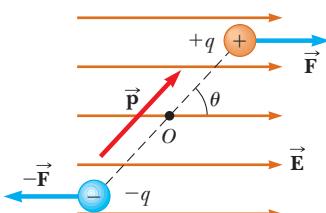



Figura 26.19 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme. El momento del dipolo $\vec{\mathbf{p}}$ forma un ángulo θ con el campo, lo que hace que el dipolo experimente un par de torsión.

26.6 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico

Ya se explicó el efecto en la capacitancia la colocación de un dieléctrico entre las placas de un capacitor. En la sección 26.7, se describirá el origen microscópico de este efecto. Sin embargo, antes de hacerlo, necesita ampliar la explicación del dipolo eléctrico, que inició en la sección 23.4 (véase el ejemplo 23.5). El dipolo eléctrico está constituido por dos cargas de igual magnitud y de signo opuesto separadas por una distancia $2a$, como se observa en la figura 26.18. El **momento del dipolo eléctrico** de esta configuración está definido por el vector $\vec{\mathbf{p}}$, dirigido desde $-q$ hacia $+q$ a lo largo de la línea que une a las cargas, y con una magnitud $2aq$:

$$p \equiv 2aq \qquad \textbf{(26.16)}$$

Ahora considere que el dipolo eléctrico colocado en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$, y forma un ángulo θ con el campo como se ve en la figura 26.19. Identifique $\vec{\mathbf{E}}$ como el campo *externo* al dipolo, establecida por alguna otra distribución de carga, para distinguirlo del campo *debido* al dipolo, que se explicó en la sección 23.4.

Las fuerzas eléctricas que actúan sobre las dos cargas son de igual magnitud ($F = qE$) y de dirección opuesta, como se muestra en la figura 26.19. Por lo tanto, la fuerza neta sobre el dipolo es igual a cero. Sin embargo, las dos fuerzas producen un momento de torsión neto en el dipolo; como resultado, este último gira en la dirección que lleve el vector del momento del dipolo a una mejor alineación con el campo. El momento de torsión debido a la fuerza sobre la carga positiva en relación con un eje a través de O de la figura 26.19 tiene una magnitud $Fa \operatorname{sen} \theta$, donde $a \operatorname{sen} \theta$ es el brazo del momento de F en O. Esta fuerza tiende a producir una rotación en el sentido de las manecillas del reloj. El momento de torsión en relación con O sobre la carga negativa también tiene como magnitud $Fa \operatorname{sen} \theta$; una vez más en este caso la fuerza tiende a producir el mismo tipo de rotación, por lo que la magnitud del momento de torsión neto alrededor de O es

$$\tau = 2Fa \operatorname{sen} \theta$$

Ya que $F = qE$ y $p = 2aq$, se expresa τ de la forma

$$\tau = 2aqE \operatorname{sen} \theta = pE \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(26.17)}$$

Es conveniente expresar el momento de torsión del vector en forma de producto cruz de los vectores $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$:

Par de torsión sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo ►

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(26.18)}$$

Es posible determinar la energía potencial del sistema de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo, como una función de la orientación del dipolo en relación con el campo. Para ello debe reconocer que un agente externo deberá efectuar trabajo para girar el dipolo un cierto ángulo y conseguir que el vector del momento del dipolo quede menos

alineado con el campo. A continuación el trabajo efectuado se almacena como energía potencial en el sistema. El trabajo dW requerido para girar el dipolo un ángulo $d\theta$ es $dW = \tau\, d\theta$ (ecuación 10.22). En vista de que $\tau = pE$ sen θ y debido a que el trabajo resulta de un incremento en la energía potencial U, tenemos que para una rotación de θ_i hasta θ_f el cambio en la energía potencial del sistema es

$$U_f - U_i = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE \operatorname{sen} \theta\, d\theta = pE \int_{\theta_i}^{\theta_f} \operatorname{sen} \theta\, d\theta$$

$$= pE[-\cos\theta]_{\theta_i}^{\theta_f} = pE(\cos\theta_i - \cos\theta_f)$$

El término que contiene a cos θ_i es una constante que depende de la orientación inicial del dipolo. Resulta conveniente que elija un ángulo de referencia $\theta_i = 90°$, por lo que cos θ_i = cos 90° = 0. Además, seleccione $U_i = 0$ en $\theta_i = 90°$ como la energía potencial de referencia. Por tanto deduzca un valor general de $U = U_f$ de la forma

$$U = -pE\cos\theta \qquad \textbf{(26.19)}$$

Escriba esta expresión para la energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico como el producto punto de los vectores $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$:

$$U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(26.20)}$$

◀ Energía potencial del sistema de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo

A fin de comprender conceptualmente la ecuación 26.19, compare esta expresión con la correspondiente para la energía potencial de un sistema de un objeto en el campo gravitacional de la Tierra, $U = mgh$ (véase el capítulo 7). La expresión incluye un parámetro asociado con el objeto colocado en el campo gravitacional, su masa m. De igual manera, la ecuación 26.19 incluye un parámetro para el objeto en el campo eléctrico, su momento de dipolo p. La expresión gravitacional incluye la magnitud del campo gravitacional g. De manera similar, la ecuación 26.19 incluye la magnitud del campo eléctrico E. Hasta ahora, estas dos contribuciones a las expresiones de energía potencial parecen ser análogas. Sin embargo, la contribución final es algo distinta en dos casos. En la expresión gravitacional, la energía potencial depende de la posición vertical del objeto, medida por y. En la ecuación 26.19, la energía potencial depende del ángulo θ en que gira el dipolo. En ambos casos, cambia la configuración del sistema. En el caso gravitacional, el cambio involucra movimiento de un objeto en un sentido de *traslación*, en tanto que en el caso eléctrico, el cambio del movimiento de un objeto es en un sentido de *rotación*. Sin embargo, en ambos casos, una vez hecho el cambio, cuando el objeto es liberado, el sistema vuelve a su configuración original: el objeto de masa m cae al suelo, y el dipolo empieza a girar de vuelta hacia la configuración en la cual está alineado con el campo. Por lo tanto, con excepción del tipo de movimiento, en estos dos casos las expresiones para la energía potencial son similares.

Se dice que las moléculas están *polarizadas* cuando existe una separación entre la posición promedio de las cargas negativas y la posición promedio de las cargas positivas dentro de la molécula. En algunas moléculas, como el agua, dicha condición siempre está presente; a estas moléculas se les llama **moléculas polares**. Las moléculas que no poseen una polarización permanente se les conoce como **moléculas no polares**.

Figura 26.20 La molécula de agua, H_2O, tiene una polarización permanente debido a su geometría no lineal. El centro de la distribución de la carga positiva está en el punto ×.

La polarización permanente del agua será más comprensible al estudiar la geometría de su molécula. En la molécula de agua, el átomo de oxígeno está enlazado a los átomos de hidrógeno de forma tal que entre los dos enlaces se forma un ángulo de 105° (figura 26.20). El centro de la distribución de carga negativa está cerca del átomo de oxígeno, y el centro de la distribución de carga positiva está en algún punto a mitad de camino a lo largo de la línea que une a los átomos de hidrógeno (punto × en la figura 26.20). Es posible representar o modelar la molécula de agua, así como otras moléculas polares, como dipolos, ya que las posiciones promedio de las cargas positivas y negativas actúan como cargas puntuales. Como resultado, puede aplicar este análisis sobre los dipolos al comportamiento de las moléculas polares.

Otra forma común de aprovechar la estructura dipolar del agua en la casa es cuando lava con agua y jabón. La grasa y el aceite están formados por moléculas no polares, que generalmente no son atraídas por el agua. El agua simple no es muy útil para eliminar este tipo de grasas. El jabón contiene moléculas largas conocidas como *surfactantes*. En una molécula

Figura 26.21 a) Una molécula lineal simétrica no tiene una polarización permanente. b) Un campo eléctrico externo induce una polarización en la molécula.

larga, las características de polaridad de un extremo de la molécula pueden ser diferentes de las del otro extremo. En una molécula surfactante, un extremo actúa como una molécula no polar y el otro como una molécula polar. El extremo no polar puede fijarse a una molécula de grasa o de aceite, y el extremo polar puede hacerlo a una molécula de agua. Por lo tanto, el jabón sirve de puente, enlazando las moléculas de grasa y de agua. Al enjuagar, la grasa y el aceite se van con el agua.

Una molécula simétrica (figura 26.21a) no tiene una polarización permanente pero puede ser inducida colocando la molécula en un campo eléctrico. Un campo que se dirige hacia la izquierda, como se muestra en la figura 26.21b, haría que el centro de la distribución de cargas positivas se desplazara hacia la izquierda en relación con su posición inicial, y que el centro de la distribución de cargas negativas se desplazara hacia la derecha. Esta *polarización inducida* es el efecto predominante en la mayor parte de los materiales que se utilizan como dieléctricos en los capacitores.

EJEMPLO 26.6 La molécula de H_2O

La molécula de agua (H_2O) tiene un momento de dipolo eléctrico de 6.3×10^{-30} C · m. Una muestra contiene 10^{21} moléculas de agua, con todos los momentos de dipolo orientados en la dirección de un campo eléctrico de 2.5×10^5 N/C de magnitud. ¿Cuánto trabajo se requiere para girar los dipolos de esta orientación ($\theta = 0°$) a una en la que todos los momentos sean perpendiculares al campo ($\theta = 90°$)?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Cuando todos los dipolos se alinean con el campo eléctrico, el sistema dipolos-campo eléctrico tiene la energía potencial mínima. Esta energía tiene un valor negativo dado por el producto del lado derecho de la ecuación 26.19, evaluada en 0°, y el número N de dipolos. Se debe realizar trabajo para dar vuelta 90° todos los dipolos del sistema, porque la energía potencial del sistema se eleva a un valor mayor que cero.

Categorizar Use la ecuación 26.19 para evaluar la energía potencial, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Escriba la reducción adecuada de la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2, para esta situación:

$$1)\quad \Delta U = W$$

Use la ecuación 26.19 para evaluar las energías potenciales inicial y final del sistema y la ecuación 1) para calcular el trabajo requerido para dar vuelta los dipolos:

$$W = U_{90°} - U_{0°} = (-NpE\cos 90°) - (-NpE\cos 0°)$$
$$= NpE = (10^{21})(6.3 \times 10^{-30}\ \text{C}\cdot\text{m})(2.5 \times 10^5\ \text{N/C})$$
$$= 1.6 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

26.7 Descripción atómica de los materiales dieléctricos

En la sección 26.5 encontró que la diferencia de potencial ΔV_0 entre las placas de un capacitor queda reducida a $\Delta V_0/\kappa$ al insertar un material dieléctrico. Esta diferencia de potencial disminuye porque se reduce la magnitud del campo eléctrico entre las placas. En particular, si $\vec{\mathbf{E}}_0$ es el campo eléctrico que existe sin dieléctrico, el campo en presencia de un dieléctrico es

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{E}}_0}{\kappa} \qquad \textbf{(26.21)}$$

Considere primero un dieléctrico compuesto de moléculas polares colocadas en el campo eléctrico entre las placas de un capacitor. Los dipolos (es decir, las moléculas polares que constituyen el dieléctrico) tienen una orientación al azar en ausencia de un campo

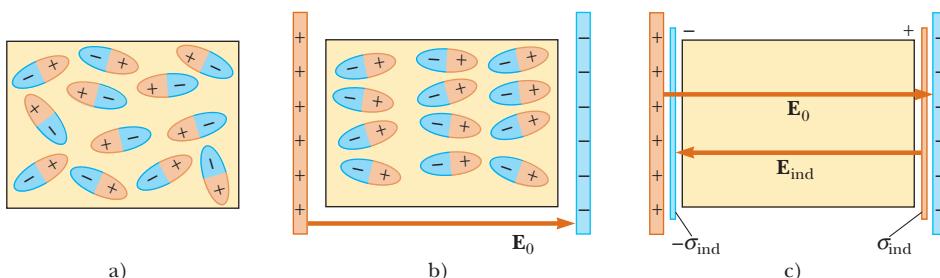



Figura 26.22 a) En ausencia de un campo eléctrico externo, las moléculas polares tienen una orientación al azar. b) Cuando se aplica un campo eléctrico externo, las moléculas se alinean parcialmente con el campo. c) Los bordes con carga del dieléctrico pueden modelarse o representarse como un par adicional de placas paralelas que establecen un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$ en dirección opuesta a la de $\vec{\mathbf{E}}_0$.

eléctrico, como se puede ver en la figura 26.22a. Cuando se aplica un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}_0$ debido a las cargas sobre las placas del capacitor, se ejerce un momento de torsión sobre los dipolos, lo que provoca que se alineen parcialmente con el campo, como se observa en la figura 26.22b. Ahora el dieléctrico es un material polarizado. El grado de alineación de las moléculas en relación con el campo eléctrico depende de la temperatura y de la magnitud del mismo. En general, la alineación aumentará al reducirse la temperatura e incrementarse el campo eléctrico.

Si las moléculas del material dieléctrico no son polares, el campo eléctrico debido a las placas produce una polarización inducida en la mólecula. Estos momentos de dipolo inducido tienden a alinearse con el campo externo, y el dieléctrico se polariza. Debido a eso, es posible polarizar un dieléctrico mediante un campo externo, independientemente de que las moléculas en el dieléctrico sean polares o no polares.

Con esto en mente, considere una lámina gruesa de material dieléctrico colocada entre las placas de un capacitor, de forma que esté inmersa en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}_0$, como se observa en la figura 26.22b. El campo eléctrico debido a las placas está dirigido hacia la derecha, lo cual polariza al dieléctrico. El efecto neto sobre el dieléctrico es la formación de una densidad de carga superficial positiva *inducida* σ_{ind} sobre la cara derecha y una densidad de carga superficial negativa de igual magnitud $-\sigma_{\text{ind}}$ sobre la cara izquierda, como se puede ver en la figura 26.22c. Ya que es posible modelar estas distribuciones de carga superficial como debidas a placas paralelas, las cargas superficiales inducidas en el dieléctrico originan un campo eléctrico inducido $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$, con dirección opuesta al campo externo $\vec{\mathbf{E}}_0$. Por lo tanto, el campo eléctrico neto $\vec{\mathbf{E}}$ en el dieléctrico tiene una magnitud

$$E = E_0 - E_{\text{ind}} \tag{26.22}$$

En el capacitor de placas paralelas de la figura 26.23, el campo externo E_0 está relacionado con la densidad de carga σ sobre las placas mediante la correspondencia $E_0 = \sigma/\epsilon_0$. El campo eléctrico inducido en el dieléctrico está relacionado con la densidad de carga inducida σ_{ind} mediante la relación $E_{\text{ind}} = \sigma_{\text{ind}}/\epsilon_0$. En vista de que $E = E_0/\kappa = \sigma/\kappa\epsilon_0$, al sustituir estos valores en la ecuación 26.22 se obtiene

$$\frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{ind}}}{\epsilon_0}$$

$$\sigma_{\text{ind}} = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\sigma \tag{26.23}$$

Ya que $\kappa > 1$, esta expresión muestra que la densidad de carga σ_{ind} inducida sobre el dieléctrico es inferior a la densidad de carga σ de las placas. Por ejemplo, si $\kappa = 3$ la densidad de carga inducida es igual a dos tercios de la densidad de carga sobre las placas. Si no existe ningún dieléctrico, entonces $\kappa = 1$ y $\sigma_{\text{ind}} = 0$, como era de esperarse. Sin embargo, si se reemplaza el dieléctrico por un conductor eléctrico, para el cual $E = 0$, la ecuación 26.22 dice que $E_0 = E_{\text{ind}}$; esto corresponde a $\sigma_{\text{ind}} = \sigma$. Es decir, la carga superficial inducida sobre el conductor es igual en magnitud pero de signo opuesto a la de las placas, lo que resulta en un campo eléctrico neto de valor cero en el conductor (véase la figura 24.14).

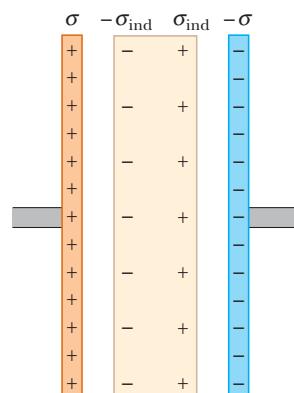



Figura 26.23 Carga inducida en un dieléctrico colocado entre las placas de un capacitor cargado. Observe que la densidad de la carga inducida en el dieléctrico es *menor* a la de las placas.

EJEMPLO 26.7 Efecto de una lámina metálica

Un capacitor de placas paralelas tiene una separación de placas d y área de placa A. Una lámina metálica sin carga, de grosor a, se inserta a medio camino entre las placas.

A) Encuentre la capacitancia del dispositivo.

Figura 26.24 (Ejemplo 26.7) a) Un capacitor de placas paralelas, con separación de placa d, parcialmente lleno con una losa metálica de grosor a. b) El circuito equivalente del dispositivo en a) consiste en dos capacitores en serie, cada uno con una separación de placa $(d - a)/2$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 26.24a muestra la lámina metálica entre las placas del capacitor. Cualquier carga que aparezca en una placa del capacitor debe inducir una carga de igual magnitud y signo opuesto sobre el lado cercano de la lámina, como se muestra en la figura 26.24a. En consecuencia, la carga neta sobre la lámina sigue siendo cero y el campo eléctrico dentro de la lámina es cero.

Categorizar Los planos de carga en los extremos superior e inferior de la lámina metálica son idénticos a la distribución de cargas sobre las placas de un capacitor. El metal entre los bordes de la lámina sirve sólo para hacer una conexión eléctrica entre los bordes. Por lo tanto, los bordes de la lámina se pueden modelar como planos conductores y el volumen de la lámina como un alambre. Como resultado, el capacitor de la figura 26.24a es equivalente a dos capacitores en serie, cada uno con una separación de placa $(d - a)/2$, como se muestra en la figura 26.24b.

Analizar Use la ecuación 26.3 y la regla para sumar dos capacitores en serie (ecuación 26.10) para encontrar la capacitancia equivalente en la figura 26.24b:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\left[\dfrac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2}\right]} + \frac{1}{\left[\dfrac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2}\right]}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d - a}$$

B) Demuestre que la capacitancia del capacitor original no es afectada por la inserción de la lámina metálica, si la lámina es infinitesimalmente delgada.

SOLUCIÓN

En el resultado para el inciso A), sea $a \to 0$:

$$C = \lim_{a \to 0}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d - a}\right) = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Finalizar El resultado del inciso B) es la capacitancia original antes de insertar la losa, lo que significa que se puede insertar una hoja metálica infinitesimalmente delgada entre las placas de un capacitor sin afectar la capacitancia. Este hecho se usa en el siguiente ejemplo.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la lámina metálica del inciso A) no está a la mitad entre las placas? ¿Cómo afectaría esto la capacitancia?

Respuesta Imagine mover la lámina de la figura 26.24a hacia arriba, de modo que la distancia entre el borde superior de la lámina y la placa superior es b. Por lo tanto la distancia entre el borde inferior de la lámina y la placa inferior es $d - b - a$. Como en el inciso A), encuentre la capacitancia total de la combinación en serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\epsilon_0 A/b} + \frac{1}{\epsilon_0 A/(d - b - a)}$$

$$= \frac{b}{\epsilon_0 A} + \frac{d - b - a}{\epsilon_0 A} = \frac{d - a}{\epsilon_0 A} \quad \rightarrow \quad C = \frac{\epsilon_0 A}{d - a}$$

que es el mismo resultado que se encontró en el inciso A). La capacitancia es independiente del valor de b, así que no importa dónde se ubique la lámina. En la figura 26.24b, cuando la estructura central se sube o se baja, la reducción en separación de placa de un capacitor se compensa con el aumento en la separación de placa del otro.

EJEMPLO 26.8 Capacitor parcialmente lleno

Un capacitor de placas paralelas, con una separación de placa d, tiene una capacitancia C_0 en ausencia de un dieléctrico. ¿Cuál es la capacitancia cuando entre las placas se inserta una lámina de material dieléctrico con constante dieléctrica κ y grosor fd (figura 26.25a), donde f es una fracción entre 0 y 1?

Figura 26.25 (Ejemplo 26.8) a) Capacitor de placas paralelas, con separación de placas d, parcialmente lleno con un dieléctrico con grosor fd. b) El circuito equivalente del capacitor consiste en dos capacitores conectados en serie.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En explicaciones anteriores de dieléctricos entre las placas de un capacitor, el dieléctrico llenaba el volumen entre las placas. En este ejemplo, sólo parte del volumen entre las placas contiene el material dieléctrico.

Categorizar En el ejemplo 26.7 encontró que una hoja metálica infinitesimalmente delgada, insertada entre las placas de un capacitor, no afecta la capacitancia. Imagine deslizar una lámina metálica infinitesimalmente delgada a lo largo de la cara inferior del dieléctrico, como se muestra en la figura 26.25a. Este sistema se puede modelar como una combinación en serie de dos capacitores, como se muestra en la figura 26.25b. Un capacitor tiene una separación de placa fd y se llena con un dieléctrico; el otro tiene una separación de placa $(1 - f)d$ y tiene aire entre sus placas.

Analizar Evalúe las dos capacitancias en la figura 26.25b a partir de la ecuación 26.15:

$$C_1 = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{fd} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{(1-f)d}$$

Encuentre la capacitancia equivalente C de la ecuación 26.10 para dos capacitores combinados en serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{fd}{\kappa\epsilon_0 A} + \frac{(1-f)d}{\epsilon_0 A}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{fd}{\kappa\epsilon_0 A} + \frac{\kappa(1-f)d}{\kappa\epsilon_0 A} = \frac{f + \kappa(1-f)}{\kappa}\,\frac{d}{\epsilon_0 A}$$

Invierta y sustituya para la capacitancia sin el dieléctrico, $C_0 = \epsilon_0 A/d$:

$$C = \frac{\kappa}{f + \kappa(1-f)}\,\frac{\epsilon_0 A}{d} = \boxed{\frac{\kappa}{f + \kappa(1-f)}\,C_0}$$

Finalizar Pruebe este resultado para algunos límites conocidos. Si $f \to 0$, el dieléctrico debe desaparecer. En este límite, $C \to C_0$, lo que es consistente con un capacitor con aire entre las placas. Si $f \to 1$, el dieléctrico llena el volumen entre las placas. En este límite, $C \to \kappa C_0$, lo que es consistente con la ecuación 26.14.

Resumen

DEFINICIONES

Un **capacitor** consiste en dos conductores que portan cargas de igual magnitud y signo opuesto. La **capacitancia** C de cualquier capacitor es la relación de la carga Q sobre cualquier conductor, a la diferencia de potencial ΔV entre ellos:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \qquad \textbf{(26.1)}$$

La capacitancia sólo depende de la geométria de los conductores y no de una fuente externa de carga o diferencia de potencial. La unidad del SI para capacitancia es coulomb por cada volt, o **farad** (F): 1 F = 1 C/V.

El **momento de dipolo eléctrico** $\vec{\mathbf{p}}$, de un dipolo eléctrico tiene una magnitud

$$p \equiv 2aq \qquad \textbf{(26.16)}$$

donde $2a$ es la distancia entre las cargas q y $-q$. La dirección del vector momento de dipolo eléctrico es desde la carga negativa hacia la carga positiva.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Si dos o más capacitores se conectan en paralelo, la diferencia de potencial es la misma a través de todos los capacitores. La capacitancia equivalente de una **combinación en paralelo** de capacitores es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad \textbf{(26.8)}$$

Si dos o más capacitores se conectan en serie, la carga es la misma en todos los capacitores, y la capacitancia equivalente de la **combinación en serie** se conoce por

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad \textbf{(26.10)}$$

Estas dos ecuaciones le permiten simplificar muchos circuitos eléctricos al sustituir múltiples capacitores con una sola capacitancia equivalente.

En un capacitor se almacena energía porque el proceso de carga es equivalente a la transferencia de cargas de un conductor con un potencial eléctrico más bajo, a otro conductor con un potencial más alto. La energía almacenada en un capacitor con carga Q es

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}Q\,\Delta V = \tfrac{1}{2}C(\Delta V)^2 \qquad \textbf{(26.11)}$$

Cuando un material dieléctrico se inserta entre las placas de un capacitor, la capacitancia aumenta por un factor adimensional κ, llamado **constante dieléctrica:**

$$C = \kappa C_0 \qquad \textbf{(26.14)}$$

donde C_0 es la capacitancia en ausencia del dieléctrico.

El momento de torsión que actúa sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ es

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(26.18)}$$

La energía potencial del sistema de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ es

$$U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(26.20)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** ¿Cierto o falso? a) A partir de la definición de capacitancia, $C = Q/\Delta V$, se sigue que un capacitor sin carga tiene una capacitancia cero. b) Como describe la definición de capacitancia, la diferencia de potencial a través de un capacitor sin carga es cero.
2. Si dispone de tres capacitores diferentes C_1, C_2 y C_3, ¿cuántas combinaciones diferentes de capacitancia se pueden hacer?
3. **O** ¿Por qué factor se multiplica la capacitancia de una esfera metálica si su volumen se triplica? a) 9, b) 3, c) $3^{2/3}$, d) $3^{1/3}$, e) 1, f) $3^{-1/3}$, g) $3^{-2/3}$, h) $\frac{1}{3}$.
4. **O** Un capacitor con capacitancia muy grande está en serie con otro capacitor con capacitancia muy pequeña. ¿Cuál es la capacitancia equivalente de la combinación? a) ligeramente mayor que la capacitancia del capacitor grande, b) ligeramente menor que la capacitancia del capacitor grande, c) ligeramente mayor que la capacitancia del capacitor pequeño, d) ligeramente menor que la capacitancia del capacitor pequeño.
5. **O i)** Clasifique los siguientes seis capacitores en orden de mayor a menor capacitancia, y note cualquier caso de igualdad. a) un capacitor de 20 μF con una diferencia de potencial

de 4-V entre sus placas, b) un capacitor de 30 μF con cargas de 90 μC de magnitud en cada placam, c) un capacitor con cargas de 80 μC de magnitud en sus placas, que difiere en 2 V en potencial, d) un capacitor de 10μF que almacena 125 μJ, e) un capacitor que almacena 250 μJ de energía con una diferencia de potencial de 10 V, f) un capacitor que almacena 120 μC de carga y 360 μJ de energía. **ii)** Clasifique los mismos capacitores de mayor a menor de acuerdo con la diferencia de potencial entre las placas. **iii)** Clasifique los capacitores en el orden de las magnitudes de las cargas en sus placas. **iv)** Clasifique los capacitores en el orden de la energía que almacenan.

6. La suma de las cargas en ambas placas de un capacitor es cero. ¿Qué almacena un capacitor?

7. **O i)** ¿Qué le ocurre a la magnitud de la carga en cada placa de un capacitor, si la diferencia de potencial entre los conductores se duplica? a) Se vuelve cuatro veces mayor. b) Se vuelve dos veces mayor. c) No cambia. d) Se vuelve la mitad. e) Se vuelve un cuarto. **ii)** Si se duplica la diferencia de potencial a través de un capacitor, ¿qué ocurre con la energía almacenada? Elija entre las mismas posibilidades.

8. **O** Un capacitor de placas paralelas se carga y después se desconecta de la batería. ¿En qué factor cambia la energía almacenada cuando la separación de placas se duplica? a) Se vuelve cuatro veces mayor. b) Se vuelve dos veces mayor. c) Permanece igual. d) Se vuelve la mitad. e) Se vuelve un cuarto.

9. **O** Usted carga un capacitor de placas paralelas, lo quita de la batería y evita que los alambres conectados a las placas entren en contacto. Cuando aumenta la separación de las placas, ¿cada una de las siguientes cantidades a) aumenta, b) disminuye o c) permanece igual? **i)** C. **ii)** Q. **iii)** E entre las placas. **iv)** ΔV. **v)** La energía almacenada en el capacitor.

10. **O** Repita la pregunta 9, pero esta vez responda para la situación en que la batería permanece conectada al capacitor mientras aumenta la separación de las placas.

11. Ya que las cargas en las placas de un capacitor de placas paralelas tienen signo opuesto, se atraen. Por eso, debería efectuarse un trabajo positivo para incrementar la separación entre las mismas. ¿Qué tipo de energía se modifica en el sistema debido al trabajo externo efectuado en este proceso?

12. Explique porqué el trabajo que se necesita para mover una carga Q a causa de una diferencia de potencial ΔV es $W = Q\,\Delta V$, en tanto que la energía almacenada en un capacitor cargado es $W = \frac{1}{2}Q\,\Delta V$ ¿De dónde proviene el factor $\frac{1}{2}$?

13. **O** Suponga que diseña un dispositivo para obtener una gran diferencia de potencial al cargar primero un banco de capacitores conectados en paralelo y luego activar un arreglo de interruptores que desconecta los capacitores de la fuente de carga y uno de otro y los reconecta todos en un arreglo en serie. En tal caso el grupo de capacitores cargados se descarga en serie. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que se puede obtener en esta forma al usar diez capacitores, cada uno de 500 μF y una fuente de carga de 800 V? a) 80 kV, b) 8 kV, c) 2.5 kV, d) 800 V, e) 80 V, f) 8 V, g) 0.

14. Un capacitor de aire se carga, después se desconecta de la fuente de energía, y posteriormente se conecta a un voltímetro. Explique cómo y por qué cambia la diferencia de potencial al insertar un material dieléctrico entre sus placas.

15. **O** Un capacitor de placas paralelas completamente cargado permanece conectado a una batería mientras usted desliza un dieléctrico entre las placas. ¿Las siguientes cantidades a) aumentan, b) disminuyen o c) permanecen iguales? **i)** C. **ii)** Q. **iii)** E entre las placas. **iv)** ΔV. **v)** La energía almacenada en el capacitor.

16. Suponga que quiere aumentar el máximo voltaje de operación de un capacitor de placas paralelas. Describa cómo puede hacer esto con una separación de placas fija.

17. Si le pidieran diseñar un capacitor de dimensiones pequeñas pero con una gran capacitancia, ¿qué factores resultarían de gran importancia para su diseño?

Problemas

Sección 26.1 Definición de capacitancia

1. a) ¿Cuánta carga existe en cada una de las placas de un capacitor de 4.00 μF que está conectado a una batería de 12 V? b) ¿Si este mismo capacitor estuviera conectado a una batería de 1.50 V, cual sería la carga almacenada?

2. Dos conductores con cargas netas de $+10\ \mu$C y $-10\ \mu$C tienen una diferencia de potencial de 10 V. a) Determine la capacitancia del sistema. b) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre los dos conductores si las cargas en cada uno de ellos se incrementan hasta $+100\ \mu$C y $-100\ \mu$C?

Sección 26.2 Cálculo de la capacitancia

3. Una esfera conductora con carga y aislada de radio 12 cm produce un campo eléctrico de 4.90×10^4 N/C a una distancia de 21 cm de su centro. a) ¿Cuál es su densidad de carga superficial? b) ¿Cuál será su capacitancia?

4. Si considera la Tierra y una capa de nubes a 800 m de altitud sobre la Tierra como las "placas" de un capacitor, calcule la capacitancia del sistema-capa de nubes. Suponga que la capa de nubes tiene un área de 1 km^2 y que el aire entre la nube y el suelo es puro y seco. Suponga que se acumula una carga en la nube y en el suelo hasta que un campo eléctrico uniforme de 3×10^6 N/C en todo el espacio entre ellos provoca una ruptura en el aire que conduce electricidad en forma de relámpago. ¿Cuál es la carga máxima que puede aceptar la nube?

5. Un capacitor lleno de aire está formado por dos placas paralelas, cada una de ellas con un área de 7.60 cm^2, separadas una distancia de 1.8 mm. A estas placas se les aplica una diferencia de potencial de 20 V. Calcule a) el campo eléctrico entre las placas, b) la densidad de carga superficial, c) la capacitancia y d) la carga sobre cada placa.

6. Un capacitor de aire variable utilizado en un circuito sintonizador de radio está hecho de N placas semicirculares, cada una de radio R y colocadas entre sí a una distancia d, y conectadas eléctricamente. Como puede observar en las figuras 26.16 y P26.6, un segundo conjunto de placas idénticas, está interca-

lado con el primer conjunto. Cada placa en el segundo juego está a la mitad de las del primer conjunto. El segundo conjunto puede girar como una sola unidad. Determine la capacitancia como una función del ángulo de rotación θ, en donde $\theta = 0$ corresponde a la posición de máxima capacitancia.

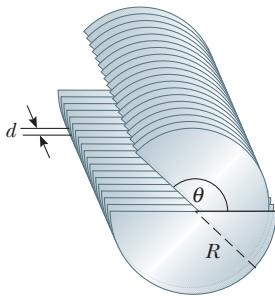



Figura P26.6

7. Cuando se le aplica una diferencia de potencial de 150 V a las placas paralelas de un capacitor, éstas tienen una densidad de carga superficial de 30.0 nC/cm^2. ¿Cuál es el espaciamiento entre ellas?

8. Un objeto pequeño de masa m tiene una carga q y está suspendido por un hilo entre las placas verticales de un capacitor de placas paralelas. La separación entre las placas es d. Si el hilo forma un ángulo θ con la vertical, ¿cuál sería la diferencia de potencial entre las placas?

9. Un tramo de 50.0 m de cable coaxial tiene un conductor interno de diámetro 2.58 mm que tiene una carga de 8.10 μC. El conductor que lo rodea tiene una diámetro interno de 7.27 mm y una carga de -8.10 μC. a) ¿Cuál es la capacitancia de este cable? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los conductores? Suponga que la región entre los conductores está llena de aire.

10. ● Un capacitor de 10.0 μF tiene placas con vacío entre ellas. Cada placa porta una carga de 1000 μC de magnitud. Una partícula con -3.00 μC de carga y 2.00×10^{-16} kg de masa se dispara desde la placa positiva hacia la placa negativa, con una rapidez inicial de 2.00×10^6 m/s. ¿La partícula llega a la placa negativa? ¿Cómo puede explicarlo? Si llega, ¿cuál es su rapidez de impacto? Si no llega, ¿qué fracción del camino a través del capacitor recorre?

11. En un capacitor esférico lleno de aire los radios de las cubiertas interior y exterior miden 7 y 14 cm, respectivamente. a) Calcule la capacitancia del dispositivo. b) ¿Cuál tendrá que ser la diferencia de potencial entre las esferas para obtener una carga de 4 μC en el capacitor?

Sección 26.3 Combinaciones de capacitores

12. Dos capacitores, $C_1 = 5.00$ μF y $C_2 = 12.0$ μF, están conectados en paralelo, y la combinación resultante está conectada a una batería de 9.00 V. Encuentre a) la capacitancia equivalente de la combinación, b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor y c) la carga almacenada en cada uno de ellos.

13. **¿Qué pasaría si?** Los dos capacitores del problema 12 se conectan ahora en serie y a una batería de 9 V. Determine a) la capacitancia equivalente de la combinación, b) la diferencia de potencial en cada capacitor y c) la carga de cada uno de los capacitores.

14. ● Tres capacitores están conectados a una batería como se muestra en la figura P26.14. Sus capacitancias son $C_1 = 3C$, $C_2 = C$ y $C_3 = 5C$. a) ¿Cuál es la capacitancia equivalente de este conjunto de capacitores? b) Clasifique los capacitores de acuerdo con la carga que almacenan, de la más grande a la más pequeña. c) Clasifique los capacitores con base en las diferencias de potencial entre sus terminales, de la más grande a la más pequeña. d) **¿Qué pasaría si?** Si se incrementa C_3. Explique qué pasa con la carga almacenada en cada uno de los capacitores.

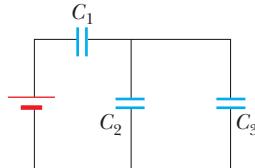



Figura P26.14

15. Si se conectan dos capacitores en paralelo, se obtiene una capacitancia equivalente de 9.00 pF, y cuando se conectan en serie se obtiene una capacitancia equivalente de 2.00 pF. ¿Cuál es la capacitancia de cada uno de ellos?

16. Si se conectan dos capacitores en paralelo, se obtiene una capacitancia equivalente de C_p, y cuando se conectan en serie se obtiene una capacitancia equivalente de C_s. ¿Cuál es la capacitancia de cada uno de ellos?

17. Cuatro capacitores están conectados como se muestra en la figura P26.17. a) Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos a y b. b) Calcule la carga de cada uno de los capacitores si $\Delta V_{ab} = 15.0$ V.

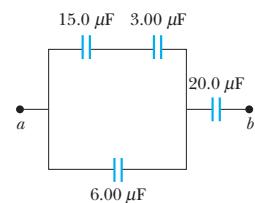



Figura P26.17

18. De acuerdo con la especificación de diseño, el circuito temporizador que retarda el cierre de la puerta de un elevador debe tener una capacitancia de 32 μF entre los puntos A y B. a) Durante la construcción del circuito, se determina que el capacitor de bajo costo pero de larga vida instalado entre ambos puntos tiene una capacitancia de 34.8 μF. A fin de cumplir con la especificación, se puede instalar un capacitor adicional entre dichos puntos. ¿Este capacitor deberá conectarse en serie o en paralelo con el capacitor de 34.8 μF? ¿Cuál deberá ser su capacitancia? b) **¿Qué pasaría si?** El circuito siguiente termina la línea de ensamble con una capacitancia de 29.8 μF entre A y B. ¿Qué capacitor adicional deberá instalarse en serie o en paralelo en dicho circuito, a fin de cumplir con las especificaciones?

19. Considere el circuito que se muestra en la figura P26.19, donde $C_1 = 6.00$ μF, $C_2 = 3.00$ μF y $\Delta V = 20.0$ V. Primero se

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

carga el capacitor C_1, cerrando el interruptor S_1. Después este interruptor es abierto, y el capacitor cargado se conecta al otro descargado cerrando S_2. Calcule la carga inicial adquirida por C_1, así como la carga final en cada uno de los capacitores.

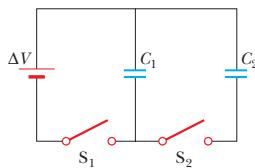



Figura P26.19

20. Considere tres capacitores C_1, C_2 y C_3 y una batería. Si C_1 se conecta a la batería, adquirirá una carga de 30.8 μC. Enseguida se desconecta C_1, se descarga y se conecta en serie con C_2. Cuando esta combinación en serie se conecta a la batería, la carga en C_1 es de 23.1 μC. Ahora se desconecta el circuito y se descargan los capacitores. Los capacitores C_3 y C_1 se conectan en serie con la batería, lo que da una carga en C_1 de 25.2 μC. Si los capacitores C_1, C_2 y C_3, se conectan en serie entre sí y con la batería después de haberse desconectado y descargado, ¿cuál es la carga en C_1?

21. Un grupo de capacitores idénticos se conecta primero en serie y después en paralelo. La capacitancia combinada en paralelo es 100 veces mayor que la correspondiente a la conexión en serie. ¿Cuántos capacitores existen en este grupo?

22. Algunos sistemas físicos que tienen capacitancia distribuida de manera continua en el espacio, se representan como un arreglo infinito de elementos discretos de circuito; por ejemplo, la guía de onda de las microondas o el axón de una célula nerviosa. Con la finalidad de practicar el análisis de un arreglo infinito, determine la capacitancia C equivalente entre las terminales X y Y del conjunto infinito de capacitores que se muestra en la figura P26.22. Cada uno de los capacitores tiene una capacitancia C_0. (*Sugerencia*: imagine que la escalera se corta en la línea AB, y observe que la capacitancia equivalente de la sección infinita a la derecha de la línea AB, es también igual a C.)

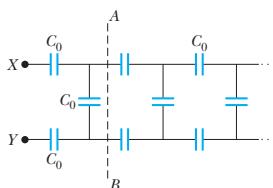



Figura P26.22

23. Determine la capacitancia equivalente entre los puntos a y b para el grupo de capacitores conectados como se muestra en la figura P26.23. Utilice los valores $C_1 = 5.00\ \mu$F, $C_2 = 10.00\ \mu$F y $C_3 = 2.00\ \mu$F.

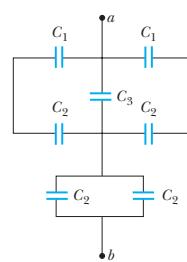



Figura P26.23

24. Si la diferencia de potencial entre los puntos a y b en la red descrita en el problema anterior, es de 60.0 V, ¿cuál es la carga almacenada en C_3?

25. Determine la capacitancia equivalente entre los puntos a y b en la combinación de capacitores que se muestra en la figura P26.25.

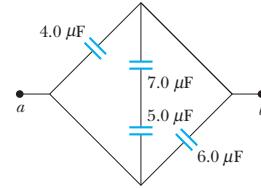



Figura P26.25

Sección 26.4 Energía almacenada en un capacitor con carga

26. La causa inmediata de muchos fallecimientos es la fibrilación ventricular, que son las contracciones no coordinadas del corazón. Una descarga eléctrica en la caja torácica puede causar una parálisis momentánea del músculo cardiaco, después de la cual, en ciertas ocaciones, el corazón vuelve a latir a su ritmo. Un *desfibrilador* (figura 26.13) aplica una fuerte descarga eléctrica de unos cuantos milisegundos de duración. El dispositivo contiene un capacitor de varios microfarads, cargado a varios miles de volts. Los electrodos, conocidos como paletas, y que tienen aproximadamente 8 cm de ancho y están recubiertos con una pasta conductora, se sujetan contra el pecho a ambos lados del corazón. A fin de evitar daño al operador, sus manijas se aíslan y cuando alerta a los demás oprime un botón en una de las paletas para descargar el capacitor en el pecho del paciente. Suponga que de un capacitor de 30.0 μF debe suministrar una energía de 300 J. ¿A qué diferencia de potencial deberá ser cargado?

27. a) Un capacitor de 3.00 μF se conecta a una batería de 12 V. ¿Cuánta energía se almacena en el capacitor? b) Si el capacitor hubiera estado conectado a una batería de 6 V, ¿cuánta energía hubiera almacenado?

28. Dos capacitores, $C_1 = 25.0\ \mu$F y $C_2 = 5.00\ \mu$F, están conectados en paralelo y cargados mediante una fuente de energía de 100 V. a) Dibuje una diagrama de circuito y calcule la energía total almacenada en ambos capacitores. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué diferencia de potencial se requeriría en las terminales de los dos capacitores conectados en serie, a fin de que esta combinación almacene la misma cantidad de energía que en el inciso a)? Dibuje el diagrama de circuito de este último circuito.

29. Un capacitor de placas paralelas tiene una carga Q y placas de área A. ¿Cuál es la fuerza que actúa en una placa para que sea atraída por la otra? En vista de que el campo eléctrico entre las placas es $E = Q/A\epsilon_0$, podría pensar que la fuerza es igual a $F = QE = Q^2/A\epsilon_0$. Esto es incorrecto, ya que el campo E incluye la contribución proveniente de ambas placas, y el campo creado por la placa positiva no puede ejercer ninguna fuerza sobre la placa positiva. Demuestre que, de hecho, la fuerza que se aplica sobre cada placa es $F = Q^2/2\epsilon_0 A$. (*Sugerencia*: considere $C = \epsilon_0 A/x$ para el caso de una separación arbitraria entre placas x; después establezca el trabajo efectuado en la separación de las dos placas cargadas igual a $W = \int F\,dx$.)

30. El circuito de la figura P26.30 está constituido por dos placas metálicas paralelas idénticas conectadas mediante resortes metálicos idénticos a una batería de 100 V. Cuando el interruptor está abierto, las placas no tienen carga y se encuentran separadas una distancia $d = 8$ mm, con una capacitancia $C = 2\ \mu$F. Si se cierra el interruptor, la distancia entre placas disminuye en un factor de 0.500. a) ¿Cuánta carga se acumula en cada una de las placas?, y b) ¿Cuál es la constante de resorte en cada uno de ellos? (*Sugerencia:* utilice el resultado del problema 29.)

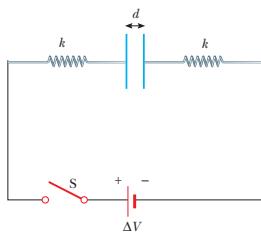



Figura P26.30

31. Conforme una persona se moviliza en un entorno seco, se acumula la carga eléctrica en su cuerpo. Una vez que esta carga alcanza un voltaje elevado, ya sea positivo o negativo, el cuerpo se descarga mediante chispas o descargas que a veces es posible observar. Considere un cuerpo humano que no hace contacto a tierra con la capacitancia representativa de 150 pF. a) ¿Qué carga producirá en el cuerpo humano un potencial de 10 kV? b) Es posible destruir dispositivos electrónicos sensibles con las descargas electrostáticas que una persona puede generar. Un dispositivo en particular puede ser destruido por una descarga que libere una energía de 250 μJ. ¿A qué voltaje corresponde en el cuerpo humano esta energía?

32. ● Dos capacitores idénticos de placas paralelas, cada uno con una capacitancia C, están cargados a una diferencia de potencial ΔV y están conectados en paralelo. En ese momento, la separación entre placas en uno de ellos se duplica. a) Determine la energía total del sistema de los dos capacitores *antes* de duplicar dicha separación. b) Determine la diferencia de potencial aplicada a cada capacitor *después* de duplicar la separación entre placas. c) Determine la energía total del sistema *después* de duplicarla. d) Reconcilie la diferencia de las respuestas a los incisos a) y c) con la ley de la conservación de la energía.

33. Demuestre que la energía asociada con una esfera conductora de radio R y carga Q en el vacío es igual a $U = k_eQ^2/2R$.

34. Considere dos esferas conductoras de radio R_1 y R_2, separadas una distancia mucho mayor que cualquiera de sus radios, que comparten una carga total Q, sujeta a la condición de que la energía potencial eléctrica del sistema debe mantenerse en el valor más pequeño posible. La carga total Q es igual a $q_1 + q_2$, donde q_1 representa la carga de la primera esfera y q_2 la de la segunda. Ya que las esferas están muy alejadas entre sí, puede suponer que la carga de cada una está distribuida de manera uniforme en su superficie. Puede utilizar el resultado del problema 33. a) Determine los valores de q_1 y de q_2 en función de Q, R_1 y R_2. b) Demuestre que la diferencia de potencial entre las esferas es igual a cero. En el capítulo 25 comprobó que dos conductores unidos por un alambre conductor en una situación estática estarán al mismo potencial. Este problema ilustra el principio general de que la carga estática en un conductor se distribuirá de forma que la energía potencial eléctrica del sistema sea mínima.

35. **Problema de repaso**. Una nube determinada en una tormenta tiene un potencial de 1.00×10^8 V en relación con un árbol. Si durante una tempestad eléctrica se transfieren 50.0 C de carga a través de esta diferencia de potencial y el árbol absorbe 1% de esta energía, ¿cuánta savia del árbol se perdería por ebullición? Modele o represente la savia como agua inicialmente a 30°C. El agua tiene un calor específico de 4.186 J/kg · °C, un punto de ebullición de 100°C y un calor latente de vaporización igual a 2.26×10^6 J/kg.

Sección 26.5 Capacitores con material dieléctrico

36. a) ¿Cuánta carga se le puede suministrar a una capacitor con aire entre las placas antes de que falle, si el área de cada una de las placas es de 5.00 cm^2? b) **¿Qué pasaría si?** Determine la carga máxima en el caso de que se utilice poliestireno en lugar de aire entre las placas.

37. Determine a) la capacitancia y b) la máxima diferencia de potencial aplicable a un capacitor de placas paralelas con dieléctrico de teflón, con una superficie de placa de 1.75 cm^2 y una separación de 0.040 0 mm entre placas.

38. En el supermercado venden rollos de aluminio, de envoltura plástica y de papel encerado. Describa un capacitor fabricado con este tipo de materiales. Calcule su capacitancia y su voltaje de ruptura con estimaciones en orden de magnitud.

39. Un capacitor comercial debe fabricarse como se muestra en la figura 26.15a. Este capacitor se hace a partir de dos tiras de aluminio separadas por una tira de papel parafinado. Cada tira de aluminio y de papel tiene un ancho de 7.00 cm. El aluminio tiene un espesor de 0.004 00 mm, y el papel de 0.025 0 mm, con una constante dieléctrica igual a 3.70. ¿Cuál es la longitud que deberán tener las tiras, si se desea obtener una capacitancia de 9.50×10^{-8} F antes de enrollar el capacitor? Si se agrega una segunda tira de papel y se enrolla el capacitor, su capacitancia, efectivamente se duplica al conseguir almacenamiento de carga en cada una de las caras de cada tira de aluminio.

40. Un capacitor en el aire tiene una separación entre sus placas de 1.50 cm y una superficie de placas de 25.0 cm^2. Las placas están cargadas a una diferencia de potencial de 250 V y han sido desconectadas de la fuente de energía. El capacitor se sumerge en agua destilada. Determine a) la carga en las placas antes y después de la inmersión, b) la capacitancia y la diferencia de potencial después de la inmersión, y c) el cambio en la energía del capacitor. Suponga que el líquido es aislante.

41. Cada capacitor de la combinación que se muestra en la figura P26.41 tiene un voltaje de ruptura de 15.0 V. ¿Cuál es el voltaje de ruptura de la combinación?

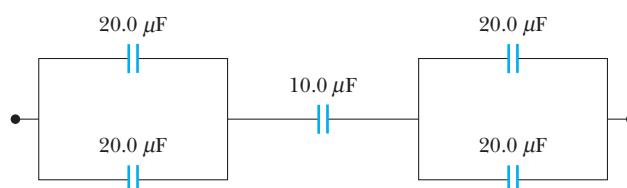



Figura P26.41

Sección 26.6 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico

42. Un objeto rígido pequeño, con cargas positivas y negativas de 3.50 nC, está orientado de forma que la carga positiva está en las coordenadas (−1.20 mm, 1.10 mm) y la carga negativa está en el punto de coordenadas (1.40 mm, −1.30 mm). a) Determine el momento del dipolo eléctrico del objeto si se coloca en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}} = (7800\hat{\mathbf{i}} - 4900\hat{\mathbf{j}})$ N/C. b) Determine el movimiento de torsión que actúa sobre el objeto. c) Determine la energía potencial del sistema objeto-campo cuando el objeto tiene esta orientación. d) Si puede modificarse la orientación del objeto, encuentre la diferencia entre las energías potenciales máxima y mínima del sistema.

43. Un objeto pequeño con un momento de dipolo eléctrico $\vec{\mathbf{p}}$ se coloca en un campo eléctrico no uniforme $\vec{\mathbf{E}} = E(x)\hat{\mathbf{i}}$. Es decir, el campo está orientado en la dirección x y su magnitud depende de la coordenada x. Suponga que θ representa el ángulo entre el momento del dipolo y la dirección x. a) Demuestre que el dipolo experimenta una fuerza neta

$$F = p\left(\frac{dE}{dx}\right)\cos\theta$$

en la dirección hacia la cual se incrementa el campo. b) Imagine un globo esférico centrado en el origen con un radio de 15.0 cm y una carga de 2 μC. Evalúe dE/dx en el punto (16 cm, 0, 0). Suponga que una gotita de agua en esta ubicación tiene un momento dipolar inducido de $6.30\,\hat{\mathbf{i}}$ nC · m. Determine la fuerza ejercida sobre la gotita.

Sección 26.7 Descripción atómica de los materiales dieléctricos

44. La expresión general de la ley de Gauss describe la forma en que una carga produce un campo eléctrico en un material, así como en el vacío. Se trata de

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{in}}{\epsilon}$$

,

donde $\epsilon = \kappa\epsilon_0$ es la permitividad del material. a) Una lámina de carga Q, distribuida uniformemente en su área A, está rodeada por un material dieléctrico. Demuestre que la hoja produce un campo eléctrico uniforme en puntos cercanos, de magnitud $E = Q/2A\epsilon$. b) Dos hojas grandes de área A, con cargas opuestas de igual magnitud Q, están separadas una pequeña distancia d. Demuestre que éstas generan un campo eléctrico uniforme en el espacio que las separa, de magnitud $E = Q/A\epsilon$. c) Suponga que la placa negativa está con un potencial igual a cero. Demuestre que la placa positiva está con potencial $Qd/A\epsilon$. d) Demuestre que la capacitancia del par de placas es $A\epsilon/d = \kappa A\epsilon_0/d$.

45. El conductor interno de un cable coaxial tiene un radio de 0.800 mm, y el radio interno del conductor externo es de 3 mm. El espacio entre los conductores está lleno de polietileno, que tiene una constante dieléctrica de 2.30 y una resistencia dieléctrica de 18×10^6 V/m. ¿Cuál es la diferencia de potencial máxima que puede soportar este cable?

Problemas adicionales

46. Dos grandes placas metálicas paralelas están orientadas en sentido horizontal y están separadas una distancia $3d$. Están unidas mediante un alambre a tierra, e inicialmente las placas no tienen carga. Ahora se inserta entre las placas una tercera placa idéntica de carga Q, paralelamente a las anteriores y localizada a una distancia d de la placa superior, como se observa en la figura P26.46. a) ¿Cuál es la carga inducida que aparece en cada una de las dos placas originales? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial que aparece entre la placa intermedia y cada una de las demás placas?

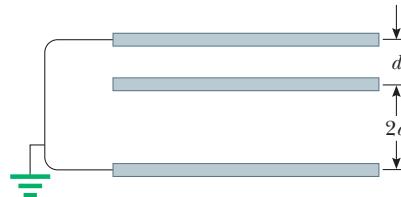



Figura P26.46

47. Cuatro placas metálicas paralelas P_1, P_2, P_3 y P_4, cada una con una superficie de 7.50 cm², están separadas por una distancia d = 1.19 mm, como se observa en la figura P26.47. P_1 está conectada a la terminal negativa de una batería y P_2 a la terminal positiva. La batería mantiene una diferencia de potencial de 12 V. a) Si P_3 se conecta a la terminal negativa, ¿cuál es la capacitancia del sistema de placas $P_1P_2P_3$? b) ¿Cuál es la carga de P_2? c) Si se conecta P_4 a la terminal positiva de la batería, ¿cuál será la capacitancia del sistema de cuatro placas $P_1P_2P_3P_4$? d) ¿Cuál es la carga de P_4?

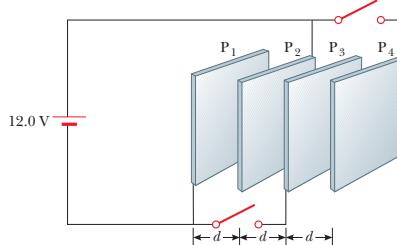



Figura P26.47

48. El conductor de una línea de transmisión eléctrica aérea es un alambre de aluminio largo de 2.40 cm de radio. Suponga que, en un momento particular, porta una carga por longitud de 1.40 μC/m y su potencial es de 345 kV. Encuentre el potencial 12.0 m abajo del alambre. Ignore los otros conductores de la línea de transmisión y suponga que el campo eléctrico es radial en todas partes.

49. Un capacitor de placas paralelas de 2.00 nF se carga a una diferencia de potencial inicial ΔV_i = 100 V y luego se aísla. El material dieléctrico entre las placas es mica, con una constante dieléctrica de 5.00. a) ¿Cuánto trabajo se requiere para sacar la hoja de mica? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través del capacitor después de que la mica se retira?

50. a) Dibuje un diagrama de circuito que muestre cuatro capacitores entre dos puntos a y b para el que la siguiente expresión determine la capacitancia equivalente:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{30\ \mu\text{F}} + \dfrac{1}{20\ \mu\text{F} + C_1}} + 50\ \mu\text{F} = 70\ \mu\text{F}$$

b) Encuentre el valor de C_1. c) Suponga que una batería de 6.00 V se conecta entre a y b. Encuentre la diferencia de potencial a

través de cada uno de los capacitores individuales y la carga en cada uno.

51. Un capacitor de placas paralelas se elabora con material dieléctrico cuya constante dieléctrica es 3.00 y cuya resistencia dieléctrica es 2.00×10^8 V/m. La capacitancia deseada es de 0.250 μF y el capacitor debe resistir una diferencia de potencial máxima de 4.00 kV. Determine el área mínima de las placas de dicho capacitor.

52. ● Un capacitor horizontal de placas paralelas, con vacío entre sus placas, tiene una capacitancia de 25.0 μF. Un líquido no conductor, con constante dieléctrica 6.50, se vierte en el espacio entre las placas, y llena una fracción f de su volumen. a) Encuentre la nueva capacitancia como función de f. b) ¿Cuál espera que sea la capacitancia cuando $f = 0$? La expresión de la parte a) coincide con su respuesta. c) ¿Qué capacitancia debe esperar cuando $f = 1$? ¿La expresión del inciso a) coincide con su respuesta? d) En las placas del capacitor parcialmente lleno se colocan cargas de 300 μC de magnitud. ¿Qué puede esperar acerca de la carga inducida en la superficie superior libre del líquido? ¿Cómo depende esta carga de f?

53. a) Dos esferas de radios a y b tienen sus centros separados una distancia d. Demuestre que la capacitancia de este sistema es

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

siempre y cuando d sea grande en comparación con a y b. (*Sugerencia:* ya que las esferas están lejos una de la otra, puede suponer que el potencial de cada una es igual a la suma de los potenciales debidos a cada una de las esferas, y al calcular dichos potenciales suponga que $V = k_eQ/r$ es aplicable). b) Demuestre que conforme d se aproxima al infinito, el resultado arriba obtenido se reduce al que se obtiene para dos capacitores esféricos en serie.

54. Un capacitor de 10.00 μF está cargado a 15 V. A continuación se le conecta en serie con un capacitor de 5.00 μF sin carga. Esta combinación en serie se conecta a una batería de 50.0 V, según el diagrama de la figura P26.54. Determine cuáles son las nuevas diferencias de potencial que se presentan en las terminales de los capacitores de 5.00 y 10.0 μF.

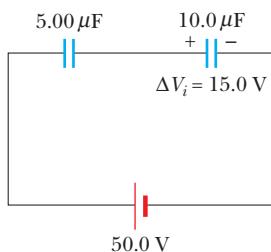



Figura P26.54

55. ● Al tomar en consideración el suministro de energía de un automóvil, un parámetro importante es la energía por cada unidad de masa (en joules por kilogramo) de la fuente. Con los datos siguientes, compare la energía por unidad de masa para la gasolina, las baterías de plomo y ácido y los capacitores. El ampere A será explicado en el siguiente capítulo como la unidad del SI para la corriente eléctrica, 1 A = 1 C/s).

Gasolina: 126 000 Btu/gal; densidad = 670 kg/m^3.
Batería de plomo y ácido: 12.0 V; 100 A · h; masa = 16 kg.
Capacitor: diferencia de potencial a plena carga = 12.0 V; capacitancia = 0.100 F; masa = 0.100 kg.

56. Se fabrica un capacitor a partir de dos placas cuadradas de lados ℓ y separación d. Las placas $+Q$ y $-Q$ son colocadas en las placas y después se retira la fuente de energía. En el interior del capacitor se inserta un material de constante dieléctrica κ, a cierta distancia x como se muestra en la figura P26.56. Suponga que d es mucho más pequeña que x. a) Determine la capacitancia equivalente del dispositivo. b) Calcule la energía almacenada en el capacitor. c) Determine la dirección y la magnitud de la fuerza ejercida sobre el dieléctrico. d) Obtenga un valor numérico para la fuerza cuando $x = \ell/2$, si $\ell = 5.00$ cm, $d = 2.00$ mm, el material dieléctrico es de vidrio ($\kappa = 4.50$) y el capacitor fue cargado a 2000 V antes de insertar el dieléctrico. *Sugerencia:* puede considerar el sistema como dos capacitores conectados en paralelo.

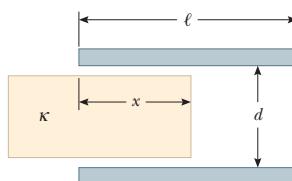



Figura P26.56 Problemas 56 y 57.

57. ● Considere un capacitor construido con dos placas cuadradas de lado ℓ y separación d, como sugiere la figura P26.56. Puede suponer que d es mucho menor que ℓ. Las placas tienen cargas estáticas distribuidas uniformemente $+Q_0$ y $-Q_0$. Dentro del capacitor se inserta un bloque de metal de ancho ℓ, longitud ℓ y un espesor ligeramente inferior a d, una distancia x dentro del espacio entre las placas. Las cargas en las placas permancen uniformemente distribuidas conforme se desliza el bloque en su interior. En una situación estática, un metal impide que un campo eléctrico penetre en su interior. El metal puede considerarse un dieléctrico perfecto, de $\kappa \to \infty$. a) Calcule la energía almacenada como una función de x. b) Determine la dirección y la magnitud de la fuerza que actúa sobre el bloque metálico. c) El área de la cara frontal que avanza en el bloque, es esencialmente igual a ℓd. Si considera que la fuerza sobre el bloque actúa sobre esta cara, determine el esfuerzo (fuerza por cada área) que actúa sobre el bloque. d) Exprese la densidad de energía en el campo eléctrico entre las placas con carga en función de Q_0, ℓ, d y ϵ_0. Explique cómo sus respuestas a los incisos c) y d) son comparables con las otras.

58. ● Con la finalidad de reparar una fuente de energía para un amplificador estereofónico, un técnico en electrónica necesita un capacitor de 100 μF capaz de soportar una diferencia de potencial de 90 V entre placas. El único suministro disponible es una caja de 5 capacitores de 100 μF, cada uno con una capacidad máxima de voltaje de 50 V. ¿El técnico puede utilizar una combinación de estos capacitores que tenga las características eléctricas adecuadas? De ser así, ¿cuál será el voltaje máximo que se aplique a cualquiera de los capacitores utilizados? ¿El técnico podrá usar todos los capacitores? Explique sus respuestas. En una combinación de capacitores, ¿cuál será el voltaje máximo en cada uno de los capacitores usados?

59. Un capacitor aislado de capacitancia no conocida ha sido cargado a una diferencia de potencial de 100 V. Cuando el capacitor con carga es conectado en paralelo con un capacitor sin carga de 10 μF, la diferencia de potencial de esta combinación es de 30.0 V. Calcule la capacitancia desconocida.

60. Un capacitor de placas paralelas, con placas de área LW y separación de placa t, tiene la región entre sus placas llena con cuñas de dos materiales dieléctricos, como se muestra en la figura P26.60. Suponga que t es mucho menor que L y W. a) Determine su capacitancia. b) ¿La capacitancia debe ser la misma si se intercambian las etiquetas κ_1 y κ_2? Demuestre que su expresión tiene o no esta propiedad. c) Demuestre que, si κ_1 y κ_2 tienden igualmente a un valor común κ, su resultado se vuelve el mismo que la capacitancia de un capacitor que contiene un solo dieléctrico: $C = \kappa\epsilon_0 LW/t$.

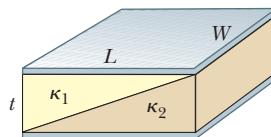



Figura P26.60

61. ● Un capacitor de placas paralelas con una separación d entre sus placas está cargado a una diferencia de potencial ΔV_0. Mientras está conectado a la batería, entre sus placas se introduce una placa dieléctrica de espesor d y constante dieléctrica κ. a) Demuestre que la relación de la energía almacenada después de haber introducido el dieléctrico y la energía almacenada en un capacitor sin dieléctrico, es $U/U_0 = \kappa$. Dé una explicación física de este incremento en la energía almacenada. b) ¿Qué le ocurre a la carga en el capacitor? (Observe que esta situación no es la misma que en el ejemplo 26.5, en el cual la batería fue desconectada del circuito antes de introducir el dieléctrico.)

62. Calcule la capacitancia equivalente entre los puntos a y b de la figura P26.62. Observe que este sistema no se trata de una combinación simple en serie o en paralelo. (*Sugerencia:* suponga una diferencia de potencial ΔV entre los puntos a y b. Escriba expresiones para ΔV_{ab} en función de las cargas y capacitancias para las diferentes trayectorias posibles desde a hasta b, y conserve la carga en aquellas placas de capacitor que están conectadas entre sí.)

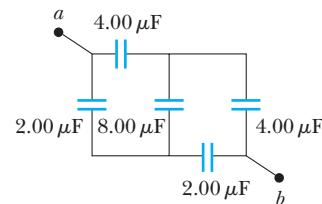



Figura P26.62

63. Los capacitores $C_1 = 6.00\ \mu$F y $C_2 = 2.00\ \mu$F son cargados en paralelo mediante una batería de 250 V. Los capacitores se desconectan de la batería y entre sí. A continuación se conectan de la placa positiva a la negativa y de la negativa a la positiva. Calcule la carga resultante en cada capacitor.

64. Considere dos alambres largos, paralelos y de cargas opuestas, de radios r y con una separación D entre sus centros, que es más grande que r. Si la carga está distribuida uniformemente en la superficie de cada uno de los alambres, demuestre que la capacitancia por unidad de longitud de este par de alambres es de

$$\frac{C}{\ell} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\,[(D/r)]}$$

65. Determine la capacitancia equivalente de la combinación que se muestra en la figura P26.65. (*Sugerencia*: utilice la simetría involucrada.)

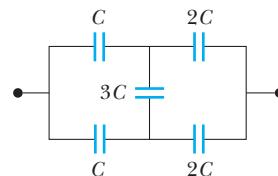
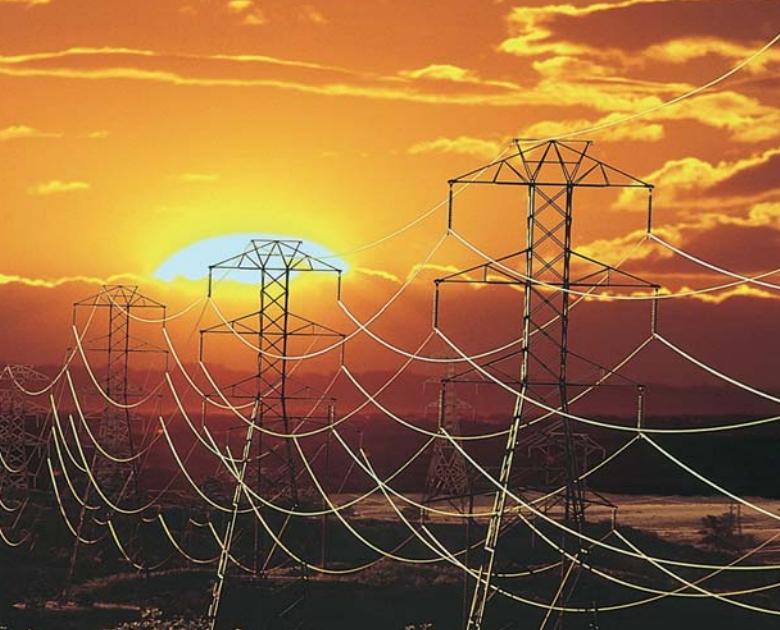



Figura P26.65

66. En el ejemplo 26.1 se exploró un capacitor cilíndrico de longitud ℓ, con radios a y b respectivamente, en los dos conductores. En la sección **¿Qué pasaría si?** de este ejemplo, se afirmó que era más efectivo, en función del incremento en la capacitancia, aumentar ℓ 10% que aumentar a 10%, siempre que $b > 2.85a$. Verifique esta afirmación matemáticamente.

Respuestas a las preguntas rápidas

26.1 d) La capacitancia es una propiedad del sistema físico y no se modifica con el voltaje aplicado. Según la ecuación 26.1, si se duplica el voltaje, se duplica la carga.

26.2 a) Cuando se oprime la tecla, se reduce la separación entre placas y aumenta la capacitancia. La capacitancia depende sólo de la forma en que está construido el capacitor y no de su circuito externo.

26.3 a) Al conectar capacitores en serie, los recíprocos de las capacitancias se suman, dando como resultado una capacitancia equivalente global menor.

26.4 b) Para un voltaje determinado, la energía almacenada en un capacitor es proporcional a C: $U = C(\Delta V)^2/2$. Debido a eso, si desea maximizar la capacitancia equivalente, debe conectar los tres capacitores en paralelo para sumar las capacitancias.

26.5 a) La constante dieléctrica de la madera (y, a propósito, de todos los demás materiales aislantes) es mayor que 1; por lo tanto, la capacitancia aumenta (ecuación 26.14). Este incremento es detectado por el circuito especial del localizador de montantes, lo que ilumina un indicador del dispositivo.

Estas líneas de transmisión eléctrica transportan energía de la compañía eléctrica a los hogares y a los negocios. La energía se transfiere a un voltaje muy elevado, en ciertos casos hasta a cientos de miles de volts. A pesar de que esto provoca que las líneas de transmisión resulten muy peligrosas, el elevado voltaje da como resultado una menor pérdida de energía, debido a la resistencia en los alambres. (Telegraph Colour Library/FPG)

27 Corriente y resistencia

Ahora se considerarán situaciones que involucran cargas eléctricas que están en movimiento a través de cierta región del espacio. Se usa el término *corriente eléctrica*, o simplemente *corriente*, para describir la relación de flujo de carga. Las aplicaciones más prácticas de la electricidad se relacionan con corrientes eléctricas. Por ejemplo, la batería en una lámpara de mano produce una corriente en el filamento del foco cuando se activa el interruptor. Muchos electrodomésticos funcionan con corriente alterna. En estas situaciones comunes, existe corriente en un conductor tal como en un alambre de cobre. Además las corrientes pueden existir afuera de un conductor. Por ejemplo, un haz de electrones en el cinescopio de un televisor constituye una corriente.

Este capítulo inicia con la definición de corriente, se presenta una descripción microscópica de la corriente y, además, se explican algunos de los factores que impiden el flujo de cargas en los conductores. Para describir la conducción eléctrica en los metales se utiliza un modelo clásico, y se indican algunas de las limitaciones que tiene este modelo. También se define la resistencia eléctrica y se presenta un nuevo elemento de circuito, el resistor. Se concluye la explicación con la rapidez a la cual se transfiere energía a un dispositivo en un circuito eléctrico.

27.1 Corriente eléctrica

En esta sección verá cómo se da el flujo de las cargas eléctricas a través de un material. La cantidad de flujo depende del material a través del cual pasan las cargas y de la diferencia

de potencial que existe de un extremo al otro del material. Siempre que hay un flujo neto de carga a través de alguna región, se dice que existe una **corriente** eléctrica.

Resulta instructivo hacer una analogía entre el flujo de agua y la corriente: en muchos sitios se instalan salidas de regadera de bajo flujo para ahorrar agua y se cuantifica el flujo de agua de éste y otros dispositivos al especificar la cantidad de agua que sale durante un cierto intervalo de tiempo, y con frecuencia se mide en litros por minuto. En una escala mayor, es posible definir la corriente de un río al dar la cantidad a la cual pasa el agua por una determinada ubicación; por ejemplo, el flujo sobre el borde en las cataratas del Niágara se mantiene entre 1400 y 2800 m^3/s.

Otra analogía se da entre la conducción térmica y la corriente: en la sección 20.7 se explicó el flujo de energía por calor a través de una muestra de material; la rapidez de flujo de energía está determinada por el material, así como por la diferencia de temperatura de un extremo al otro del material, como se describe en la ecuación 20.15.

Para definir la corriente con mayor precisión, suponga que las cargas tienen un movimiento perpendicular a una superficie A, según se observa en la figura 27.1 (esta área podría corresponder al área de sección transversal de un alambre, por ejemplo). **La corriente es la proporción a la cual circula la carga a través de esta superficie.** Si ΔQ es la cantidad de carga que pasa a través de esta superficie en un intervalo de tiempo Δt, la **corriente promedio** I_{prom} es igual a la carga que pasa a través de A por unidad de tiempo:

$$I_{\text{prom}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \textbf{(27.1)}$$

Figura 27.1 Cargas en movimiento a través de un área A. La rapidez a la cual fluye la carga a través del área se define como corriente I. La dirección de la corriente es la misma a la cual fluyen las cargas positivas cuando tienen libertad de hacerlo.

Si la proporción a la que circula la carga varía en el tiempo, entonces, la corriente también varía en el tiempo; se define de la **corriente instantánea** I como el límite diferencial de la corriente promedio:

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} \quad \textbf{(27.2)}$$

◄ Corriente eléctrica

La unidad del SI para la corriente es el **ampere** (A):

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} \quad \textbf{(27.3)}$$

Es decir, 1 A de corriente es equivalente a 1 C de carga que pasa a través de una superficie en 1 s.

Las partículas con carga que pasan a través de la superficie de la figura 27.1 pueden ser positivas, negativas, o ambas. **Es una regla convencional asignar a la corriente la misma dirección que la del flujo de la carga positiva.** En los conductores eléctricos, como cobre o aluminio, la corriente está ocasionada por el movimiento de electrones con carga negativa. Por lo tanto, en cualquier conductor, **la dirección de la corriente es la opuesta a la dirección del flujo de los electrones.** Sin embargo, si considera un acelerador de protones con carga positiva, la corriente estará en la dirección del movimiento de los protones. En algunos casos, como los que involucran gases y electrolitos, la corriente es el resultado del flujo tanto de las cargas positivas como de las negativas. Es común referirse a una carga en movimiento (positiva o negativa) como un **portador de carga** móvil.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.1
"Flujo de corriente" es una redundancia

La frase *flujo de corriente* es comúnmente utilizada, aunque sea, en estricto sentido, incorrecta, ya que la corriente *es* un flujo (de carga). Esto es parecido a la frase *transferencia de calor*, que también es redundante, ya que el calor *es* una transferencia (de energía). Aquí se evita esta frase y se usa *flujo de carga*.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.2
La batería no suministra electrones

Una batería no suministra electrones al circuito, sino que establece el campo eléctrico que ejerce una fuerza sobre los electrones existentes en los alambres y en los elementos del circuito.

Si los extremos de un alambre conductor se conectan para formar una espira, todos los puntos en la espira estarán con el mismo potencial eléctrico, por lo que el campo eléctrico será cero tanto en el interior como en la superficie del conductor. Ya que el campo eléctrico es igual a cero, no existirá un transporte neto de carga por el alambre, y por lo tanto no habrá corriente. Sin embargo, si los extremos del alambre conductor están conectados a una batería, los puntos de la espira no estarán con el mismo potencial. La batería establece una diferencia de potencial entre los extremos de la espira y produce un campo eléctrico en el interior del alambre. El campo eléctrico ejerce fuerzas en los electrones de conducción que existen en el alambre, haciendo que se muevan en su interior, y por lo tanto, se establece una corriente.

Modelo microscópico de la corriente

Mediante la descripción de un modelo microscópico de la conducción en un metal, se puede relacionar la corriente con el movimiento de los portadores de carga. Considere la corriente en un conductor de área de sección transversal A (figura 27.2, en la página 754). El volumen de una sección del conductor de longitud Δx (región gris de la figura

27.2) es $A\,\Delta x$. Si n representa el número de portadores de carga móviles por cada unidad de volumen (en otras palabras, la densidad de portadores de carga), el total de portadores en la región gris es $nA\,\Delta x$. Por lo tanto, la carga total ΔQ de esta sección es igual a

$$\Delta Q = (nA\,\Delta x)q$$

donde q es la carga de cada portador. Si los portadores se mueven con una rapidez v_d, el desplazamiento que experimentan en la dirección x en un intervalo de tiempo Δt es $\Delta x = v_d\,\Delta t$. Sea Δt el intervalo de tiempo requerido para que las cargas en el cilindro se muevan por un desplazamiento cuya magnitud sea igual que la longitud del cilindro. Este intervalo de tiempo es también el que se requiere para que todos los portadores de carga del cilindro atraviesen el área circular de uno de los extremos. Con esta elección, ΔQ se escribe de la forma

$$\Delta Q = (nAv_d\,\Delta t)q$$

Si divide ambos lados de esta ecuación entre Δt, observará que la corriente promedio en el conductor es

Corriente en un conductor en función de valores microscópicos ▶

$$I_{\text{prom}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_dA \qquad \textbf{(27.4)}$$

La rapidez de los portadores de carga v_d es una rapidez promedio que se conoce como **rapidez de arrastre.** Para comprender el significado de este concepto, considere un conductor en donde los portadores de carga son electrones libres. Si el conductor está aislado, es decir, si la diferencia de potencial entre los extremos es igual a cero, estos electrones se someten a movimiento aleatorio que es similar al movimiento de las moléculas de gas. Los electrones colisionan repetidamente con los átomos metálicos, y su movimiento es complicado y en zigzag (figura 27.3). Como se explicó anteriormente, cuando se aplica una diferencia de potencial a un conductor (por ejemplo mediante una batería), se establece un campo eléctrico en dicho conductor; este campo ejerce una fuerza eléctrica sobre los electrones, lo que produce una corriente. Además del movimiento zigzagueante producido por las colisiones con los átomos metálios, los electrones se trasladan despacio a lo largo del conductor (en dirección opuesta a $\vec{\mathbf{E}}$) con la velocidad de arrastre $\mathbf{v}_d$ como muestra la figura 27.3b.

Se puede pensar en las colisiones entre átomos y electrones en un conductor como si se tratara de una fricción interna efectiva (o fuerza de arrastre) similar a la que experimentan las moléculas de un líquido al fluir a través de una tubería rellena de viruta de acero. La energía que se transfiere de los electrones a los átomos metálicos durante las colisiones, ocasiona un incremento en la energía vibratoria de dichos átomos y un incremento correspondiente en la temperatura del conductor.

Figura 27.2 Sección de un conductor uniforme de área transversal A. Los portadores de carga móvil se desplazan con una velocidad v_d y el desplazamiento que experimentan en la dirección de las x en un intervalo de tiempo Δt es $\Delta x = v_d\,\Delta t$. Si Δt es el intervalo durante el cual se desplazan las cargas en promedio, por la longitud del cilindro, el número de portadores en la sección de longitud Δx es igual a $nAv_d\,\Delta t$; n es el número de portadores por unidad de volumen.

Figura 27.3
a) Diagrama del movimiento aleatorio de dos portadores de carga en un conductor en ausencia de un campo eléctrico. La velocidad de arrastre es cero. b) Movimiento de los portadores de carga en un conductor en presencia de un campo eléctrico. Observe que el movimiento aleatorio modificado por el campo y los portadores de carga tienen una velocidad de arrastre opuesta a la dirección del campo eléctrico. Puesto que la aceleración de los portadores de carga se debe a la fuerza eléctrica, las trayectorias en realidad son parabólicas. Sin embargo, la rapidez de arrastre es mucho menor que la rapidez promedio, de modo que la forma parabólica no es visible en este escala.

Pregunta rápida 27.1 Imagine cargas positivas y negativas en movimiento horizontal a través de las cuatro regiones que se muestran en la figura 27.4. Clasifique de menor a mayor la corriente en las cuatro regiones.

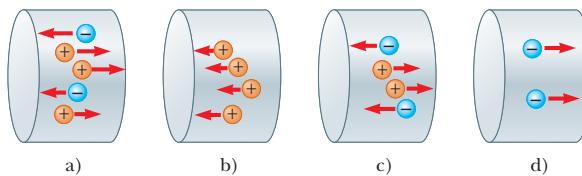



Figura 27.4 (Pregunta rápida 27.1) Las cargas se mueven a través de cuatro regiones.

EJEMPLO 27.1 Rapidez de arrastre en un alambre de cobre

Un alambre de cobre calibre 23 en una típica construcción residencial tiene una área de sección transversal de 3.31×10^{-6} m^2 y porta una corriente constante de 10.0 A. ¿Cuál es la rapidez de arrastre de los electrones en el alambre? Suponga que cada átomo de cobre aporta un electrón libre a la corriente. La densidad del cobre es 8.92 g/cm^3.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los electrones siguen un movimiento en zigzag, tal como en la figura 27.3a, con un movimiento de arrastre paralelo al alambre sobreimpuesto al movimiento, como en la figura 27.3b. Como se mencionó anteriormente, la rapidez de arrastre es pequeña, y este ejemplo ayuda a cuantificar la rapidez.

Categorizar Evalúe la rapidez de arrastre con la ecuación 27.4. Ya que la corriente es constante, la corriente promedio durante cualquier intervalo de tiempo es la misma que la corriente constante: $I_{\text{prom}} = I$.

Analizar La tabla periódica de los elementos en el apéndice C muestra que la masa molar del cobre es 63.5 g/mol. Recuerde que 1 mol de cualquier sustancia contiene un número de Avogadro de átomos (6.02×10^{23}).

Use la masa molar y la densidad del cobre para encontrar el volumen de 1 mol de cobre:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{63.5 \text{ g}}{8.92 \text{ g/cm}^3} = 7.12 \text{ cm}^3$$

A partir de la suposición de que cada átomo de cobre aporta un electrón libre a la corriente, encuentre la densidad de electrones en el cobre:

$$n = \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ electrones}}{7.12 \text{ cm}^3}\left(\frac{1.00 \times 10^6 \text{ cm}^3}{1 \text{ m}^3}\right)$$
$$= 8.46 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3$$

Resuelva la ecuación 27.4 para la rapidez de arrastre:

$$v_d = \frac{I_{\text{prom}}}{nqA} = \frac{I}{nqA}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_d = \frac{I}{neA} = \frac{10.0 \text{ A}}{(8.46 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(3.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2)}$$
$$= 2.23 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

Finalizar Este resultado muestra que las magnitudes de velocidad de arrastre representativas son muy pequeñas. Por ejemplo, ¡los electrones que viajan con una rapidez de 2.23×10^{-4} m/s tardarían aproximadamente 75 min en recorrer 1 m! Por lo tanto, puede preguntarse por qué una luz se enciende casi instantáneamente cuando se activa el interruptor. En un conductor, los cambios en el campo eléctrico que impulsan los electrones libres viajan a través del conductor con una rapidez cercana a la de la luz. De este modo, cuando activa un interruptor de luz, los electrones ya presentes en el filamento de la bombilla experimentan fuerzas eléctricas y comienzan a moverse después de un intervalo de tiempo del orden de nanosegundos.

27.2 Resistencia

En el capítulo 24 se llegó a la conclusión de que el campo eléctrico en el interior de un conductor es igual a cero. Sin embargo, esta afirmación *sólo* es cierta si el conductor está en equilibrio estático. El propósito de esta sección es describir lo que ocurre cuando las cargas en un conductor no están en equilibrio, en cuyo caso existe un campo eléctrico en el conductor.

Piense en un conductor de área de sección transversal A que transporta una corriente I. La **densidad de corriente** J en el conductor se define como la corriente por unidad de área. Dado que la corriente es $I = nqv_dA$, la densidad de corriente es igual a

Densidad de corriente ▶

$$J \equiv \frac{I}{A} = nqv_d \tag{27.5}$$

donde J tiene unidades en el SI de amperes por cada metro cuadrado. Esta expresión es válida sólo si la densidad de corriente es uniforme y sólo si la superficie del área de sección transversal A es perpendicular a la dirección de la corriente.

Tan pronto como se mantiene una diferencia de potencial a través del conductor se establece una densidad de corriente y un campo eléctrico. En algunos materiales, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico:

$$J = \sigma E \tag{27.6}$$

donde la constante de proporcionalidad σ se conoce como **conductividad** del conductor.[1] Los materiales que obedecen la ecuación 27.6, siguen **la ley de Ohm,** en honor a Georg Simon Ohm. De una manera más específica, la ley de Ohm afirma que

> en muchos materiales (inclusive la mayor parte de los metales) la relación de la densidad de corriente al campo eléctrico es una constante σ que es independiente del campo eléctrico que produce la corriente.

(© Bettmann/Corbis).

GEORG SIMON OHM
Físico alemán (1789-1854)
Ohm, un profesor de secundaria y posteriormente profesor en la Universidad de Munich, formuló el concepto de resistencia y descubrió las proporcionalidades expresadas en las ecuaciones 27.6 y 27.7

Los materiales que obedecen la ley de Ohm y por tanto cumplen esta simple correspondencia entre E y J, se conocen como materiales *óhmicos*. Sin embargo, se ha encontrado experimentalmente que no todos los materiales tienen esta propiedad. Aquellos materiales y dispositivos que no obedecen la ley de Ohm se dice que son materiales *no óhmicos*. La ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza, sino más bien una relación empírica válida únicamente para ciertos materiales.

Si consideramos un segmento de alambre recto de área de sección transversal uniforme A y de longitud ℓ, como se muestra en la figura 27.5 obtendrá una ecuación que resulte útil en aplicaciones prácticas. De un extremo al otro del alambre se mantiene una diferencia de potencial $\Delta V = V_b - V_a$, lo que genera en el alambre un campo eléctrico y una corriente. Si supone que el campo es uniforme, la diferencia de potencial está relacionada con el campo mediante la relación

$$\Delta V = E\ell$$

Por lo tanto, la densidad de corriente en el alambre se expresa en la forma

$$J = \sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{\ell}$$

Ya que $J = I/A$, la diferencia de potencial a través del alambre es

$$\Delta V = \frac{\ell}{\sigma} J = \left(\frac{\ell}{\sigma A}\right) I = RI$$

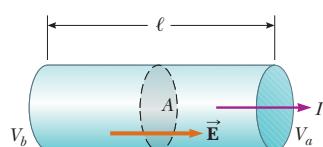



Figura 27.5 Conductor uniforme de longitud ℓ y un área de sección transversal A. La diferencia de potencia $\Delta V = V_b - V_a$ que se mantiene de un extremo al otro del conductor establece un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, y este campo produce una corriente I que es proporcional a la diferencia de potencial.

[1] No debe confundir la conductividad σ con la densidad de carga superficial, para la cual se utiliza el mismo símbolo.

[2] Este resultado es consecuencia de la definición de diferencia de potencial:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = E\int_a^b dx = E\ell$$

La cantidad $R = \ell/\sigma A$ se conoce como la **resistencia** del conductor que es definida como la relación de la diferencia de potencial aplicada a un conductor entre la corriente que pasa por el mismo:

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I} \quad \textbf{(27.7)}$$

Al estudiar los circuitos eléctricos utilizará esta ecuación una y otra vez. Con este resultado se observa que la resistencia tiene unidades del SI de volts por ampere. Un volt por ampere se define como un **ohm** (Ω):

$$1\ \Omega \equiv 1\ \text{V/A} \quad \textbf{(27.8)}$$

Esta expresión indica que si una diferencia de potencial de 1 V a través de un conductor origina una corriente de 1 A, la resistencia del conductor será de 1 Ω. Por ejemplo, si un aparato doméstico conectado a una fuente de 120 V de diferencia de potencial conduce una corriente de 6 A, su resistencia es de 20 Ω.

La mayoría de los circuitos eléctricos usan elementos llamados **resistores** para controlar la corriente en las diferentes partes del circuito. Dos tipos comunes son la *resistencia de material aglomerado*, que contiene carbono, y la *resistencia bobinada*, que consiste en una bobina de alambre. Los valores de los resistores en ohms, por lo general se indican mediante código de colores, como se muestra en la figura 27.6 y la tabla 27.1.

El recíproco de la conductividad es la **resistividad**[3] ρ:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad \textbf{(27.9)}$$

◀ La resistividad es el recíproco de la conductividad

donde ρ está en ohms-metros ($\Omega \cdot$m). Ya que $R = \ell/\sigma A$, es posible expresar la resistencia a lo largo de la longitud ℓ de un bloque uniforme de material de la forma

$$R = \rho\frac{\ell}{A} \quad \textbf{(27.10)}$$

◀ Resistencia de un material uniforme a lo largo de la longitud ℓ

Todo material óhmico tiene una resistividad característica que depende de las propiedades del material y de la temperatura. Adicionalmente, como se puede observar por la ecuación 27.10, la resistencia de una muestra depende tanto de su geometría como de su resistividad. La tabla 27.2 (página 758) presenta las resistividades de una diversidad de materiales a 20°C. Observe el enorme intervalo existente, desde valores muy reducidos para buenos conductores, como el cobre y la plata, hasta valores muy elevados para los buenos aislantes como el vidrio y el hule. Un conductor ideal debería tener una resistividad igual a cero, y un aislador ideal una resistividad infinita.

TABLA 27.1

Códigos de color para los resistores

Color	Número	Multiplicador	Tolerancia
Negro	0	1	
Café	1	10^1	
Rojo	2	10^2	
Naranja	3	10^3	
Amarillo	4	10^4	
Verde	5	10^5	
Azul	6	10^6	
Violeta	7	10^7	
Gris	8	10^8	
Blanco	9	10^9	
Oro		10^{-1}	5%
Plata		10^{-2}	10%
Sin color			20%

[3] No se debe confundir la resistividad ρ con la densidad de masa o con la densidad de carga, para las cuales se utiliza el mismo símbolo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.3

La ecuación 27.7 no es la ley de Ohm

Muchas personas llaman a la ecuación 27.7 la ley de Ohm, pero esto no es correcto. Esta ecuación es simplemente la definición de la resistencia, la cual proporciona una correspondencia importante entre el voltaje, la corriente y la resistencia. La ley de Ohm está relacionada con una proporcionalidad de J a E (ecuación 27.6) o, de manera equivalente, de I a ΔV, las cuales, por la ecuación 27.7, establecen que la resistencia es constante e independiente del voltaje aplicado.

Figura 27.6 Las bandas de color en un resistor son un código para identificar su resistencia. Los primeros dos colores representan los dos primeros dígitos del valor de la resistencia. El tercer color representa la potencia de diez del multiplicador del valor de la resistencia. El último color es la tolerancia del valor de la resistencia. Por ejemplo, los cuatro colores de los resistores en el círculo son rojo (= 2), negro (= 0), naranja (= 10^3) y oro (= 5%), por lo que el valor de la resistencia es de $20 \times 10^3\ \Omega$ = 20 kΩ con un valor de tolerancia de 5% = 1 kΩ. (Los valores de estos colores se tomaron de la tabla 27.1.)

TABLA 27.2

Resistividades y coeficientes de temperatura de resistividad para diversos materiales

Material	Resistividad[a] ($\Omega \cdot$m)	Coeficiente de temperatura[b] $\alpha[(°C)^{-1}]$
Plata	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Cobre	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Oro	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
Aluminio	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Tungsteno	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Hierro	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Platino	11×10^{-8}	3.92×10^{-3}
Plomo	22×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Aleación nicromo[c]	1.50×10^{-6}	0.4×10^{-3}
Carbono	3.5×10^{-5}	-0.5×10^{-3}
Germanio	0.46	-48×10^{-3}
Silicio	2.3×10^{3}	-75×10^{-3}
Vidrio	10^{10} a 10^{14}	
Hule vulcanizado	$\sim 10^{13}$	
Azufre	10^{15}	
Cuarzo (fundido)	75×10^{16}	

[a] Todos los valores están a 20°C. Los elementos de la tabla se consideran libres de impurezas.
[b] Vea la sección 27.4.
[c] Aleación de níquel y cromo usada comunmente en elementos calefactores.
[d] La resistividad del silicio es muy sensible a la pureza. El valor puede cambiar en varios órdenes de magnitud cuando es dopado con otros átomos.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.4

Resistencia y resistividad

La resistividad es una propiedad de una *sustancia*, en tanto que la resistencia es la propiedad de un *objeto*. Ya ha visto antes pares similares de variables. Por ejemplo, la densidad es una propiedad de una sustancia, en tanto que la masa es la propiedad de un objeto. La ecuación 27.10 relaciona la resistencia con la resistividad y la ecuación 1.1 relaciona la masa con la densidad.

La ecuación 27.10 muestra que la resistencia de un conductor cilíndrico conocido como un alambre es proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área de sección transversal. Si se duplica la longitud de un alambre, su resistencia se duplica. Si se duplica su área de sección transversal, su resistencia disminuye a la mitad. Esta situación es similar al flujo de un líquido por una tubería. Conforme se incrementa la longitud de la tubería, aumenta la resistencia al flujo. Conforme aumenta el área de sección transversal de la tubería, pasará más líquido a través de una sección transversal determinada de la tubería en un intervalo unitario de tiempo. Debido a eso, fluirá más líquido para un mismo diferencial de presión aplicado a la tubería, y se reducirá la resistencia al flujo.

Los materiales y otros dispositivos óhmicos tienen una correspondencia lineal corriente-diferencia de potencial en un amplio intervalo de diferencias de potencial aplicadas (figura 27.7a). La pendiente de la curva I en función de ΔV en la región lineal, tiene un valor $1/R$. Los materiales no óhmicos tienen una correspondencia no lineal de corriente-diferencia de potencial. Un dispositivo semiconductor común con características I en función de ΔV no lineales, es el *diodo* de unión (figura 27.7b). La resistencia de este dispositivo es baja para corrientes en una dirección (ΔV positiva) y elevada para corriente en la dirección opuesta (ΔV negativa). De hecho, la mayor parte de los dispositivos

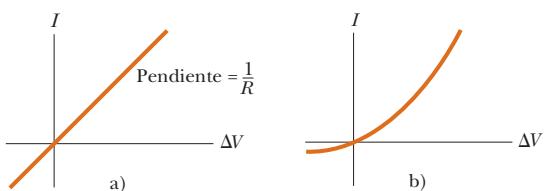



Figura 27.7 a) Curva corriente-diferencia de potencial para un material óhmico. La curva es lineal y la pendiente es igual al recíproco de la resistencia del conductor. b) Curva no lineal corriente-diferencia de potencial correspondiente a un diodo de unión. Este dispositivo no sigue la ley de Ohm.

electrónicos modernos, como los transistores, tienen correspondencias no lineales de corriente —diferencia de potencial; su operación correcta depende de la forma en que violan la ley de Ohm.

Pregunta rápida 27.2 Un alambre cilíndrico tiene un radio r y una longitud ℓ. Si tanto r como ℓ se duplican, la resistencia en el alambre: a) aumenta, b) disminuye, o c) no se modifica.

Pregunta rápida 27.3 En la figura 27.7b, conforme aumenta el voltaje aplicado, la resistencia del diodo: a) aumenta, b) disminuye o c) no se modifica.

EJEMPLO 27.2 Resistencia del alambre de Nichrome

El radio del alambre de Nichrome calibre 22 es de 0.321 mm. **A)** Calcule la resistencia por unidad de longitud de este alambre.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La tabla 27.2 muestra que el Nichrome tiene una resistividad dos órdenes de magnitud más grandes que los mejores conductores en la tabla. Por lo tanto, se espera que tenga algunas aplicaciones prácticas que los mejores conductores no pueden tener.

Categorizar El alambre se modela como un cilindro, de modo que se aplica un simple análisis geométrico para encontrar la resistencia.

Analizar Use la ecuación 27.10 y la resistividad del Nichrome de la tabla 27.2 para encontrar la resistencia por unidad de longitud:

$$\frac{R}{\ell} = \frac{\rho}{A} = \frac{\rho}{\pi r^2} = \frac{1.5 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}}{\pi(0.321 \times 10^{-3}\ \text{m})^2} = 4.6\ \Omega/\text{m}$$

B) Si una diferencia de potencial de 10 V se mantiene a través de una longitud de 1.0 m de alambre de Nichrome, ¿cuál es la corriente en el alambre?

SOLUCIÓN

Analizar Use la ecuación 27.7 para encontrar la corriente:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{(4.6\ \Omega/\text{m})\ell} = \frac{10\ \text{V}}{(4.6\ \Omega/\text{m})(1.0\ \text{m})} = 2.2\ \text{A}$$

Finalizar Un alambre de cobre del mismo radio tendría una resistencia por unidad de longitud de sólo 0.053 Ω/m. Una longitud de 1.0 m de alambre de cobre del mismo radio portaría la misma corriente (2.2 A) con una diferencia de potencial aplicada de sólo 0.12 V.

Debido a su alta resistividad y resistencia a la oxidación, el Nichrome se usa con frecuencia para elementos calefactores en tostadores, planchas y calentadores eléctricos.

EJEMPLO 27.3 Resistencia radial de un cable coaxial

Los cables coaxiales se usan extensamente para televisión por cable y otras aplicaciones electrónicos. Un cable coaxial consiste en dos conductores cilíndricos concéntricos. La región entre los conductores está completamente llena con polietileno, como se muestra en la figura 27.8a. Las fugas de corriente a través del polietileno, con dirección *radial*, es indeseable. (El cable se diseña para conducir corriente a lo largo de su longitud, pero esta *no* es la corriente que se considera aquí.) El radio del conductor interior es $a = 0.500$ cm, el radio del conductor exterior es $b = 1.75$ cm, y la longitud es $L = 15.0$ cm. La resistividad del polietileno es $1.0 \times 10^{13}\ \Omega \cdot \text{m}$. Calcule la resistencia del polietileno entre los dos conductores.

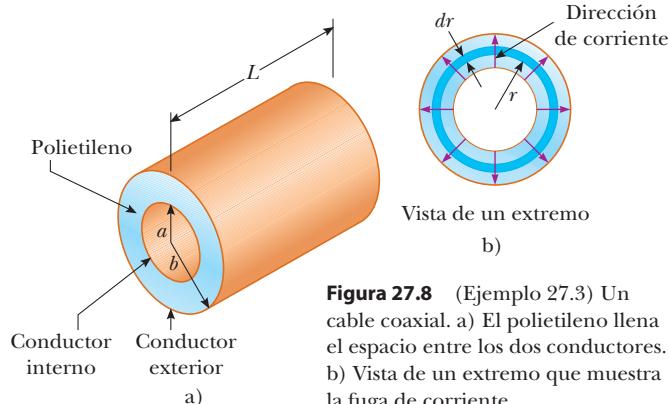



Figura 27.8 (Ejemplo 27.3) Un cable coaxial. a) El polietileno llena el espacio entre los dos conductores. b) Vista de un extremo que muestra la fuga de corriente.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine dos corrientes, como sugiere el texto del problema. La corriente deseada fluye a lo largo del cable, dentro de los conductores. La corriente indeseada corresponde a fuga de carga a través del polietileno y su dirección es radial.

Categorizar Ya que se conocen la resistividad y la geometría del polietileno, este problema se clasifica como uno en el que se encuentra la resistencia del polietileno a partir de estos parámetros, con la ecuación 27.10. Ya que el área a través de la cual pasan las cargas depende de la posición radial, debe usar cálculo integral para determinar la respuesta.

Analizar Divida el polietileno en elementos concéntricos de grosor infinitesimal dr (figura 27.8b). Use la forma diferencial de la ecuación 27.10 y sustituya ℓ con r para la distancia variable: $dR = \rho\, dr/A$, donde dR es la resistencia de un elemento de polietileno de grosor dr y área superficial A. En este ejemplo, el elemento representativo es un cilindro de polietileno hueco, concéntrico de radio r, grosor dr y longitud L, como en la figura 27.8. Cualquier carga que pase desde el conductor interior al exterior debe moverse radialmente a través de este elemento concéntrico. El área a través de la que pasa esta carga es $A = 2\pi rL$ (el área superficial curva, circunferencia multiplicada por longitud, del cilindro de polietileno hueco de grosor dr).

Escriba una expresión para la resistencia del cilindro hueco de polietileno:

$$dR = \frac{\rho}{2\pi rL}\, dr$$

Integre esta expresión de $r = a$ a $r = b$:

$$(1) \quad R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sustituya los valores conocidos:

$$R = \frac{1.0 \times 10^{13}\ \Omega\cdot\text{m}}{2\pi(0.150\ \text{m})}\ln\left(\frac{1.75\ \text{cm}}{0.500\ \text{cm}}\right) = 1.33 \times 10^{13}\ \Omega$$

Finalizar Compare esta resistencia con la del conductor de cobre interno del cable a lo largo de la longitud de 15.0 cm.

Use la ecuación 27.10 para encontrar la resistencia del cilindro de cobre:

$$R = \rho\frac{\ell}{A} = (1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m})\left[\frac{0.150\ \text{m}}{\pi(5.00 \times 10^{-3}\ \text{m})^2}\right]$$
$$= 3.2 \times 10^{-5}\ \Omega$$

Esta resistencia tiene 18 órdenes de magnitud menor que la resistencia radial. Por lo tanto, casi toda la corriente corresponde a la carga que se mueve a lo largo de la longitud del cable, con una fracción muy pequeña que se fuga en la dirección radial.

¿Qué pasaria si? Suponga que el cable coaxial se alarga al doble del diámetro global con dos posibles opciones: 1) la relación b/a se mantiene fija o 2) la diferencia $b - a$ se mantiene fija. ¿Para cuál opción la fuga de corriente entre los conductores interior y exterior aumenta cuando el voltaje es aplicado entre ellos?

Respuesta Para que la corriente aumente, la resistencia debe disminuir. Para la opción 1), en la que b/a se mantiene fija, la ecuación 1) muestra que la resistencia no se afecta. Para la opción 2), no se tiene una ecuación que involucre la diferencia $b - a$ a inspeccionar. No obstante, al observar la figura 27.8b, se ve que aumentar b y a mientras se mantiene constante el voltaje resulta en carga que fluye a través del mismo grosor de plástico, pero a través de un área perpendicular más grande, al flujo. Esta área más grande resulta en menor resistencia y mayor corriente.

27.3 Modelo de conducción eléctrica

Esta sección describe un modelo clásico de conducción eléctrica en los metales que fue propuesto por primera vez en el año 1900 por Paul Drude (1863-1906). Este modelo conduce a la ley de Ohm y muestra que la resistividad en los metales se relaciona con el movimiento de los electrones. Aunque el modelo Drude descrito en este caso tiene limitaciones, introduce conceptos que todavía se aplican en tratamientos más complejos.

Piense en un conductor como un arreglo normal de átomos más un conjunto de electrones libres, que a veces se conocen como electrones de *conducción*. Los electrones

de conducción, aunque están unidos a sus átomos respectivos cuando éstos no forman parte de un sólido, obtienen movilidad cuando los átomos libres se condensan en un sólido. En ausencia de un campo eléctrico, los electrones de conducción se mueven al azar a través del conductor con rapidez promedio del orden de 10^6 m/s (figura 27.3). Esta situación es similar al movimiento de las moléculas de un gas confinado en un recipiente. En realidad algunos científicos, se refieren a los electrones de conducción en un metal como un gas de electrones.

Cuando es aplicado un campo eléctrico, los electrones libres se arrastran lentamente en una dirección opuesta a la del campo eléctrico (figura 27.3b), con una rapidez de arrastre promedio v_d que es mucho más pequeña (típicamente 10^{-4} m/s) que su rapidez promedio entre colisiones (típicamente 10^6 m/s).

En el modelo se hacen las siguientes suposiciones:

1. El movimiento del electrón después de una colisión es independiente de su movimiento antes de la colisión.
2. La energía adquirida en exceso por los electrones en el campo eléctrico se pierde en los átomos del conductor cuando chocan electrones y átomos.

En cuanto a la suposición 2), la energía proporcionada a los átomos aumenta su energía vibratoria, lo que hace que la temperatura del conductor aumente.

Ahora se está en posición de deducir una expresión para la velocidad de arrastre. Cuando un electrón libre de masa m_e y carga $q\ (= -e)$ se somete a un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, experimenta una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$. El electrón es una partícula bajo una fuerza neta y para calcular su aceleración se utiliza la segunda ley de Newton, $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\sum \vec{\mathbf{F}}}{m} = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m_e} \qquad \textbf{(27.11)}$$

Ya que el campo eléctrico es uniforme, la aceleración del electrón es constante, de modo que el electrón se modela como una partícula bajo aceleración constante. Si $\vec{\mathbf{v}}_i$ es la velocidad inicial del electrón en el instante posterior a una colisión (que se presenta en un tiempo definido como $t = 0$), la velocidad del electrón en un tiempo muy breve t posterior (inmediatamente antes de que se presente la siguiente colisión) es, a partir de la ecuación 4.8,

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t = \vec{\mathbf{v}}_i + \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m_e}t \qquad \textbf{(27.12)}$$

Ahora tome el valor promedio de $\vec{\mathbf{v}}_f$ para todos los posibles tiempos de colisión t y todos los posibles valores de $\vec{\mathbf{v}}_i$ de los electrones en el alambre. Si supone que las velocidades iniciales están distribuidas aleatoriamente sobre todos los posibles valores, el valor promedio de $\vec{\mathbf{v}}_i$ es cero. El valor promedio del segundo término de la ecuación 27.12 es $(q\vec{\mathbf{E}}/m_e)\tau$, donde τ es el *intervalo de tiempo promedio entre colisiones sucesivas.* Ya que el valor promedio de $\vec{\mathbf{v}}_f$ es igual a la velocidad de arrastre,

$$\vec{\mathbf{v}}_{f,\text{prom}} = \vec{\mathbf{v}}_d = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m_e}\tau \qquad \textbf{(27.13)}$$

◄ Velocidad de arrastre en términos de cantidades microscópicas

El valor de τ depende del tamaño de los átomos del metal y el número de electrones por unidad de volumen. Esta expresión para la velocidad de arrastre en la ecuación 27.13 se relaciona con la corriente en el conductor. Al sustituir la magnitud de la velocidad a partir de la ecuación 27.13 en la ecuación 27.5, la densidad de corriente se convierte en

$$J = nqv_d = \frac{nq^2E}{m_e}\tau \qquad \textbf{(27.14)}$$

◄ Densidad de corriente en términos de cantidades microscópicas

donde n es el número de electrones por unidad de volumen. Al comparar esta expresión con la ley de Ohm, $J = \sigma E$, se obtienen las siguientes correspondencias para conductividad y resistividad de un conductor:

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m_e} \qquad \textbf{(27.15)}$$

◄ Conductividad en términos de cantidades microscópicas

Resistividad en términos de cantidades microscópicas

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{nq^2\tau} \tag{27.16}$$

De acuerdo con este modelo clásico, ni conductividad ni resistividad dependen de la intensidad del campo eléctrico. Esta cualidad es característica de un conductor que obedece la ley de Ohm.

27.4 Resistencia y temperatura

En un intervalo limitado de temperatura, la resistividad de un conductor varía prácticamente de manera lineal con la temperatura, de acuerdo con la expresión

Variación de ρ en función de la temperatura

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{27.17}$$

donde ρ es la resistividad a cierta temperatura T (en grados Celsius), ρ_0 la resistividad en alguna temperatura de referencia T_0 (por lo general 20°C), y α el **coeficiente de temperatura de resistividad.** A partir de la ecuación 27.17, el coeficiente de temperatura de resistividad se expresa como

Coeficiente de temperatura de resistividad

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta\rho}{\Delta T} \tag{27.18}$$

donde $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ es el cambio en la resistividad durante el intervalo de temperatura $\Delta T = T - T_0$.

Los coeficientes de temperatura de resistividad correspondientes a diferentes materiales aparecen en la tabla 27.2. Observe que la unidad de α es en grados Celsius^{-1} $[(°C)^{-1}]$. Ya que la resistencia es proporcional a la resistividad (ecuación 27.10), la variación en la resistencia de una muestra es

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{27.19}$$

donde R_0 es la resistencia a la temperatura T_0. El uso de esta propiedad permite mediciones de temperatura precisas a través del monitoreo cuidadoso de la resistencia de una sonda hecha de un material particular.

Para algunos metales, como el cobre, la resistividad casi es proporcional a la temperatura, como se muestra en la figura 27.9. Sin embargo, a temperaturas muy bajas siempre existe una región no lineal, y la resistividad usualmente alcanza algún valor finito conforme la temperatura tiende al cero absoluto. Esta resistividad residual cerca del cero absoluto se debe principalmente a la colisión de los electrones con impurezas e imperfecciones en el metal. En contraste, la resistividad de alta temperatura (la región lineal) se caracteriza predominantemente por colisiones entre electrones y átomos del metal.

Figura 27.9 Resistividad en función de la temperatura para un metal como el cobre. La curva es lineal en una amplia gama de temperaturas, y ρ aumenta al incrementarse la temperatura. Conforme T se acerca al cero absoluto (detalle), la resistividad se acerca a un valor finito ρ_0.

Observe que tres de los valores α en la tabla 27.2 son negativos, lo que indica que la resistividad de estos materiales disminuye con el aumento de temperatura. Este comportamiento indica una clase de materiales llamada *semiconductores*, introducidos por primera vez en la sección 23.2, y se debe a un aumento en la densidad de portadores de carga a temperaturas más altas.

Ya que los portadores de carga en un semiconductor con frecuencia se asocian con átomos de impurezas, la resistividad de estos materiales es muy sensible al tipo y concentración de tales impurezas.

Pregunta rápida 27.4 ¿Cuándo lleva más corriente una lámpara: a) justo inmediatamente después de haberla sido encendido y la brillantez del filamento metálico está en incremento o b) una vez que esté encendida durante unos cuantos milisegundos y la brillantez se haya estabilizado?

27.5 Superconductores

Existe una clase de metales y de compuestos cuya resistencia disminuye hasta cero cuando llegan a una cierta temperatura T_c, conocida como **temperatura crítica.** Estos materiales se conocen como **superconductores.** La gráfica resistencia-temperatura para un superconductor es similar a la de un metal normal cuando su temperatura está por arriba de T_c

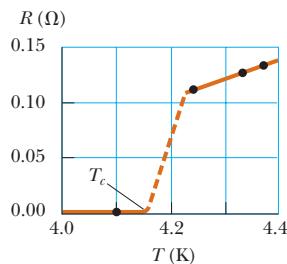
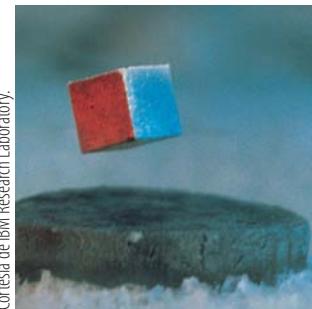



Figura 27.10 Resistencia en función de la temperatura para una muestra de mercurio (Hg). La gráfica es similar al trazo de un metal normal por encima de la temperatura crítica T_c. En el valor T_c, que para el mercurio es igual a 4.2 K, la resistencia cae a cero.

TABLA 27.3

Teperaturas críticas de varios superconductores

Material	T_c(K)
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$	134
Tl–Ba–Ca–Cu–O	125
Bi–Sr–Ca–Cu–O	105
$YBa_2Cu_3O_7$	92
Nb_3Ge	23.2
Nb_3Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Sn	3.72
Al	1.19
Zn	0.88

Pequeño imán permanente en levitación por encima de un disco del superconductor $YBa_2Cu_3O_7$, que está en nitrógeno líquido a una temperatura de 77 K.

(figura 27.10). Cuando la temperatura es T_c o inferior, la resistividad súbitamente cae hasta cero. Este fenómeno fue descubierto en 1911 por el físico holandés Heike Kamerlingh-Onnes (1853-1926) mientras trabajaba con mercurio, que es un superconductor a temperaturas inferiores a 4.2 K. Mediciones recientes han demostrado que las resistividades de los superconductores por debajo de sus valores T_c son inferiores a $4 \times 10^{-25}\ \Omega \cdot \text{m}$, es decir, alrededor de 10^{17} veces menores que la resistividad del cobre, y que en la práctica se consideran igual a cero.

Hoy día se conocen miles de superconductores, y como lo muestra la tabla 27.3, las temperaturas críticas de los superconductores recién descubiertos son mucho más elevadas de lo que se consideraba posible en un principio. Se reconocen dos tipos de superconductores, los más recientemente identificados son, en esencia, materiales cerámicos a elevadas temperaturas críticas; en tanto que los materiales superconductores, como los observados por Kamerlingh-Onnes, son metales. Si llegara a identificarse un superconductor a la temperatura ambiente, su impacto sobre la tecnología sería tremendo.

El valor de T_c es sensible a la composición química, a la presión y a la estructura molecular. Es interesante hacer notar que el cobre, la plata y el oro, que son excelentes conductores, no exhiben características de superconductividad.

Una de las características verdaderamente notables de los superconductores es que una vez que se ha establecido en ellos una corriente, persiste *sin necesidad de una diferencia de potencial aplicada* (ya que $R = 0$). Se han observado corrientes estables que persisten en circuitos superconductores durante varios años ¡sin un decaimiento!

Una aplicación importante y útil de la superconductividad es el desarrollo de imanes superconductores, en los cuales las magnitudes del campo magnético son aproximadamente diez veces mayores a las producidas por los mejores electroimanes normales. Es posible utilizar estos imanes superconductores como medio para almacenar energía. Los imanes superconductores están siendo utilizados actualmente en unidades para la obtención de imágenes por resonancia magnética en el campo de la medicina (MRI, *magnetic resonance imaging*), que producen imágenes de alta calidad de los órganos internos sin necesidad de una excesiva exposición de los pacientes a los rayos X o a otras radiaciones dañinas.

27.6 Potencia eléctrica

En los circuitos eléctricos típicos, la energía se transfiere de una fuente, como una batería, a algún dispositivo, como sería una lámpara o un receptor de radio. Por ello conviene determinar una expresión que permita calcular la rapidez de transferencia de esta energía. Primero, imagine el sencillo circuito de la figura 27.11 (página 764), donde se entrega energía a un resistor. (En los diagramas de circuito los resistores se representan mediante el símbolo ——/\/\/——.) Ya que los alambres de conexión también tienen

Figura 27.11 Circuito constituido por un resistor de resistencia R y una batería con una diferencia de potencial ΔV entre sus terminales. La carga positiva fluye en dirección de las manecillas del reloj.

resistencia, parte de la energía es entregada a los alambres y parte al resistor. A menos que se especifique lo contrario, suponga que la resistencia de los alambres es tan reducida en comparación con la resistencia del elemento de circuito, así que la energía suministrada a los alambres es despreciable.

Imagine la trayectoria de una carga Q positiva en dirección de las manecillas del reloj alrededor del circuito de la figura 27.11 desde el punto *a*, a través de la batería, del resistor y de regreso al punto *a*, considere al circuito como un sistema. Conforme la carga se mueve de *a* a *b* a través de la batería, la energía potencial eléctrica del sistema *aumenta* en una cantidad $Q\,\Delta V$, en tanto que la energía potencial química de la batería *se reduce* en la misma cantidad. (Recuerde por la ecuación 25.3 que $\Delta U = q\,\Delta V$.) Sin embargo, conforme la carga se mueve de *c* a *d* a través del resistor el sistema *pierde* esta energía potencial eléctrica durante las colisiones de los electrones con los átomos del resistor. En este proceso, la energía se transforma en energía interna que corresponde a un incremento en el movimiento de vibración de los átomos en el resistor. Puesto que ha despreciado la resistencia de los alambres de conexión, no se presenta ninguna transformación en las trayectorias *bc* y *da*. Cuando la carga regresa al punto *a*, el resultado neto es que parte de la energía química de la batería ha sido entregada al resistor y está presente en este último en forma de energía interna asociada con una vibración de las moléculas.

El resistor normalmente está en contacto con el aire, de este modo su temperatura aumentada da como resultado una transferencia de energía por calor hacia el aire. Además, el resistor emite una radiación térmica, lo que representa otro modo de escape de la energía. Después de algún tiempo transcurrido, el resistor alcanza una temperatura constante, momento en el cual la energía de entrada de la batería está equilibrada con la energía de salida por calor y radiación. Algunos dispositivos eléctricos incluyen *absorbedores de calor*[4] conectados a ciertas partes del circuito, a fin de impedir que estas partes alcancen temperaturas peligrosamente altas. Estos absorbedores son piezas metálicas con muchas aletas. La elevada conductividad térmica del metal causa una rápida transferencia de energía por calor lejos del componente caliente, el gran número de aletas proporciona una gran superficie que entra en contacto con el aire, por lo que la energía se puede transferir al aire por radiación y por convección en grandes proporciones.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.5

Las cargas no se mueven alrededor de todo el circuito en un breve periodo

Debido a la magnitud pequeña de la velocidad de arrastre, podrían pasar *horas* para que un electrón individual efectúe un recorrido completo alrededor del circuito. Para comprender la transferencia de energía en un circuito, resulta útil *imaginar* una carga moviéndose alrededor de todo el circuito.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.6

Mala interpretación del concepto de corriente

En un circuito como el de la figura 27.11 se presentan varias malas interpretaciones comunes asociadas con el concepto de corriente. Una es que la corriente sale de una de las terminales de la batería y es "consumida" conforme pasa por el resistor, dejando corriente sólo en una parte del circuito. La verdad es que la corriente es la misma en *cualquier sitio* en el circuito. Otra mala interpretación es que la corriente que sale del resistor es menor que la que entró, puesto que parte de la corriente fue "consumida". La interpretación de que la corriente sale de ambas terminales de la batería, en sentidos opuestos, y después "choca" en el resistor, entregando así la energía es también incorrecta. El caso es que las cargas fluyen en el mismo sentido de rotación en *todos* los puntos del circuito.

Considere ahora la rapidez a la cual el sistema pierde energía potencial eléctrica conforme la carga Q pasa a través del resistor:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\,\Delta V) = \frac{dQ}{dt}\,\Delta V = I\,\Delta V$$

donde I es la corriente en el circuito. El sistema recupera su energía potencial cuando la carga pasa a través de la batería, a expensas de la energía química de la misma. La rapidez a la cual el sistema pierde energía potencial conforme la carga pasa a través del resistor es igual a la rapidez a la cual el sistema adquiere energía interna en el resistor. Por lo tanto, la potencia $\mathcal{P}$, que representa la rapidez a la cual se entrega energía al resistor, es

$$\mathcal{P} = I\,\Delta V \tag{27.20}$$

Se deduce este resultado si considera una batería que entrega energía a un resistor. Sin embargo, la ecuación 27.20 puede utilizarse para calcular la potencia entregada por una fuente de voltaje a *cualquier* dispositivo que tenga una corriente I y esté sujeto a una diferencia de potencial ΔV entre sus terminales.

Con la ecuación 27.22, y apartir de que un resistor $\Delta V = IR$, la potencia entregada al resistor tiene una expresión alterna

$$\mathcal{P} = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R} \tag{27.21}$$

[4] Esta es otra mala interpretación de la palabra *calor*, que ya está profundamente arraigada en nuestro lenguaje cotidiano.

Cuando I se expresa en amperes, ΔV en volts y R en ohms, la unidad del SI para la potencia es el watt, como se estableció en el capítulo 8 en el análisis sobre la potencia mecánica. El proceso mediante el que se pierde potencia en forma de energía interna en un conductor de resistencia R, a menudo se llama *calentamiento joule*;[5] esta transformación también es conocida como una pérdida I^2R.

Cuando se transporta energía mediante la electricidad a través de las líneas de transmisión, como las que aparecen en la fotografía al inicio de este capítulo, usted no debe suponer que las líneas no tienen resistencia. Las líneas de transmisión tienen resistencia, y se entrega potencia a la resistencia de esos alambres. Las compañías eléctricas buscan minimizar la energía transformada a energía interna en las líneas y maximizar la energía entregada al consumidor. Ya que $\mathcal{P} = I\Delta V$, la misma cantidad de energía puede ser transportada ya sea a corrientes intensas y bajas diferencias de potencial o corrientes débiles y elevadas diferencias de potencial. Las empresas eléctricas prefieren transportar la energía a corrientes débiles y elevadas diferencias de potencial principalmente por razones económicas. El alambre de cobre es muy costoso, por lo que resulta más económico utilizar un alambre de elevada resistencia (es decir, un alambre de un área de sección transversal reducida; vea la ecuación 27.10). Debido a eso, en la expresión de la potencia entregada a un resistor $\mathcal{P} = I^2R$, la resistencia del alambre se fija en un valor relativamente alto debido a consideraciones de tipo económico. La pérdida I^2R puede reducirse manteniendo la corriente I tan pequeña como sea posible, lo que quiere decir que se deberá transferir la energía a un voltaje elevado. En algunos casos, la energía es transportada en diferencias de potencial de 765 kV o más. Una vez que la electricidad llega a su destino, la diferencia de potencial se reduce a 4 kV mediante un *transformador*. Otro transformador reduce la diferencia de potencial hasta 240 V antes de que finalmente la electricidad llegue a su hogar. Naturalmente, cada vez que se reduce la diferencia de potencial, la corriente aumenta en el mismo factor, y conserva una misma energía. El análisis de los transformadores se da con mayor detalle en el capítulo 33.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.7

La energía no se "disipa"

En algunos libros, es posible que la ecuación 27.21 sea descrita como la potencia "disipada" en un resistor, lo que sugiere que la energía desaparece. Lo correcto es decir que la energía "es entregada a" un resistor. El concepto de *disipación* se debe a que un resistor caliente expele energía por radiación y por convección, así, la energía que ha sido entregada por la batería sale del circuito (¡pero no desaparece!).

Pregunta rápida 27.5 De los dos focos que se muestran en la figura 27.12, clasifique los valores de corriente de los puntos a a f, de mayor a menor.

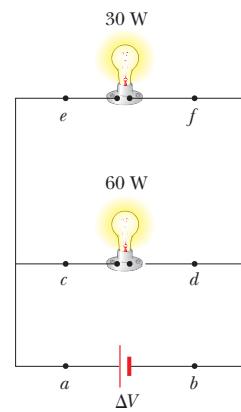



Figura 27.12 (Pregunta rápida 27.5) Dos lámparas conectadas a una misma diferencia de potencial.

EJEMPLO 27.4 Energía en un calentador eléctrico

Un calentador eléctrico se construye al aplicar una diferencia de potencial de 120 V a través de un alambre de nicromo que tiene una resistencia total de 8.00 Ω. Encuentre la corriente conducida por el alambre y la potencia de especificación del calentador.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Como se discutió en el ejemplo 27.2, el alambre de nicromo tiene alta resistividad y se usa para elementos calefactores en tostadores, planchas y calentadores eléctricos. Por lo tanto, se espera que la potencia entregada al alambre sea relativamente alta.

Categorizar Se evalúa la potencia a partir de la ecuación 27.21, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 27.7 para encontrar la corriente en el alambre:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{120\text{ V}}{8.00\ \Omega} = \boxed{15.0\text{ A}}$$

Hallar la potencia nominal con la expresión $\mathcal{P} = I^2R$ de la ecuación 27.21:

$$\mathcal{P} = I^2R = (15.0\text{ A})^2(8.00\ \Omega) = 1.80 \times 10^3\text{ W} = \boxed{1.80\text{ kW}}$$

¿Qué pasaria si? ¿Y si accidentalmente el calentador se conectara a una fuente de 240 V? (Difícil de hacerlo, porque la forma y orientación de los contactos metálicos en las clavijas de 240 V son diferentes en las clavijas de 120 V.) ¿Cómo afectaría esto a la corriente conducida por el calentador y a la potencia de especificación del calentador?

[5] Comúnmente se conoce como *calentamiento joule,* aun cuando en realidad no ocurre un proceso de calentamiento cuando la energía entregada a un resistor aparece como energía interna. Este es otro ejemplo del uso incorrecto de la palabra *calor* que se ha acuñado en el lenguaje.

Respuesta Al duplicar la diferencia de potencial aplicada, la ecuación 27.7 muestra que la corriente se duplicaría. De acuerdo con la ecuación 27.21, $\mathcal{P} = (\Delta V)^2/R$, la potencia sería cuatro veces mayor.

EJEMPLO 27.5 Vinculación entre electricidad y termodinámica

Un calentador de inmersión debe aumentar la temperatura de 1.50 kg de agua de 10.0°C a 50.0°C en 10.0 min, mientras funciona a 110 V.

A) ¿Cuál es la resistencia requerida del calentador?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Un calentador de inmersión es un resistor que se inserta en un contenedor de agua. Conforme se entrega energía al calentador de inmersión, lo que eleva su temperatura, la energía deja la superficie del resistor por calor y va al agua. Cuando el calentador de inmersión alcanza una temperatura constante, la cantidad de energía entregada a la resistencia por transmisión eléctrica es igual a la cantidad de energía entregada por calor al agua.

Categorizar Este ejemplo permite vincular la nueva comprensión de la potencia en la electricidad con la experiencia con el calor específico de la termodinámica (capítulo 20). El agua es un sistema no aislado y su energía interna se eleva debido a la energía transferida al agua por calor proveniente del resistor: $\Delta E_{\text{int}} = Q$. En el modelo, se supone que la energía que entra al agua desde el calentador permanece en el agua.

Analizar Para simplificar el análisis, ignore el periodo inicial durante el cual la temperatura del resistor aumenta e ignore también cualquier variación de la resistencia con la temperatura. En consecuencia, imagine una proporción constante de transferencia de energía durante los 10.0 min.

Iguale la cantidad de energía entregada al resistor con la cantidad de energía Q que entra al agua por calor:

$$\mathcal{P} = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{Q}{\Delta t}$$

Use la ecuación 20.4, $Q = mc\,\Delta T$, para relacionar la entrada de energía por calor al cambio de temperatura resultante del agua y resuelva para la resistencia:

$$\frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{mc\,\Delta T}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad R = \frac{(\Delta V)^2 \Delta t}{mc\,\Delta T}$$

Sustituya los valores conocidos en el enunciado del problema:

$$R = \frac{(110\text{ V})^2(600\text{ s})}{(1.50\text{ kg})(4186\text{ J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(50.0^\circ\text{C} - 10.0^\circ\text{C})} = \boxed{28.9\ \Omega}$$

B) Estime el costo de calentar el agua.

SOLUCIÓN

Multiplique la potencia por el intervalo de tiempo para encontrar la cantidad de energía transferida:

$$\mathcal{P}\,\Delta t = \frac{(\Delta V)^2}{R}\Delta t = \frac{(110\text{ V})^2}{28.9\ \Omega}(10.0\text{ min})\left(\frac{1\text{ h}}{60.0\text{ min}}\right)$$
$$= 69.8\text{ Wh} = 0.069\,8\text{ kWh}$$

Encuentre el costo al saber que la energía se compra a un precio estimado de 10¢ por kilowatt-hora:

$$\text{Costo} = (0.069\,8\text{ kWh})(\$0.1/\text{kWh}) = \$0.007 = \boxed{0.7¢}$$

Finalizar El costo de calentar el agua es muy bajo, menos de un centavo. En realidad, el costo es mayor porque parte de la energía se transfiere del agua a los alrededores mediante calor y radiación electromagnética mientras su temperatura aumenta. Si los aparatos eléctricos que tiene en casa tienen la potencia nominal en ellas, apliquelas y establezca un intervalo de tiempo aproximado de uso para estimar el costo para uso del dispositivo.

Resumen

DEFINICIONES

La **corriente** eléctrica I en un conductor se define como

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} \quad \textbf{(27.2)}$$

donde dQ es la carga que pasa a través de una sección transversal del conductor en un intervalo de tiempo dt. La unidad del SI para corriente es el **ampere** (A), donde 1 A = 1 C/s.

La **densidad de corriente** J en un conductor es la corriente por unidad de área:

$$J \equiv \frac{I}{A} \quad \textbf{(27.5)}$$

La **resistencia** R de un conductor se define como

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I} \quad \textbf{(27.7)}$$

donde ΔV es la diferencia de potencial a través de él e I es la corriente que conduce. La unidad del SI para resistencia es volts por ampere, que se define como 1 **ohm** (Ω); es decir: $1\ \Omega = 1$ V/A.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La corriente promedio en un conductor se relaciona con el movimiento de los portadores de carga mediante la correspondencia

$$I_{\text{prom}} = nqv_dA \quad \textbf{(27.4)}$$

donde n es la densidad de portadores de carga, q es la carga en cada portador, v_d es la rapidez de arrastre y A es el área de sección transversal del conductor.

La densidad de corriente en un conductor óhmico es proporcional al campo eléctrico de acuerdo con la expresión

$$J = \sigma E \quad \textbf{(27.6)}$$

La constante de proporcionalidad σ es la **conductividad** del material del conductor. El inverso de σ se conoce como **resistividad** ρ (esto es, $\rho = 1/\sigma$). La ecuación 27.6 se conoce como **ley de Ohm**, y un material obedece esta ley si la relación de su densidad de corriente a su campo eléctrico aplicado es una constante independiente del campo aplicado.

Para un bloque uniforme de material, con área de sección transversal A y longitud ℓ, la resistencia en toda la longitud ℓ es

$$R = \rho\frac{\ell}{A} \quad \textbf{(27.10)}$$

donde ρ es la resistividad del material.

En un modelo clásico de conducción eléctrica en metales, los electrones se tratan como moléculas de un gas. En ausencia de un campo eléctrico, la velocidad promedio de los electrones es cero. Cuando se aplica un campo eléctrico, los electrones se mueven (en promedio) con una **velocidad de arrastre** $\vec{\mathbf{v}}_d$ que es opuesta al campo eléctrico. La velocidad de arrastre está dada por

$$\vec{\mathbf{v}}_d = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m_e}\tau \quad \textbf{(27.13)}$$

donde q es la carga del electrón, m_e es la masa del electrón y τ es el intervalo de tiempo promedio entre colisiones electrón-átomo. De acuerdo con este modelo, la resistividad del metal es

$$\rho = \frac{m_e}{nq^2\tau} \quad \textbf{(27.16)}$$

donde n es el número de electrones libres por unidad de volumen.

La resistividad de un conductor varía de manera aproximadamente lineal con la temperatura, de acuerdo con la expresión

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad \textbf{(27.17)}$$

donde ρ_0 es la resistividad a cierta temperatura de referencia T_0 y α es el **coeficiente de temperatura de resistividad**.

Si a través de un elemento de circuito se mantiene una diferencia de potencial ΔV, la **potencia**, o proporción a la que se suministra energía al elemento, es

$$\mathcal{P} = I\Delta V \quad \textbf{(27.20)}$$

Ya que la diferencia de potencial a través de un resistor es conocido por $\Delta V = IR$, la potencia entregada al resistor se expresa como

$$\mathcal{P} = I^2R = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad \textbf{(27.21)}$$

La energía entregada a un resistor por transmisión eléctrica aparece en la forma de energía interna en el resistor.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. A menudo los artículos periodísticos contienen afirmaciones como la siguiente: "pasaron 10 000 volts de electricidad a través del cuerpo de la víctima". ¿Qué es lo incorrecto en esta frase?
2. ¿Cuáles son los factores que afectan la resistencia de un conductor?
3. **O** Dos alambres A y B con secciones transversales circulares elaborados del mismo metal tienen iguales longitudes, pero la resistencia del alambre A es tres veces mayor que la del alambre B. **i)** ¿Cuál es la relación del área de sección transversal de A a la de B? a) 9, b) 3, c) $\sqrt{3}$, d) 1, e) $1/\sqrt{3}$, f) $\frac{1}{3}$, g) $\frac{1}{9}$, h) ninguna de estas respuestas necesariamente es verdadera. **ii)** ¿Cuál es la relación de los radios de A al de B? Elija entre las mismas posibilidades.
4. **O** Un alambre metálico de resistencia R es cortado en tres piezas iguales que después se trenzan lado a lado para formar un nuevo cable con una longitud igual a un tercio la longitud original. ¿Cuál es la resistencia de este nuevo alambre? a) $R/27$, b) $R/9$, c) $R/3$, d) R, e) $3R$, f) $9R$, g) $27R$.
5. Al duplicar la diferencia de potencial aplicada a cierto conductor, se observa que la corriente aumenta en un factor igual a tres. ¿Qué puede deducir del conductor?
6. Utilice la teoría atómica de la materia para explicar por qué la resistencia de un material se incrementa conforme aumenta su temperatura.
7. **O** Un alambre de metal óhmico es portador de corriente y tiene un área de sección transversal que a partir de un extremo del alambre gradualmente se vuelve más pequeña. La corriente tiene el mismo valor para cada sección del alambre, así que la carga no se acumula en algún punto. **i)** ¿Cómo varía la rapidez de arrastre a lo largo del alambre conforme el área se vuelve más pequeña? a) Aumenta. b) Disminuye. c) Permanece constante. **ii)** ¿Cómo varía la resistencia por unidad de longitud a lo largo del alambre conforme el área se vuelve más pequeña? Elija entre las mismas posibilidades.
8. ¿De qué forma cambia la resistencia del cobre y del silicio en función de la temperatura? ¿Por qué estos dos materiales tienen comportamientos diferentes?
9. Durante el intervalo de tiempo después de que se aplica una diferencia de potencial entre los extremos de un alambre, ¿qué ocurriría con la velocidad de arrastre de los electrones en un alambre y a la corriente en el alambre, si los electrones pudieran moverse libremente sin resistencia a través del alambre?
10. Si las cargas circulan muy lentamente a través de un metal, ¿por qué no es necesario que pasen horas para que se encienda una luz cuando usted activa el interruptor?
11. **O** Un alambre metálico y cilíndrico a temperatura ambiente conduce corriente eléctrica entre sus extremos. Un extremo está a un potencial $V_A = 50$ V, y el otro a un potencial $V_B = 0$ V. Clasifique las siguientes acciones en términos del cambio que cada uno produciría por separado en la corriente, del mayor aumento a la mayor disminución. En su clasificación, señale cualquier caso de igualdad. a) Considere $V_A = 150$ V con $V_B = 0$ V. b) Haga $V_A = 150$ V con $V_B = 100$ V. c) Ajuste V_A para triplicar la potencia con que el alambre convierte la energía eléctricamente transmitida en energía interna. d) Duplique el radio del alambre. e) Duplique la longitud del alambre. f) Duplique la temperatura Celsius del alambre. g) Cambie el material a un aislador.
12. **O** Dos conductores hechos del mismo material son conectados a través de la misma diferencia de potencial. El conductor A tiene el doble de diámetro y el doble de longitud que el conductor B. ¿Cuál es la relación de la potencia entregada a A, a la potencia entregada a B? a) 32, b) 16, c) 8, d) 4, e) 2, f) 1, g) $\frac{1}{2}$, h) $\frac{1}{4}$.
13. **O** Dos alambres conductores A y B, con la misma longitud y radio, son conectados a la misma diferencia de potencial. El conductor A tiene el doble de resistividad del conductor B. ¿Cuál es la relación de la potencia entregada a A, a la potencia entregada a B? a) 4, b) 2, c) $\sqrt{2}$, d) 1, e) $1/\sqrt{2}$, f) $\frac{1}{2}$, g) $\frac{1}{4}$, h) ninguna de estas respuestas necesariamente es correcta.
14. **O** Dos focos funcionan a partir de 120 V. Uno tiene una potencia de 25 W y la otra de 100 W. **i)** ¿Cuál foco tiene mayor resistencia? a) El foco débil de 25 W. b) La brillante lámpara de 100 W. c) Ambas tienen la misma. **ii)** ¿Cuál foco conduce más corriente? Elija entre las mismas posibilidades.
15. Las baterías de los automóviles están especificadas en ampere-hora. ¿Esta información designa a) la corriente, b) la potencia, c) la energía, d) la carga, o e) el potencial que se puede obtener de la batería?
16. Si tuviera que diseñar un calentador eléctrico utilizando alambre de nicromo como elemento calefactor, ¿qué parámetros del alambre deben modificarse para cumplir con una potencia de salida específica, como por ejemplo 1000 W?

Problemas

Sección 27.1 Corriente eléctrica

1. En un tubo de rayos catódicos, la corriente medida en el haz es de 30.0 μA. ¿Cuántos electrones chocan contra la pantalla del tubo cada 40.0 s?
2. Una tetera con un área superficial de 700 cm^2 que debe recubrirse de plata por electrodeposición, se fija al electrodo negativo de una celda electrolítica que contiene nitrato de plata ($Ag^+ NO_3^-$). Si la celda está alimentada por una batería

de 12.0 V y tiene una resistencia de 1.80 Ω, ¿en cuánto tiempo se formará sobre la tetera una capa de plata de 0.133 mm de espesor? (La densidad de la plata es 10.5×10^3 kg/m^3.)

3. Suponga que la corriente que pasa por un conductor se reduce de manera exponencial en función del tiempo, de acuerdo con la ecuación $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, donde I_0 es la corriente inicial (en $t = 0$), y τ es una constante que tiene dimensiones de tiempo. Considere un punto de observación fijo dentro del conductor. a) ¿Cuánta carga pasa por este punto en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = \tau$? b) ¿Cuánta carga pasa por este punto en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = 10\tau$? c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánta carga pasa por este punto en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = \infty$?

4. Una esfera pequeña que tiene una carga q se hace girar en círculo en el extremo de un hilo aislante. La frecuencia angular de rotación es ω. ¿Qué corriente promedio representa esta carga en rotación?

5. La cantidad de carga q (en coulombs) que ha pasado a través de una superficie de área igual a 2.00 cm^2 varía en función del tiempo según la ecuación $q = 4t^3 + 5t + 6$, donde t está en segundos. a) ¿Cuál es la corriente instantánea que pasa a través de la superficie en $t = 1.00$ s? b) ¿Cuál es el valor de la densidad de corriente?

6. Una corriente eléctrica está definida por la expresión $I(t) = 100$ sen $(120\ \pi t)$, donde I está en amperes y t en segundos. ¿Cuál es la carga total que genera esta corriente de $t = 0$ hasta $t = (1/240)$ s?

7. El haz de electrones que sale de cierto acelerador de electrones de alta energía tiene una sección transversal circular con un radio de 1.00 mm. a) La corriente del haz es de 8.00 μA. Determine la densidad de corriente en el haz, si es uniforme en todos sus puntos. b) La rapidez de los electrones es tan cercana a la rapidez de la luz que su rapidez se puede tomar sin un error apreciable como 300 Mm/s. Encuentra la densidad del electrón en el haz. c) ¿Cuánto tiempo se necesita para que emerja el número de Avogadro de electrones del acelerador?

8. ● La figura P27.8 representa una sección de un conductor circular de diámetro no uniforme que porta una corriente de 5.00 A. El radio de la sección transversal A_1 es 0.400 cm. a) ¿Cuál es la magnitud de la densidad de corriente a través de A_1? b) ¿El radio en A_2 es mayor que el radio en A_1?. ¿La corriente en A_2 es mayor, menor o igual? ¿La densidad de corriene es mayor, menor o la misma? Suponga que una de estas dos cantidades es diferente en A_2 en un factor de 4 de su valor en A_1. Especifique la corriente, la densidad de corriente y el radio en A_2.

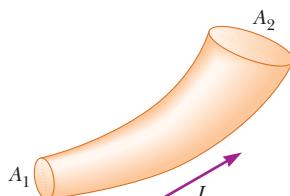



Figura P27.8

9. Un generador Van de Graaff produce un haz de 2.00 MeV de deuterones, que son los núcleos pesados de hidrógeno que contienen un neutrón y un protón. a) Si la corriente del haz es de 10.0 μA, ¿qué tan separados están los deuterones? b) ¿Es un factor significativo en la estabilidad del haz la fuerza de repulsión eléctrica presente entre ellos? Explique por qué.

10. Un alambre de aluminio de sección transversal de 4.00×10^{-6} m^2 transporta una corriente de 5.00 A. Determine la velocidad de arrastre de los electrones en el alambre. La rapidez del aluminio es de 2.70 g/cm^3. Suponga que cada átomo de aluminio aporta un electrón de conducción.

Sección 27.2 Resistencia

11. Una diferencia de potencial de 0.900 V se mantiene a través de una longitud de 1.50 m de alambre de tungsteno que tiene un área de sección transversal de 0.600 mm^2. ¿Cuál es la corriente en el alambre?

12. Un foco tiene una resistencia de 240 Ω cuando está funcionando con una diferencia de potencial de 120 V. ¿Cuál es la corriente que pasa por el foco?

13. Suponga que desea fabricar un alambre uniforme a partir de 1.00 g de cobre. Si el alambre debe tener una resistencia $R = 0.500$ Ω, y si debe utilizarse todo el cobre disponible, ¿cuál será a) la longitud y b) el diámetro de este alambre?

14. a). Estime el valor de la magnitud de la resistencia entre los extremos de una banda elástica. b) Estime el valor de la magnitud de la resistencia entre los lados "cara" y "cruz" de una moneda de un centavo. Proporcione las cantidades que toma como datos y los valores que mida o estime para cada caso. c) ¡PRECAUCIÓN! ¡No intente hacer esto en su casa! ¿Cuál sería el valor de la magnitud de la corriente que existiría en cada uno si estuvieran conectadas a una fuente de alimentación de 120 V?

15. En la atmósfera de una ubicación donde el campo eléctrico es de 100 V/m, existe una densidad de corriente de 6.00×10^{-13} A/m^2. Calcule la conductividad eléctrica de la atmósfera de la Tierra en esa región.

Sección 27.3 Modelo de conducción eléctrica

16. Si se duplica la corriente en un conductor, ¿qué sucede con a) la densidad de los portadores de carga, b) la densidad de la corriente, c) la velocidad de arrastre de los electrones, d) el intervalo promedio de tiempo entre las colisiones? Explique sus respuestas.

17. Si en un alambre de cobre la magnitud de la velocidad de arrastre de los electrones libres es de 7.84×10^{-4} m/s, ¿cuál es el campo eléctrico en el conductor?

Sección 27.4 Resistencia y temperatura

18. Cierto foco tiene un filamento de tungsteno con una resistencia de 19.0 Ω cuando está frío y de 140 Ω cuando está caliente. Suponga que la resistividad del tungsteno varía linealmente con la temperatura, incluso en el amplio intervalo de temperaturas que aquí se mencionan. Determine la temperatura del filamento caliente. Suponga que la temperatura inicial es de 20.0°C.

19. Un alambre de aluminio con un diámetro de 0.100 mm tiene aplicado en toda su longitud un campo eléctrico uniforme de 0.200 V/m. La temperatura del alambre es de 50.0°C. Suponga que sólo existe un electrón libre por cada átomo. a) Utilice la información de la tabla 27.2 y determine la resistividad. b) ¿Cuál es la densidad de corriente en el alambre? c) ¿Cuál es la corriente total en el alambre? d) ¿Cuál es la rapidez de arrastre de los electrones de conducción? e) ¿Cuál es la diferen-

cia de potencial que debe existir entre los extremos de un de alambre 2.00 m de longitud para producir el campo eléctrico establecido?

20. Una ingeniera necesita un resistor con coeficiente de resistencia de temperatura global cero a 20°C. Ella diseña un par de cilindros circulares, uno de carbono y el otro de nicromo, como se muestra en la figura P27.20. El dispositivo debe tener una resistencia global de $R_1 + R_2 = 10.0\ \Omega$, independiente de la temperatura y un radio uniforme de $r = 1.50$ mm. ¿Puede satisfacer las metas de diseño con este método? Si es así, establezca lo que pueda determinar acerca de las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 de cada segmento. Ignore la expansión térmica de los cilindros y suponga que ambos siempre están a la misma temperatura.

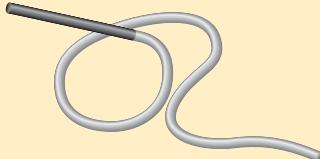



Figura P27.20

21. ¿Cuál es el cambio fraccionario en la resistencia de un filamento de hierro cuando su temperatura pasa de 25.0°C a 50.0°C?

22. **Problema de repaso.** Una varilla de aluminio tiene una resistencia de 1.234 Ω a 20.0°C. Calcule la resistencia de la varilla a 120°C, considere los cambios tanto en las resistividades como en las dimensiones de la varilla.

Sección 27.6 Energía eléctrica

23. Un tostador es especificado en 600 W al conectarse a una alimentación de 120 V. ¿Cuál es la corriente en el tostador y cuál es su resistencia?

24. Un generador Van de Graaff (vea la figura 25.24) está funcionando de forma tal que la diferencia de potencial entre el electrodo de alto potencial Ⓑ y las agujas de carga en Ⓐ es de 15.0 kV. Calcule la energía necesaria para impulsar la banda en contra de fuerzas eléctricas en un instante en el cual la corriente efectiva entregada al electrodo de alto potencial es de 500 μA.

25. Un calentador eléctrico de agua bien aislado calienta 109 kg de agua de 20.0°C a 49.0°C en 25.0 min. Encuentre la resistencia de su elemento calefactor, que se conecta a través de una diferencia de potencial de 220 V.

26. Un motor de 120 V tiene potencia de salida mecánica de 2.50 hp. Es 90.0% eficiente al convertir la potencia que toma por transmisión eléctrica en potencia mecánica. a) Encuentre la corriente en el motor. b) Encuentre la energía entregada al motor mediante transmisión eléctrica en 3.00 h de operación. c) Si la compañía eléctrica carga $0.160/kWh, ¿cuánto cuesta que funcione el motor durante 3.00 h?

27. Suponga que una oscilación de voltaje produce durante un momento 140 V. ¿En qué porcentaje se incrementa la potencia de salida de una lámpara de 120 V, 100 W? Suponga que su resistencia no cambia.

28. Una batería recargable de 15.0 g de masa suministra una corriente promedio de 18.0 mA a 1.60 V a un reproductor de CD durante 2.40 h antes de que dicha batería necesite recargarse. El cargador mantiene una diferencia de potencial de 2.30 V en las terminales de la batería y entrega una corriente de carga de 13.5 mA durante 4.20 h. a) ¿Cuál es la eficiencia de la batería como dispositivo de almacenamiento de energía? b) ¿Cuánta energía interna se produce en el interior de la batería durante un ciclo de carga-descarga? c) Si la batería está rodeada por un aislamiento térmico ideal y tiene un calor específico efectivo global de 975 J/kg · °C, ¿cuánto aumentará su temperatura durante el ciclo?

29. Una bobina calefactora de 500 W, diseñada para funcionar a 110 V, está hecha de alambre de nicromo de 0.500 mm de diámetro. a) Si la resistividad del nicromo se mantiene constante a 20.0°C, determine la longitud del alambre utilizado. b) **¿Qué pasaría si?** Ahora considere la variación de la resistividad en función de la temperatura. ¿Cuál será la potencia que se da a la bobina del inciso a) cuando se calienta a 1200°C?

30. Una bobina de alambre de nicromo tiene 25.0 m de largo. El alambre tiene un diámetro de 0.400 mm y está a 20.0°C. Si el alambre transporta una corriente de 0.500 A, ¿cuáles son a) la magnitud del campo eléctrico en el alambre y b) la potencia entregada? c) **¿Qué pasaría si?** Si la temperatura se incrementa hasta 340°C y la diferencia de potencial aplicada al alambre se mantiene constante, ¿cuál es la potencia entregada?

31. Las baterías se especifican en ampere-hora (A · h). Por ejemplo, una batería que puede producir una corriente de 2.00 A durante 3.00 h se especifica como 6.0 A · h. a) ¿Cuál es la energía total, en kilowatt-horas, almacenada en una batería de 12.0 V, nominalmente de 55.0 A · h? b) A $0.060 por kilowatt-hora, ¿cuál es el valor de la electricidad producida por esta batería?

32. ● Los reglamentos de construcción para residencias requieren el uso de alambre de cobre calibre 12 (diámetro 0.205 3 cm) para cablear los contactos de pared. Estos circuitos llevan corrientes de hasta 20 A. Un alambre con un diámetro menor (de un calibre superior), podría llevar una corriente similar, pero el alambre se podría calentar a una temperatura elevada y causar un incendio. a) Calcule la rapidez a la cual se produce energía interna en 1.00 m de alambre de cobre calibre 12 que lleva una corriente de 20.0 A. b) **¿Qué pasaría si?** Repita el cálculo, pero para un alambre de aluminio. Explique si un alambre de aluminio calibre 12 sería tan seguro como el de cobre.

33. Un lámpara fluorescente ahorradora de energía de 11.0 W está diseñada para producir la misma iluminación que una lámpara incandescente convencional de 40 W. ¿Cuánto ahorra el usuario de la lámpara ahorradora de energía durante 100 horas de uso? Suponga que la compañía eléctrica cobra $0.080/kWh.

34. Se estima que en Estados Unidos existen 270 millones de relojes de conexión eléctrica, es decir, aproximadamente un reloj por persona. Los relojes convierten energía a una rapidez promedio de 2.50 W. Para suministrar esta energía, ¿cuántas toneladas métricas de carbón se queman por hora en las plantas generadoras eléctricas de carbón, que son, en promedio, 25% eficientes? El calor de la combustión para el carbón es de 33 MJ/kg.

35. Calcule el costo diario de operación de una lámpara que toma una corriente de 1.70 A de una línea de 110 V. Suponga que el costo de esta energía es de $0.060 0/kWh.

36. **Problema de repaso.** El elemento calefactor de una cafetera opera a 120 V y tiene una corriente de 2.00 A. Si el agua absorbe toda la energía suministrada al resistor, calcule el tiempo que se necesita para elevar la temperatura de 0.500 kg de agua de la temperatura ambiente (23.0°C) hasta el punto de ebullición.

37. Cierto tostador tiene un elemento calefactor hecho de alambre de nicromo. Cuando se le conecta por primera vez a una alimentación de 120 V (estando el alambre a una temperatura

de 20.0°C), la corriente inicial es de 1.80 A. Sin embargo, la corriente empieza a reducirse conforme el elemento calefactor se calienta. Cuando el tostador alcanza su temperatura de operación final, la corriente se ha reducido a 1.53 A. a) Determine la potencia entregada al tostador cuando está a su temperatura de operación. b) ¿Cuál es la temperatura final del elemento calefactor?

38. El costo de la electricidad varía ampliamente en Estados Unidos; un valor representativo es \$0.120/kWh. Con este precio unitario, calcule el costo de a) dejar encendida la luz de 40 W del pórtico de una casa durante dos semanas mientras el propietario está de vacaciones, b) obtener una rebanada de pan tostado oscuro en 3.00 min utilizando un tostador de 970 W, y c) secar una carga de ropa en 40.0 min en una secadora de 5 200 W.

39. Hacer una estimación de orden de magnitud del costo de usar diario una secadora de pelo durante un año. Si usted no utiliza una secadora, observe o entreviste a alguien que la use. Enuncie las cantidades que estime y sus valores.

Problemas adicionales

40. ● Una lámpara está marcada como "25 W 120 V" y otra "100 W 120 V"; esto significa que cuando cada lámpara esté conectada a una diferencia de potencial constante de 120 V, recibirá cada una la potencia que se indica. a) Encuentre el valor de la resistencia de cada lámpara. b) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que pase 1.00 C a través de la lámpara de menor potencia? ¿Ha cambiado la carga en alguna forma a su salida de la lámpara en comparación con su entrada? Explique c) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que pase 1.00 J a través de la lámpara de menor potencia? ¿Mediante qué mecanismos entra y sale esta energía de la lámpara? d) Determine cuánto cuesta mantener encendida la lámpara de menor potencia durante 30 días, si la empresa eléctrica vende su producto en \$0.070 0 por kWh. ¿Cuál es el producto que la compañía eléctrica de hecho *vende*? ¿Cuál es el precio de una unidad en el SI?

41. Un oficinista usa un calentador de inmersión para calentar 250 g de agua en una taza aislada, cubierta y ligera de 20°C a 100°C en 4.00 min. En términos eléctricos, el calentador es un alambre de resistencia de nicromo conectado a una fuente de poder de 120 V. Especifique el diámetro y longitud que puede tener el alambre. ¿Puede estar hecho a menos de 0.5 cm^3 de nicromo? Puede suponer que el alambre está a 100°C durante todo el intervalo de tiempo.

42. En un capacitor de capacitancia C se coloca una carga Q. El capacitor está conectado en el circuito que se muestra en la figura P27.42, junto con un interruptor abierto, un resistor y un capacitor inicialmente descargado con una capacitancia de $3C$. Después se cierra el interruptor y el circuito se equilibra. Determine, en función de Q y de C, a) la diferencia de potencial final entre las placas de cada capacitor, b) la carga de cada capacitor, y c) la energía final almacenada en cada capacitor. d) Determine la energía interna que aparece en el resistor.

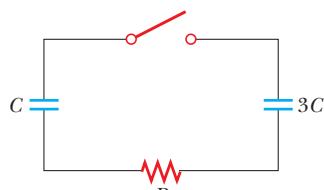



Figura P27.42

43. Una definición más general del coeficiente de resistividad por temperatura es

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

donde ρ es la resistividad a la temperatura T. a) Si α es constante, demuestre que

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha(T-T_0)}$$

donde ρ_0 es la resistividad a la temperatura T_0. b) Utilizando la expansión en serie $e^x \approx 1 + x$ para $x << 1$, demuestre que la resistividad es conocida aproximadamente por la expresión $\rho = \rho_0\,[1 + \alpha(T - T_0)]$ para $\alpha(T - T_0) << 1$.

44. Una línea de transmisión con un diámetro de 2.00 cm y una longitud de 200 km lleva una corriente estable de 1000 A. Si el conductor es un alambre de cobre con una densidad de cargas libres de 8.49×10^{28} electrones/m^3, ¿cuánto tarda un electrón en recorrer la línea de transmisión completa?

45. ● Con la finalidad de medir la resistividad eléctrica del nicromo se lleva a cabo un experimento con alambres de diferentes longitudes y áreas de seccion transversal. Para un conjunto de mediciones, el estudiante usa alambre de calibre 30, que tiene un área de sección transversal de 7.30×10^{-8} m^2. El estudiante mide la diferencia de potencial de un extremo a otro del alambre, así como la corriente en el mismo, utilizando un voltímetro y un amperímetro, respectivamente. Para cada una de las mediciones que aparecen en la tabla, calcule la resistencia de los alambres y los valores correspondientes de la resistividad. ¿Cuál es el valor promedio de la resistividad, y cómo se compara este valor con el valor incluido en la tabla 27.2?

L (m)	ΔV (V)	I (A)	R (Ω)	ρ (Ω · m)
0.540	5.22	0.500		
1.028	5.82	0.276		
1.543	5.94	0.187		

46. Una empresa pública eléctrica suministra energía al domicilio de un cliente a partir de las líneas de energía propias (a 120 V) mediante dos alambre de cobre, cada uno de los cuales tiene 50.0 m de largo y una resistencia de 0.108 Ω por tramo de 300 m. a) Determine la diferencia de potencial en el domicilio del cliente para una corriente de carga de 110 A. Para esta corriente, encuentre b) la potencia que está recibiendo el cliente y c) la proporción a la cual es producida la energía interna en los alambres de cobre.

47. Un alambre cilíndrico recto que yace a lo largo del eje x tiene una longitud de 0.500 m y un diámetro de 0.200 mm. Está fabricado de un material que obedece la ley de Ohm con una resistividad $\rho = 4.00 \times 10^{-8}$ Ω · m. Suponga que se mantiene en $x = 0$ un potencial de 4.00 V, y que en $x = 0.500$ m, $V = 0$. Determine a) el campo eléctrico en el alambre, b) la resistencia del mismo, c) la corriente eléctrica que pasa por el alambre y d) la densidad de corriente J en el alambre. Exprese la dirección del campo eléctrico y de la corriente. e) Demuestre que $E = \rho \mathbf{J}$.

48. Un alambre cilíndrico recto que yace a lo largo del eje x tiene una longitud L y un diámetro d. Está fabricado de un material que obedece la ley de Ohm y tiene una resistividad ρ. Suponga que en $x = 0$ se mantiene un potencial V y que el potencial es igual a cero en $x = L$. Deduzca, en función a L,

d, V y ρ, así como otras constantes físicas, expresiones para a) el campo eléctrico en el alambre, b) la resistencia del mismo, c) la corriente eléctrica que pasa por el alambre y d) la densidad de corriente en el alambre. Exprese la dirección del campo y de la corriente. e) Demuestre que $E = \rho J$.

49. Un automóvil eléctrico (no un híbrido) ha sido diseñado para funcionar a partir de un banco de baterías de 12.0 V con un almacenamiento total de la energía de 2.00×10^7 J. a) Si el motor eléctrico consume 8.00 kW, ¿cuál es la corriente que se le suministra al motor? b) Si el motor eléctrico consume 8.00 kW conforme el automóvil se mueve a una rapidez constante de 20.0 m/s, ¿qué distancia recorrerá el automóvil antes de quedarse sin energía?

50. ● **Problema de repaso.** Cuando se calienta un alambre recto, su resistencia está expresada por $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, de acuerdo con la ecuación 27.19, donde α es el coeficiente de resistividad por temperatura. a) Demuestre que un resultado más preciso, ya que tanto la longitud como el área del alambre se modifican al calentarse, es

$$R = \frac{R_0[1 + \alpha(T - T_0)][1 + \alpha'(T - T_0)]}{[1 + 2\alpha'(T - T_0)]}$$

donde α' es el coeficiente de expansión lineal (vea el capítulo 19). b) Explique cómo se comparan estos dos resultados para el caso de un alambre de cobre de 2.00 m de largo con un radio de 0.100 mm, primero a 20.0°C y después calentado a 100.0°C.

51. Los coeficientes de resistividad por temperatura que aparecen en la tabla 27.2 se determinaron a una temperatura de 20°C. ¿Cómo serían de haberse determinado a 0°C? Observe que el coeficiente de resistividad por temperatura a 20°C satisface la expresión $\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, donde ρ_0 es la resistividad del material a $T_0 = 20°C$. El coeficiente de resistividad por temperatura α' a 0°C debe satisfacer la expresión $\rho = \rho'_0[1 + \alpha' T]$, siendo ρ'_0 la resistividad del material a 0°C.

52. Una oceanógrafa estudia cómo dependen las concentraciones de iones de la profundidad del agua de mar. Su procedimiento es sumergir dentro del agua un par de cilindros metálicos concéntricos (figura P27.52) en el extremo de un cable y registrar los datos para determinar la resistencia entre dichos electrodos en función de la profundidad. El agua entre los dos cilindros forma una envoltura cilíndrica de radio interior r_a, de radio exterior r_b y una longitud L mucho mayor que r_b. La científica aplica una diferencia de potencial ΔV entre las superficies interna y externa, produciendo una corriente radial hacia fuera I. Suponga que ρ representa la resistividad del agua. a) Determine la resistencia del agua entre los cilindros en función de L, ρ, r_a y r_b. b) Exprese la resistividad del agua en función de las cantidades medidas L, r_a, r_b, ΔV e I.

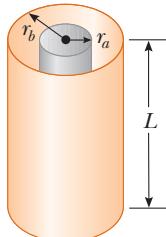



Figura P27.52

53. ● La deformación en un alambre se monitorea y calcula al medir la resistencia del alambre. Sea L_i la longitud original del alambre, A_i su área de sección transversal original, $R_i = \rho L_i/A_i$ la resistencia original entre sus extremos, y $\delta = \Delta L/L_i = (L - L_i)/L_i$ la deformación resultante de la aplicación de tensión. Suponga que la resistividad y el volumen del alambre no cambian conforme el alambre se estira. Demuestre que la resistencia entre los extremos del alambre bajo deformación está dada por $R = R_i(1 + 2\delta + \delta^2)$. Si las suposiciones son precisamente ciertas, ¿este resultado es exacto o aproximado? Explique su respuesta.

54. ● En cierto sistema estéreo, cada altavoz tiene una resistencia de 4.00 Ω. El sistema es nominalmente de 60.0 W por canal, y cada circuito de altavoz incluye un fusible de 4.00 A nominales. ¿Este sistema está protegido adecuadamente contra sobrecargas? Explique su razonamiento.

55. ● Existe una gran analogía entre el flujo de energía por calor debido a una diferencia de temperaturas (vea la sección 20.7) y el flujo de cargas eléctricas debido a una diferencia de potencial. Tanto la energía dQ como la carga eléctrica dq pueden transportarse mediante electrones libres en el material conductor. En consecuencia, usualmente un buen conductor eléctrico es también un buen conductor térmico. Considere una placa conductora delgada de espesor dx, área A y de conductividad eléctrica σ, con a una diferencia de potencial dV entre sus caras opuestas. a) Demuestre que la corriente $I = dq/dt$ se conoce por la ecuación de la zquierda:

Conducción de cargas	Conducción térmica	
$\frac{dq}{dt} = \sigma A \left\lvert \frac{dV}{dx} \right\rvert$	$\frac{dQ}{dt} = kA \left\lvert \frac{dT}{dx} \right\rvert$	**(ecuación 20.15)**

En la ecuación de conducción térmica análoga de la derecha, la rapidez del flujo de energía dQ/dt (en unidades del SI es joules por segundo) se debe al gradiente de temperatura dT/dx, en un material de conductividad térmica k. b) Establezca reglas similares que relacionen la dirección de la corriente eléctrica con el cambio en el potencial, y que relacionen la dirección del flujo de energía con el cambio en temperaturas.

56. Un material de resistividad ρ se modela como un cono truncado de altura h, según se muestra en la figura P27.56. El extremo inferior tiene un radio b, en tanto que el extremo superior tiene un radio a. Suponga que la corriente está uniformemente distribuida en cualquier sección transversal circular del cono, de forma que la densidad de la corriente no dependerá de la posición radial. (La densidad de corriente variará dependiendo de su posición a lo largo del eje del cono.) Demuestre que la resistencia entre ambos extremos del cono queda descrita mediante la expresión

$$R = \frac{\rho}{\pi}\left(\frac{h}{ab}\right)$$

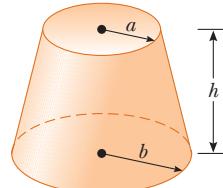



Figura P27.56

57. Un material con una resistividad uniforme ρ se modela en forma de cuña como se muestra en la figura P27.57. Demuestre que la resistencia entre la cara A y la cara B de esta cuña es igual a

$$R = \rho \frac{L}{w(y_2 - y_1)} \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

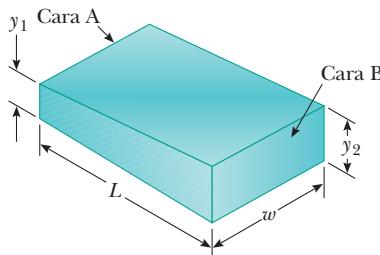



Figura P27.57

58. Una envolvente esférica, con radio interior r_a y radio exterior r_b, se forma a partir de un material de resistividad ρ. Porta corriente radialmente, con densidad uniforme en todas direcciones. Demuestre que su resistencia es

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

59. ● Los problemas 56, 57 y 58 se refieren al cálculo de la resistencia entre superficies específicas de un resistor con forma extraña. Para verificar los resultados experimentalmente, se puede aplicar una diferencia de potencial a las superficies indicadas y medir la corriente resultante. Después se calcula la resistencia a partir de su definición. Describa un método para asegurar que el potencial eléctrico es uniforme en toda la superficie. Explique si después puede asegurar que la corriente se dispersa sobre las superficies completas donde entra y sale.

60. El material dieléctrico que existe entre las placas de un capacitor de placas paralelas tiene siempre alguna conductividad σ diferente de cero. Suponga que A representa el área de cada placa y d la distancia entre ellas. Sea κ la constante dieléctrica del material. a) Demuestre que la resistencia R y la capacitancia C del capacitor están interrelacionadas mediante

$$RC = \frac{\kappa\epsilon_0}{\sigma}$$

b) Determine la resistencia entre las placas de un capacitor de 14.0 nF con un dieléctrico de cuarzo fundido.

61. **Problema de repaso.** Un capacitor de placas paralelas está constituido por placas cuadradas de bordes de longitud ℓ separadas una distancia d, donde $d << \ell$. Entre las placas se mantiene una diferencia de potencial ΔV. Un material de constante dieléctrica κ llena la mitad del espacio entre las placas. Ahora la placa dieléctrica se retira del capacitor, como se observa en la figura P27.61. a) Determine la capacitancia cuando el borde izquierdo del material dieléctrico esté a una distancia x del centro del capacitor. b) Si se va retirando el dieléctrico a una rapidez constante v, ¿cuál será la corriente en el circuito conforme se retira el dieléctrico?

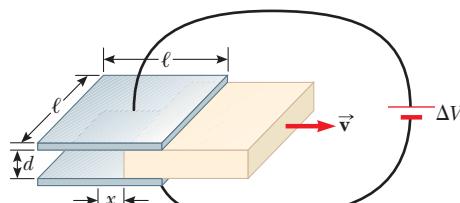



Figura P27.61

62. La curva característica corriente-voltaje de un diodo semiconductor en función de la temperatura T está dada por la ecuación

$$I = I_0\left(e^{e\Delta V/k_B T} - 1\right)$$

En este caso, el primer símbolo e representa el número de Euler, es decir, la base de los logaritmos naturales, la segunda e es la magnitud de carga de un electrón; k_B representa la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta. Prepare una hoja de cálculo para calcular I y $R = \Delta V/I$ para $\Delta V = 0.400$ V a 0.600 V, en incrementos de 0.005 V. Suponga que $I_0 = 1.00$ nA. Trace R en función de ΔV para $T = 280$ K, 300 K y 320 K.

63. El oro es el más dúctil de todos los metales. Por ejemplo, un gramo de oro se puede convertir en un alambre de 2.40 km de largo. ¿Cuál es la resistencia de tal alambre a 20°C? En este libro puede encontrar la información de referencia necesaria.

64. Una línea de transmisión de alto voltaje lleva 1000 A desde 700 kV al inicio por una distancia de 100 millas. Si la resistencia del alambre es de 0.500 Ω/milla, ¿cuál es la pérdida de energía debida a la resistencia del alambre?

65. La diferencia de potencial entre los extremos del filamento de una lámpara se mantiene en un nivel constante mientras se llega a la temperatura de equilibrio. Se observa que la corriente en estado estacionario de la lámpara es de sólo la décima parte de la corriente que utiliza la lámpara cuando se enciende por primera vez. Si el coeficiente de temperatura de resistividad para la lámpara a 20.0°C es de 0.004 50 $(°C)^{-1}$, y si la resistencia aumenta linealmente al elevarse la temperatura, ¿cuál será la temperatura final de operación del filamento?

Respuestas a las preguntas rápidas

27.1 d), b) = c), a). La corriente en el inciso d) es equivalente a dos cargas positivas moviéndose hacia la izquierda. Los incisos b) y c) representan cada uno cuatro cargas positivas que se mueven en la misma dirección, ya que las cargas negativas que se mueven hacia la izquierda son equivalentes a las cargas positivas que se mueven hacia la derecha. La corriente del inciso a) es equivalente a cinco cargas positivas moviéndose hacia la derecha.

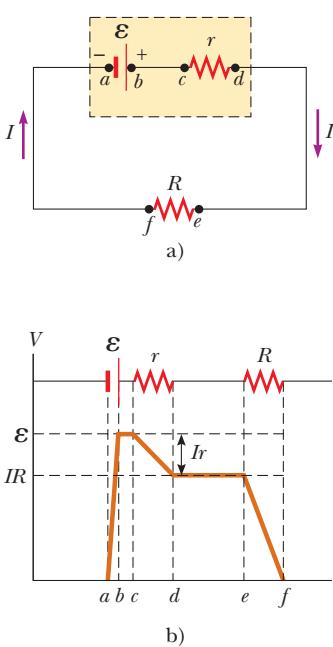
27.2 b) La duplicación del radio hace que el área A sea cuatro veces mayor, por lo que la ecuación 27.10 indica que la resistencia disminuye.

27.3 b) De acuerdo con la ecuación 27.7, la resistencia es la relación del voltaje a través de un dispositivo respecto a la corriente en el dispositivo. En la figura 27.7b, una línea dibujada desde el origen hasta el punto en la curva tendrá una pendiente igual a $I/\Delta V$, que es el inverso de la resistencia. Conforme ΔV aumenta, la pendiente de la línea también aumenta, de modo que la resistencia disminuye.

27.4 a) Cuando el filamento está a la temperatura ambiente, su resistencia es baja, y por lo tanto la corriente es relativamente grande. Conforme el filamento se calienta, su resistencia se incrementa y la corriente se reduce. Las lámparas viejas a

menudo fallan justo en el momento en que se encienden debido a que este gran "pico" inicial de corriente produce un incremento rápido en la temperatura y por tanto un esfuerzo mecánico sobre el filamento que lo hace fallar.

27.5 $I_a = I_b > I_c = I_d > I_e = I_f$. La corriente I_a sale de la terminal positiva de la batería y se divide para fluir a través de las dos lámparas; de ahí que $I_a = I_c + I_e$. Por la ecuación 27.21 la potencia disponible es inversa a la resistencia. Por lo tanto la corriente que circula en una lámpara de 60 W es mayor a la que fluye en la lámpara de 30 W. Puesto que la carga no se acumula en las lámparas, la misma cantidad de carga que circula en una de las lámparas del lado izquierdo debe fluir del lado derecho; en consecuencia $I_c = I_d$ e $I_e = I_f$. Las dos corrientes que salen de las lámparas se combinan de nuevo para formar la corriente de regreso a la batería, $I_f + I_d = I_b$.

En la vida cotidiana se usan diversos aparatos electrónicos personales como los reproductores MP3, teléfonos celulares y cámaras digitales. Estos dispositivos contienen circuitos eléctricos alimentados por baterías. En este capítulo se estudian los tipos simples de circuitos y se aprende como analizarlos. (© Thomson Learning/Charles D. Winters)

28 Circuitos de corriente directa

En este capítulo se analizan los circuitos eléctricos simples que contienen diver-sas combinaciones de baterías, resistores y capacitores. Algunos circuitos incluyen resistores que son combinados mediante reglas simples. El análisis de circuitos más complicados se simplifica si se utilizan las *leyes de Kirchhoff*, que son consecuencia de la ley de conservación de energía y de la ley de conservación de cargas eléctricas en sistemas aislados. Se supone que la mayoría de los circuitos analizados está en *estado estacionario*, lo que significa que las corrientes en el circuito son constantes en magnitud y dirección. La *corriente directa* (CD)es una corriente con dirección constante. En el capítulo 33 se estudiará la *corriente alterna* (CA), una corriente que cambia de dirección periódicamente. Por último, se describen los medidores eléctricos de corriente y de diferencia de potencial y se explican los circuitos eléctricos que hay en casa.

28.1 Fuerza electromotriz

En la sección 27.6 se explicó un circuito en el cual la batería produce una corriente. Por lo general, en esta explicación se utiliza una batería como fuente de energía. Ya que en un circuito particular la diferencia de potencial en las terminales de la batería es constante, la corriente en el circuito es constante en magnitud y dirección y recibe el nombre de **corriente directa.** A la batería se le conoce como *fuente de fuerza electromotriz*, o más comúnmente, *fuente de fem.* (Lo que se conoce como *fuerza electromotriz* es un desafortunado equívoco histórico, pues describe no una fuerza, sino una diferencia de potencial en volts.) **La fem $\mathcal{E}$ de una batería es el voltaje máximo posible que ésta puede suministrar entre sus terminales.** Se puede pensar que una

Figura 28.1
a) Diagrama de un circuito de una fuente de fem $\mathcal{E}$ (en este caso, una batería), de resistencia interna r, conectada a un resistor externo, de resistencia R.
b) Representación gráfica que muestra cómo cambia el potencial eléctrico conforme recorremos el circuito en a) en la dirección de las manecillas del reloj.

fuente de fem es como una "bomba para las cargas". Cuando existe una diferencia de potencial entre dos puntos, la fuente mueve las cargas "hacia arriba", del potencial más reducido al más elevado. En forma general se considera que la conexión de alambres en un circuito no tiene resistencia.

La terminal positiva de la batería se encuentra a un potencial más alto que la negativa. Puesto que una batería está hecha de materia, existe una resistencia al flujo de las cargas dentro de la misma. Esta resistencia recibe el nombre de **resistencia interna** r. En el caso de una batería ideal con una resistencia interna igual a cero, la diferencia de potencial a través de la batería (conocida como *voltaje entre las terminales*) es igual a su fem. Sin embargo, en una batería, en un circuito donde exista corriente, el voltaje entre las terminales *no* es igual a la fem de la batería. Para entender esto, considere el diagrama del circuito de la figura 28.1a, donde se representa la batería como el rectángulo en línea discontinua que contiene una fem $\mathcal{E}$, ideal y libre de resistencia, en serie con una resistencia interna r. Un resistor de resistencia R es conectado en las terminales de la batería. Ahora imagine que pasa de a a d en la batería y mida el potencial eléctrico en diferentes ubicaciones. Conforme pasa de la terminal negativa a la positiva, el potencial *aumenta* en una cantidad $\mathcal{E}$. Sin embargo, conforme se mueve a través de la resistencia r, el potencial *disminuye* en una cantidad Ir, donde I es la corriente del circuito. Debido a eso, el voltaje entre las terminales de la batería $\Delta V = V_d - V_a$ es:

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir \qquad \textbf{(28.1)}$$

De esta expresión, observe que $\mathcal{E}$ es equivalente al **voltaje en circuito abierto,** es decir, el voltaje entre las terminales cuando la corriente es igual a cero. La fem es el voltaje nominal de una batería; por ejemplo, la fem de una pila D es de 1.5 V. La diferencia de potencial real entre las terminales de la batería depende de la corriente en la misma, como se describe en la ecuación 28.1.

La figura 28.1b es una representación gráfica de los cambios en el potencial eléctrico conforme se recorre el circuito en el sentido de las manecillas del reloj. Al estudiar la figura 28.1a, es claro que el voltaje entre las terminales ΔV debe ser igual a la diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia externa R, conocida como **resistencia de carga.** El resistor de carga puede ser un simple elemento de circuito resistivo, como el de la figura 28.1a, o podría ser la resistencia de algún aparato eléctrico (como un tostador, un calentador eléctrico o una lámpara) conectado a la batería (o, en el caso de aparatos domésticos, al contacto de pared). El resistor representa una *carga* en la batería porque ésta debe suministrar energía para que el aparato que contiene la resistencia funcione. La diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia de carga es $\Delta V = IR$. Al combinar esta expresión con la ecuación 28.1

$$\mathcal{E} = IR + Ir \qquad \textbf{(28.2)}$$

Al resolver en función de la corriente,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad \textbf{(28.3)}$$

Esta ecuación muestra que la corriente en este circuito simple depende tanto de la resistencia de carga R externa a la batería como de la resistencia interna r. Si R es mucho mayor que r, como es el caso de muchos circuitos útiles en la vida cotidiana, ignore r.

Si multiplica la ecuación 28.2 por la corriente I

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r \qquad \textbf{(28.4)}$$

Esta ecuación indica que, ya que la potencia es $\mathcal{P} = I\Delta V$ (ecuación 27.20), la potencia total de salida $I\mathcal{E}$ de la batería es entregada a la resistencia de carga externa con un valor I^2R y a la resistencia interna con un valor I^2r.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 28.1
¿Qué es constante en una batería?

Una interpretación común pero equivocada es pensar que la batería es una fuente de corriente constante. La ecuación 28.3 muestra claramente que no es así. La corriente del circuito depende de la resistencia R conectada a la batería. Tampoco es verdad que la batería sea una fuente de voltaje constante entre las terminales, como se muestra en la figura 28.1. **Una batería es una fuente de fem constante.**

Pregunta rápida 28.1 Para maximizar el porcentaje de energía que una batería entrega a un aparato, ¿cómo debería ser la resistencia interna de la misma? a) Tan baja como sea posible, b) tan alta como sea posible, o c) el porcentaje no depende de la resistencia interna.

EJEMPLO 28.1 Voltaje entre las terminales de una batería

Una batería tiene una fem de 12.0 V y una resistencia interna de 0.05 Ω. Sus terminales están conectadas a una resistencia de carga de 3.00 Ω.

A) Encuentre la corriente en el circuito y el voltaje entre las terminales de la batería.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 28.1a, que muestra un circuito consistente con el enunciado del problema. La batería entrega energía al resistor de carga.

Categorizar Este ejemplo involucra cálculos simples de esta sección, así que se le clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 28.3 para encontrar la corriente en el circuito:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12.0\ \text{V}}{(3.00\ \Omega + 0.05\ \Omega)} = 3.93\ \text{A}$$

Use la ecuación 28.1 para encontrar el voltaje entre las terminales:

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = 12.0\ \text{V} - (3.93\ \text{A})(0.05\ \Omega) = 11.8\ \text{V}$$

Para comprobar este resultado, calcule el voltaje a través de la resistencia de carga R:

$$\Delta V = IR = (3.93\ \text{A})(3.00\ \Omega) = 11.8\ \text{V}$$

B) Calcule la potencia entregada al resistor de carga, la potencia entregada a la resistencia interna de la batería y la potencia entregada por la batería.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 27.21 para encontrar la potencia entregada al resistor de carga:

$$\mathcal{P}_R = I^2R = (3.93\ \text{A})^2(3.00\ \Omega) = 46.3\ \text{W}$$

Encuentre la potencia entregada a la resistencia interna:

$$\mathcal{P}_r = I^2r = (3.93\ \text{A})^2(0.05\ \Omega) = 0.772\ \text{W}$$

Encuentre la potencia entregada por la batería al sumar estas cantidades:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_r = 46.3\ \text{W} + 0.772\ \text{W} = 47.1\ \text{W}$$

¿Qué pasaría si? Conforme una batería envejece, su resistencia interna aumenta. Suponga que la resistencia interna de esta batería se eleva a 2.00 Ω hacia el final de su vida útil. ¿Cómo altera esto la habilidad de la batería para entregar energía?

Respuesta Conecte el mismo resistor de carga de 3.00 Ω a la batería.

Encuentre la nueva corriente en la batería:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12.0\ \text{V}}{(3.00\ \Omega + 2.00\ \Omega)} = 2.40\ \text{A}$$

Encuentre el nuevo voltaje entre las terminales:

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = 12.0\ \text{V} - (2.40\ \text{A})(2.00\ \Omega) = 7.2\ \text{V}$$

Encuentre las nuevas potencias entregadas al resistor de carga y la resistencia interna:

$$\mathcal{P}_R = I^2R = (2.40\ \text{A})^2(3.00\ \Omega) = 17.3\ \text{W}$$

$$\mathcal{P}_r = I^2r = (2.40\ \text{A})^2(2.00\ \Omega) = 11.5\ \text{W}$$

El voltaje entre las terminales sólo es 60% de la fem. Observe que 40% de la potencia de la batería se entrega a la resistencia interna cuando r es 2.00 Ω. Cuando r es 0.05 Ω como en el inciso B), este porcentaje sólo es 1.6. En consecuencia, aun cuando la fem permanezca fija, el aumento en resistencia interna de la batería reduce significativamente la capacidad de ésta para entregar energía.

EJEMPLO 28.2 **Igualación de carga**

Encuentre la resistencia de carga R para la cual se entrega la potencia máxima a la resistencia de carga en la figura 28.1a.

Figura 28.2 (Ejemplo 28.2) Gráfica de la potencia $\mathcal{P}$ entregada por una batería a un resistor de carga de resistencia R como función de R. La potencia entregada al resistor es un máximo cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna de la batería.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en variar la resistencia de carga de la figura 28.1a y el efecto sobre la potencia entregada a la resistencia de carga. Cuando R es grande, hay muy poca corriente, de modo que la potencia I^2R que se entrega al resistor de carga es pequeña. Cuando R es pequeña, la corriente es grande y hay una pérdida significativa de potencia I^2r conforme se entrega energía a la resistencia interna. Por lo tanto, la potencia entregada al resistor de carga es pequeña una vez más. Para algún valor intermedio de la resistencia R, la potencia se debe maximizar.

Categorizar El circuito es el mismo que en el ejemplo 28.1. Sin embargo, en este caso, la resistencia de carga R es una variable.

Analizar Encuentre la potencia entregada a la resistencia de carga mediante la ecuación 27.21, con I conocida por la ecuación 28.3:

$$1)\qquad \mathcal{P} = I^2R = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}^2R}{(R+r)^2}$$

Derive la potencia respecto a la resistencia de carga R e iguale la derivada a cero para maximizar la potencia:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = \frac{d}{dR}\left[\frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}^2R}{(R+r)^2}\right] = \frac{d}{dR}\left[\boldsymbol{\mathcal{E}}^2R(R+r)^{-2}\right] = 0$$

$$\left[\boldsymbol{\mathcal{E}}^2(R+r)^{-2}\right] + \left[\boldsymbol{\mathcal{E}}^2R(-2)(R+r)^{-3}\right] = 0$$

$$\frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}^2(R+r)}{(R+r)^3} - \frac{2\boldsymbol{\mathcal{E}}^2R}{(R+r)^3} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}^2(r-R)}{(R+r)^3} = 0$$

Resuelva para R:

$$R = r$$

Finalizar Para comprobar este resultado, grafique $\mathcal{P}$ contra R, como en la figura 28.2. La gráfica muestra que $\mathcal{P}$ alcanza un valor máximo en $R = r$. La ecuación 1) muestra que este valor máximo es $\mathcal{P}_{\text{máx}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^2/4r$.

28.2 Resistores en serie y en paralelo

Cuando dos o más resistores están interconectados como los focos de la figura 28.3a, se dice que están en una combinación en **serie**. La figura 28.3b representa el diagrama de circuito de los focos, que aparecen como resistores, y la batería. En una conexión en serie, si una cantidad de carga Q sale de un resistor R_1, deberá también entrar en el segundo resistor R_2. De otra forma, la carga se acumularía en el alambre entre los resistores. Por lo tanto, en un intervalo determinado de tiempo, la misma cantidad de carga pasa a través de ambos resistores.

$$I = I_1 = I_2$$

donde I es la corriente de la batería, I_1 es la corriente en el resistor R_1 e I_2 es la corriente en el resistor R_2.

Figura 28.3
a) Combinación en serie de dos lámparas de resistencias R_1 y R_2. b) Diagrama de circuito para un circuito de dos resistores. La corriente en R_1 es la misma que en R_2. c) Los resistores han sido reemplazados por un solo resistor de resistencia equivalente $R_{eq} = R_1 + R_2$.

La diferencia de potencial que se aplica a una combinación en serie de resistores se dividirá entre éstos. En la figura 28.3b, ya que la caída de voltaje[1] de *a* a *b* es igual a I_1R_1 y la caída de voltaje de *b* a *c* es

$$\Delta V = I_1R_1 + I_2R_2$$

La diferencia de potencial entre las terminales de la batería también está aplicada a la **resistencia equivalente** R_{eq} en la figura 28.3c:

$$\Delta V = IR_{eq}$$

donde la resistencia equivalente tiene el mismo efecto en el circuito que en la combinación en serie porque resulta de la misma corriente I en la batería. Al combinar estas ecuaciones para ΔV se sustituyen los dos resistores en serie por una sola resistencia equivalente, cuyo valor es la *suma* de las resistencias equivalentes:

$$\Delta V = IR_{eq} = I_1R_1 + I_2R_2 \quad \rightarrow \quad R_{eq} = R_1 + R_2 \qquad \textbf{(28.5)}$$

donde se cancelan las corrientes I, I_1 e I_2, porque son las mismas.

La resistencia equivalente de tres o más resistores conectados en serie es

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad \textbf{(28.6)}$$

◄ Resistencia equivalente de una combinación en serie de resistores

Esta correspondencia indica que **la resistencia equivalente de una combinación en serie de resistores es la suma numérica de las resistencias individuales y siempre es mayor que cualquier resistencia individual.**

Regrese a la ecuación 28.3, y observe que el denominador es la simple suma algebraica de las resistencias externas e internas. Esto es consistente con el hecho de que en la figura 28.1a las resistencias internas y externas están en serie.

Si en la figura 28.3 el filamento de un foco falla, el circuito no se completaría (el resultado es una condición de circuito abierto) y el segundo foco tampoco encendería. Esta es la característica general de un circuito en serie: si un dispositivo en serie crea un circuito abierto, todo el dispositivo es inoperante.

Pregunta rápida 28.2 Cuando se cierra el interruptor del circuito de la figura 28.4a (página 780), no hay corriente en R_2, porque la corriente encuentra una trayectoria alterna de resistencia cero a través del interruptor. Existe corriente en R_1, la cual se mide con un amperímetro (dispositivo para la medición de corriente) en la parte baja del circuito. Si se abre el interruptor

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 28.2
Las lámparas no se queman

Para describir el fin de la vida útil de una lámpara debe decir que *el filamento falla*, y no que la lámpara "se quema". La palabra *quemar* sugiere un proceso de combustión, lo cual no ocurre en un foco. La falla de un foco resulta de la sublimación lenta de tungsteno a causa del intenso calor del filamento en la vida útil del foco. Al final el tungsteno se adelgaza debido a este proceso. La tensión mecánica a causa del incremento repentino de temperatura cuando se activa el foco ocasiona que el filamento se rompa.

[1] El término *caída de voltaje* se refiere a la reducción en el potencial eléctrico entre las terminales de un resistor, y es utilizado con frecuencia por las personas que trabajan con circuitos eléctricos.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 28.3

Cambios locales y globales

Un cambio local en una parte del circuito da como resultado un cambio global en el circuito completo. Por ejemplo, si una sola resistencia se cambia en un circuito que contiene varios resistores y baterías, las corrientes en todos los resistores y baterías, los voltajes entre las terminales de todas las baterías, y los voltajes aplicados a todos los resistores pueden cambiar como consecuencia.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 28.4

La corriente no sigue la trayectoria de menor resistencia

Es posible que haya escuchado la frase "la corriente sigue la trayectoria de menor resistencia" (o palabras similares), en referencia a la combinación en paralelo de las trayectorias de la corriente, ya que hay dos o más trayectorias que puede seguir la corriente. Esta frase es incorrecta. La corriente sigue todas las trayectorias. Aquellas trayectorias con una resistencia menor tendrán más corriente, pero incluso las trayectorias de muy alta resistencia tendrán *algo* de corriente. En teoría, si la corriente tiene una elección entre una trayectoría de resistencia cero y una trayectoría de resistencia finita, toda la corriente sigue la trayectoría de resistencia cero; no obstante, una trayectoria con resistencia cero, es una idealización.

(figura 28.4b), existe corriente en R_2. ¿Qué sucede con la lectura del amperímetro cuando se abre el interruptor? a) La lectura sube; b) la lectura baja; c) la lectura no cambia.

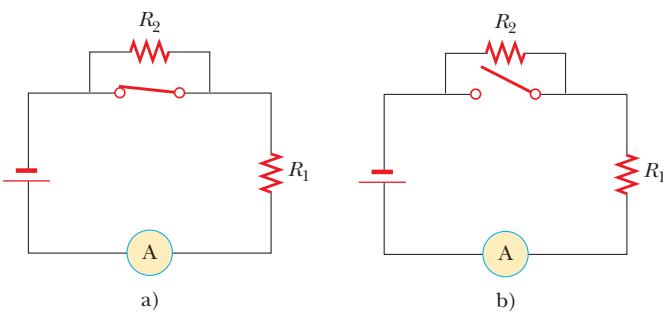



Figura 28.4 (Pregunta rápida 28.2) ¿Qué sucede cuando se abre el interruptor?

Considere ahora dos resistores conectados en una **combinación en paralelo**, como se muestra en la figura 28.5 Observe que ambos resistores están conectados directamente a través de las terminales de la batería. Por lo tanto, las diferencias de potencial a través de los resistores son las mismas:

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

donde ΔV es el voltaje entre las terminales de la batería.

Cuando las cargas llegan al punto a en la figura 28.5b, se dividen en dos; una parte pasa a través de R_1 y el resto a través de R_2. Una **unión** es cualquier punto en un circuito donde una corriente puede dividirse. Esta división resulta en menos corriente en cada resistor de la que sale de la batería. Debido a que la carga eléctrica se conserva, la corriente I que entra al punto a debe ser igual a la corriente total que sale del mismo:

$$I = I_1 + I_2$$

donde I_1 es la corriente en R_1 e I_2 es la corriente en R_2.

La corriente en la **resistencia equivalente** R_{eq} en la figura 28.5c es

$$I = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$$

donde la resistencia equivalente tiene el mismo efecto en el circuito que las dos resistencias en paralelo; es decir, la resistencia equivalente consumirá la misma corriente i de la batería

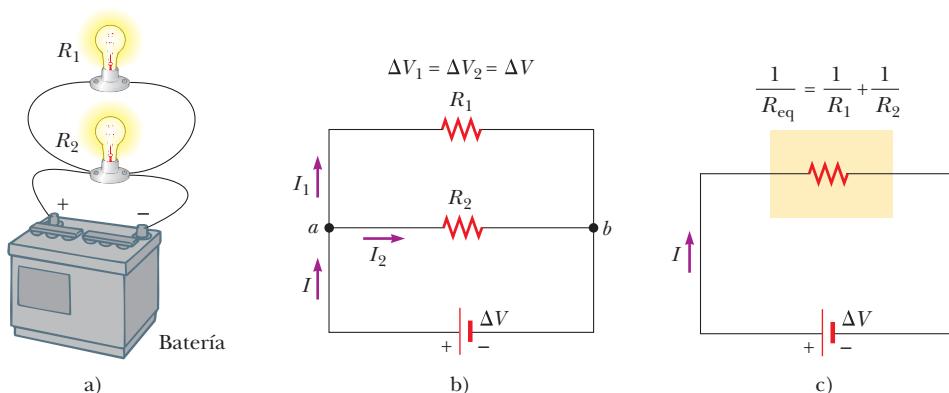



Figura 28.5
a) Combinación en paralelo de dos lámparas con resistencias R_1 y R_2. b) Diagrama de circuito para un circuito de dos resistores. La diferencia de potencial en las terminales de R_1 es la misma que la aplicada a R_2. c) Los resistores han sido reemplazados por un solo resistor de resistencia equivalente, según la ecuación 28.7.

(figura 28.5c). Por este resultado, vemos que la resistencia equivalente de dos resistores en paralelo se conoce por

$$I = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \textbf{(28.7)}$$

donde se han cancelado ΔV, ΔV y ΔV_2 porque todas son iguales.
Una extensión de esta explicación a tres o más resistores en paralelo da:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \textbf{(28.8)}$$

◄ Resistencia equivalente de una combinación en paralelo de resistores

De esta expresión se ve que **el inverso de la resistencia equivalente de dos o más resistores conectados en una combinación en paralelo es igual a la suma de los inversos de las resistencias individuales. Además, la resistencia equivalente siempre es menor que la resistencia más pequeña en el grupo.**

Los circuitos domésticos siempre están alambrados de manera que los aparatos queden conectados en paralelo. Cada aparato funciona de manera independiente de los demás, de modo que si un interruptor se abre, los demás permanecerán cerrados. En adición, en este tipo de conexiones todos los aparatos funcionan con el mismo voltaje.

Considere dos ejemplos de aplicaciones prácticas de circuitos en serie y en paralelo. La figura 28.6 ilustra cómo se construye un foco de tres vías para proporcionar tres niveles de intensidad luminosa.[2] El enchufe del foco está equipado con un interruptor de tres vías para seleccionar diferentes intensidades luminosas. El foco contiene dos filamentos. Cuando el foco se conecta a una fuente de 120 V, un filamento recibe 100 W de potencia y el otro recibe 75 W. Las tres intensidades luminosas son posibles al aplicar los 120 V a un filamento, al otro filamento o a los dos filamentos en paralelo. Cuando el interruptor S_1 se cierra y el interruptor S_2 se abre, la corriente sólo existe en el filamento de 100 W. Cuando ambos interruptores se cierran, la corriente existe en ambos filamentos y la potencia total es de 175 W.

Figura 28.6 Foco de tres vías.

Si los filamentos se conectaran en serie y uno de ellos se rompiera, no pasarían cargas a través del foco y no brillaría, sin importar la posición del interruptor. Sin embargo, si los filamentos se conectaran en paralelo y uno de ellos (por ejemplo, el filamento de 75 W) se rompiera, el foco continuaría brillando en dos de las posiciones del interruptor porque en el otro filamento (100 W) existe corriente.

Como segundo ejemplo, considere las series de luces que se usan para muchos propósitos ornamentales, como la decoración de árboles de navidad. Durante años, para las series de luces se han usado conexiones tanto en paralelo como en serie. Porque los focos alambrados en serie funcionan con menos energía por cada foco y a menor temperatura, son más seguros que los focos alambrados en paralelo para usar en árboles de Navidad en interiores. No obstante, si fallara el filamento de un solo foco en un alambrado en serie (o si el foco se quita de su base), todas las luces en la serie se apagarían. La popularidad de las series de luces se redujo porque reparar un foco dañado es tedioso, y consume tiempo que involucra sustitución por prueba y error de un foco bueno en cada base a lo largo de la serie hasta que se encuentra el defectuoso.

En una serie alambrada en paralelo, cada foco funciona a 120 V. Por diseño, los focos son más brillantes y calientes que en una serie. Como resultado, son inherentemente más peligrosos (es más probable que inicien un incendio, por ejemplo), pero si un foco en una serie alambrada en paralelo falla, el resto de los focos continúa brillando.

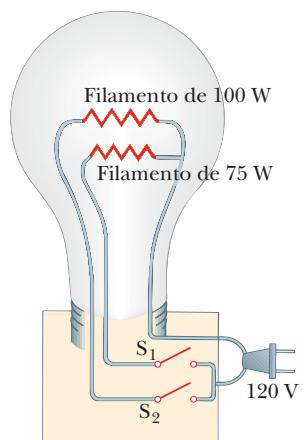
Para evitar que la falla de un foco ocasione que toda la serie falle, se desarrolló un nuevo diseño para las llamadas luces miniatura alambradas en serie. Cuando se rompe el filamento de uno de estos focos miniatura, el rompimiento del filamento representa la mayor resistencia en la serie, mucho mayor que en los filamentos intactos. Como resultado, la mayoría de los 120 V aplicados aparecen a través del foco con el filamento roto. Dentro del foco, una espira de conexión pequeña cubierta con un material aislador se enreda alrededor de la conexión del filamento. Cuando el filamento falla y a través del foco apa-

[2] El foco de tres vías y otros aparatos domésticos en realidad funcionan con corriente alterna (CA), que se explica en el capítulo 33.

Figura 28.7 a) Diagrama esquemático de un foco “miniatura”, con una conexión puente para proporcionar una ruta de corriente si el filamento se rompe. Cuando el filamento está intacto, las cargas fluyen en el mismo. b) Un foco con el filamento roto. En este caso, las cargas fluyen en el puente. c) Foco de árbol de Navidad.

recen 120 V, un arco quema el aislamiento del puente y conecta las patas del filamento. Ahora esta conexión completa el circuito a través del foco, aun cuando su filamento ya no esté activo (figura 28.7).

Cuando un foco falla, la resistencia a través de sus terminales se reduce casi a cero debido al puente de conexión alterno mencionado en el párrafo anterior. Todos los otros focos no sólo permanecen encendidos, sino que brillan con más intensidad porque la resistencia total de la tira se reduce y en consecuencia la corriente en cada foco aumenta. Cada foco funciona con una temperatura ligeramente mayor que antes. Conforme más focos fallan, la corriente se eleva, el filamento de cada foco funciona con una temperatura más alta y el tiempo de vida del foco se reduce. Por este motivo, debe revisar los focos dañados (que no brillan) en una serie y sustituirlos tan pronto como sea posible, lo que en consecuencia maximiza los tiempos de vida de todos los focos.

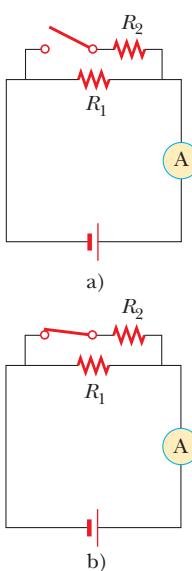



Figura 28.8 (Pregunta rápida 28.3) ¿Qué ocurre cuando se cierra el interruptor?

Pregunta rápida 28.3 Con el interruptor abierto del circuito de la figura 28.8a, no hay corriente en R_2. No obstante, hay corriente en R_1, y se mide con el amperímetro que está del lado derecho del circuito. Si se cierra el interruptor (figura 28.7b), existe corriente en R_2. ¿Qué ocurre con la lectura del amperímetro cuando el interruptor se cierra? a) La lectura asciende, b) la lectura desciende, o c) la lectura no cambia.

Pregunta rápida 28.4 Considere las siguientes opciones: a) aumenta, b) disminuye, c) permanece igual. A partir de estas opciones, elija la mejor respuesta para las siguientes situaciones. **i)** En la figura 28.3, se agrega un tercer resistor en serie con los primeros dos. ¿Qué ocurre con la corriente en la batería? **ii)** ¿Qué ocurre con el voltaje entre las terminales de la batería? **iii)** En la figura 28.5, se agrega un tercer resistor en paralelo con los dos primeros. ¿Qué ocurre con la corriente en la batería? **iv)** ¿Qué ocurre con el voltaje entre las terminales de la batería?

EJEMPLO CONCEPTUAL 28.1 Luces panorámicas

Una persona quiere instalar iluminación panorámica de bajo voltaje en su patio trasero. Para ahorrar dinero, compra cable barato calibre 18, que tiene una resistencia relativamente alta por unidad de longitud. Este cable consiste en dos alambres lado a lado separados por un aislante, como el cordón de un electrodoméstico. La persona extiende 200 pies de cable desde

la fuente de energía hasta el punto más alejado al que planea colocar una instalación fija de luz. Une la instalación fija de luz a través de los dos alambres en el cable a intervalos de 10 pies, de modo que la instalación fija de las luces está en paralelo. Debido a la resistencia del cable, la brillantez de los focos en la instalación fija no es la deseada. ¿Cuál de los siguientes problemas tiene la persona? a) Todos los focos brillan menos de lo que deberían si se usara cable con menor resistencia. b) La brillantez de los focos disminuye conforme se aleja de la fuente de energía.

Figura 28.9 (Ejemplo conceptual 28.3) Diagrama de circuito para un conjunto de instalaciones fijas de luces panorámicas conectadas en paralelo a través de los dos alambres de un cable de dos alambres. Los resistores horizontales representan resistencia en los alambres del cable. Los resistores verticales representan las instalaciones fijas de luces.

SOLUCIÓN

En la figura 28.9 aparece un diagrama de circuito para el sistema. Los resistores horizontales con letras como subíndices (como R_A) representan la resistencia de los alambres en el cable entre las instalaciones fijas de luces, y los resistores verticales con números como subíndices (como R_1) representan la resistencia de los portalámparas mismos. Parte del voltaje entre las terminales de la fuente de energía cae a través de los resistores R_A y R_B. En consecuencia, el voltaje a través de los portalámparas R_1 es menor que el voltaje entre las terminales. Existe caída de voltaje adicional a través de los resistores R_C y R_D. En consecuencia, el voltaje a través de las montacargas R_2 es menor de la que hay a través de R_1. Este patrón continúa por la línea de portalámparas, de modo que la opción correcta es b). Cada portalámpara sucesivo tiene un voltaje menor a través de él y resplandece con menos brillo que el anterior.

EJEMPLO 28.4 Encuentre la resistencia equivalente

Cuatro resistores se conectan como se muestra en la figura 28.10a.

A) Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *c*.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que las cargas fluyen en esta combinación desde la izquierda. Todas las cargas deben pasar a través de los primeros dos resistores, pero las cargas se dividen en dos rutas diferentes cuando encuentran la combinación de los resistores de 6.0 Ω y 3.0 Ω.

Categorizar Debido a la naturaleza simple de la combinación de resistores en la figura 28.10, este ejemplo se clasifica para usar las reglas de combinaciones en serie y en paralelo de resistores.

Figura 28.10 (Ejemplo 28.4) La red original de resistores se reduce a una sola resistencia equivalente.

Analizar La combinación de resistores se puede reducir en pasos como se muestra en la figura 28.10.

Encuentre la resistencia equivalente entre *a* y *b* de los resistores de 8.0 Ω y 4.0 Ω, que están en serie:

$$R_{eq} = 8.0\ \Omega + 4.0\ \Omega = 12.0\ \Omega$$

Encuentre la resistencia equivalente entre *b* y *c* de los resistores de 6.0 Ω y 3.0 Ω, que están en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6.0\ \Omega} + \frac{1}{3.0\ \Omega} = \frac{3}{6.0\ \Omega}$$

$$R_{eq} = \frac{6.0\ \Omega}{3} = 2.0\ \Omega$$

El circuito de resistencias equivalentes ahora se parece a la figura 28.10b. Encuentre la resistencia equivalente de *a* a *c*:

$$R_{eq} = 12.0\ \Omega + 2.0\ \Omega = \boxed{14.0\ \Omega}$$

Esta resistencia es un resistor equivalente simple de la figura 28.10c.

B) ¿Cuál es la corriente en cada resistor, si entre *a* y *c* se mantiene una diferencia de potencial de 42 V?

SOLUCIÓN

La corriente en los resistores de 8.0 Ω y 4.0 Ω es la misma porque están en serie. Además, portan la misma corriente que existiría en el resistor equivalente de 14.0 Ω sometido a la diferencia de potencial de 42 V.

Use la ecuación 27.7 ($R = V/I$) y el resultado del inciso A) para encontrar la corriente en los resistores de 8.0 Ω y 4.0 Ω:

$$I = \frac{\Delta V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{42 \text{ V}}{14.0 \ \Omega} = \boxed{3.0 \text{ A}}$$

Iguale los voltajes a través de los resistores en paralelo en la figura 28.10a para encontrar una correspondencia entre las corrientes:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \rightarrow (6.0 \ \Omega)I_1 = (3.0 \ \Omega)I_2 \rightarrow I_2 = 2I_1$$

Use $I_1 + I_2 = 3.0$ A para encontrar I_1:

$$I_1 + I_2 = 3.0 \text{ A} \rightarrow I_1 + 2I_1 = 3.0 \text{ A} \rightarrow I_1 = \boxed{1.0 \text{ A}}$$

Encuentre I_2:

$$I_2 = 2I_1 = 2(1.0 \text{ A}) = \boxed{2.0 \text{ A}}$$

Finalizar Como comprobación final de los resultados, observe que $\Delta V_{bc} = (6.0 \ \Omega)I_1 = (3.0 \ \Omega)I_2 = 6.0$ V y $\Delta V_{ab} = (12.0 \ \Omega)I =$ 36 V; por tanto, $\Delta V_{ac} = \Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} = 42$ V, como debe ser.

EJEMPLO 28.5 Tres resistores en paralelo

Tres resistores están conectados en paralelo, como se muestra en la figura 28.11a. Entre los puntos a y b se mantiene una diferencia de potencial de 18.0 V.

A) Calcule la resistencia equivalente del circuito.

Figura 28.11 (Ejemplo 28.5) a) Tres resistores conectados en paralelo. El voltaje a través de cada resistor es 18.0 V. b) Otro circuito con tres resistores y una batería. ¿Es equivalente al circuito en a)?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 28.11 muestra que se trata de una simple combinación en paralelo de tres resistores.

Categorizar Puesto que los tres resistores están conectados en paralelo, se puede usar la ecuación 28.8 para evaluar la resistencia equivalente.

Analizar Use la ecuación 28.8 para encontrar R_{eq}:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3.00 \ \Omega} + \frac{1}{6.00 \ \Omega} + \frac{1}{9.00 \ \Omega} = \frac{11.0}{18.0 \ \Omega}$$

$$R_{eq} = \frac{18.0 \ \Omega}{11.0} = \boxed{1.64 \ \Omega}$$

B) Encuentre la corriente en cada resistor.

SOLUCIÓN

La diferencia de potencial a través de cada resistor es 18.0 V. Aplique la relación $\Delta V = IR$ para encontrar las corrientes:

$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{18.0 \text{ V}}{3.00 \ \Omega} = \boxed{6.00 \text{ A}}$$

$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{18.0 \text{ V}}{6.00 \ \Omega} = \boxed{3.00 \text{ A}}$$

$$I_3 = \frac{\Delta V}{R_3} = \frac{18.0 \text{ V}}{9.00 \ \Omega} = \boxed{2.00 \text{ A}}$$

C) Calcule la potencia entregada a cada resistor y la potencia total entregada a la combinación de resistores.

SOLUCIÓN

Aplique la relación $\mathcal{P} = I^2R$ a cada resistor y use las corrientes calculadas en el inciso b):

$$3.00\text{-}\Omega: \quad \mathcal{P}_1 = I_1^2R_1 = (6.00\text{ A})^2(3.00\ \Omega) = \boxed{108\text{ W}}$$

$$6.00\text{-}\Omega: \quad \mathcal{P}_2 = I_2^2R_2 = (3.00\text{ A})^2(6.00\ \Omega) = \boxed{54.0\text{ W}}$$

$$9.00\text{-}\Omega: \quad \mathcal{P}_3 = I_3^2R_3 = (2.00\text{ A})^2(9.00\ \Omega) = \boxed{36.0\text{ W}}$$

Finalizar El inciso C) muestra que el resistor más pequeño recibe más potencia. Al sumar las tres cantidades se obtiene una potencia total de 198 W. Este resultado final se pudo haber calculado a partir del inciso A), al considerar la resistencia equivalente del modo siguiente: $\mathcal{P} = (\Delta V)^2/R_{eq} = (18.0\text{ V})^2/\ 1.64\ \Omega = 198\text{ W}$.

¿Qué pasaría si? ¿Y si el circuito fuese como se muestra en la figura 28.11b en lugar de como en la figura 28.11a? ¿Cómo afectaría esto el cálculo?

Respuesta No habría efecto sobre el cálculo. La colocación física de la batería no es importante. En la figura 28.11b la batería todavía mantiene una diferencia de potencial de 18.0 V entre los puntos *a* y *b*, así que los dos circuitos en la figura son eléctricamente idénticos.

28.3 Leyes de Kirchhoff

Se mencionó en en la sección anterior, que es posible simplificar y explicar combinaciones de resistores aplicando la expresión $\Delta V = IR$ y las reglas para las combinaciones en serie y en paralelo de los resistores. Muy a menudo, sin embargo, no es posible simplificar un circuito en una sola espira. El procedimiento para explicar circuitos más complejos se hace posible si se utilizan dos principios conocidos como **leyes de Kirchhoff:**

1. **Ley de la unión.** En cualquier unión, la suma de las corrientes debe ser igual a cero:

$$\sum_{\text{unión}} I = 0 \qquad \textbf{(28.9)}$$

2. **Ley de la espira.** La suma de las diferencias de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier espira de un circuito cerrado debe ser igual a cero:

$$\sum_{\substack{\text{espira}\\\text{cerrada}}} \Delta V = 0 \qquad \textbf{(28.10)}$$

Figura 28.12 a) Ley de la unión de Kirchhoff. La conservación de carga obliga a que todas las cargas que entran en una unión la abandonen. Por lo tanto, $I_1 - I_2 - I_3 = 0$. b) Analogía mecánica de la regla de la unión: la cantidad de agua que fluye de los ramales de la derecha debe ser igual a la cantidad que entra al ramal de la izquierda.

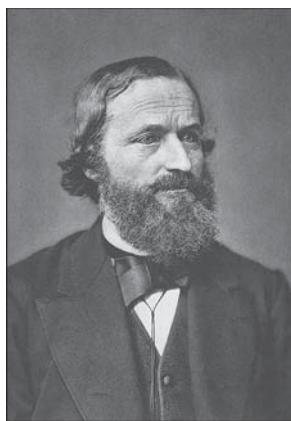
La primera ley de Kirchhoff es un enunciado de la conservación de la carga eléctrica. Todas las cargas que entran en un punto dado en un circuito deben abandonarlo porque la carga no puede acumularse en ese punto. Las corrientes dirigidas hacia dentro de la unión participan en la ley de la unión como $+I$, mientras que las corrientes que salen de una unión están participando con $-I$. Si aplica esta ley a la unión que se muestra en la figura 28.12a, obtiene

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

La figura 28.12b representa una analogía mecánica de esta situación, en la cual el agua fluye a través de una tubería ramificada sin fugas. Ya que el agua no acumula en ningún sitio de la tubería, la cantidad de flujo en el tubo a la izquierda es igual al flujo total en las dos ramificaciones de la derecha.

La segunda ley de Kirchhoff es una consecuencia de la ley de conservación de energía. Imagine que mueve una carga alrededor de una espira de circuito cerrado. Cuando la carga regresa al punto de partida, el sistema carga–circuito debe tener la misma energía total que la que tenía antes de mover la carga. La suma de los incrementos de energía

Figura 28.13 Reglas para determinar las diferencias de potencial a través de un resistor y de una batería. (El supuesto es que la batería no tiene resistencia interna.) Cada elemento del circuito se recorre de *a* hasta *b*, de izquierda a derecha.

conforme la carga pasa a través de los elementos de algún circuito debe ser igual a la suma de las disminuciones de la energía conforme pasa a través de otros elementos. La energía potencial se reduce cada vez que la carga se mueve durante una caída de potencial $-IR$ en un resistor o cada vez que se mueve en dirección contraria a causa de una fuente de fem. La energía potencial aumenta cada vez que la carga pasa a través desde la terminal negativa a la positiva en una batería.

Cuando se aplica la segunda ley de Kirchhoff en la práctica, imagine un *viaje* alrededor del circuito y considere los cambios en el *potencial eléctrico*, en vez de los cambios en la *energía potencial* descritos en el párrafo anterior. Considere el recorrido de los elementos del circuito en la figura 28.13 hacia la derecha. Aplique la convención de signos que sigue cuando utiliza la segunda ley:

- las cargas se mueven del extremo de potencial alto de un resistor hacia el extremo de potencial bajo; si un resistor se atraviesa en la dirección de la corriente, la diferencia de potencial ΔV a través del resistor es $-IR$ (figura 28.13a).
- Si un resistor se recorre en la dirección *opuesta* a la corriente, la diferencia de potencial ΔV a través del resistor es $+IR$ (figura 28.13b).
- Si una fuente de fem (suponiendo que tenga una resistencia interna igual a cero) es recorrida en la dirección de la fem (de negativo a positivo), la diferencia de potencial ΔV es $+\mathcal{E}$ (figura 28.13c).
- Si una fuente de fem (suponiendo que tenga una resistencia interna igual a cero) es recorrida en la dirección opuesta a la fem (de positivo a negativo), la diferencia de potencial ΔV es $-\mathcal{E}$ (figura 28.13d).

Existen límites en el número de veces que puede aplicar con éxito las leyes de Kirchhoff al analizar un circuito. Puede utilizar la ley de la unión con tanta frecuencia como lo requiera, siempre y cuando cada vez que escriba una ecuación incluya en ella una corriente que no haya sido utilizada previamente en alguna ecuación de la regla de la unión. En general, el número de veces que puede utilizar la ley de la unión es una menos que el número de puntos de unión en el circuito. Puede aplicar la ley de la espira las veces que lo necesite, siempre que aparezca en cada nueva ecuación un nuevo elemento del circuito (un resistor o una batería) o una nueva corriente. En general, **para resolver un problema de circuito en particular, el número de ecuaciones independientes que se necesitan para obtener las dos leyes es igual al número de corrientes desconocidas.**

Las redes complejas que contienen muchas espiras y uniones generan un gran número de ecuaciones lineales independientes y, por consiguiente, un gran número de incógnitas. Este tipo de casos pueden manejarse formalmente mediante el uso del álgebra matricial. También puede utilizar programas de computadora para resolver las incógnitas.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las leyes de Kirchhoff. En todos los casos, el supuesto es que los circuitos han alcanzado condiciones de estabilidad, esto es, las corrientes en las diversas ramas son constantes. **Cualquier capacitor en un circuito funciona como una rama abierta;** es decir, la corriente en la rama que contiene al capacitor es igual a cero bajo condiciones de estado estable.

AIP ESVA/W.F. Colección Meggers.

GUSTAV KIRCHHOFF

Físico alemán (1824-1887)

Kirchhoff, un profesor de Heidelberg, y Robert Bunsen inventaron el espectroscopio e iniciaron la espectroscopia, la cual estudiará en el capítulo 42. Descubrieron el cesio y el rubidio e inventaron la espectroscopia astronómica.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Leyes de Kirchhoff**

El siguiente procedimiento se recomienda para resolver problemas que involucran circuitos que no se pueden reducir por las reglas para combinar resistores en serie o en paralelo.

1. *Conceptualizar.* Estudie el diagrama de circuito y asegúrese de que reconoce todos los elementos en el circuito. Identifique la polaridad de cada batería e intente imaginar las direcciones en las que existiría la corriente en las baterías.
2. *Categorizar.* Determine si el circuito se puede reducir mediante la combinación de resistores en serie y en paralelo. Si es así, use las técnicas de la sección 28.2. Si no, aplique las leyes de Kirchhoff de acuerdo con la siguiente etapa: *analizar.*
3. *Analizar.* Asigne etiquetas a todas las cantidades conocidas y símbolos a todas las cantidades desconocidas. Debe asignar *direcciones* a las corrientes en cada parte del circuito.

Aunque la asignación de direcciones de corriente es arbitraria, debe adherirse *rigurosamente* a las direcciones que asigne cuando aplique leyes de Kirchhoff.

Aplique la ley de las uniones (primera regla de Kirchhoff) a todas las uniones en el circuito, excepto una. Ahora aplique la ley de la espira (segunda regla de Kirchhoff) a tantas espiras en el circuito como se necesite para obtener, en combinación con las ecuaciones de la ley de las uniones, tantas ecuaciones como incógnitas haya. Para aplicar esta ley, debe elegir una dirección en la cual viajar alrededor de la espira (ya sea en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario) e identificar correctamente el cambio en potencial conforme cruce cada elemento. ¡Tenga cuidado con los signos!

Resuelva las ecuaciones simultáneamente para las cantidades desconocidas.

4. *Finalizar.* Compruebe sus respuestas numéricas para consistencia. No se alarme si alguna de las corrientes resultantes tiene valor negativo. Esto sólo significa que supuso incorrectamente la dirección de dicha corriente, pero *su magnitud será correcta.*

EJEMPLO 28.6 Circuito de una sola espira

Un circuito de una sola espira contiene dos resistores y dos baterías, como se muestra en la figura 28.14. (Desprecie las resistencias internas de las baterías.) Encuentre la corriente en el circuito.

Figura 28.14 (Ejemplo 28.6) Circuito en serie que contiene dos baterías y dos resistores, donde las polaridades de las baterías son opuestas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 28.14 muestra las polaridades de las baterías y una suposición de la dirección de la corriente.

Categorizar No se necesitan las leyes de Kirchhoff para analizar este circuito simple, pero úselas de cualquier forma, simplemente para ver cómo se aplican. No hay uniones en este circuito de espira simple; debido a eso, la corriente es la misma en todos los elementos.

Analizar Suponga que la corriente es en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 28.14. Al recorrer el circuito en la dirección de las manecillas del reloj, comenzando en a, se ve que $a \rightarrow b$ representa una diferencia de potencial de $+\mathcal{E}_1$, $b \rightarrow c$ representa una diferencia de potencial de $-IR_1$, $c \rightarrow d$ representa una diferencia de potencial de $-\mathcal{E}_2$, y $d \rightarrow a$ representa una diferencia de potencial de $-IR_2$.

Aplique la ley de la espira de Kirchhoff a la espira simple del circuito:

$$\sum \Delta V = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$$

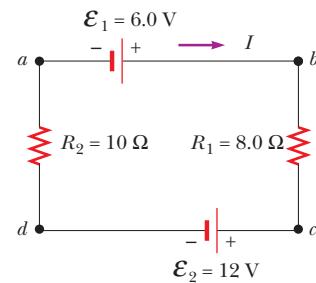
Resuelva para I y use los valores conocidos en la figura 28.14:

$$1) \quad I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{6.0\text{ V} - 12\text{ V}}{8.0\ \Omega + 10\ \Omega} = -0.33\text{ A}$$

Finalizar El signo negativo para I indica que la dirección de la corriente es opuesta a la dirección supuesta. Las fems en el numerador se restan porque las baterías en la figura 28.14 tienen polaridades opuestas. Las resistencias en el denominador se suman porque los dos resistores están en serie.

¿Qué pasaría si? ¿Y si invirtiera la polaridad de la batería de 12.0 V? ¿Cómo afectaría esto al circuito?

Respuesta Aunque podría repetir los cálculos con las leyes de Kirchhoff, en vez de ello examine la ecuación 1) y modifíquela en concordancia. Ya que las polaridades de las dos baterías ahora están en la misma dirección, los signos de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son iguales y la ecuación 1) se convierte en

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{6.0\text{ V} + 12\text{ V}}{8.0\ \Omega + 10\ \Omega} = 1.0\text{ A}$$

EJEMPLO 28.7 **Un circuito de varias espiras**

Encuentre las corrientes I_1, I_2 e I_3 en el circuito que se muestra en la figura 28.15.

Figura 28.15 (Ejemplo 28.7) Circuito que contiene varias ramas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar No se puede simplificar el circuito mediante las reglas asociadas con las combinaciones de resistencias en serie y en paralelo. (Si la batería de 10.0 V no estuviera presente, podría reducir el circuito restante con combinaciones en serie y en paralelo.)

Categorizar Ya que el circuito no es una combinación simple de resistencias en serie y en paralelo, este es un problema en el que debe usar las leyes de Kirchhoff.

Analizar Elija arbitrariamente las direcciones de las corrientes como se marcan en la figura 28.15.

Aplique la ley de la unión de Kirchhoff a la unión c:

$$1)\quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Ahora tiene una ecuación con tres incógnitas: I_1, I_2 e I_3. Existen tres espiras en el circuito: *abcda*, *befcb* y *aefda*. Sólo necesita dos ecuaciones de espira para determinar las corrientes desconocidas. (La tercera ecuación de espira no daría nueva información.) Elija recorrer estas espiras en la dirección de las manecillas del reloj. Aplique la ley de la espira de Kirchhoff a las espiras *abcda* y *befcb*:

$$abcda:\ 2)\quad 10.0\text{ V} - (6.0\ \Omega)I_1 - (2.0\ \Omega)I_3 = 0$$

$$befcb:\quad -(4.0\ \Omega)I_2 - 14.0\text{ V} + (6.0\ \Omega)I_1 - 10.0\text{ V} = 0$$

$$3)\quad -24.0\text{ V} + (6.0\ \Omega)I_1 - (4.0\ \Omega)I_2 = 0$$

Resuelva la ecuación 1) para I_3 y sustituya en la ecuación 2):

$$10.0\text{ V} - (6.0\ \Omega)I_1 - (2.0\ \Omega)(I_1 + I_2) = 0$$

$$4)\quad 10.0\text{ V} - (8.0\ \Omega)I_1 - (2.0\ \Omega)I_2 = 0$$

Multiplique cada término en la ecuación 3) por 4 y cada término en la ecuación 4) por 3:

$$5)\quad -96.0\text{ V} + (24.0\ \Omega)I_1 - (16.0\ \Omega)I_2 = 0$$

$$6)\quad 30.0\text{ V} - (24.0\ \Omega)I_1 - (6.0\ \Omega)I_2 = 0$$

Sume la ecuación 6) a la ecuación 5) para eliminar I_1 y encontrar I_2:

$$-66.0\text{ V} - (22.0\ \Omega)I_2 = 0$$

$$I_2 = \boxed{-3.0\text{ A}}$$

Use este valor de I_2 en la ecuación 3) para encontrar I_1:

$$-24.0\text{ V} + (6.0\ \Omega)I_1 - (4.0\ \Omega)(-3.0\text{ A}) = 0$$

$$-24.0\text{ V} + (6.0\ \Omega)I_1 + 12.0\text{ V} = 0$$

$$I_1 = \boxed{2.0\text{ A}}$$

Use la ecuación 1) para encontrar I_3:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2.0\text{ A} - 3.0\text{ A} = \boxed{-1.0\text{ A}}$$

Finalizar Ya que los valores para I_2 e I_3 son negativos, las direcciones de estas corrientes son opuestas a las indicadas en la figura 28.15. Los valores numéricos para las corrientes son correctos. A pesar de la dirección incorrecta, *debe* continuar usando estos valores negativos en cálculos consecutivos porque las ecuaciones se establecieron con la elección de dirección original. ¿Qué habría ocurrido si las direcciones se hubiesen dejado como en la figura 28.15, pero el recorrido de las espiras fuese en dirección opuesta?

28.4 Circuitos *RC*

Hasta ahora ha analizado circuitos de corriente directa en donde la corriente es constante. En los circuitos de CD que contienen capacitores, la corriente siempre está en la misma dirección pero puede variar en el tiempo. Se le llama **circuito *RC*** a un circuito que contiene una combinación en serie de un resistor y un capacitor.

Carga de un capacitor

La figura 28.16 muestra un circuito *RC* simple en serie. Se supone que el capacitor de este circuito está inicialmente descargado. No existirá corriente en tanto el interruptor esté abierto (figura 28.16a). No obstante, si el interruptor se mueve hacia a en $t = 0$ (figura 28.16b), la carga comenzará a fluir, estableciendo una corriente en el circuito, y el capacitor comenzará a cargarse.[3] Advierta que durante la carga, las cargas no saltan de una placa a otra del capacitor porque el espacio entre las placas representa un circuito abierto. En vez de eso, la carga se transfiere de una placa a otra y a sus alambres de conexión gracias al campo eléctrico que la batería establece en los alambres, hasta que el capacitor queda completamente cargado. Conforme las placas se cargan, la diferencia de potencial aplicada al capacitor aumenta. El valor de la carga máxima en las placas dependerá del voltaje de la batería. Una vez que se alcanza la carga máxima, la corriente en el circuito es igual a cero, ya que la diferencia de potencial aplicada al capacitor es igual a la suministrada por la batería.

Figura 28.16
a) Un capacitor en serie con resistor, interruptor y batería. b) Cuando el interruptor se mueve a la posición a, el capacitor comienza a cargarse. c) Cuando el interruptor se mueve a la posición b, el capacitor se descarga.

Para analizar cuantitativamente este circuito, aplique la regla de la espira de Kirchhoff al circuito una vez que el interruptor está en la posición a. Recorriendo la espira de la figura 28.16c en el sentido de las manecillas del reloj, da

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0 \qquad \textbf{(28.11)}$$

donde q/C es la diferencia de potencial aplicada al capacitor e IR es la diferencia de potencial aplicada al resistor. Para los signos de $\mathcal{E}$ e IR, se utilizan las reglas convencionales analizadas con anterioridad. El capacitor se recorre en la dirección de la placa positiva a la negativa; esto representa una reducción de potencial. Por lo tanto, en la ecuación 28.11 se utiliza un signo negativo para la diferencia de potencial. Observe que q e I son valores *instantáneos* que dependen del tiempo (en comparación con los valores de estado estacionario) conforme el capacitor se carga.

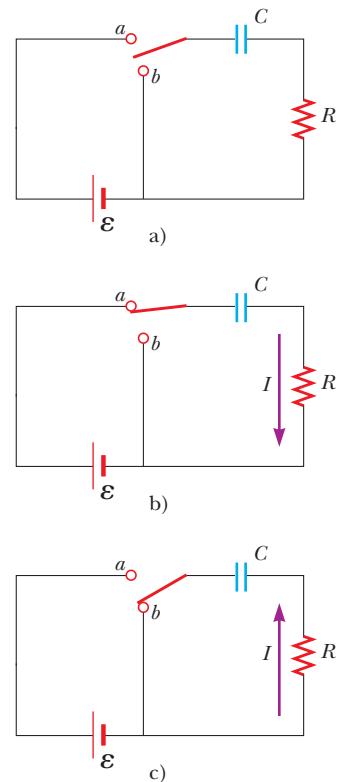
Utilice la ecuación 28.11 para determinar la corriente inicial en el circuito y la carga máxima del capacitor. En el instante en que se cierra el interruptor ($t = 0$), la carga del capacitor es igual a cero, y en la ecuación 28.11 aparece que la corriente inicial I_i en el circuito es su valor máximo y se conoce por

$$I_i = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{(corriente en } t = 0) \qquad \textbf{(28.12)}$$

En este momento, la diferencia de potencial de las terminales de la batería aparece por completo aplicada al resistor. Después, cuando el capacitor ha sido cargado a su valor máximo Q, las cargas dejan de fluir, la corriente en el circuito es igual a cero, y la diferencia de potencial de las terminales de la batería aparece aplicada al capacitor. Al sustituir $I = 0$ en la ecuación 28.11 se obtiene la carga máxima del capacitor:

$$Q = C\mathcal{E} \quad \text{(carga máxima)} \qquad \textbf{(28.13)}$$

Para determinar expresiones analíticas que muestren cómo la carga y la corriente dependen del tiempo, resuelva la ecuación 28.11, una sola ecuación con dos variables, q e I. En todas las partes de un circuito en serie la corriente debe ser igual. Por lo tanto, la corriente en la resistencia R debe ser la misma que la corriente entre las placas del capacitor y los alambres conectados a ellas. Esta corriente es igual a la relación de cambio en el tiempo de la carga en las placas del capacitor. Por lo tanto, en la ecuación 28.11 reemplace $I = dq/dt$ y simplifica la ecuación:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

[3] En análisis previos sobre los capacitores, supuso que se encuentran en una condición de estado estacionario, esto es, no hay una corriente presente en ninguna de las ramas del circuito que contiene un capacitor. Ahora considere el caso *antes* de que se llegue a la condición de estado estacionario; en esta situación, las cargas están en movimiento y existe una corriente en los alambres conectados al capacitor.

Para encontrar una expresión para q, resuelva esta ecuación diferencial separable. Primero combine los términos del lado derecho:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E}}{RC} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\mathcal{E}}{RC}$$

Multiplique por dt y divida entre $q - C\mathcal{E}$

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

Integre esta expresión, donde $q = 0$ en $t = 0$,

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

A partir de la definición de los logaritmos naturales, escriba esta expresión como sigue

La carga como una función del tiempo para un capacitor cargándose ▶

$$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC}) \qquad \textbf{(28.14)}$$

donde e es la base de los logaritmos naturales y se ha efectuado la sustitución de la ecuación 28.13.

Puede encontrar la corriente de carga diferenciando la ecuación 28.14 respecto al tiempo. Utilizando $I = dq/dt$, encuentre que

La corriente como una función del tiempo para un capacitor cargándose ▶

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.15)}$$

Figura 28.17 a) Gráfica de la carga de un capacitor en función del tiempo para el circuito que se muestra en la figura 28.16. Después de un intervalo de tiempo igual a una constante de tiempo τ, la carga es 63.2% del valor máximo de $C\mathcal{E}$. La carga se acerca a su valor máximo conforme t se acerca al infinito. b) Gráfica de la corriente en función del tiempo para el circuito que se muestra en la figura 28.16. La corriente tiene su valor máximo $I_i = \mathcal{E}/R$ en $t = 0$ y decae a cero de manera exponencial conforme t se acerca al infinito. Después de un intervalo de tiempo igual a la constante de tiempo τ, la corriente es de 36.8% de su valor inicial.

En la figura 28.17 se muestran las gráficas de la carga y de la corriente de un capacitor en función del tiempo. Observe que la carga es igual a cero en $t = 0$ y se acerca al valor máximo $C\mathcal{E}$ en $t \to \infty$. La corriente tiene un valor máximo $I_i = \mathcal{E}/R$ en $t = 0$, y decae exponencialmente hasta cero en $t \to \infty$. La cantidad RC, que aparece en los exponentes de las ecuaciones 28.14 y 28.15, se llama la **constante de tiempo** τ del circuito.

$$\tau = RC \qquad \textbf{(28.16)}$$

La constante de tiempo representa el intervalo de tiempo durante el cual la corriente disminuye hasta $1/e$ de su valor inicial; es decir, en un intervalo de tiempo τ, la corriente decrece a $I = e^{-1}I_i = 0.368I_i$.En un intervalo de tiempo 2τ, la corriente decrece a $I = e^{-2}I_i = 0.135I_i$, y así sucesivamente. De igual manera, en un intervalo de tiempo τ, la carga aumenta de cero a $C\mathcal{E}[1 - e^{-1}] = 0.632C\mathcal{E}$.

El siguiente análisis dimensional muestra que τ tiene unidades de tiempo:

$$[\tau] = [RC] = \left[\left(\frac{\Delta V}{I}\right)\left(\frac{Q}{\Delta V}\right)\right] = \left[\frac{Q}{Q/\Delta t}\right] = [\Delta t] = \mathrm{T}$$

Puesto que $\tau = RC$ tiene unidades de tiempo, la combinación τ/RC no tiene dimensiones, como debe ser un exponente de e en las ecuaciones 28.14 y 28.15.

La energía de salida de la batería cuando el capacitor está totalmente cargado es $Q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$. Una vez cargado el capacitor, la energía almacenada en el mismo es $\frac{1}{2}Q\mathcal{E} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$, que es exactamente la mitad de la energía de salida de la batería. Se deja como problema (problema 52) demostrar que la mitad restante de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en el resistor.

Descarga de un capacitor

Imagine que el capacitor en la figura 28.16b está completamente cargado. A través del capacitor hay una diferencia de potencial Q/C y hay diferencia de potencial cero a través del resistor porque $I = 0$. Si el interruptor ahora se mueve a la posición b en $t = 0$ (figura 28.16c), el capacitor comienza a descargarse a través del resistor.

En algún tiempo t durante la descarga, la corriente en el circuito es I y la carga en el capacitor es q. El circuito de la figura 28.16c es el mismo que el circuito en la figura 28.16b, excepto por la ausencia de la batería. Por lo tanto, de la ecuación 28.11 se elimina la fem $\mathcal{E}$ para obtener la ecuación de la espira adecuada para el circuito de la figura 28.16c:

$$-\frac{q}{C} - IR = 0 \qquad \textbf{(28.17)}$$

Cuando se sustituye $I = dq/dt$ en esta expresión, se convierte en

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

Al integrar esta expresión con $q = Q$ en $t = 0$ se obtiene

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Qe^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.18)}$$

◀ Carga como función del tiempo para un capacitor que se descarga

Al diferenciar la ecuación 28.18 respecto al tiempo se obtiene la corriente instantánea como función del tiempo:

$$I(t) = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.19)}$$

◀ Corriente como función del tiempo para un capacitor que se descarga

donde $Q/RC = I_i$ es la corriente inicial. El signo negativo indica que, conforme el capacitor se descarga, la dirección de la corriente es opuesta a su dirección cuando el capacitor se estaba cargando. (Compare las direcciones de corriente en las figuras 28.16b y 28.16c.) Tanto la carga en el capacitor como la corriente decaen exponencialmente a una cantidad caracterizada por la constante de tiempo $\tau = RC$.

Pregunta rápida 28.5 Considere el circuito de la figura 28.18 y suponga que la batería no tiene resistencia interna. **i)** Justo después de cerrar el interruptor, ¿cuál es la corriente en la batería? a) 0, b) $\mathcal{E}/2R$, c) $2\mathcal{E}/R$, d) $\mathcal{E}/R$, e) imposible de determinar. **ii)** Después de un tiempo muy largo, ¿cuál es la corriente en la batería? Elija entre las mismas opciones.

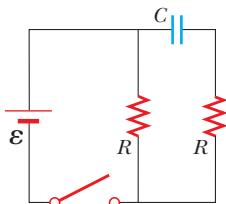



Figura 28.18 (Pregunta rápida 28.5) ¿Cómo varía la corriente después de cerrar el interruptor?

EJEMPLO CONCEPTUAL 28.8 Limpiaparabrisas intermitente

Muchos automóviles están equipados con limpiaparabrisas que pueden funcionar intermitentemente durante una lluvia ligera. ¿De qué forma la operación de tales limpiadores depende de la carga y descarga de un capacitor?

SOLUCIÓN

Los limpiadores son parte de un circuito *RC* cuya constante de tiempo puede variar al seleccionar diferentes valores de R a través de un interruptor de posiciones múltiples. Conforme aumenta el voltaje a través del capacitor, el capacitor alcanza

un punto en el que se descarga y activa los limpiadores. Después el circuito comienza otro ciclo de carga. El intervalo de tiempo entre barridos individuales de los limpiadores está determinado por el valor de la constante de tiempo.

EJEMPLO 28.9 Carga de un capacitor en un circuito *RC*

Un capacitor sin carga y un resistor se conectan en serie a una batería, como se muestra en la figura 28.16, donde $\mathcal{E} = 12.0$ V, $C = 5.00\ \mu$F y $R = 8.00 \times 10^5\ \Omega$. El interruptor se mueve a la posición *a*. Encuentre la constante de tiempo del circuito, la carga máxima en el capacitor, la corriente máxima en el circuito y la carga y la corriente como funciones del tiempo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 28.16 e imagine mover el interruptor a la posición *a*, como se muestra en la figura 28.16b. Al hacerlo, el capacitor comienza a cargarse.

Categorizar Evalúe los resultados con las ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la constante de tiempo del circuito a partir de la ecuación 28.16:

$$\tau = RC = (8.00 \times 10^5\ \Omega)(5.00 \times 10^{-6}\ \text{F}) = \boxed{4.00\ \text{s}}$$

Evalúe la carga máxima en el capacitor a partir de la ecuación 28.13:

$$Q = C\mathcal{E} = (5.00\ \mu\text{F})(12.0\ \text{V}) = \boxed{60.0\ \mu\text{C}}$$

Evalúe la corriente máxima en el circuito a partir de la ecuación 28.12:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12.0\ \text{V}}{8.00 \times 10^5\ \Omega} = \boxed{15.0\ \mu\text{A}}$$

Use estos valores en las ecuaciones 28.14 y 28.15 para encontrar la carga y la corriente como funciones del tiempo:

$$q(t) = \boxed{(60.0\ \mu\text{C})(1 - e^{-t/4.00\ \text{s}})}$$

$$I(t) = \boxed{(15.0\ \mu\text{A})e^{-t/4.00\ \text{s}}}$$

EJEMPLO 28.10 Descarga de un capacitor en un circuito *RC*

Considere un capacitor de capacitancia *C* que se descarga a través de un resistor de resistencia *R*, como se muestra en la figura 28.16c.

A) ¿Después de cuántas constantes de tiempo la carga en el capacitor es un cuarto de su valor inicial?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 28.16 e imagine mover el interruptor a la posición *b*, como se muestra en la figura 28.16c. Al hacerlo, el capacitor comienza a descargarse.

Categorizar El ejemplo se clasifica como uno que involucra un capacitor que se descarga y se usan las ecuaciones adecuadas.

Analizar Sustituya $q(t) = Q/4$ en la ecuación 28.18:

$$\frac{Q}{4} = Qe^{-t/RC}$$

$$\tfrac{1}{4} = e^{-t/RC}$$

Tome el logaritmo de ambos lados de la ecuación y resuelva para t:

$$-\ln 4 = -\frac{t}{RC}$$

$$t = RC \ln 4 = 1.39RC = \boxed{1.39\tau}$$

B) La energía almacenada en el capacitor disminuye con el tiempo conforme el capacitor se descarga. ¿Después de cuántas constantes de tiempo la energía almacenada es un cuarto de su valor inicial?

SOLUCIÓN

Use las ecuaciones 28.11 y 28.18 para expresar la energía almacenada en el capacitor en cualquier tiempo t:

$$1)\quad U(t) = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}e^{-2t/RC}$$

Sustituya $U(t) = \frac{1}{4}(Q^2/2C)$ en la ecuación 1):

$$\frac{1}{4}\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}e^{-2t/RC}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-2t/RC}$$

Tome el logaritmo de ambos lados de la ecuación y resuelva para t:

$$-\ln 4 = -\frac{2t}{RC}$$

$$t = \frac{1}{2}RC\ \ln 4 = 0.693RC = \boxed{0.693\tau}$$

Finalizar Observe que, ya que la energía depende del cuadrado de la carga, la energía en el capacitor cae más rápidamente que la carga en el capacitor.

¿Qué pasaría si? ¿Y si quiere describir el circuito en términos del intervalo de tiempo requerido para que la carga caiga a la mitad de su valor original, en lugar de hacerlo por la constante de tiempo τ? Eso daría un parámetro para el circuito, llamado *vida media* $t_{1/2}$. ¿Cómo se relaciona la vida media con la constante de tiempo?

Respuesta En una vida media, la carga cae de Q a $Q/2$. Por lo tanto, de la ecuación 28.18,

$$\frac{Q}{2} = Qe^{-t_{1/2}/RC} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2} = e^{-t_{1/2}/RC}$$

lo que conduce a

$$t_{1/2} = 0.693\tau$$

El concepto de vida media será importante cuando estudie decaimiento nuclear en el capítulo 44. El decaimiento radioactivo de una muestra inestable se comporta de una forma matemáticamente similar a una capacitor que se descarga en un circuito *RC*.

EJEMPLO 28.11 Energía entregada a un resistor

Un capacitor de 5.00 μF se carga a una diferencia de potencial de 800 V y luego se descarga a través de un resistor. ¿Cuánta energía se entrega al resistor en el intervalo de tiempo requerido para descargar completamente el capacitor?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En el ejemplo 28.10 se consideró la disminución de energía en un capacitor que se descarga a un valor de un cuarto de la energía inicial. En este ejemplo, el capacitor se descarga por completo.

Categorizar Resuelva este ejemplo a partir de dos planteamientos. El primero es modelar el circuito como un sistema aislado. Ya que la energía en un sistema aislado se conserva, la energía potencial eléctrica inicial U_C almacenada en el capacitor se transforma en energía interna $E_{int} = E_R$ en el resistor. El segundo planteamiento es modelar el resistor como un sistema no aislado. La energía entra al resistor mediante transmisión eléctrica desde el capacitor, lo que causa un aumento en la energía interna del resistor.

Analizar Comience con el planteamiento de sistema aislado.

Escriba la reducción apropiada de la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2:

$$\Delta U + \Delta E_{int} = 0$$

Sustituya los valores inicial y final de las energías:

$$(0 - U_C) + (E_{int} - 0) = 0 \quad\rightarrow\quad E_R = U_C$$

Use la ecuación 28.11 para la energía potencial eléctrica en el capacitor:

$$E_R = \tfrac{1}{2}C\boldsymbol{\varepsilon}^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$E_R = \tfrac{1}{2}(5.00 \times 10^{-6}\text{ F})(800\text{ V})^2 = \boxed{1.60\text{ J}}$$

El segundo planteamiento, que es más difícil pero tal vez más instructivo, es notar que, conforme el capacitor se descarga a través del resistor, la rapidez a la que se entrega la energía al resistor por transmisión eléctrica es I^2R, donde I es la corriente instantánea conocida por la ecuación 28.19.

Evalúe la energía entregada al resistor al integrar la potencia en todo el tiempo porque transcurre un intervalo de tiempo infinito para que el capacitor se descargue por completo:

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} \rightarrow E_R = \int_0^\infty \mathcal{P}\,dt$$

Sustituya para la potencia entregada al resistor:

$$E_R = \int_0^\infty I^2R\,dt$$

Sustituya para la corriente a partir de la ecuación 28.19:

$$E_R = \int_0^\infty \left(-\frac{Q}{RC}e^{-t/RC}\right)^2 R\,dt = \frac{Q^2}{RC^2}\int_0^\infty e^{-2t/RC}\,dt = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC}\,dt$$

Sustituya el valor de la integral, que es $RC/2$ (problema 30):

$$E_R = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{R}\left(\frac{RC}{2}\right) = \tfrac{1}{2}C\boldsymbol{\varepsilon}^2$$

Finalizar Este resultado concuerda con el obtenido con el planteamiento de sistema aislado, como debe ser. Puede usar este segundo planteamiento para encontrar la energía total entregada al resistor en *cualquier* tiempo después de que el interruptor se cierra, simplemente sustituya el límite superior en la integral con dicho valor específico de t.

28.5 Medidores eléctricos

En esta sección se explican diferentes medidores eléctricos que se usan en la industria eléctrica y electrónica para hacer medidas eléctricas.

El galvanómetro

El **galvanómetro** es el componente principal en los medidores analógicos para medir la corriente y el voltaje. (Muchos medidores analógicos siguen en uso a pesar de que en la actualidad los medidores digitales, que funcionan según un principio diferente, son los que tienen un amplio uso.) Un tipo común, el *galvanómetro D'Arsonval,* está constituido por una bobina de alambre montada de tal manera que puede girar libremente alrededor de un pivote en un campo magnético producido por un imán permanente. En consecuencia, la deflexión de una aguja unida a la bobina es proporcional a la corriente en el galvanómetro. Una vez que el instrumento está calibrado apropiadamente, puede utilizarse junto con otros elementos del circuito para medir ya sea corrientes o diferencias de potencial.

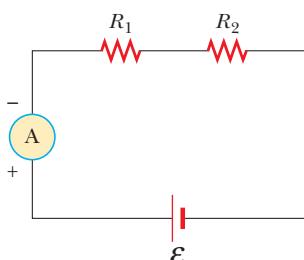



Figura 28.19 La corriente puede medirse con un amperímetro conectado en serie con los elementos en los que se desea medirla. Un amperímetro ideal tiene una resistencia igual a cero.

El amperímetro

Se trata de un aparato que mide la corriente. Las cargas que constituyen la corriente a medir deben pasar directamente a través del **amperímetro,** por lo que éste debe estar conectado en serie con los otros elementos del circuito, como se muestra en la figura 28.19. Cuando se utiliza un amperímetro para medir corrientes directas, debe conectarse de tal manera que las cargas entren al instrumento por la terminal positiva y salgan por la negativa.

De manera ideal, un amperímetro debe tener una resistencia cero para que la corriente a medir no sea alterada. En el circuito que se muestra en la figura 28.19, esta condición requiere que la resistencia del amperímetro sea mucho menor que $R_1 + R_2$. Porque cualquier amperímetro siempre tiene algo de resistencia interna, su presencia en un circuito hace que la corriente sea ligeramente menor a la que tendría en ausencia del medidor.

Un galvanómetro común representativo a menudo no es adecuado para utilizarse como un amperímetro, principalmente porque tiene una resistencia de alrededor de 60 Ω. Una resistencia de amperímetro de esa magnitud modifica de manera considerable la corriente en un circuito. Considere el siguiente ejemplo. La corriente en un circuito en serie sencillo que contiene una batería de 3 V y un resistor de 3 Ω es de 1 A. Si inserta un galvanómetro de 60 Ω en este circuito con la finalidad de medir la corriente, ¡la resistencia total se convierte en 63 Ω y la corriente se reduce a 0.048 A!

Un segundo factor que limita el uso de un galvanómetro como amperímetro es el hecho de que un galvanómetro representativo da una deflexión de tamaño natural para corrientes del orden de 1 mA o menos. En consecuencia, no puede utilizarse directamente para medir corrientes mayores que este valor. Sin embargo, puede convertirse en un amperímetro útil si se coloca un resistor de desviación R_p en paralelo con el galvanómetro, como se muestra en la figura 28.20. El valor de R_p debe ser mucho menor que la resistencia del galvanómetro para que la mayor parte de la corriente a medir se dirija al resistor de desviación.

Galvanómetro

60 Ω

R_p

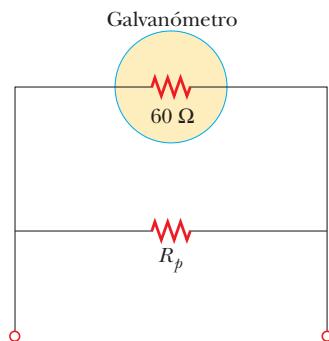



Figura 28.20 Aquí se representa un galvanómetro mediante su resistencia interna de 60 Ω. Cuando un galvanómetro se utiliza como amperímetro, se conecta un resistor de desviación R_p en paralelo con el galvanómetro.

El voltímetro

Al aparato que mide la diferencia de potencial se le llama **voltímetro.** La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en un circuito se mide al unir las terminales del voltímetro entre estos puntos sin abrir el circuito, como se muestra en la figura 28.21. La diferencia de potencial aplicada al resistor R_2 se mide al conectar el voltímetro en paralelo con R_2. De nuevo, es necesario tener cuidado con la polaridad del instrumento. La terminal positiva del voltímetro debe estar conectada al extremo del resistor que tenga el potencial más alto, y la terminal negativa al extremo del resistor con menor potencial.

Un voltímetro ideal tiene una resistencia infinita, así que no existe corriente en él. En la figura 28.21, este estado requiere que el voltímetro tenga una resistencia mucho mayor a R_2. En la práctica, si no se cumple esta condición, deberán hacerse correcciones en función de la resistencia del voltímetro.

Un galvanómetro puede utilizarse como voltímetro al añadir un resistor externo R_s en serie, como se muestra en la figura 28.22. En este caso, el resistor externo deberá tener un valor mucho mayor que la resistencia del galvanómetro para asegurar que el galvanómetro no afecta de manera significativa el voltaje que está siendo medido.

© Thomson Learning/Charles D. Winters

Multímetro digital aplicado para medir un voltaje a través de un elemento de circuito.

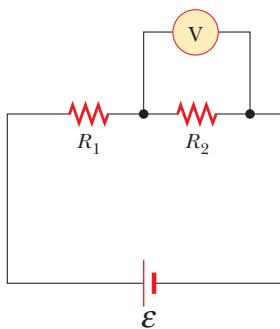



Figura 28.21 La diferencia de potencial a través de un resistor puede medirse con un voltímetro conectado en paralelo con el resistor. Un voltímetro ideal tiene una resistencia infinita.

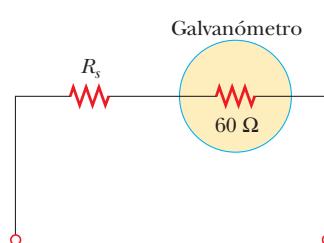



Figura 28.22 Cuando el galvanómetro es utilizado como un voltímetro, se le conecta un resistor R_s en serie con el galvanómetro.

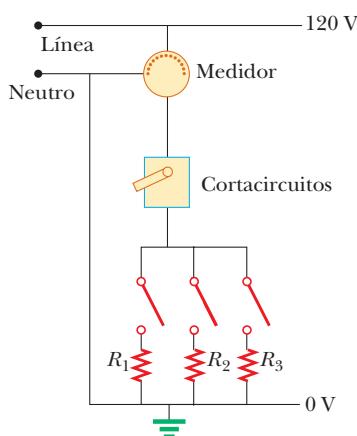



Figura 28.23 Diagrama de alambrado de un circuito doméstico. Las resistencias representan aparatos electrodomésticos o algún otro dispositivo que funciona con un voltaje aplicado de 120 V.

28.6 Cableado doméstico y seguridad eléctrica

Muchas consideraciones son importantes en el diseño del sistema eléctrico de una casa que proporcionará servicio eléctrico adecuado para los ocupantes mientras maximiza su seguridad. En esta sección se discuten algunos aspectos de un sistema eléctrico doméstico.

Cableado doméstico

En una instalación convencional, la compañía eléctrica distribuye energía eléctrica a los hogares por medio de un par de alambres que conectan cada casa en paralelo. Un alambre se conoce como *alambre de corriente,*[4] como se ve en la figura 28.23, y el otro como *alambre neutro* o *de tierra.* El alambre neutro está a tierra; es decir, su potencial eléctrico se supone igual a cero. La diferencia de potencial entre los alambres de corriente y el neutro es de cerca de 120 V. Este voltaje es alternante con el tiempo, y el potencial del alambre de corriente oscila en relación con la tierra. Gran parte de lo aprendido hasta ahora sobre el estado fem constante (corriente directa) puede aplicarse también a la corriente alterna que las compañías de energía eléctrica suministran a los negocios y a los hogares. (El voltaje y la corriente alternos se analizan en el capítulo 33.)

A fin de registrar el consumo de energía de la casa, un medidor se conecta en serie con el alambre de corriente que entra en ella. Después del medidor, el alambre se divide para que existan varios circuitos separados en paralelo distribuidos por toda la casa. Cada circuito contiene un cortacircuitos (o, en instalaciones más antiguas, un fusible). El alambre y el cortacircuitos correspondiente a cada circuito son cuidadosamente seleccionados para que cubran las necesidades de corriente de dicho circuito. Si éste debe soportar una corriente tan grande como 30 A, deberán seleccionarse un alambre grueso y un cortacircuitos apropiado para manejar esta corriente. Un circuito que se utiliza para alimentar sólo lámparas y pequeños artefactos domésticos a menudo sólo requiere 20 A. Cada circuito tiene su propio cortacircuitos para proteger esta parte del sistema eléctrico de la casa.

Como ejemplo, imagine un circuito en el cual están conectados un tostador, un microondas y una cafetera (que corresponden a R_1, R_2 y R_3 de la figura 28.23). Al utilizar la expresión $\mathcal{P} = I\,\Delta V$ puede calcular la corriente en cada aparato. El tostador, nominalmente de 1000 W, consume una corriente de 1000 W/120 V = 8.33 A. El microondas, nominalmente de 1300 W, consume 10.8 A, y la cafetera, nominalmente de 800 W, consume 6.67 A. Si los tres aparatos funcionan al mismo tiempo, consumen una corriente total de 25.8 A. Por lo tanto, en el circuito deberán instalarse alambres que tengan capacidad para manejar, por lo menos, esta corriente. Si el régimen del cortacircuitos que protege al circuito es demasiado pequeño —20 A—, el cortacircuitos se abrirá cuando conecte el tercer aparato, lo que impedirá la operación de todos los aparatos. Para evitar esta situación, el tostador y la cafetera pueden ser conectados a un circuito de 20 A y el microondas a otro circuito independiente de 20 A.

Muchos aparatos para uso pesado, como estufas y secadoras de ropa eléctricas, requieren 240 V para su funcionamiento. La compañía eléctrica suministra este voltaje mediante un tercer alambre que está 120 V por debajo del potencial de tierra (figura 28.24). La diferencia de potencial entre este alambre de corriente y el otro (el cual está 120 V por encima del potencial de tierra) es de 240 V. Un aparato doméstico que funciona a 240 V requiere la mitad de la corriente en comparación con uno que es alimentado a 120 V; por tanto, en un circuito que tenga un voltaje mayor pueden utilizarse alambres más delgados sin sobrecalentamiento.

© Thomson Learning/George Semple.

a)

b)

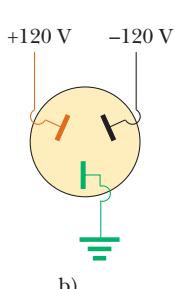



Figura 28.24 a) Tomacorriente para una conexión de alimentación a 240 V.
b) Conexiones de cada una de las entradas de un tomacorriente de 240 V.

Seguridad eléctrica

Cuando el alambre de corriente de una salida eléctrica se conecta directamente a tierra, el circuito está completo y se presenta un estado de cortocircuito. Un *cortocircuito* se presenta cuando existe una resistencia casi cero entre dos puntos a diferentes potenciales; esto da como resultado una corriente muy grande. Cuando esto sucede de forma acci-

[4] *Alambre de corriente* es una expresión común para un conductor cuyo potencial eléctrico está más arriba o más abajo del potencial de tierra.

dental, un cortacircuitos que funcione de manera correcta abrirá el circuito y no ocurrirá ningún daño. Sin embargo, una persona en contacto con tierra puede electrocutarse al tocar el alambre de corriente de un cordón deshilachado u otro conductor expuesto. Se crea un contacto a tierra excepcionalmente efectivo (¡y peligroso!) cuando la persona toca una tubería de agua (normalmente al potencial de tierra) o está de pie sobre el piso con los pies mojados. Esta última situación representa un contacto de tierra efectivo ya que el agua sin destilar es un buen conductor debido a que contiene gran número de iones asociados con impurezas. Esta situación debe evitarse a toda costa.

Una descarga eléctrica da como resultado quemaduras fatales, o puede causar el mal funcionamiento de músculos de órganos vitales, como el corazón. El grado de daño al cuerpo dependerá de la magnitud de la corriente, de la duración del fenómeno, de la parte del cuerpo que tocó el alambre de corriente y de la parte del cuerpo por donde sale la corriente. Una corriente de 5 mA o menos provoca una sensación de sacudimiento, pero por lo regular con muy poco o ningún daño. Si la corriente es mayor a 10 mA, los músculos se contraen y la persona quizá no pueda ser capaz de soltar el alambre de corriente. Una corriente de alrededor de 100 mA que pase a través del cuerpo durante sólo algunos segundos, puede ser fatal. Una corriente de esa naturaleza paralizará los músculos del sistema respiratorio, impidiendo la respiración. En algunos casos, corrientes de alrededor de 1 A pueden producir quemaduras serias (y a veces fatales). En la práctica, ningún contacto con alambres de corriente se considera seguro cuando el voltaje es superior a 24 V.

Muchas salidas de 120 V están diseñadas para aceptar un cordón de tres vías. (Esta característica es obligatoria en todas las instalaciones eléctricas nuevas.) Una de estas vías es el alambre de corriente, que tiene un potencial nominal de 120 V. La segunda es el alambre neutro, nominalmente a 0 V, el cual lleva la corriente a tierra. En la figura 28.25a se muestra una conexión a un taladro eléctrico con únicamente dos alambres. Si accidentalmente el alambre de corriente hace contacto con la cubierta del taladro eléctrico (que puede presentarse si el aislante del alambre está roto), la corriente puede ser conducida a tierra a través de la persona, lo que da como resultado un sacudimiento eléctrico. El tercero, que es redondo, es un alambre de tierra de seguridad, por el que normalmente no pasa corriente

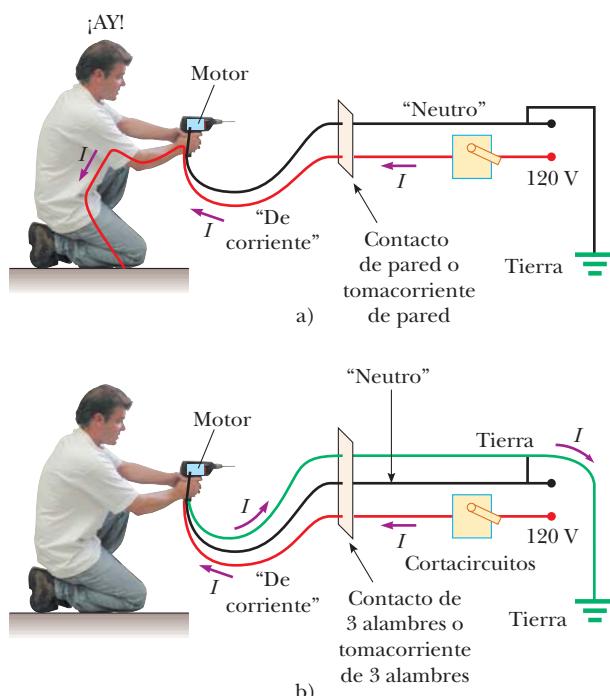



Figura 28.25 a) Diagrama del circuito para un taladro eléctrico con sólo dos alambres de conexión. La trayectoria normal de la corriente es del alambre de corriente a las conexiones del motor y de regreso a tierra a través del alambre neutro. En este caso, el alambre de corriente entra en contacto con la cubierta del taladro. Como resultado, la persona que sostiene el taladro se coloca dentro de la trayectoria de la corriente a tierra y recibe una descarga eléctrica. b) Esta descarga puede evitarse conectando el taladro a tierra mediante un tercer alambre "de tierra". En esta situación, en la cubierta del taladro se queda en potencial de tierra y no pasa corriente a través de la persona.

pero está a la vez conectado a tierra y directamente a la cubierta del aparato eléctrico. Si el alambre de corriente se pone accidentalmente en cortocircuito con la cubierta, gran parte de la corriente sigue la trayectoria de menor resistencia del aparato a tierra como muestra la figura 28.25b.

En la actualidad, en cocinas, baños, sótanos, y otras áreas de riesgo en los nuevos hogares se usan tomacorrientes especiales llamados *interruptores de falla a tierra* (GFI). Estos aparatos están diseñados para proteger a las personas de las descargas eléctricas al detectar pequeñas corrientes (< 5 mA) que se fugan a tierra. (El principio de su funcionamiento está descrito en el capítulo 31.) Cuando detectan una fuga de corriente excesivamente grande, en menos de 1 ms la corriente se desconecta.

Resumen

DEFINICIONES

La **fem** de una batería es igual al voltaje a través de sus terminales cuando la corriente es cero. Esto es: la fem es equivalente al **voltaje de circuito abierto** de la batería.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistores conectados en una **combinación en serie** es

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad \textbf{(28.6)}$$

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistores conectados en una combinación en **paralelo** se encuentra partiendo de la correspondencia

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \textbf{(28.8)}$$

Los circuitos que involucran más de una espira se analizan convenientemente con el uso de las **reglas de Kirchhoff:**

1. **Regla de la unión.** En cualquier unión, la suma de las corrientes debe ser igual a cero:

$$\sum_{\text{nodo}} I = 0 \qquad \textbf{(28.9)}$$

2. **Regla de la espira.** La suma de las diferencias de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier espira de circuito debe ser cero:

$$\sum_{\text{malla cerrada}} \Delta V = 0 \qquad \textbf{(28.10)}$$

Cuando un resistor se recorre en la dirección de la corriente, la diferencia de potencial ΔV a través del resistor es $-IR$. Cuando un resistor se recorre en la dirección opuesta a la corriente, $\Delta V = +IR$. Cuando una fuente de fem se recorre en la dirección de la fem (terminal negativa a terminal positiva), la diferencia de potencial es $+\mathcal{E}$. Cuando una fuente de fem se recorre opuesta a la fem (positivo a negativo), la diferencia de potencial es $-\mathcal{E}$.

Si un capacitor se carga con una batería a través de un resistor de resistencia R, la carga en el capacitor y la corriente en el circuito varían en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$q(t) = Q(1 - e^{-t/RC}) \qquad \textbf{(28.14)}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.15)}$$

donde $Q = C\mathcal{E}$ es la máxima carga en el capacitor. El producto RC se llama **constante de tiempo** τ del circuito.

Si un capacitor cargado se descarga a través de un resistor de resistencia R, la carga y la corriente disminuyen exponencialmente en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$q(t) = Qe^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.18)}$$

$$I(t) = -I_i e^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.19)}$$

donde Q es la carga inicial en el capacitor e $I_i = Q/RC$ es la corriente inicial en el circuito.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿La dirección de la corriente en una batería siempre es de la terminal negativa a la positiva? Explique.

2. **O** Cierta batería tiene alguna resistencia interna. **i)** ¿La diferencia de potencial a través de las terminales de una batería puede ser igual a su fem? a) No. b) Sí, si la batería absorbe energía mediante transmisión eléctrica. c) Sí, si más de un alambre se conecta a cada terminal. d) Sí, si la corriente en la batería es cero. e) Sí, no se requieren condiciones especiales. **ii)** ¿El voltaje entre las terminales puede superar la fem? Elija su respuesta entre las mismas posibilidades.

3. Dadas tres lámparas y una batería, dibuje tantos circuitos eléctricos diferentes como pueda.

4. Cuando los resistores están conectados en serie, ¿cuál de los siguientes conceptos sería el mismo para cada resistor? Elija las respuestas correctas. a) Diferencia de potencial, b) corriente, c) potencia entregada, d) carga entrante, e) ninguna de estas respuestas.

5. Cuando los resistores, con diferentes resistencias, están conectados en paralelo, ¿cuál de los siguientes conceptos sería el mismo para cada resistor? Elija las respuestas correctas. a) Diferencia de potencial, b) corriente, c) potencia entregada, d) carga entrante, e) ninguna de estas respuestas.

6. ¿Por qué las aves pueden posarse sobre los cables de alto voltaje sin que se electrocuten?

7. **O** ¿Los faros de un automóvil están alambrados a) en serie uno con otro, b) en paralelo, c) ni en serie ni en paralelo o d) es imposible de decir?

8. Un estudiante afirma que el segundo de dos focos en serie es menos brillante que el primero, ya que éste consume parte de la corriente. ¿Qué respondería a esta afirmación?

9. **O** ¿Un circuito cableado con un interruptor automático está protegido, a) en serie con el dispositivo, b) en paralelo, c) ni en serie ni en paralelo, o d) es imposible decirlo?

10. **O** En el circuito que se muestra en la figura P28.10, cada batería entrega energía al circuito mediante transmisión eléctrica. Todos los resistores tienen igual resistencia. **i)** Clasifique los potenciales eléctricos en los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* y *h* de mayor a menor, y note cualquier caso de igualdad en la clasificación. **ii)** Clasifique las magnitudes de las corrientes en los mismos puntos, de mayor a menor, y anote cualquier caso de igualdad.

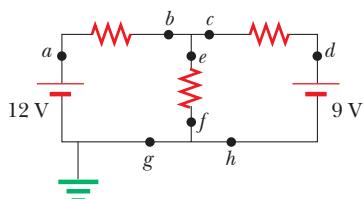



Figura P28.10

11. Un circuito en serie está constituido por tres focos idénticos conectados a una batería, como se muestra en la figura P28.11. Cuando el interruptor S se cierra, ¿qué le sucede **i)** a la intensidad luminosa del foco B, a) aumenta, b) decrece un poco, c) no hay cambio, d) cae a cero. **ii)** ¿Qué le sucede a la intensidad luminosa del foco C? a) Elija entre las mismas posibilidades. **iii)** ¿Qué sucede con la corriente en la batería? Elija entre las mismas posibilidades. **iv)** ¿Qué le sucede a la diferencia de potencial a través del foco A? **v)** ¿Qué le sucede a la diferencia de potencial a través del foco C? **vi)** ¿Qué sucede con la potencia total entregada a los focos por la batería? Elija en cada caso entre las mismas posibilidades de a) a d).

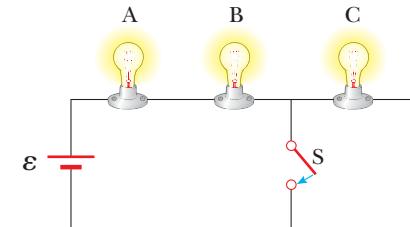



Figura P28.11

12. **O** Un circuito consiste en tres focos idénticos conectados a una batería que tiene alguna resistencia interna, como en la figura P28.12. El interruptor S, originalmente abierto, se cierra. **i)** ¿Qué ocurre después con la brillantez del foco B? a) Aumenta. b) Disminuye un poco. c) No cambia. d) Cae a cero. **(ii)** ¿Qué sucede con la brillantez del foco C? Elija entre las mismas posibilidades. **iii)** ¿Qué sucede con la corriente en la batería? Elija entre las mismas posibilidades. **iv)** ¿Qué ocurre con la diferencia de potencial a través del foco A? **v)** ¿Qué ocurre con la diferencia de potencial a través del foco C? **vi)** ¿Qué ocurre con la potencia total entregada a los focos por la batería? Elija en cada caso entre las mismas posibilidades, de la a) a la d).

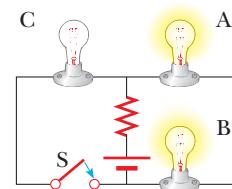



Figura P28.12

13. Un centro de esquí está constituido por unas pocas telesillas y varios descensos interconectados al costado de una montaña, con una posada hasta abajo. Estas telesillas son semejantes a las baterías y los descensos a los resistores. Describa la forma en que dos descensos pueden quedar en serie. Describa la forma en que tres descensos pueden quedar en paralelo. Haga un dibujo de la unión de una telesilla y dos descensos. Enuncie la regla de la unión de Kirchhoff aplicada a los centros de esquí. Resulta que una de las esquiadoras lleva un altímetro de paracaidista. Ella nunca utiliza el mismo conjunto de telesillas y descensos dos veces, pero a pesar de ello, sigue pasando al lado de usted en la posición fija desde donde usted está trabajando. Enuncie la regla de las espiras de Kirchhoff para los centros de esquí.

14. Con base en la figura P28.14, describa qué le ocurre al foco después de que se cierra el interruptor. Suponga que el capacitor tiene una gran capacitancia y está inicialmente descargado, y que la lámpara se ilumina si se le conecta directamente a las terminales de la batería.

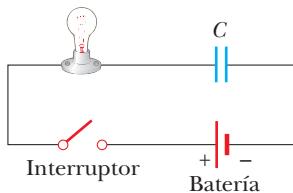



Figura P28.14

15. Para que su abuela pueda escuchar su música favorita, le lleva su radio de buró al hospital donde se encuentra internada. Ahí le exigen que el radio sea probado por personal de mantenimiento para comprobar que es eléctricamente seguro. Al ver que una de las perillas tiene un potencial de 120 V, no se le permite llevar el radio al cuarto de su abuela. Ella se queja y dice que ha tenido ese radio por años y que nadie ha recibido jamás una descarga. No obstante tiene que comprar un radio nuevo de plástico. ¿Esto es justo? ¿Será el viejo radio igual de seguro cuando esté de regreso en la recámara de su abuela?

16. ¿Cuál es la ventaja del funcionamiento a 120 V en comparación con el funcionamiento a 240 V? ¿Cuáles son las desventajas?

Problemas

Sección 28.1 Fuerza electromotriz

1. Una batería tiene una fem de 15.0 V. Cuando entrega 20.0 W de potencia a un resistor de carga externo *R*, el voltaje entre las terminales de la batería es de 11.6 V. a) ¿Cuál es el valor de *R*? b) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?

2. Dos baterías de 1.50 V —con sus terminales positivas en una misma orientación— están insertas en serie en el cuerpo de una linterna. Una de las baterías tiene una resistencia interna de 0.255 Ω, y la otra una resistencia interna de 0.153 Ω. Cuando el interruptor se cierra, por la lámpara pasa una corriente de 600 mA. a) ¿Cuál es la resistencia de la lámpara? b) ¿Qué fracción de la energía química transformada aparece como energía interna de las baterías?

3. La batería de un automóvil tiene una fem de 12.6 V y una resistencia interna de 0.080 0 Ω. Los dos faros juntos presentan una resistencia equivalente de 5.00 Ω (que se supone constante). ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada a las lámparas de los faros a) cuando representan la única carga de la batería y b) cuando funciona el motor de arranque, que consume 35.0 A adicionales de la batería?

4. ● Como en el ejemplo 28.2, considere una fuente de energía con fem fija $\mathcal{E}$ y resistencia interna *r* que causa corriente en una resistencia de carga *R*. En este problema, *R* es fija y *r* es variable. La eficiencia se define como la energía entregada a la carga dividida entre la energía entregada por la fem. a) Cuando la resistencia interna se ajusta para máxima transferencia de potencia, ¿cuál es la eficiencia? b) ¿Cuál debe ser la resistencia interna para la máxima eficiencia posible? c) Cuando la compañía eléctrica vende energía a un consumidor, ¿tiene una meta de alta eficiencia o de máxima transferencia de potencia? Explique. d) Cuando un estudiante conecta una bocina a un amplificador, ¿qué es lo que quiere más: eficiencia o alta transferencia de potencia? Explique.

Sección 28.2 Resistores en serie y en paralelo

5. a) Determine la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* de la figura P28.5. b) Si entre los puntos *a* y *b* se aplica una diferencia de potencial de 34.0 V, calcule la corriente en cada resistor.

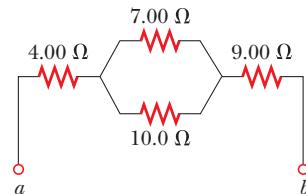



Figura P28.5

6. ● Un foco marcado "75 W [a] 120 V" se atornilla en un portalámpara en el extremo de un cable largo de extensión, en el cual cada uno de los dos conductores tiene una resistencia de 0.800 Ω. El otro extremo de la extensión se enchufa en una salida de 120 V. Dibuje un diagrama de circuito y determine la potencia real entregada al foco en este circuito. a) Explique porqué la potencia verdadera que se entrega al foco no puede ser 75 W en esta situación. b) ¿Cómo puede modelar razonablemente como constante acerca del foco?

7. Considere el circuito que se muestra en la figura P28.7. Determine a) la corriente en el resistor de 20.0 Ω y b) la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*.

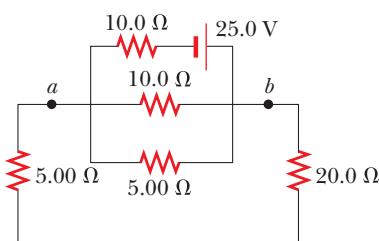



Figura P28.7

8. Con el propósito de medir la resistencia eléctrica del calzado a una placa de tierra metálica a través del cuerpo del usuario, la American National Standards Institute (ANSI) especifica el circuito que se muestra en la figura P28.8. La diferencia de po-

tencial ΔV aplicada al resistor de 1.00 MΩ se mide con un voltímetro de alta resistencia. a) Demuestre que la resistencia del calzado está dada por

$$R_{\text{calzado}} = 1.00\ \text{M}\Omega\left(\frac{50.0\ \text{V} - \Delta V}{\Delta V}\right)$$

b) En una prueba médica, la corriente a través del cuerpo humano no debe exceder los 150 μA. ¿La corriente especificada en el circuito de la ANSI puede exceder los 150 μA? Para poder decidir, piense en una persona de pie y descalza sobre una placa de tierra.

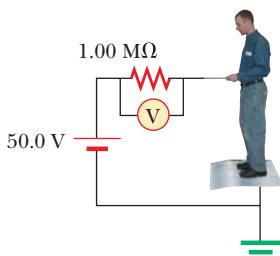



Figura P28.8

9. Tres resistores de 100 Ω están conectados como se muestra en la figura P28.9. La potencia máxima que puede ser entregada sin riesgo a cualquiera de los resistores es de 25.0 W. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial máximo que se puede aplicar a las terminales a y b? Para el voltaje determinado en el inciso a), ¿cuál es la potencia entregada a cada resistor? ¿Cuál es la potencia total entregada?

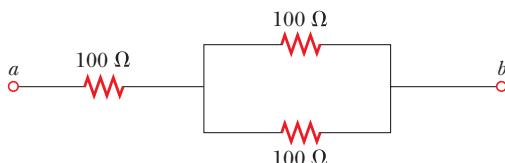



Figura P28.9

10. Con tres resistores —2.00 Ω, 3.00 Ω y 4.00 Ω— determine 17 valores de resistencia que pueden obtenerse mediante combinaciones de uno o más resistores. Tabule las combinaciones en orden de resistencia creciente.

11. Una batería de 6.00 V suministra corriente al circuito que se muestra en la figura P28.11. Cuando el interruptor de doble posición S está abierto, como se muestra, la corriente en la batería es de 1.00 mA. Cuando el interruptor se cierra en la posición a, la corriente en la batería es de 2.00 mA. Determine las resistencias R_1, R_2 y R_3.

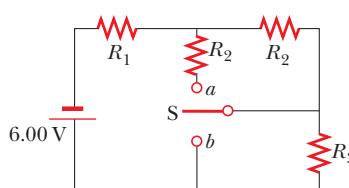



Figura P28.11

12. Dos resistores conectados en serie tienen una resistencia equivalente de 690 Ω. Cuando están conectados en paralelo, su resistencia equivalente es de 150 Ω. Determine la resistencia de cada uno de ellos.

13. ● Cuando se cierra el interruptor S en el circuito de la figura P28.13, ¿la resistencia equivalente entre los puntos a y b aumenta o disminuye? Establezca su razonamiento. Suponga que la resistencia equivalente cambia en un factor de 2. Determine el valor de R.

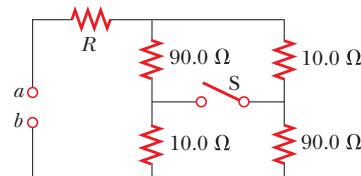



Figura P28.13

14. ● Cuatro resistores están conectados a una batería, como se muestra en la figura P28.14. La corriente de la batería es I, la fem de la batería es $\mathcal{E}$ y los valores de los resistores son $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 4R$, $R_4 = 3R$. a) Clasifique los resistores de acuerdo con la diferencia de potencial aplicada a los mismos, de mayor a menor. Observe cualquier caso de diferencias de potencial iguales. b) Determine la diferencia de potencial a través de cada resistor en términos de $\mathcal{E}$. c) Clasifique los resistores de acuerdo con la corriente en ellos desde la más grande a la más pequeña. Anote cualquier caso de corrientes iguales. d) Determine la corriente en cada uno de los resistores en función de I. e) **¿Qué pasaría si?** Si R_3 aumenta, ¿qué le ocurre a la corriente en cada uno de los resistores? f) En el límite de $R_3 \to \infty$, ¿cuáles son los nuevos valores de corriente en cada resistor en función de I, la corriente original de la batería?

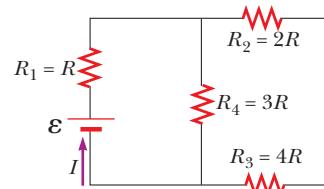



Figura P28.14

15. Calcule la potencia entregada a cada resistor en el circuito que se muestra en la figura P28.15.

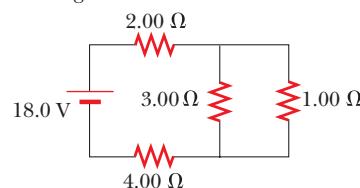



Figura P28.15

Sección 28.3 Leyes de Kirchhoff

16. El amperímetro que se muestra en la figura P28.16 da una lectura de 2.00 A. Determine I_1, I_2 y $\mathcal{E}$.

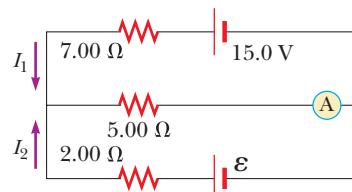



Figura P28.16

17. Determine la corriente en cada una de las ramas del circuito que se muestra en la figura P28.17.

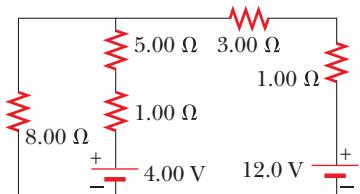



Figura P28.17 Problemas 17, 18 y 19.

18. En la figura P28.17, demuestre cómo añadir sólo los amperímetros suficientes para medir todas las distintas corrientes. Demuestre cómo añadir sólo los voltímetros suficientes para medir la diferencia de potencial a través de cada resistor y de cada batería.

19. ● El circuito que se considera en el problema 17 y que se mostró en la figura P28.17 está conectado durante 2.00 min. a) Determine la energía entregada por cada batería. b) Determine la energía entregada a cada resistor. c) Identifique la transformación neta de energía que se presenta en el funcionamiento del circuito y la cantidad total de energía transformada.

20. Las siguientes ecuaciones describen un circuito eléctrico:

$$-I_1(220\ \Omega) + 5.80\ \text{V} - I_2(370\ \Omega) = 0$$

$$I_2(370\ \Omega) + I_3(150\ \Omega) - 3.10\ \text{V} = 0$$

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0$$

a) Dibuje un diagrama del circuito. b) Calcule las incógnitas e identifique el significado físico de cada incógnita.

21. Considere el circuito que se muestra en la figura P28.21. ¿Cuáles son las lecturas esperadas del amperímetro ideal y del voltímetro ideal?

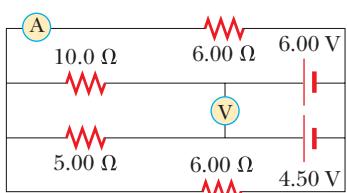



Figura P28.21

22. Si R = 1.00 kΩ y $\mathcal{E}$ = 250 V en la figura P28.22, determine la dirección y la magnitud de la corriente en el alambre horizontal entre a y e.

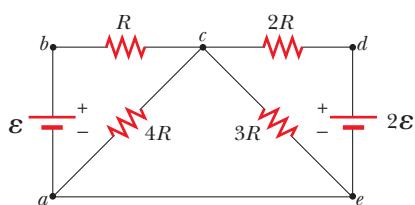



Figura P28.22

23. En el circuito de la figura P28.23, determine la corriente en cada resistor y la diferencia de potencial a través del resistor 200 Ω.

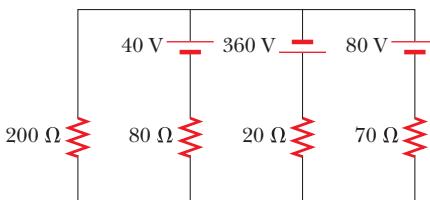



Figura P28.23

24. Una batería descargada se carga conectándola a la batería cargada de otro automóvil mediante cables pasa corriente (figura P28.24). Determine la corriente en el mecanismo de arranque y en la batería descargada.

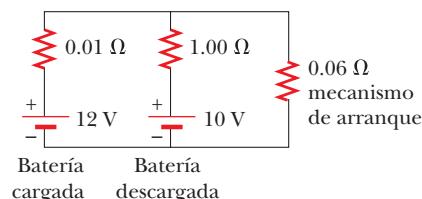



Figura P28.24

25. Para el circuito que se muestra en la figura P28.25, calcule a) la corriente en el resistor de 2.00 Ω y b) la diferencia de potencial entre los puntos a y b.

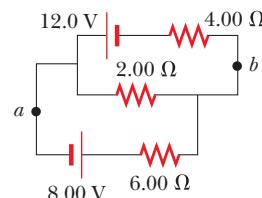



Figura P28.25

26. Para la red que se muestra en la figura P28.26, demuestre que la resistencia R_{ab} = (27/17) Ω.

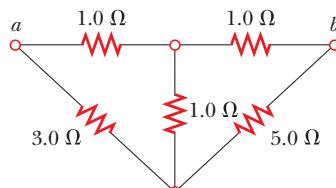



Figura P28.26

Sección 28.4 Circuitos *RC*

27. Considere un circuito RC en serie (figura 28.16) para el cual R = 1.00 MΩ, C = 5.00 μF, y $\mathcal{E}$ = 30.0 V. Determine a) la constante de tiempo del circuito y b) la carga máxima en el capacitor después de que el interruptor se mueve hacia a, conectando el capacitor a la batería. c) Determine la corriente en el resistor 10.0 s después de haber puesto el interruptor en a.

28. Un capacitor de 10.0 μF se carga mediante una batería de 10.0 V a través de una resistencia R. El capacitor alcanza una diferencia de potencial de 4.00 V en un intervalo de tiempo de 3.00 s después de comenzar la carga. Encuentre R.

29. Un capacitor de 2.00 nF con una carga inicial de 5.10 μC se descarga a través de un resistor de 1.30 kΩ. a) Calcule la corriente en

el resistor 9.00 μs después de que el resistor se conecta entre las terminales del capacitor. b) ¿Cuál es la carga en el capacitor después de 8.00 μs? c) ¿Cuál es la corriente máxima en el resistor?

30. Demuestre que la integral $\int_0^\infty e^{-2t/RC}dt$ en el ejemplo 28.11 tiene el valor $RC/2$.

31. El circuito de la figura P28.31 se ha conectado durante mucho tiempo. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través del capacitor? b) Si se desconecta la batería, ¿cuánto tiempo tarda el capacitor en descargarse hasta la décima parte de su voltaje inicial?

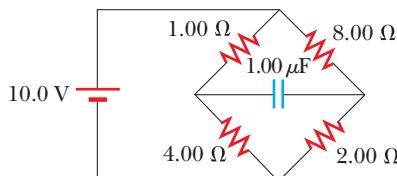



Figura P28.31

32. En el circuito de la figura P28.32 el interruptor S, que ha estado abierto durante mucho tiempo, se cierra repentinamente. Determine la constante de tiempo a) antes de que el interruptor se cierre y b) después de que el interruptor ha cerrado. c) Suponga que el interruptor se cierra en $t = 0$. Determine la corriente que pasa por el interruptor como una función del tiempo.

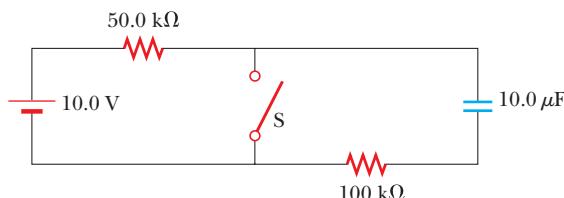



Figura P28.32

Sección 28.5 Medidores eléctricos

33. Suponga que un galvanómetro tiene una resistencia interna de 60.0 Ω y requiere una corriente de 0.500 mA para producir una deflexión de tamaño natural. ¿Qué resistencia debe conectarse en paralelo con el galvanómetro si la combinación ha de servir como amperímetro con una deflexión de tamaño natural para una corriente de 0.100 A?

34. Un galvanómetro particular funciona como un voltímetro de 2.00 V tamaño natural cuando un resistor de 2500 Ω se conecta en serie con él. Funciona como un amperímetro de 0.500 A a tamaño natural cuando se le conecta en paralelo un resistor de 0.220 Ω. Determine la resistencia interna del galvanómetro y la corriente requerida para producir desviación de tamaño natural.

35. Un galvanómetro particular, que requiere una corriente de 1.50 mA para una deflexión de tamaño natural y que tiene una resistencia de 75.0 Ω, se puede usar para medir voltajes cableando un gran resistor en serie con el galvanómetro, como se sugiere en la figura 28.22. El efecto es limitar la corriente en el galvanómetro cuando es aplicado un gran voltaje. Calcular el valor del resistor que le permite al galvanómetro medir un voltaje aplicado de 25.0 V con una deflexión a tamaño natural.

36. ● *Efecto de carga.* Resuelva este problema con una precisión de cinco dígitos. Haga referencia a la figura P28.36. a) Cuando se conecta un resistor de 180.00 Ω a las terminales de una batería con fem de 6.000 0 V y resistencia interna igual a 20.000 Ω, ¿cuál es la corriente en el resistor? ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada al resistor? b) Ahora suponga que al circuito se añade un amperímetro, con una resistencia de 0.500 00 Ω, y un voltímetro de resistencia de 20 000 Ω, como se muestra en la figura P28.36b. Determine la lectura de cada uno. c) **¿Qué pasaría si?** Ahora se cambia de posición el extremo de un alambre, como se muestra en la figura P28.36c. Determine las nuevas lecturas en los medidores.

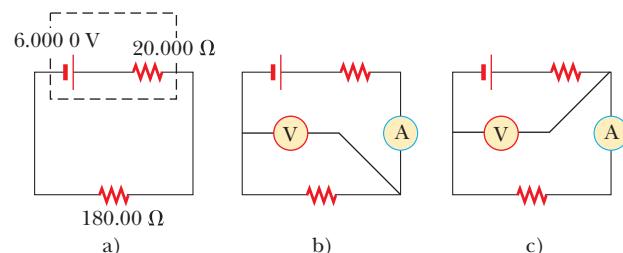



Figura P28.36

Sección 28.6 Cableado doméstico y seguridad eléctrica

37. Un calentador eléctrico con 1500 W nominales, un tostador de 750 W y una parrilla eléctrica de 1000 W están conectados a un circuito doméstico normal de 120 V. a) ¿Cuánta corriente consume cada uno? b) ¿Para este caso es suficiente un cortacircuitos de 25.0 A? Explique su respuesta.

38. Encienda su lámpara de escritorio. Tome el cable con la mano y sosténgalo entre el pulgar y el índice. a) Haga una estimación, con un orden de magnitud, de la corriente que pasa por su mano. Puede suponer que en un instante dado en el interior del cable de la lámpara el conductor cercano a su pulgar se encuentra a un potencial $\sim 10^2$ V y que el conductor cercano a su índice se encuentra al potencial de tierra (0 V). La resistencia de su mano depende de manera importante del espesor y el contenido de humedad de las capas superiores de su piel. Suponga que la resistencia de su mano entre las puntas de sus dedos índice y pulgar es de $\sim 10^4$ Ω. Usted puede representar el cable conteniendo un aislamiento de hule. Enuncie otras cantidades que haya medido o estimado, así como sus valores. Explique su razonamiento. b) Suponga que su cuerpo se encuentra aislado de cualesquiera otras cargas o corrientes. Describa en términos de un orden de magnitud el potencial de su pulgar donde toca el cable, y el potencial de su índice donde toca el cable.

Problemas adicionales

39. El circuito de la figura P28.39 se conectó durante varios segundos. Encuentre la corriente a) en la batería de 4.00 V,

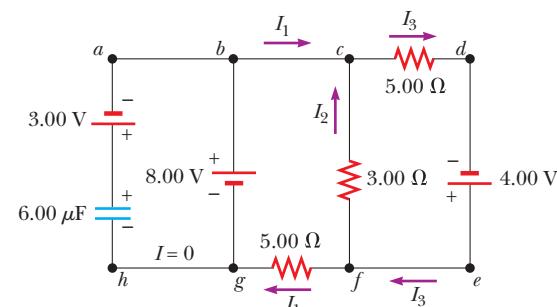



Figura P28.39

b) en el resistor de 3.00 Ω, c) en la batería de 8.00 V y d) en la batería de 3.00 V. Encuentre e) la carga en el capacitor.

40. ● El circuito de la figura P28.40a consiste en tres resistores y una batería sin resistencia interna. a) Encuentre la corriente en el resistor de 5.00 Ω. b) Encuentre la potencia entregada al resistor de 5.00 Ω. c) En cada uno de los circuitos de las figuras P28.40b, P28.40c y P28.40d, se insertó en el circuito una batería adicional de 15.0 V. ¿Cuál diagrama o diagramas representa un circuito que requiera el uso de las reglas de Kirchhoff para encontrar las corrientes? Explique por qué. ¿En cuál de estos tres circuitos se entrega la menor cantidad de potencia al resistor de 10.0 Ω? No necesita calcular la potencia en cada circuito si explica su respuesta.

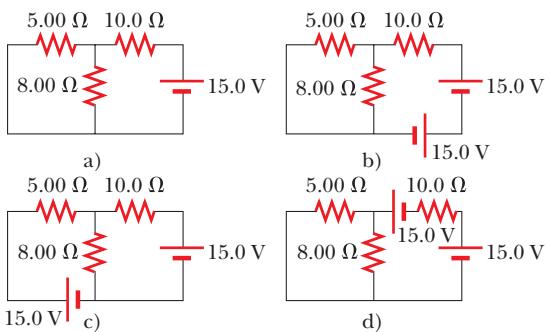



Figura P28.40

41. Cuatro baterías AA de 1.50 V en serie se utilizan para energizar un radio de transistores. Si las baterías pueden mover una carga de 240 C, ¿cuánto tiempo durarán si el radio tiene una resistencia de 200 Ω?

42. ● Una batería tiene una fem de 9.20 V y una resistencia interna de 1.20 Ω. a) ¿Qué resistencia aplicada a las terminales de la batería extraerá de esta última una potencia de 12.8 W? b) ¿Y una potencia de 21.2 W?

43. Calcule la diferencia de potencial entre los puntos a y b en la figura P28.43 e identifique cuál de los puntos se encuentra a un potencial más elevado.

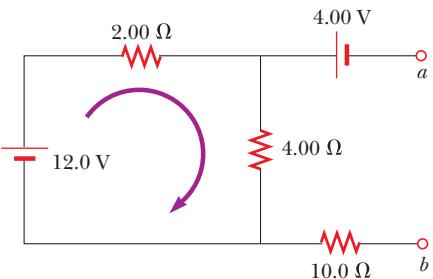



Figura P28.43

44. Suponga que tiene una batería de fem $\mathcal{E}$ y tres focos idénticos, cada uno con una resistencia constante R. ¿Cuál es la potencia total entregada por la batería si los focos se conectan a) en serie, o b) en paralelo? c) ¿En cuál de las conexiones brillarán más los focos?

45. Una bateria recargable tiene una fem constante de 13.2 V y una resistencia interna de 0.850 Ω. Se recarga por una fuente de energía por un intervalo de tiempo de 1.80 h. Después de cargarse, la batería regresa a su estado original, entregando corriente a un resistor de carga durante 7:30 h. Hallar la eficiencia como un dispositivo de almacenamiento de energía. (En este caso, la eficiencia se define como la energía entregada a la carga durante la descarga dividida entre la energía entregada por la fuente de energía de 14.7 V durante el proceso de carga).

46. Una fuente de energía que tiene un voltaje de circuito abierto de 40.0 V y una resistencia interna de 2.00 Ω es utilizada para cargar dos baterías conectadas en serie, cada una con una fem de 6.00 V y una resistencia interna de 0.300 Ω. Si la corriente de carga debe ser de 4.00 A, a) ¿cuál es la resistencia adicional que debe añadirse en serie?, b) ¿a qué rapidez se incrementa la energía interna en la fuente, en las baterías, y en la resistencia en serie añadida?, c) ¿a qué rapidez se incrementa la energía química en las baterías?

47. Cuando dos resistores desconocidos están conectados en serie con una batería, la batería entrega 225 W y transporta una corriente total de 5.00 A. Para la misma corriente total, se entregan 50.0 W cuando los resistores se conectan en paralelo. Determine los valores de los dos resistores.

48. Cuando dos resistores desconocidos están conectados en serie con una batería, ésta entrega una potencia total $\mathcal{P}_s$ y lleva una corriente total de I. Para la misma corriente total, se entrega una potencia total $\mathcal{P}_P$ cuando los resistores están conectados en paralelo. Determine los valores de los dos resistores.

49. Dos resistores R_1 y R_2 están en paralelo. Juntos llevan una corriente total I. a) Determine la corriente en cada resistor. b) Demuestre que esta división de la corriente total I entre ambos resistores da como resultado menos potencia entregada a la combinación que cualquier otra división. Es un principio general que *la corriente en un circuito de corriente directa se autodistribuye para que la potencia total entregada al circuito sea mínima.*

50. ● a) Determine la carga de equilibrio en el capacitor del circuito de la figura P28.50 como función de R. b) Evalúe la carga cuando $R = 10.0$ Ω. c) ¿La carga en el capacitor puede ser cero? Si es así, ¿para qué valor de R? d) ¿Cuál es la máxima magnitud posible de la carga en el capacitor? ¿Para qué valor de R se logra? e) ¿Experimentalmente es significativo tomar $R = \infty$? Explique su respuesta. Si es así, ¿qué magnitud de carga implica? *Sugerencia:* Puede hacer el inciso b) antes de la parte a), como práctica.

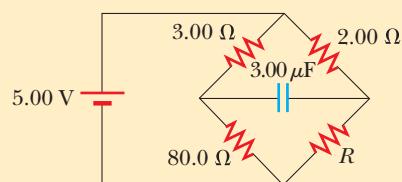



Figura P28.50

51. El valor de un resistor R debe determinarse utilizando el arreglo amperímetro-voltímetro que se muestra en la figura P28.51. El amperímetro tiene una resistencia de 0.500 Ω, y el voltímetro

una resistencia de 20.0 kΩ. ¿En qué rango de los valores reales de R serán correctos los valores medidos a un aproximado de 5.00% si la medida se hace utilizando el circuito que se muestra en a) la figura P28.51a y b) la figura 28.51b?

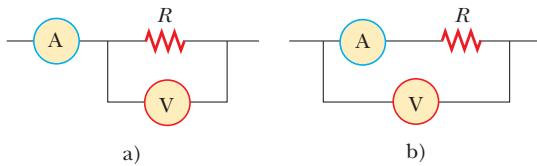



Figura P28.51

52. Una batería es utilizada para cargar un capacitor a través de un resistor, como se muestra en la figura 28.16b. Demuestre que la mitad de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en el resistor y que la otra mitad es almacenada en el capacitor.

53. Los valores de los componentes en un circuito RC en serie sencillo que contiene un interruptor (figura 28.16b) son C = 1.00 μF, $R = 2.00 \times 10^6$ Ω, y $\mathcal{E}$ = 10.0 V. Después de 10.0 s de que es puesto el interruptor en a, calcule a) la carga del capacitor, b) la corriente en el resistor, c) la rapidez a la cual se está almacenando la energía en el capacitor y d) la rapidez a la cual se entrega la energía de la batería.

54. Un joven tiene una aspiradora marcada con 535 W a 120 V y un Volkswagen Beetle, que quiere limpiar. Estaciona el automóvil en el estacionamiento de su departamento y usa una extensión barata de 15.0 m de largo para conectar la aspiradora. Usted puede suponer que la aspiradora tiene resistencia constante. a) Si la resistencia de cada uno de los dos conductores en la extensión es de 0.900 Ω, ¿cuál es la potencia real entregada a la aspiradora? b) Si en vez de ello la potencia es de al menos 525 W, ¿cuál debe ser el diámetro de cada uno de los dos conductores de cobre idénticos en el cordón que compre? c) Repita el inciso b) si supone que la potencia es de al menos 532 W. *Sugerencia:* Una solución simbólica puede simplificar los cálculos.

55. Tres focos de 60.0 a 120 V están conectados a una fuente de potencia de 120 V, como se muestra en la figura P28.55. Determine a) la potencia total entregada a los tres focos y b) la diferencia de potencial a través de cada uno. Suponga que la resistencia de cada foco es constante (aun cuando en realidad la resistencia puede aumentar considerablemente en función de la corriente).

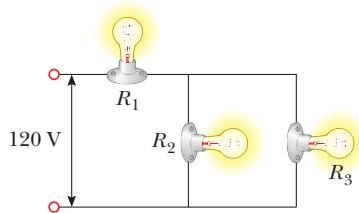



Figura P28.55

56. El interruptor S ha estado cerrado durante mucho tiempo, y el circuito eléctrico que muestra la figura P28.68 lleva una corriente constante. Tome C_1 = 3.00 μF, C_2 = 6.00 μF, R_1 = 4.00 kΩ, y R_2 = 7.00 kΩ. La potencia entregada a R_2 es de 2.40 W. a) Determine la carga en C_1. b) Suponga que se abre el interruptor. Después de varios milisegundos, ¿cuánto ha cambiado la carga en C_2?

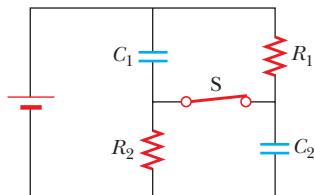



Figura P28.56

57. ● Un voltímetro ideal, conectado a través de cierta batería fresca, lee 9.30 V, y un amperímetro ideal conectado brevemente a través de la misma batería lee 3.70 A. Se dice que la batería tiene un voltaje de circuito abierto de 9.30 V y una corriente de cortocircuito de 3.70 A. a) Modele la batería como una fuente de fem $\mathcal{E}$ en serie con una resistencia interna r. Determine tanto $\mathcal{E}$ como r. b) Un experimentador irresponsable conecta 20 de estas baterías idénticas como se sugiere en la figura P28.57. ¡Usted no intente este experimento! Encuentre el voltaje de circuito abierto y la corriente de cortocircuito del conjunto de baterías conectadas. c) Suponga que la resistencia entre las palmas de las dos manos del experimentador es de 120 Ω. Encuentre la corriente en su cuerpo que resultaría si sus palmas tocaran las dos terminales expuestas del conjunto de baterías conectadas. d) Encuentre la potencia que se entregaría a su cuerpo en esta situación. e) Pensando que es seguro hacerlo, el experimentador amarra un alambre de cobre dentro de su camisa, que tiene entre sus manos, como una cuerda mitón. Para reducir la corriente en su cuerpo a 5.00 mA cuando presione los extremos del alambre contra los polos de la batería, ¿cuál debería ser la resistencia del alambre de cobre? f) Encuentre la potencia entregada a su cuerpo en esta situación. g) Encuentre la potencia entregada al alambre de cobre. h) Explique por qué la suma de las dos potencias en los incisos f) y g) es mucho menor que la potencia calculada en el inciso d). ¿Es significativo preguntar a dónde va el resto de la potencia?

Richard McGrew.

Figura P28.57

58. Cuatro resistores están conectados en paralelo con una batería de 9.20 V. Transportan corrientes de 150 mA, 45.0 mA, 14.00 mA y 4.00 mA. a) Si el resistor de mayor resistencia es reemplazado con uno que soporte el doble, ¿cuál es la relación entre la nueva corriente de la batería y la original? b) **¿Qué pasaría si?** Si se reemplaza el resistor con menor resistencia por uno con el doble de ésta, ¿cuál es la relación entre la nueva corriente total y la original? c) En una noche de febrero, una casa pierde energía debido a varias fugas de calor, incluyendo las siguientes: 1500 W

por conducción a través del techo, 450 W por filtración (flujo de aire) alrededor de las ventanas, 140 W por conducción a través de la pared del sótano por arriba de los cimientos de la casa y 40.0 W por conducción a través de la puerta de triplay del desván. Para tener un máximo de ahorro en gastos por calefacción, ¿cuál de estas pérdidas de energía debe reducirse primero? Explique cómo decide. Clifford Swartz sugirió la idea para este problema.

59. La figura P28.59 muestra el modelo de un circuito para la transmisión de una señal eléctrica, como por ejemplo televisión por cable, a un gran número de suscriptores. Cada suscriptor conecta una resistencia de carga R_L entre la línea de transmisión y la tierra. Supuestamente la tierra se encuentra a potencial cero y es capaz de conducir corriente de cualquier tamaño entre cualquier conexión a tierra con una resistencia despreciable. La resistencia de la línea de transmisión entre los puntos de conexión de diferentes suscriptores se puede modelar como una resistencia R_T constante. Demuestre que la resistencia equivalente entre las terminales de la fuente de la señal es

$$R_{eq} = \tfrac{1}{2}[(4R_TR_L + R_T^2)^{1/2} + R_T]$$

Sugerencia: Ya que hay una gran cantidad de suscriptores, la resistencia equivalente no debería cambiar mucho si el primer suscriptor cancela su servicio. En consecuencia, la resistencia equivalente de la sección de circuito a la derecha del primer resistor de carga es casi igual a R_{eq}.

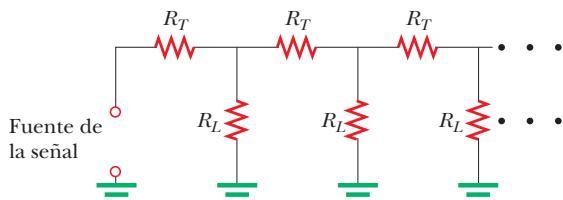



Figura P28.59

60. Un tetraedro regular es una pirámide con una base triangular. En sus seis aristas están colocados seis resistores de 10.0 Ω, con uniones en sus cuatro vértices. Una batería de 12.0 V está conectada a dos de sus vértices. Determine a) la resistencia equivalente entre los vértices del tetraedro y b) la corriente de la batería.

61. Suponga que en la figura P28.61 el interruptor ha estado cerrado durante un tiempo suficientemente largo para que el capacitor se cargue por completo. Determine a) la corriente en estado estacionario de cada resistor y b) la carga Q del capacitor. c) Ahora el interruptor se abre en $t = 0$. Escriba una ecuación para la corriente I_{R_2} a través de R_2 como una función del tiempo y d) determine el intervalo de tiempo necesario para que la carga del capacitor se reduzca a un quinto de su valor inicial.

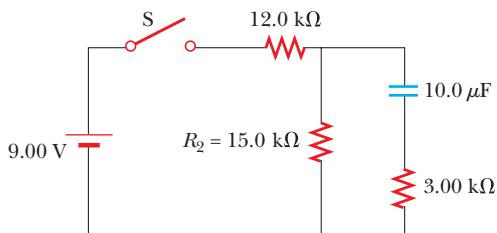



Figura P28.61

62. El circuito que se muestra en la figura P28.62 se ha establecido en un laboratorio con la finalidad de medir una capacitancia desconocida C utilizando un voltímetro de resistencia $R = 10.0$ MΩ y una batería cuya fem es 6.19 V. Los datos que se ven en la tabla son los voltajes medidos aplicados al capacitor como una función del tiempo, siendo $t = 0$ el instante en el cual se abre el interruptor. a) Elabore una gráfica de ln $(\mathcal{E}/\Delta V)$ en función de t y realice un ajuste lineal de mínimos cuadrados a los datos. b) Partiendo de la pendiente de su gráfica, obtenga un valor para la constante de tiempo del circuito y un valor para la capacitancia.

ΔV (V)	***t* (s)**	**ln$(\mathcal{E}/\Delta V)$**
6.19	0	
5.55	4.87	
4.93	11.1	
4.34	19.4	
3.72	30.8	
3.09	46.6	
2.47	67.3	
1.83	102.2	

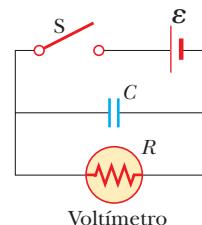



Figura P28.62

63. Un estudiante, que es el operador de una estación de radio universitaria, desea verificar la efectividad del pararrayos instalado en la antena (figura P28.63). La resistencia desconocida R_x está entre los puntos C y E. El punto E es una tierra verdadera pero no puede medirla directamente, ya que se encuentra varios metros por debajo de la superficie de la Tierra. En A y B se introducen en el suelo dos varillas idénticas que generan una resistencia desconocida R_y. El procedimiento es el siguiente: mida la resistencia R_1 entre los puntos A y B, conecte después A y B con un alambre conductor grueso y mida la resistencia R_2 entre los puntos A y C. a) Deduzca una ecuación para R_x en función de las resistencias observables, R_1 y R_2. b) Una resistencia a tierra satisfactoria debería ser $R_x < 2.00$ Ω. ¿Es la puesta a tierra de la estación de radio lo adecuado si las mediciones dan $R_1 = 13.0$ Ω y $R_2 = 6.00$ Ω?

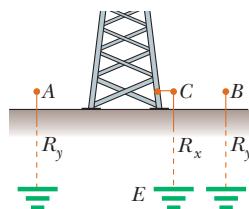



Figura P28.63

64. El interruptor en la figura P28.64a se cierra cuando $\Delta V_c > 2\Delta V/3$ y se abre cuando $\Delta V_c < \Delta V/3$. El voltímetro lee el voltaje como

aparece en la figura P28.64b. ¿Cuál es el periodo T de la forma de onda en función de R_1, R_2 y C?

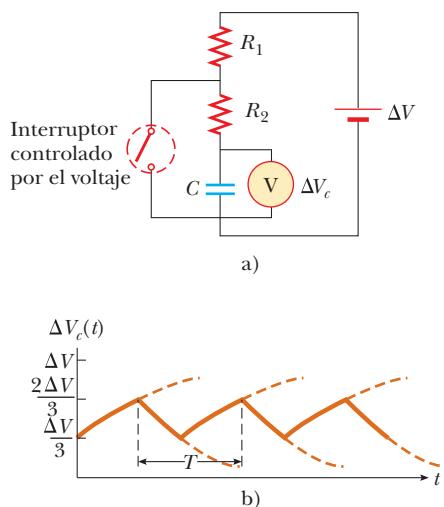



Figura P28.64

65. Una tetera eléctrica tiene un interruptor multiposición y dos bobinas calefactoras. Cuando sólo una bobina se enciende, la tetera bien aislada lleva una porción de agua a ebullición durante el intervalo de tiempo Δt. Cuando sólo la otra bobina se enciende, tarda un intervalo de tiempo de $2\Delta t$ para hervir la misma cantidad de agua. Encuentre el intervalo de tiempo requerido para hervir la misma cantidad de agua si ambas bobinas están encendidas en a) una conexión en paralelo y b) una conexión en serie.

66. En lugares como salas de operación en hospitales o fábricas de tableros de circuitos electrónicos, se deben evitar chispas eléctricas. Una persona de pie en un piso a tierra y que no toque nada más por lo general tiene una capacitancia corporal de 150 pF, en paralelo con una capacitancia de pie de 80.0 pF producida por las suelas dieléctricas de sus zapatos. La persona adquiere carga eléctrica estática de las interacciones con muebles, ropa, equipo, materiales de empacado y esencialmente todo lo demás. La carga estática fluye al suelo a través de la resistencia equivalente de las suelas de los dos zapatos en paralelo uno con el otro. Un par de zapatos de calle con suela de goma puede presentar una resistencia equivalente de 5000 MΩ. Un par de zapatos con suelas especiales disipadoras de estática puede tener una resistencia equivalente de 1.00 MΩ. Considere el cuerpo de la persona y los zapatos como formadores de un circuito RC con el suelo. a) ¿Cuánto tardan los zapatos con suela de goma en reducir el potencial de una persona de 3000 V a 100 V? b) ¿Cuánto tardan los zapatos disipadores de estática en hacer lo mismo?

Respuestas a las preguntas rápidas

28.1 a) La potencia se entrega a la resistencia interna de una batería, así que si se reduce la resistencia interna, esta potencia "perdida" disminuirá incrementando el porcentaje de potencia entregado al aparato.

28.2 b) Cuando se abre el interruptor, los resistores R_1 y R_2 están en serie, así que la resistencia total del circuito es mayor que cuando el interruptor estaba cerrado. Como resultado, la corriente disminuye.

28.3 a) Cuando se cierra el interruptor, los resistores R_1 y R_2 están en paralelo, así que la resistencia total del circuito es menor que cuando el interruptor estaba abierto. Como resultado, la corriente aumenta.

28.4 **i)**, b) Agregar otro resistor en serie aumenta la resistencia total del circuito y por tanto reduce la corriente en el circuito. **ii)**, a). La diferencia de potencial a través de las terminales de la batería aumenta porque la corriente reducida resulta en una menor disminución de voltaje a través de la resistencia interna. **iii)**, a). Si se conectara en paralelo un tercer resistor, la resistencia total del circuito disminuiría y la corriente en la batería aumentaría. **iv)**, b). La diferencia de potencial a través de las terminales disminuiría porque la corriente aumentada resulta en una mayor caída de voltaje a través de la resistencia interna.

28.5 **i)** c), Justo después de que se ha cerrado el interruptor, no existe carga en el capacitor. Mientras el capacitor comienza a cargarse, existe corriente en ambas ramas del circuito, por lo que la mitad derecha del circuito es equivalente a dos resistencias R en paralelo, es decir, una resistencia equivalente de $\frac{1}{2}$R. **ii)**, d) Después de mucho tiempo, el capacitor se carga por completo y la corriente en la rama derecha disminuye hasta cero. Ahora la corriente existe sólo en una resistencia R a través de la batería.

La toma de huellas dactilares magnética permite encontrarlas en superficies que sólo de esta manera es posible detectar. El polvo que se aplica sobre la superficie está recubierto de un material orgánico que se adhiere a residuos grasos que la huella dactilar deja. Una “brocha” magnética recoge el polvo excedente, haciendo que la huella sea visible. (James King/Photo Researchers, Inc.)

29 Campos magnéticos

Muchos historiadores de la ciencia creen que la brújula, que utiliza una aguja magnética, fue usada en China desde el siglo XIII a. C., y que su invención es de origen árabe o indio. Desde el año 800 a. C. los griegos ya tenían conocimientos sobre el magnetismo. Descubrieron que la magnetita (Fe_3O_4) atrae fragmentos de hierro. La leyenda adjudica el nombre magnetita al pastor Magnes, que atraía trozos de magnetita con los clavos de sus sandalias y el casquillo de su bastón mientras pastoreaba sus rebaños.

En el año 1269 un francés de nombre Pierre de Maricourt descubrió que las direcciones a las que apuntaba una aguja al acercársele un imán natural esférico formaban líneas que rodeaban a la esfera y pasaban a través de ésta en dos puntos diametralmente opuestos uno del otro, a los que llamó *polos* del imán. Experimentos consecutivos demostraron que todo imán, cualquiera que fuera su forma, tiene dos polos, uno *norte* (N) y otro *sur* (S), que ejercen fuerzas sobre otros polos magnéticos de manera similar a como las cargas eléctricas ejercen fuerzas entre sí. Esto es, polos iguales (N-N o S-S) se repelen y polos opuestos (N-S) se atraen.

Los polos son llamados así por la forma en que un imán, como el de una brújula, se comporta en presencia del campo magnético de la Tierra. Si a un imán en forma de barra se le suspende de su punto medio de manera que oscile con liber-

tad en un plano horizontal, girará de forma que su polo norte apunte al Polo Norte geográfico de la Tierra y su polo sur señale al Polo Sur geográfico de la Tierra.[1]

En el año 1600 William Gilbert (1540-1603) amplió el experimento de Maricourt aplicándolo a una diversidad de materiales. Con base en que la aguja de una brújula se orienta en direcciones preferenciales, sugirió que la Tierra misma es un imán permanente gigantesco. En 1750, en otros experimentos se utilizó una balanza de torsión para demostrar que los polos magnéticos ejercen entre sí fuerzas de atracción o de repulsión y que estas fuerzas varían en función del inverso del cuadrado de la distancia entre los polos que interactúan. A pesar de que la fuerza entre polos magnéticos es de otro modo similar a la fuerza entre dos cargas eléctricas, estas últimas pueden aislarse (recuerde el electrón y el protón), considerando que **nunca ha sido posible aislar un solo polo magnético.** Es decir, **los polos magnéticos siempre se encuentran en pares.** Hasta ahora todos los intentos hechos para detectar la presencia de un polo magnético aislado han sido desafortunados. Independientemente de cuántas veces se divida un imán, cada trozo resultante tendrá siempre un polo norte y un polo sur.[2]

La correspondencia entre la electricidad y el magnetismo fue descubierta en 1819 cuando, en el transcurso de una demostración en una conferencia, el científico danés Hans Christian Oersted descubrió que una corriente eléctrica en un alambre desviaba la aguja de una brújula cercana.[3] Durante 1820, Faraday y Joseph Henry (1797-1878) demostraron, de manera independiente, relaciones adicionales entre la electricidad y el magnetismo. Mostraron que es posible crear una corriente eléctrica en un circuito ya sea moviendo un imán cerca de él o variando la corriente de algún circuito cercano. Estas observaciones demuestran que una variación en un campo magnético crea un campo eléctrico. Años después, el trabajo teórico de Maxwell demostró que lo contrario también es cierto: un campo eléctrico que varía crea un campo magnético.

En este capítulo se examinan las fuerzas que actúan sobre las cargas en movimiento y sobre los alambres que conduncen una corriente en presencia de un campo magnético. En el capítulo 8 se describe la fuente del campo magnético.

North Wind Picture Archives.

HANS CHRISTIAN OERSTED
Físico y químico danés (1777-1851)
Oersted es más conocido por haber observado que la aguja de una brújula se desvía cuando se le coloca cerca de un alambre que lleva corriente. Este importante descubrimiento fue la primera evidencia de la relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos. Oersted también fue el primero en obtener aluminio puro.

29.1 Campos y fuerzas magnéticas

Cuando se estudió la electricidad, se describieron las interacciones entre objetos con carga en función de campos eléctricos. Recuerde que cualquier carga eléctrica está rodeada por un campo eléctrico. Además de contener un campo eléctrico, el espacio que rodea a cualquier carga eléctrica *en movimiento*, también contiene un campo magnético. También cualquier sustancia magnética que forma parte de un imán permanente está rodeada de un campo magnético.

Históricamente el símbolo $\vec{\mathbf{B}}$ ha sido utilizado para representar el campo magnético, y ésta es la notación utilizada en este libro. La dirección del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ en cualquier sitio es la dirección a la cual apunta la aguja de una brújula colocada en dicha posición. Igual que en el caso del campo eléctrico, es posible representar el campo magnético gráficamente utilizando *líneas de campo magnético*.

La figura 29.1 muestra cómo pueden trazarse las líneas del campo magnético de un imán de barra con ayuda de una brújula. Observe que las líneas de campo magnético en el exterior del imán apuntan alejándose del polo norte y hacia el polo sur. Es posible

Figura 29.1
Con la aguja de la brújula pueden trazarse las líneas de campo magnético en la región externa de un imán de barra.

[1] Observe que el Polo Norte geográfico de la Tierra es magnéticamente un polo sur, en tanto que su Polo Sur geográfico es su polo norte. Dado que los polos magnéticos *opuestos* se atraen, el polo de un imán que es atraído por el Polo *Norte* de la Tierra es el polo *norte* del imán, y el polo atraído por el Polo *Sur* geográfico de la Tierra es el polo *sur* del imán.

[2] Existen bases teóricas para especular que en la naturaleza es posible encontrar *monopolos* magnéticos, es decir, polos norte y sur aislados. Es un campo activo de investigación el intentar detectarlos.

[3] Este mismo descubrimiento fue publicado en 1802 por un jurista italiano, Gian Domenico Romognosi, pero no fue tomado en consideración, probablemente porque se publicó en un periódico de poca difusión.

Figura 29.2 a) Patrón del campo magnético que rodea a un imán de barra utilizando limaduras de hierro. b) Patrón de campo magnético entre *polos opuestos* (N–S) de dos imanes de barra. c) Patrón de campo magnético entre polos *iguales* (N–N) de dos imanes de barra.

mostrar los patrones de campo magnético de un imán de barra utilizando pequeñas limaduras de hierro, como se muestra en la figura 29.2.

Es posible definir un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ en algún punto en el espacio en función de la fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}_B$ que ejerce el campo sobre una partícula con carga que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$, misma que se identifica como el objeto de prueba. Por ahora, suponga que no existen ni campo eléctrico ni campo gravitacional en la ubicación del objeto de prueba. Los experimentos efectuados en diferentes partículas con carga que se mueven en un campo magnético, dan los siguientes resultados:

Propiedades de la fuerza magnética sobre una carga que se mueve en un campo magnético ▶

- La magnitud F_B de la fuerza magnética ejercida sobre la partícula es proporcional a la carga q y a la rapidez v de dicha partícula.
- Cuando una partícula con carga se mueve paralela al vector de campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre ella es igual a cero.
- Cuando el vector de velocidad de la partícula forma un ángulo $\theta \neq 0$ con el campo magnético, la fuerza magnética actúa en dirección perpendicular tanto a $\vec{\mathbf{v}}$ como a $\vec{\mathbf{B}}$; $\vec{\mathbf{F}}_B$ es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ (figura 29.3a).
- La fuerza magnética ejercida sobre una carga positiva tiene dirección opuesta a la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre una carga negativa que se mueva en la misma dirección (figura 29.3b).
- La magnitud de la fuerza magnética que se ejerce sobre una partícula en movimiento es proporcional a sen θ, donde θ es el ángulo que el vector de velocidad de la partícula forma con la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$.

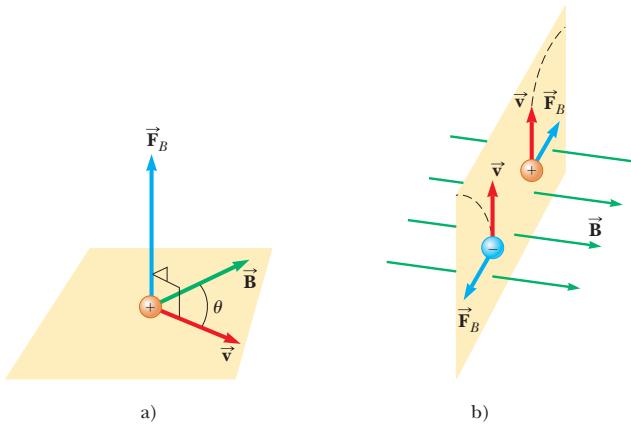



Figura 29.3 Dirección de la fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}_B$ que actúa sobre una partícula con carga que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en presencia de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. a) La fuerza magnética es perpendicular tanto a $\vec{\mathbf{v}}$ como a $\vec{\mathbf{B}}$. b) Sobre dos partículas cargadas de signos opuestos que se mueven a la misma velocidad en un campo magnético se ejercen fuerzas magnéticas $\vec{\mathbf{F}}_B$ en direcciones opuestas. Las líneas discontinuas muestran la trayectoria de las partículas, las cuales investigaremos en la sección 29.2.

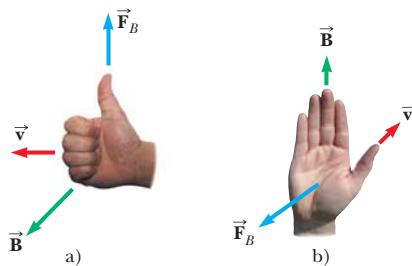



Figura 29.4 Dos reglas de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ que actúa sobre una partícula de carga q que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. a) En esta regla, los dedos apuntan en la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$, lo que provoca que $\vec{\mathbf{B}}$ salga de la palma de la mano, de forma que los dedos pueden cerrarse en la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$. La dirección de $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, y la fuerza ejercida sobre una carga positiva, es la dirección a la cual apunta el pulgar. b) En esta regla, el vector $\vec{\mathbf{v}}$ está en la dirección del pulgar y $\vec{\mathbf{B}}$ en la dirección de los dedos. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_B$ sobre una carga positiva aparecerá en la dirección de la palma de la mano, como si se estuviera empujando la partícula con la mano.

Para resumir estas observaciones la fuerza magnética se describe como

$$\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (29.1)$$

◀ Expresión vectorial de la fuerza magnética que se ejerce sobre una partícula con carga en movimiento en un campo magnético

que por definición del producto vectorial (vea la sección 11.1) es perpendicular tanto a $\vec{\mathbf{v}}$ como a $\vec{\mathbf{B}}$. Esta ecuación es una definición operacional del campo magnético en algún punto en el espacio. Esto es, el campo magnético está definido en función de la fuerza que actúa sobre una partícula con carga en movimiento.

La figura 29.4 analiza dos reglas de la mano derecha para determinar la dirección del producto cruz $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y la dirección de $\vec{\mathbf{F}}_B$. La regla de la figura 29.4a depende de la regla de la mano derecha para el producto cruz de la figura 11.2. Dirija los cuatro dedos de su mano derecha a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$, manteniendo la palma de la mano de cara a $\vec{\mathbf{B}}$, y cierre los dedos hacia $\vec{\mathbf{B}}$. El pulgar extendido, que forma un ángulo recto con los dedos, apunta en la dirección de $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Ya que $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{F}}_B$ queda en la dirección del pulgar si q es positiva y en la dirección opuesta si q es negativa. (Si necesita más elementos para comprender el producto cruz, sería útil repasar la sección 11.1, incluyendo la figura 11.2.)

En la figura 29.4b se muestra una regla alterna. En este caso el pulgar apunta en la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ y los dedos extendidos en la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$. Ahora la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_B$ que se ejerce sobre una carga positiva se extiende hacia afuera desde la palma de la mano. La ventaja de esta regla es que la fuerza sobre la carga está en la dirección en que se debería empujar con la mano, es decir, hacia afuera de la palma. La fuerza ejercida sobre una carga negativa está en la dirección opuesta. Utilice libremente cualquiera de estas dos reglas.

La magnitud de la fuerza magnética sobre una partícula cargada es

$$F_B = |q|vB \operatorname{sen} \theta \qquad (29.2)$$

◀ Magnitud de la fuerza magnética ejercida sobre una partícula con carga que se mueve en un campo magnético

donde θ es el ángulo menor entre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Por esta expresión puede que F_B sea igual a cero cuando $\vec{\mathbf{v}}$ es paralela o antiparalela a $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 0$ o $180°$) y es máxima cuando $\vec{\mathbf{v}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 90°$).

Existen varias diferencias de importancia entre las fuerzas eléctrica y magnética:

- El vector fuerza eléctrica actúa a lo largo de la dirección del campo eléctrico, en tanto que el vector fuerza magnética actúa perpendicularmente al campo magnético.
- La fuerza eléctrica actúa sobre una partícula con carga sin importar si ésta se encuentra en movimiento, en tanto que la fuerza magnética actúa sobre una partícula con carga sólo cuando está en movimiento.
- La fuerza eléctrica efectúa trabajo al desplazar una partícula con carga, en tanto que la fuerza magnética asociada con un campo magnético estable no efectúa trabajo cuando se desplaza una partícula, debido a que la fuerza es perpendicular al desplazamiento.

Con base en este último enunciado y también con el teorema trabajo-energía cinética, se concluye que la energía cinética de una partícula con carga que se mueve a través de un campo magnético no puede ser modificada por el campo magnético solo.

TABLA 29.1

Algunas magnitudes aproximadas del campo magnético

Fuente del campo	Magnitud del campo (T)
Poderoso imán de laboratorio superconductor	30
Poderoso imán de laboratorio convencional	2
Unidad médica MRI (resonancia magnética)	1.5
Imán de barra	10^{-2}
Superficie del Sol	10^{-2}
Superficie de la Tierra	0.5×10^{-4}
Interior del cerebro humano (debido a impulsos nerviosos)	10^{-13}

El campo magnético, puede modificar la dirección del vector velocidad pero no puede cambiar la rapidez ni la energía cinética de la partícula.

En la ecuación 29.2 se ve que la unidad del SI del campo magnético es newton por cada coulomb-metro por cada segundo, o **tesla** (T):

La tesla ▶

$$1\text{ T} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{C}\cdot\text{m/s}}$$

Dado que un ampere se define como un coulomb por cada segundo,

$$1\text{ T} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}}$$

Una unidad que no es del SI y que se usa comúnmente para el campo magnético, el *gauss* (G), se relaciona con la tesla mediante la conversión $1\text{ T} = 10^4\text{ G}$. La tabla 29.1 proporciona algunos valores representativos de los campos magnéticos.

Pregunta rápida 29.1 Un electrón se mueve en el plano del papel de este libro hacia la parte superior de la página. Además en el plano de la página existe un campo magnético que está dirigido hacia la derecha. ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética sobre el electrón? a) hacia la parte superior, b) hacia la parte inferior, c) hacia el borde izquierdo, d) hacia el borde derecho, e) encima alejándose de la página, f) hacia adentro de la página.

EJEMPLO 29.1 Electrón que se mueve en un campo magnético

Un electrón en un cinescopio de una televisión se mueve hacia el frente del cinescopio con una rapidez de 8.0×10^6 m/s a lo largo del eje x (figura 29.5). Rodeando el cuello del tubo hay bobinas de alambre que crean un campo magnético de 0.025 T de magnitud, dirigidos en un ángulo de 60° con el eje x y se encuentran en el plano xy. Calcule la fuerza magnética sobre el electrón.

Figura 29.5 (Ejemplo 29.1) La fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}_B$ que actúa sobre el electrón está en la dirección z negativa cuando $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se encuentran en el plano xy.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Recuerde que la fuerza magnética sobre una partícula con carga es perpendicular al plano formado por los vectores velocidad y campo magnético. Use la regla de la mano derecha en la figura 29.4 para convencerse de que la dirección de la fuerza sobre el electrón es hacia abajo en la figura 29.5.

Categorizar La fuerza magnética se evalúa mediante una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasificó como un problema de sustitución.

Use la ecuación 29.2 para encontrar la magnitud de la fuerza magnética:

$$F_B = |q|vB \operatorname{sen} \theta$$
$$= (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(8.0 \times 10^6 \text{ m/s})(0.025 \text{ T})(\operatorname{sen} 60°)$$
$$= 2.8 \times 10^{-14} \text{ N}$$

Para practicar el uso del producto vectorial, evalúe esta fuerza en notación vectorial con la ecuación 29.1.

29.2 Movimiento de una partícula con carga en un campo magnético uniforme

Antes de continuar con la explicación, se requiere cierta aclaración de la notación usada en este libro. Para indicar la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ en las ilustraciones, a veces se presentan vistas en perspectiva, como en la figura 29.5. Si $\vec{\mathbf{B}}$ se encuentra en el plano de la página o está presente en un dibujo en perspectiva, se usan vectores verdes o líneas de campo verdes con puntas de flechas. En las ilustraciones que no están en perspectiva, se bosqueja un campo magnético perpendicular a y dirigido alejándose de la página con una serie de puntos verdes, que representan las puntas de flechas que vienen hacia usted (vea la figura 29.6a). En este caso, el campo se etiqueta $\vec{\mathbf{B}}_{\text{afuera}}$. Si $\vec{\mathbf{B}}$ se dirige perpendicularmente hacia adentro de la página, se usan cruces verdes, que representan la colas emplumadas de las flechas disparadas alejándose de usted, como en la figura 29.6b. En este caso, el campo se etiqueta $\vec{\mathbf{B}}_{\text{adentro}}$, donde el subíndice "adentro" indica "hacia la página". La misma notación con cruces y puntos también se usa para otras cantidades que pueden ser perpendiculares a la página, como direcciones de fuerzas y corrientes.

a)

b)

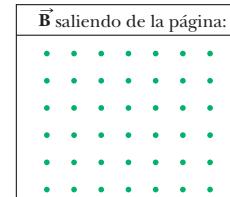
Figura 29.6

a) Las líneas de campo magnético que van hacia afuera del papel se indican mediante puntos, que representan las puntas de las flechas que van hacia afuera.
b) Las líneas de campo magnético que van hacia el papel se indican mediante cruces, que representan las plumas de las flechas que van hacia adentro.

En la sección 29.1 aprendió que la fuerza magnética que actúa sobre una partícula con carga que se mueve en un campo magnético es perpendicular a la velocidad de la partícula y, en consecuencia, el trabajo realizado por la fuerza magnética sobre la partícula es igual a cero. Ahora considere el caso especial de una partícula con carga positiva que se mueve en un campo magnético uniforme, estando el vector de velocidad inicial de la partícula en posición perpendicular al campo. Suponga que la dirección del campo magnético es hacia la página, igual que en la figura 29.7. Conforme la partícula cambia la dirección de su velocidad como respuesta a la fuerza magnética, ésta se mantiene en posición perpendicular a la velocidad. Como se apuntó en la sección 6.1, si la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad, la trayectoria de la partícula ¡es un círculo! La figura 29.7 muestra a la partícula en movimiento circular en un plano perpendicular al campo magnético.

La partícula se mueve en círculo porque la fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}_B$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$ y a $\vec{\mathbf{B}}$ y tiene una magnitud constante igual a qvB. Como se observa en la figura 29.7, la rotación para una carga positiva es en dirección contraria a las manecillas del reloj hacia el interior de la página. Si q fuera negativa, la rotación sería en dirección de las manecillas del reloj. Use el modelo de una partícula bajo una fuerza neta para escribir la segunda ley de Newton para la partícula:

$$\sum F = F_B = ma$$

Ya que la partícula se mueve en un círculo, también se representa como una partícula en movimiento circular uniforme y se sustituye la aceleración con la aceleración centrípeta.

$$F_B = qvB = \frac{mv^2}{r}$$

Esta expresión conduce a la ecuación que sigue para el radio de una trayectoria circular

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad \textbf{(29.3)}$$

Es decir, el radio de la trayectoria es proporcional a la cantidad de movimiento lineal mv de la partícula e inversamente proporcional a la magnitud de la carga sobre la partícula y a la magnitud del campo magnético. La rapidez angular de la partícula (según la ecuación 10.10) es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \qquad \textbf{(29.4)}$$

Figura 29.7

Cuando la velocidad de una partícula con carga es perpendicular a un campo magnético uniforme, ésta se mueve siguiendo una trayectoria circular en un plano perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$. La fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}_B$ que actúa sobre la carga lo hará siempre dirigida hacia el centro del círculo.

Figura 29.8

Una partícula con carga, con un vector de velocidad que tenga una componente paralela a un campo magnético uniforme, se mueve en una trayectoria helicoidal.

El periodo del movimiento (el intervalo de tiempo que necesita la partícula para completar una revolución) es igual a la circunferencia del círculo dividido entre la rapidez de la partícula:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \tag{29.5}$$

Estos resultados demuestran que la rapidez angular de la partícula y el periodo del movimiento circular no dependen de la rapidez de la partícula ni del radio de la órbita. La rapidez angular ω se denomina **frecuencia de ciclotrón,** porque las partículas con carga circulan con esta frecuencia angular en un tipo de acelerador conocido como *ciclotrón*, el cual se explica en la sección 29.3.

Si una partícula con carga se mueve en un campo magnético uniforme con su velocidad orientada en algún ángulo arbitrario respecto a $\vec{\mathbf{B}}$, su trayectoria será una espiral. Por ejemplo, si el campo está dirigido en la dirección x, como se observa en la figura 29.8, no existe componente de la fuerza en la dirección x. Como resultado, $a_x = 0$, y la componente en x de la velocidad se mantiene constante. Sin embargo, la fuerza magnética $q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ hace que cambien las componentes v_y y v_z en relación con el tiempo, y el movimiento resultante es una espiral cuyo eje es paralelo al campo magnético. La proyección de la trayectoria sobre el plano yz (visto a lo largo del eje de las x) es un círculo. (¡Las proyecciones de la trayectoria en los planos xy y xz son senoidales!) Siguen siendo aplicables las ecuaciones 29.3 y 29.5, siempre y cuando se reemplace v por $v_\perp = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$.

Pregunta rápida 29.2 Una partícula con carga se mueve en dirección perpendicular a un campo magnético con una trayectoria circular de radio r. **i**) Una partícula idéntica entra en el campo, con $\vec{\mathbf{v}}$ perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, pero con una rapidez más elevada que la primera partícula. En comparación con el radio del círculo que recorre la primera partícula, el radio de la trayectoria circular que traza la segunda partícula es: a) menor, b) mayor o c) igual. **ii**) La magnitud del campo magnético se incrementa. De las mismas opciones, compare el radio de la nueva trayectoria circular de la primera partícula con el radio de su trayectoria inicial.

EJEMPLO 29.2 Protón con movimiento perpendicular a un campo magnético uniforme

Un protón se mueve en una órbita circular de 14 cm de radio en un campo magnético uniforme de 0.35 T, perpendicular a la velocidad del protón. Encuentre la rapidez del protón.

SOLUCIÓN

Conceptualizar A partir de la explicación en esta sección, se sabe que el protón sigue una trayectoria circular cuando se mueve en un campo magnético uniforme.

Categorizar La rapidez del protón se evalúa usando una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 29.3 para la rapidez de la partícula:

$$v = \frac{qBr}{m_p}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.35\ \text{T})(0.14\ \text{m})}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$

$$= 4.7 \times 10^{6}\ \text{m/s}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si un electrón, en lugar de un protón, se mueve en una dirección perpendicular al mismo campo magnético con esta misma rapidez? ¿El radio de su órbita será diferente?

Respuesta Un electrón tiene una masa mucho menor que la del protón, así que la fuerza magnética debe ser capaz de cambiar su velocidad mucho más fácilmente que la del protón. Por lo tanto, se espera que el radio sea más pequeño. La ecuación 29.3 muestra que r es proporcional a m con q, B y v iguales para el electrón y para el protón. En consecuencia, el radio será más pequeño por el mismo factor que la razón de masas m_e/m_p.

EJEMPLO 29.3 Flexión de un haz de electrones

En un experimento diseñado para medir la magnitud de un campo magnético uniforme, los electrones se aceleran desde el reposo a causa de una diferencia de potencial de 350 V y después entran a un campo magnético uniforme que es perpendicular al vector velocidad de los electrones. Los electrones viajan a lo largo de una trayectoria curva debido a la fuerza magnética que se ejerce sobre ellos, y se observa que el radio de la trayectoria es de 7.5 cm. (En la figura 29.9 se muestra el haz de electrones curvo.)

Figura 29.9 (Ejemplo 29.3) Flexión de un haz de electrones en un campo magnético.

(A) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la ayuda de las figuras 29.7 y 29.9, visualice el movimiento circular de los electrones.

Categorizar Este ejemplo involucra electrones que se aceleran desde el reposo debido a una fuerza eléctrica y después se mueven en una trayectoria circular debido a una fuerza magnética. La ecuación 29.3 muestra que se necesita la rapidez v del electrón para encontrar la magnitud del campo magnético y no se conoce v. En consecuencia, se debe encontrar la rapidez del electrón según la diferencia de potencial a través de la que se acelera. Para hacerlo, la primera parte del problema se clasifica al modelar un electrón y el campo eléctrico como un sistema aislado. Una vez que el electrón entra al campo magnético, la segunda parte del problema se clasifica como uno similar al estudiado en esta sección.

Analizar Escriba la reducción adecuada de la ecuación de conservación de energía, ecuación 8.2, para el sistema electrón-campo eléctrico:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Sustituya las energías inicial y final adecuadas:

$$\left(\tfrac{1}{2}m_e v^2 - 0\right) + (q\Delta V) = 0$$

Resuelva para la rapidez del electrón:

$$v = \sqrt{\frac{-2q\,\Delta V}{m_e}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v = \sqrt{\frac{-2(-1.60 \times 10^{-19}\text{ C})(350\text{ V})}{9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}}} = 1.11 \times 10^{7}\text{ m/s}$$

Ahora imagine que el electrón entra al campo magnético con esta rapidez. Resuelva la ecuación 29.3 para la magnitud del campo magnético:

$$B = \frac{m_e v}{er}$$

Sustituya valores numéricos:

$$B = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(1.11 \times 10^{7}\text{ m/s})}{(1.60 \times 10^{-19}\text{ C})(0.075\text{ m})} = \boxed{8.4 \times 10^{-4}\text{ T}}$$

(B) ¿Cuál es la rapidez angular de los electrones?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 10.10:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1.11 \times 10^{7}\text{ m/s}}{0.075\text{ m}} = \boxed{1.5 \times 10^{8}\text{ rad/s}}$$

Finalizar La rapidez angular se puede representar como $\omega = (1.5 \times 10^8 \text{ rad/s})(1 \text{ rev}/2\pi \text{ rad}) = 2.4 \times 10^7$ rev/s. ¡Los electrones viajan alrededor del círculo 24 millones de veces por segundo! Esta respuesta es consistente con la muy alta rapidez que se encontró en el inciso (A).

¿Qué pasaría si? ¿Y si un súbito exceso de corriente origina que el voltaje acelerador aumente a 400 V? ¿Cómo afecta a la rapidez angular de los electrones, si supone que el campo magnético permanece constante?

Respuesta El aumento en el voltaje de aceleración ΔV origina que los electrones entren al campo magnético con una mayor rapidez v. Esta mayor rapidez los hace viajar en un círculo con un radio más grande r. La rapidez angular es la relación de v a r. Tanto v como r aumentan en el mismo factor, de modo que los efectos se cancelan y la rapidez angular permanece igual. La ecuación 29.4 es una expresión para la frecuencia de ciclotrón, que es la misma que la rapidez angular de los electrones. La frecuencia de ciclotrón depende sólo de la carga q, el campo magnético B y la masa m_e, ninguna de las cuales cambió. Por lo tanto, el exceso de corriente no tiene efecto sobre la rapidez angular. (Sin embargo, en realidad, el sobrevoltaje también puede aumentar el campo magnético si el campo magnético es activado por la misma fuente que el voltaje acelerador. En este caso, la rapidez angular aumenta de acuerdo con la ecuación 29.4.)

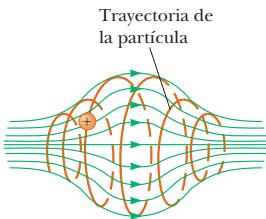



Figura 29.10 Una partícula con carga que se mueve en un campo magnético no uniforme (una botella magnética) en espiral respecto al campo oscilando entre los extremos. La fuerza magnética ejercida sobre la partícula cerca de cualquiera de los dos extremos tiene una componente que la hace girar en espiral de regreso hacia el centro.

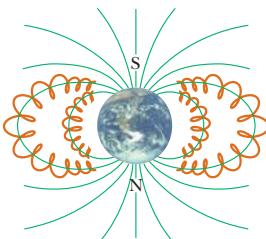



Figura 29.11 Los cinturones de Van Allen están constituidos por partículas con carga atrapadas por el campo magnético no uniforme de la Tierra. Las líneas de campo magnético están representadas en color verde y las trayectorias de las partículas en color café.

Cuando las partículas con carga se mueven en un campo magnético no uniforme, su movimiento es complejo. Por ejemplo, en un campo magnético intenso en sus extremos y débil en su parte media, como el que se muestra en la figura 29.10, las partículas pueden oscilar entre dos posiciones. Una partícula con carga sale de un extremo de la espiral a lo largo de las líneas de campo hasta llegar al otro extremo, donde invierte su trayectoria y de regreso en la espiral. Este esquema se conoce como *botella magnética*, ya que las partículas con carga pueden quedar atrapadas en su interior. Se ha utilizado esta botella magnética para confinar *plasma*, un gas formado por iones y electrones. Este esquema de confinamiento de plasma podría jugar un papel crucial en el control de la fusión nuclear, proceso que podría suministrar en el futuro una fuente de energía casi infinita. Por desgracia, la botella magnética tiene sus problemas. Si un gran número de partículas está atrapado, las colisiones que se presentan entre ellas hacen que finalmente se fuguen del sistema.

Los cinturones de radiación de Van Allen están formados de partículas con carga(en su mayor parte electrones y protones) que rodean la Tierra en regiones toroidales (figura 29.11). Las partículas atrapadas por el campo magnético no uniforme de la Tierra giran en espiral alrededor de las líneas de campo de un polo al otro, cubriendo la distancia en apenas unos cuantos segundos. Estas partículas se originan principalmente en el Sol, aunque algunas provienen de las estrellas y otros objetos celestes. Por esta razón las partículas se conocen como *rayos cósmicos*. La mayor parte de los rayos cósmicos son desviados por el campo magnético de la Tierra y nunca llegan a la atmósfera. Sin embargo, algunas de las partículas quedan atrapadas; son estas partículas las que forman los cinturones de Van Allen. Cuando las partículas se encuentran sobre los polos, a veces colisionan con los átomos de la atmósfera, haciendo que éstos emitan una luz visible. Estas colisiones son el origen de la bella aurora boreal, es decir las luces del norte, cuando se trata del hemisferio norte, y las auroras australes si se trata del hemisferio sur. Las auroras normalmente se presentan sólo en las regiones polares, ya que los cinturones de Van Allen en estas regiones están a menor distancia de la Tierra. En ocasiones, sin embargo, la actividad solar hace que más partículas cargadas entren en los cinturones y distorsionen de manera significativa las líneas de campo magnético normal asociadas con la Tierra. En esta situación, es posible observar a veces auroras en latitudes más bajas.

29.3 Aplicaciones del movimiento de partículas con carga en un campo magnético

Una carga móvil con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en presencia tanto de un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ y un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ experimenta a la vez una fuerza eléctrica $q\vec{\mathbf{E}}$ y una fuerza magnética $q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. La fuerza total (conocida como fuerza de Lorentz) que actúa sobre la carga es

Fuerza de Lorentz ▶

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{29.6}$$

Selector de velocidad

En muchos experimentos que incluyen partículas con carga en movimiento, es importante que todas las partículas se muevan a la misma velocidad, esto se puede lograr aplicando la combinación de un campo eléctrico con uno magnético orientados como se ilustra en la figura 29.12. Un campo eléctrico uniforme se dirige a la derecha (en el plano de la página en la figura 29.12) y se aplica un campo magnético uniforme en dirección perpendicular al campo eléctrico (hacia adentro de la página en la figura 29.12). Si q es positiva y la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ está dirigida hacia arriba, la fuerza magnética $q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ se dirige hacia la izquierda y la fuerza eléctrica $q\vec{\mathbf{E}}$ hacia la derecha. Cuando se escogen las magnitudes de los dos campos, de forma que $qE = qvB$, la partícula con carga se modela como una partícula en equilibrio y se mueve en línea recta vertical a través de la región de los campos. Por la expresión $qE = qvB$, se encuentra que

$$v = \frac{E}{B} \qquad \textbf{(29.7)}$$

Figura 29.12
Un selector de velocidad. Cuando una partícula con carga positiva se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ ante la presencia de un campo magnético dirigido hacia la página y un campo eléctrico dirigido hacia la derecha, experimenta una fuerza eléctrica $q\vec{\mathbf{E}}$ hacia la derecha y una fuerza magnética $q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ hacia la izquierda.

Sólo aquellas partículas que tengan esta rapidez pasarán sin desviarse a través de los campos eléctrico y magnético mutuamente perpendiculares. La fuerza magnética que se ejerce sobre partículas que se mueven con magnitudes de velocidad más elevadas es mayor a la fuerza eléctrica, lo que desvía las partículas hacia la izquierda. Las que se muevan con magnitudes de velocidad menores se desviarán hacia la derecha.

Espectrómetro de masas

Un **espectrómetro de masas** separa iones según su relación masa a carga. Una versión de este dispositivo, conocido como *espectrómetro de masas Bainbridge*, el haz de iones pasa primero a través de un selector de velocidad y después entra a un segundo campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}_0$ que tiene la misma dirección que el campo magnético en el selector (figura 29.13). Al entrar en el segundo campo magnético, los iones se mueven en un semicírculo de radio r antes de que se impacte en la película fotográfica en P. Si los iones están con carga positiva, el haz se desviará hacia la izquierda, como se observa en la figura 29.13. Si los iones están con carga en forma negativa, el haz se desviará hacia la derecha. Por la ecuación 29.3, la relación m/q se expresa de la forma

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$$

La ecuación 29.7, da

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0B}{E} \qquad \textbf{(29.8)}$$

Figura 29.13
Espectrómetro de masas. Las partículas con carga positiva se lanzan primero a través de un selector de velocidad y después en una región donde el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}_0$ hace que recorran una trayectoria semicircular y se impacten en la película fotográfica en P.

Debido a eso, es posible determinar m/q midiendo el radio de curvatura y conociendo cuáles son los valores del campo B, B_0 y E. En la práctica, por lo general se miden las masas de diferentes isótopos de un ion conocido, con todos los iones de la misma carga q. De esta manera se pueden determinar las relaciones de masa, incluso si q es desconocido.

Una variante de esta técnica fue utilizada en 1897 por J. J. Thomson (1856-1940) para medir la relación e/m_e para los electrones. La figura 29.14a muestra el aparato básico que utilizó. Los electrones se aceleran desde el cátodo y pasan a través de dos ranuras. A continuación pasan a una región de campos eléctrico y magnético perpendiculares entre sí. Las magnitudes de los dos campos se ajustan inicialmente a fin de producir un haz sin desviación. Cuando se desactiva el campo magnético, el campo eléctrico produce una deflexión medible en el haz que queda registrada sobre la pantalla fluorescente. A partir de la magnitud de la deflexión y de los valores medidos para E y B, es posible determinar la relación carga a masa. El resultado de este experimento crucial representa el descubrimiento del electrón como una partícula fundamental de la naturaleza.

El ciclotrón

Un **ciclotrón** es un dispositivo que puede acelerar partículas con carga a considerables magnitudes de velocidad. Las partículas energéticas producidas son utilizadas para bom-

Figura 29.14 a) Aparato de Thomson para la medición de e/m_e. Desde el cátodo se aceleran los electrones, que pasan a través de dos ranuras, y son desviados tanto por un campo eléctrico como por un campo magnético (dirigido perpendicularmente al campo eléctrico). El haz de electrones golpea después una pantalla fluorescente. b) J. J. Thomson (*izquierda*) en el Cavendish Laboratory, University of Cambridge. La persona a la derecha, Frank Baldwin Jewett, es un pariente lejano de John W. Jewett, Jr., coautor de este libro.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 29.1

El ciclotrón no es tecnología de punta

El ciclotrón es importante históricamente, ya que fue el primer acelerador de partículas que alcanzó magnitudes de velocidad elevadas. Los ciclotrones siguen siendo utilizados en aplicaciones médicas, y la mayor parte de los aceleradores actualmente en uso en la investigación no son ciclotrones. Los aceleradores para la investigación funcionan con base en un principio diferente, y en general se conocen como *sincrotrones*.

bardear los núcleos atómicos, produciendo así reacciones nucleares de interés para los investigadores. Varios hospitales utilizan este dispositivo para la producción de sustancias radioactivas para el diagnóstico y el tratamiento.

Tanto las fuerzas eléctricas como magnéticas desempeñan un papel fundamental en la operación de un ciclotrón, en la figura 29.15a se muestra el dibujo esquemático. Las cargas se mueven en el interior de dos recipientes semicirculares, D_1 y D_2, que se conocen como *des* debido a que su forma es parecida a la letra D. A las "des" se les aplica una diferencia de potencial alternante de alta frecuencia y se dirige un campo magnético uniforme en dirección perpendicular. Un ion positivo liberado en P cerca del centro del imán en una "de" sigue una trayectoria semicircular (lo cual se indica con la línea discontinua de color café del dibujo) y vuelve al espacio entre las "des" en un intervalo de tiempo $T/2$, donde T es el intervalo de tiempo necesario para hacer un recorrido completo alrededor de dos "des", y que se da en la ecuación 29.5. La frecuencia de la diferencia de potencial aplicada se ajusta de manera que la polaridad de las "des" se invierta en el mismo intervalo de tiempo que utiliza el ion para recorrer una "de". Si la diferencia de potencial aplicado se ajusta de manera que D_2 esté a un potencial eléctrico inferior que D_1 en una magnitud ΔV, el ion se acelerará a través del espacio hasta D_2 y su energía cinética se incrementará en la cantidad $q\Delta V$. Pasa después alrededor de D_2 en una trayectoria semicircular de un radio más grande (porque su rapidez se ha incrementado). Después de un intervalo de tiempo $T/2$, otra vez llega al espacio entre las "des". En este instante, la polaridad entre las "des" se ha invertido, y se le da al ion otro "impulso" a través del espacio. El

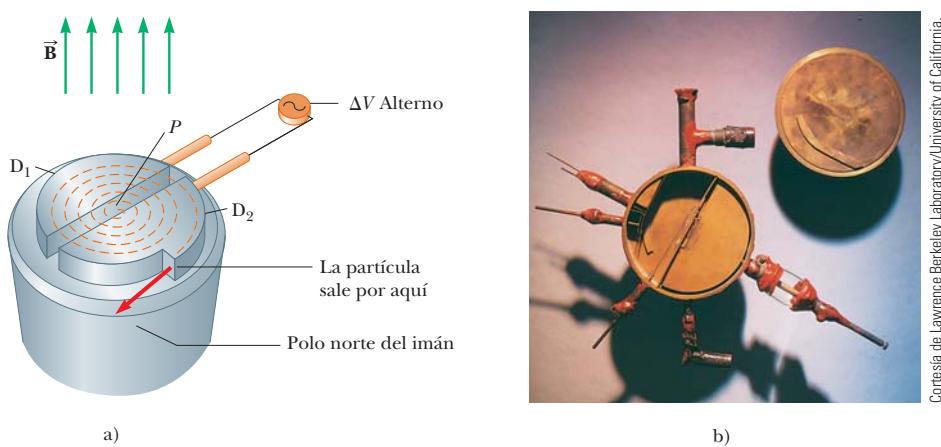



Figura 29.15 a) Un ciclotrón está constituido por una fuente de iones en P, dos "des" D_1 y D_2, a las cuales se les aplica una diferencia de potencial alternante y un campo magnético uniforme. (El polo sur del imán no se muestra.) Las líneas curvas discontinuas de color café representan la trayectoria de las partículas. b) Primer ciclotrón, inventado por E. O. Lawrence y M. S. Livingston en 1934.

movimiento continúa, así que para cada mitad de recorrido de una "de", el ion adquiere energía cinética adicional igual a $q\Delta V$. Cuando el radio de su trayectoria es prácticamente el de las "des", el ion sale del sistema a través de la ranura de salida. Observe que la operación del ciclotrón se basa en que T es independiente de la rapidez del ion y del radio de la trayectoria circular (ecuación 29.5).

Se puede obtener una expresión de la energía cinética del ion cuando sale del ciclotrón, en función del radio R de las "des". Por la ecuación 29.3 se sabe que $v = qBR/m$. Por tanto, la energía cinética es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} \quad \textbf{(29.9)}$$

Cuando la energía de los iones en un ciclotrón excede aproximadamente 20 MeV, entran en juego efectos relativistas. (Estos efectos se explican en el capítulo 39.) Estudios muestran que T aumenta y que los iones en movimiento no se quedan en fase con la diferencia de potencial aplicada. Algunos aceleradores superan este problema modificando el periodo de la diferencia de potencial aplicada, de manera que se conserve en fase con los iones en movimiento.

29.4 Fuerza magnética que actúa sobre un conductor que transporta corriente

Si se ejerce una fuerza magnética sobre una partícula con carga cuando ésta se mueve a través de un campo magnético, no debería sorprendernos que un alambre que transporta una corriente también experimente una fuerza cuando se le coloca en un campo magnético. La corriente es un conjunto de muchas partículas con carga en movimiento; de ahí que la fuerza resultante ejercida por el campo sobre el alambre sea la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre todas las partículas con carga que conforman la corriente. La fuerza ejercida sobre las partículas se transmite al alambre cuando colisionan con los átomos que constituyen el alambre.

Es posible demostrar la acción de una fuerza magnética sobre un conductor de corriente colgando un alambre entre los polos de un imán, como se observa en la figura 29.16a. Para facilitar la visualización, en el inciso a) se ha eliminado una parte del imán en forma de herradura, a fin de mostrar en los incisos b), c) y d) de la figura 29.16. El campo magnético está dirigido hacia la página y abarca la región entre las líneas sombreadas. Cuando la corriente en el alambre es igual a cero, el alambre se mantiene vertical, como se puede ver en la figura 29.16b. Sin embargo, cuando el alambre conduce una corriente hacia arriba, como se ve en la figura 29.16c, el alambre se flexiona hacia la izquierda. Si se invierte la dirección de la corriente, como muestra la figura 29.16d, el alambre se flexiona hacia la derecha.

Conviene cuantificar esta explicación considerando un segmento recto de alambre de longitud L y de área de sección transversal A, que conduce una corriente I en un campo

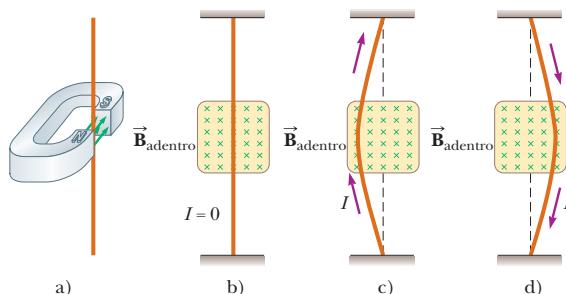



Figura 29.16 a) Alambre suspendido verticalmente entre los polos de un imán. b) El arreglo que se muestra en el inciso a) mira hacia el polo sur del imán, de manera que el campo magnético (cruces verdes) se dirige hacia adentro de la página. Cuando no existe corriente en el alambre, éste sigue vertical. c) Cuando la corriente se dirige hacia arriba, el alambre se flexiona hacia la izquierda. d) Cuando la corriente se dirige hacia abajo, el alambre se flexiona hacia la derecha.

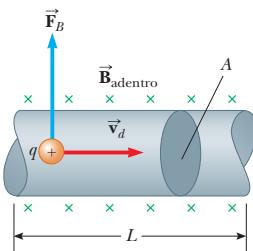



Figura 29.17 Segmento de un alambre conduciendo corriente en un campo magnético $\vec{B}$. La fuerza magnética ejercida sobre cada una de las cargas que constituyen la corriente es igual a $q\vec{v}_d \times \vec{B}$, y la fuerza neta sobre el segmento de longitud L es $I\vec{L} \times \vec{B}$.

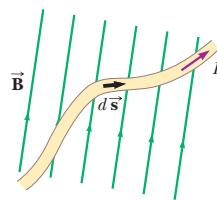



Figura 29.18 Un segmento de alambre de forma arbitraria que lleva una corriente I en un campo magnético $\vec{B}$ experimenta una fuerza magnética. La fuerza magnética sobre cualquier segmento $d\vec{s}$ es igual a $I\,d\vec{s} \times \vec{B}$ y se dirige hacia afuera de la página. Para confirmar la dirección de esta fuerza deberá utilizar la regla de la mano derecha.

magnético uniforme $\vec{B}$, según se ve en la figura 29.17. La fuerza magnética que se ejerce sobre una carga q en movimiento, con una velocidad de arrastre $\vec{v}_d$, es igual a $q\vec{v}_d \times \vec{B}$. Para encontrar la fuerza total que actúa sobre el alambre, multiplique la fuerza $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ ejercida sobre una carga por el número de cargas en el segmento. Ya que el volumen del segmento es AL, el número de cargas en el segmento es igual a nAL, siendo n el número de cargas por unidad de volumen. Por esto, la fuerza magnética total sobre el alambre de longitud L es

$$\vec{F}_B = (q\vec{v}_d \times \vec{B})nAL$$

Es posible escribir esta expresión de una forma más conveniente al observar que, de la ecuación 27.4, la corriente en el alambre es igual a $I = nqv_dA$. Debido a eso,

Fuerza ejercida sobre un segmento de alambre conductor que transporta corriente en un campo magnético uniforme

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} \tag{29.10}$$

donde $\vec{L}$ es un vector que apunta en la dirección de la corriente I y que tiene una magnitud igual a la longitud L del segmento. Observe que esta expresión se aplica sólo a un segmento de alambre recto en un campo magnético uniforme.

Ahora considere un segmento de alambre de forma arbitraria de sección transversal uniforme en un campo magnético, según se observa en la figura 29.18. De la ecuación 29.10 se concluye que la fuerza magnética que se ejerce sobre una longitud $d\mathbf{s}$ de un pequeño segmento de vector en presencia de un campo $\vec{B}$ es igual a

$$d\vec{F}_B = I\,d\vec{s} \times \vec{B} \tag{29.11}$$

donde $d\vec{F}_B$ está dirigido hacia afuera de la página debido a las direcciones de $\vec{B}$ y de $d\vec{s}$ en la figura 29.18. Es posible considerar la ecuación 29.11 como una definición alterna de $\vec{B}$. Es decir, el campo magnético $\vec{B}$ se define en función de una fuerza medible ejercida sobre un elemento de corriente, donde la fuerza es máxima cuando $\vec{B}$ es perpendicular al elemento, y cero cuando $\vec{B}$ es paralelo al elemento.

Para calcular la fuerza total $\vec{F}_B$ que actúa sobre el alambre que se muestra en la figura 29.18, se integra la ecuación 29.11 por toda la longitud del alambre:

$$\vec{F}_B = I\int_a^b d\vec{s} \times \vec{B} \tag{29.12}$$

donde a y b representan los puntos extremos del alambre. Cuando se efectúa esta integración, pueden distinguirse en diferentes puntos la magnitud del campo magnético y la dirección que tiene el campo en relación con el vector $d\vec{s}$.

Pregunta rápida 29.3 Un alambre transporta corriente en el plano del papel en dirección a la parte superior de la página. El alambre experimenta una fuerza magnética hacia el borde derecho de la página. La dirección del campo magnético que crea esta fuerza se localiza a) en el plano de la página y con dirección hacia el borde izquierdo, b) en el plano de la página y con dirección hacia el borde inferior, c) hacia arriba y alejándose de la página, d) hacia abajo y adentro de la página.

EJEMPLO 29.4 **Fuerza sobre un conductor semicircular**

Un alambre doblado en un semicírculo de radio R forma un circuito cerrado y transporta una corriente I. El alambre yace en el plano xy y un campo magnético uniforme se dirige a lo largo del eje y positivo, como en la figura 29.19. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre la porción recta del alambre y sobre la porción curva.

Figura 29.19 (Ejemplo 29.4) La fuerza magnética sobre la porción recta de la espira se dirige alejándose de la página, y la fuerza magnética sobre la porción curva se dirige hacia la página.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la regla de la mano derecha para producto cruz, se ve que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ sobre la porción recta del alambre es alejándose de la página y la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ sobre la porción curva es hacia adentro de la página. ¿$\vec{\mathbf{F}}_2$ es mayor en magnitud que $\vec{\mathbf{F}}_1$ porque la longitud de la porción curva es mayor que la de la porción recta?

Categorizar Ya que se trata con un alambre portador de corriente en un campo magnético en lugar de una sola partícula con carga, debe usar la ecuación 29.12 para encontrar la fuerza total sobre cada porción del alambre.

Analizar Note que $d\vec{\mathbf{s}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ en todas partes en la porción recta del alambre. Use la ecuación 29.12 para encontrar la fuerza sobre esta porción:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = I\int_a^b d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}} = I\int_0^{2R} B\,ds\,\hat{\mathbf{k}} = 2IRB\hat{\mathbf{k}}$$

Para hallar la fuerza magnética sobre la parte curva, primero escriba una expresión para la fuerza magnética $d\vec{\mathbf{F}}_2$ sobre el elemento $d\vec{\mathbf{s}}$ en la figura 29.19:

$$1)\quad d\vec{\mathbf{F}}_2 = I\,d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}} = -IB \operatorname{sen}\theta\,ds\,\hat{\mathbf{k}}$$

A partir de la geometría en la figura 29.19, escriba una expresión para ds:

$$2)\quad ds = R\,d\theta$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1) e integre a través del ángulo θ desde 0 a π:

$$\vec{\mathbf{F}}_2 = -\int_0^{\pi} IRB \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\hat{\mathbf{k}} = -IRB\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\hat{\mathbf{k}} = -IRB[-\cos\theta]_0^{\pi}\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= IRB(\cos\pi - \cos 0)\hat{\mathbf{k}} = IRB(-1-1)\hat{\mathbf{k}} = -2IRB\hat{\mathbf{k}}$$

Finalizar A partir de este ejemplo surgen dos enunciados generales muy importantes. Primero, la fuerza sobre la porción curva es la misma en magnitud que la fuerza sobre un alambre recto entre los mismos dos puntos. En general, **la fuerza magnética sobre un alambre portador de corriente curvo en un campo magnético uniforme es igual a la de un alambre recto que conecta los puntos finales y porta la misma corriente.** Además, $\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = 0$ también es un resultado general: **la fuerza magnética neta que actúa sobre cualquier espira de corriente cerrado en un campo magnético uniforme es cero.**

29.5 Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme

En la sección anterior se mostró que en un conductor que transporta una corriente colocado en un campo magnético, se ejerce una fuerza magnética. A partir de este punto, ahora se analiza cómo en una espira de corriente colocado en un campo magnético se ejerce un momento de torsión.

Considere una espira rectangular que tiene una corriente I en presencia de un campo magnético uniforme dirigido paralelamente al plano de la espira, como se observa en la figura 29.20a (página 822). Sobre los lados ① y ③ no actúa ninguna fuerza magnética, ya que estos alambres son paralelos al campo; por lo que para estos lados, $\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0$. Sin embargo, sobre los lados ② y ④, sí actúan fuerzas magnéticas, porque están orientados perpendicularmente al campo. La magnitud de estas fuerzas es, por la ecuación 29.10,

$$F_2 = F_4 = IaB$$

a)

b)

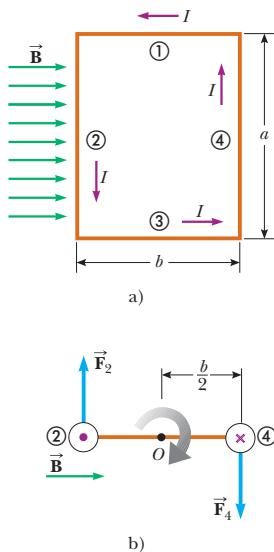



Figura 29.20 a) Vista superior de una espira de corriente rectangular en un campo magnético uniforme. No existen fuerzas magnéticas que actúen sobre lados ① y ③ porque son paralelos a $\vec{\mathbf{B}}$. Existen, sin embargo, fuerzas magnéticas actuando sobre los lados ② y ④ b) Vista lateral de la espira en dirección de los lados ② y ④ que muestra que las fuerzas magnéticas $\vec{\mathbf{F}}_2$ y $\vec{\mathbf{F}}_4$ sobre estos lados crean un momento de torsión que tiende a torcer la espira en dirección de las manecillas del reloj. El punto color violeta en el círculo izquierdo representa la corriente en el alambre ② dirigida hacia el lector; la cruz color violeta en el círculo derecho representa la corriente en el alambre ④ alejándose del lector.

La dirección de $\vec{\mathbf{F}}_2$, que es la fuerza magnética ejercida sobre el alambre ②, es alejándose de la página, de acuerdo con la vista que se muestra en la figura 29.20a; y la de $\vec{\mathbf{F}}_4$, la fuerza magnética que se ejerce sobre el alambre ④, es hacia el interior de la página en la misma vista. Y si observa la espira desde el lado ③ apuntando a lo largo de los lados ② y ④, verá lo que se muestra en la figura 29.20b, y las dos fuerzas magnéticas $\vec{\mathbf{F}}_2$ y $\vec{\mathbf{F}}_4$ están dirigidas según se muestra. Observe que las dos fuerzas apuntan en direcciones opuestas pero *no* actúan a lo largo de la misma línea de acción. Si se logra que la espira gire alrededor del punto *O*, estas dos fuerzas producen, en relación con este punto, un momento de torsión que hace que la espira gire en el sentido de las manecillas del reloj. La magnitud de este momento de torsión $\tau_{\text{máx}}$ es

$$\tau_{\text{máx}} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = (IaB)\frac{b}{2} + (IaB)\frac{b}{2} = IabB$$

donde $b/2$ es el momento de palanca en relación con *O* para cada una de las fuerzas. Ya que el área contenida por la espira es $A = ab$, el momento de torsión máximo es

$$\tau_{\max} = IAB \tag{29.13}$$

Este resultado de máximo momento de torsión sólo es válido cuando el campo magnético es paralelo al plano de la espira. El sentido de rotación es el de las manecillas del reloj cuando se le observa desde el lado ③, como se observa en la figura 29.20b. Si se invirtiera la dirección de la corriente, las direcciones de las fuerzas también se invertirían, y la tendencia a la rotación sería en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

Ahora se supone que el campo magnético uniforme forma un ángulo $\theta < 90°$ con una línea perpendicular al plano de la espira, como en la figura 29.21. Por conveniencia, $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular a los lados ② y ④. En este caso las fuerzas magnéticas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_3$ ejercidas sobre los lados ① y ③ se cancelan entre sí y no producen momento de torsión, ya que pasan por un origen común. Sin embargo, las fuerzas magnéticas $\vec{\mathbf{F}}_2$ y $\vec{\mathbf{F}}_4$ que actúan sobre los lados ② y ④ producen un momento de torsión en relación con *cualquier punto*. En la vista lateral que se muestra en la figura 29.21, se nota que el momento de palanca de $\vec{\mathbf{F}}_2$ en relación con el punto *O* es igual a $(b/2)$ sen θ. De manera similar, el momento de palanca de $\vec{\mathbf{F}}_4$ en relación con *O*, es también $(b/2)$ sen θ. Ya que $F_2 = F_4 = IaB$, la magnitud del momento de torsión neto en relación con *O* es

$$\begin{aligned}\tau &= F_2 \frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta + F_4 \frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta \\ &= IaB\left(\frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta\right) + IaB\left(\frac{b}{2} \operatorname{sen}\theta\right) = IabB \operatorname{sen} \\ &= IAB \operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

donde $A = ab$ es el área de la espira. Este resultado muestra que el momento de torsión tiene su valor máximo *IAB* cuando el campo es perpendicular a la normal en el plano de la espira ($\theta = 90°$), como se vio al analizar la figura 29.20, y es igual a cero cuando el campo es paralelo a la normal en el plano de la espira ($\theta = 0$).

Una expresión conveniente para el momento de torsión ejercido sobre una espira colocado en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ es

Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético ▶

$$\vec{\tau} = I\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{29.14}$$

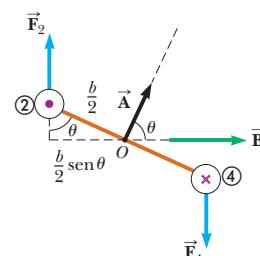



Figura 29.21

Vista desde un extremo de la espira en la figura 29.20b, girado un ángulo respecto al campo magnético. Si $\vec{\mathbf{B}}$ forma un ángulo θ respecto al vector $\vec{\mathbf{A}}$, que es perpendicular al plano de la espira, el momento de torsión será igual a *IAB* sen θ, donde la magnitud de $\vec{\mathbf{A}}$ es el valor *A*, es decir, el área de la espira.

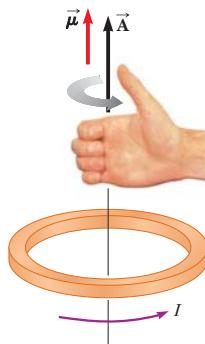



Figura 29.22 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector $\vec{\mathbf{A}}$. La dirección del momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ es la misma que la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$.

donde $\vec{\mathbf{A}}$, que es el vector que se muestra en la figura 29.21, es perpendicular al plano de la espira y tiene una magnitud igual al área de la misma. La dirección de $\vec{\mathbf{A}}$ se determina con la regla de la mano derecha que se describe en la figura 29.22. Cuando enrolla los dedos de la mano derecha en la dirección de la corriente en la espira, su pulgar apunta en la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$. Como muestra la figura 29.21, la espira tiende a girar en la dirección de valores decrecientes de θ (es decir, de forma que el vector de área $\vec{\mathbf{A}}$ gire hacia la dirección del campo magnético).

El producto $I\vec{\mathbf{A}}$ representa el **momento dipolar magnético** $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ (conocido a menudo como "momento magnético") de la espira:

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} \equiv I\vec{\mathbf{A}} \qquad \mathbf{(29.15)}$$

◀ Momento dipolar magnético de una espira de corriente

La unidad del SI del momento dipolar magnético es el ampere-metro^2 ($\text{A} \cdot \text{m}^2$). Si una bobina de alambre contiene N espiras de la misma área, el momento magnético de la bobina es

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{bobina}} = NI\vec{\mathbf{A}} \qquad \mathbf{(29.16)}$$

Con esta definición exprese el momento de torsión ejercido en una espira de corriente en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ de la forma

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad \mathbf{(29.17)}$$

◀ Momento de torsión sobre un momento magnético en un campo magnético

Observe que este resultado es similar al de la ecuación 26.18, $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$, correspondiente al momento de torsión ejercido en un dipolo eléctrico en presencia de un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, donde $\vec{\mathbf{p}}$ es el momento dipolar eléctrico.

Aunque se obtiene el momento de torsión para una orientación específica de $\vec{\mathbf{B}}$ en relación con la espira, la ecuación $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es válida para cualquier orientación. Es más, aunque deduzca la expresión del momento de torsión para el caso de una espira rectangular, el resultado es válido para cualquier forma de espira. El momento de torsión está dado por la ecuación 29.17 y por la ecuación 29.16 para el momento magnético de una bobina con N vueltas.

En la sección 26.6 ser afirmó que la energía potencial de un sistema de un dipolo eléctrico dentro de un campo eléctrico se conoce por $U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$. Esta energía depende de la orientación del dipolo en el campo eléctrico. De la misma forma, la energía potencial de un sistema constituido por un dipolo magnético en un campo magnético depende de la orientación del dipolo en dicho campo, y está dada por

$$U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \qquad \mathbf{(29.18)}$$

◀ Energía potencial de un sistema formado por un momento magnético en un campo magnético

Por esta expresión, aparece que el sistema tiene la mínima energía $U_{\text{mín}} = -\mu B$ cuando $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ apunta en la misma dirección que $\vec{\mathbf{B}}$. El sistema tiene su máxima energía $U_{\text{máx}} = +\mu B$ cuando $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ apunta en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{B}}$.

El momento de torsión en una espira de corriente hace girar la espira; este efecto se explota de manera práctica en un **motor**. La energía entra al motor mediante transmisión eléctrica, y la bobina giratoria trabaja sobre algún dispositivo externo al motor. Por ejemplo, el motor en el sistema de la ventana eléctrica de un automóvil realiza trabajo sobre las ventanas, al aplicar una fuerza sobre ellas y moverlas arriba o abajo a través de cierto desplazamiento. En la sección 31.5 se explicarán los motores con más detalle.

Pregunta rápida 29.4 Ordene de mayor a menor las magnitudes de los momentos de torsión que actúan en las espiras rectangulares a), b) y c) muestran el borde superior en la figura 29.23. Todas las espiras son idénticas y conducen la misma corriente. Clasifique de mayor a menor las magnitudes de las fuerzas netas que actúan sobre las espiras rectangulares mostradas en la figura 29.23.

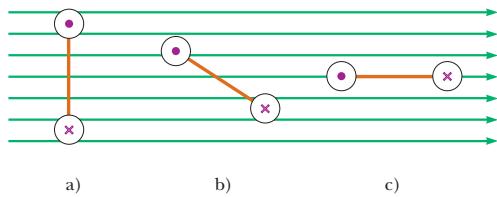



Figura 29.23 (Pregunta rápida 29.4) ¿Cuál de las espiras de corriente (vistos los bordes superiores) experimenta el mayor momento de torsión?, a), b) o c). ¿Cuál de las espiras de corriente experimenta la fuerza neta máxima?

EJEMPLO 29.5 Momento dipolar magnético de una bobina

Una bobina rectangular con dimensiones de 5.40 cm × 8.50 cm consiste en 25 vueltas de alambre y conduce una corriente de 15.0 mA. Se aplica un campo magnético de 0.350 T paralelo al plano de la bobina.

(A) Calcule la magnitud del momento dipolar magnético de la bobina.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El momento magnético de la bobina es independiente de cualquier campo magnético en el que la espira reside, así que sólo depende de la geometría de la espira y la corriente.

Categorizar Las cantidades se evalúan en función de las ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 29.16 para calcular el momento magnético:

$$\mu_{\text{bobina}} = NIA = (25)(15.0 \times 10^{-3}\text{ A})(0.054\,0\text{ m})(0.085\,0\text{ m})$$
$$= 1.72 \times 10^{-3}\text{ A}\cdot\text{m}^2$$

(B) ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión que actúa sobre la espira?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 29.17 y observe que $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular a $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{bobina}}$:

$$\tau = \mu_{\text{bobina}} B = (1.72 \times 10^{-3}\text{ A}\cdot\text{m}^2)(0.350\text{ T})$$
$$= 6.02 \times 10^{-4}\text{ N}\cdot\text{m}$$

EJEMPLO 29.6 Rotación de una bobina

Considere la espira de alambre de la figura 29.24a. Imagine que gira sobre un eje a lo largo del lado ④, que es paralelo al eje z y se amarra de modo que el lado ④ permanece fijo y el resto de la espira cuelga verticalmente pero puede dar vueltas alrededor del lado ④ (figura 29.24b). La masa de la espira es 50.0 g, y los lados tienen longitudes $a = 0.200$ m y $b = 0.100$ m. La espira conduce una corriente de 3.50 A y se sumerge en un campo magnético uniforme vertical de 0.010 0 T de magnitud en la dirección $+y$ (figura 29.24c). ¿Qué ángulo forma el plano de la espira con la vertical?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la vista lateral de la figura 29.24b, observe que el momento magnético de la espira es hacia la izquierda. Por lo tanto, cuando la espira está en el campo magnético, el momento de torsión magnético sobre la espira hace que dé vuelta en una dirección en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del lado ④, que se eligió como el eje de rotación. Imagine que la espira hace esta rotación en sentido de las manecillas del reloj de modo que el plano de la espira es a cierto ángulo θ con la vertical, como en la figura 29.24c. La fuerza gravitacional sobre la espira ejerce un momento de torsión que causaría una rotación en la dirección contraria a las manecillas del reloj si el campo magnético se interrumpe.

Figura 29.24 (Ejemplo 29.6) a) Vista superior de una espira de corriente rectangular en un campo magnético uniforme. Esta figura es similar a las situaciones en las figuras 29.20 y 29.21. b) Vista del borde de la espira en el que se aprecian desde abajo los lados ② y ④. La espira cuelga verticalmente y está articulada de modo que puede dar vuelta alrededor del lado ④. c) Vista final de la espira en b) girada a través de un ángulo respecto a la horizontal cuando se coloca en un campo magnético. El momento de torsión magnético hace que la espira dé vuelta en una dirección en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del lado ④, mientras que el momento de torsión gravitacional causa una rotación contra las manecillas del reloj.

Categorizar A cierto ángulo de la espira, los dos momentos de torsión descritos en la etapa *Conceptualizar* son iguales en magnitud y la espira está en reposo. Por lo tanto, la espira se modela como un objeto rígido en equilibrio.

Analizar Evalúe el momento de torsión magnético sobre la espira a partir de la ecuación 29.17:

$$\vec{\tau}_B = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\mu B \operatorname{sen}(90° - \theta)\hat{\mathbf{k}} = -IAB\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} = -IabB\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

Evalúe el momento de torsión gravitacional sobre la espira, y observe que la fuerza gravitacional se puede modelar como actuante en el centro de la espira:

$$\vec{\tau}_g = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{g}} = mg\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

A partir del modelo de cuerpo rígido en equilibrio, sume los momentos de torsión e iguale a cero el momento de torsión neto:

$$\sum \vec{\tau} = -IabB\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} + mg\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{k}} = 0$$

Resuelva para $\tan\theta$:

$$IabB\cos\theta = mg\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta \quad\rightarrow\quad \tan\theta = \frac{2IaB}{mg}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2IaB}{mg}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2(3.50\text{ A})(0.200\text{ m})(0.010\,0\text{ T})}{(0.050\,0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)}\right] = 1.64°$$

Finalizar El ángulo es relativamente pequeño, de modo que la espira todavía cuelga casi verticalmente. Sin embargo, si la corriente I o el campo magnético B aumentan, el ángulo aumenta conforme el momento de torsión magnético se hace más intenso.

29.6 El efecto Hall

Cuando se coloca un conductor de corriente en un campo magnético, se genera una diferencia de potencial en una dirección perpendicular tanto a la corriente como al campo magnético. Este fenómeno, que fue observado por primera vez por Edwin Hall (1855-1938) en 1879, se conoce como *efecto Hall*. El arreglo utilizado para observar el efecto Hall está constituido por un conductor plano que transporta una corriente I en la dirección x, como se ve en la figura 29.25 (página 826). En la dirección y se aplica un campo magnético

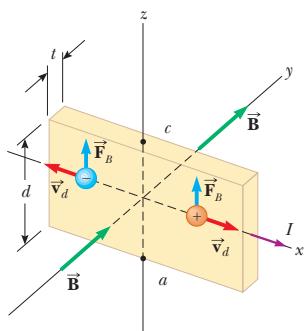



Figura 29.25 Para observar el efecto Hall, se aplica un campo magnético a un conductor que transporta corriente. Cuando I tiene la dirección x y $\vec{\mathbf{B}}$ la dirección y, los portadores de cargas tanto positivas como negativas se desvían hacia arriba en el campo magnético. El voltaje Hall se mide entre los puntos a y c.

uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Si los portadores de carga son electrones que se mueven en la dirección negativa de x con una velocidad de arrastre $\vec{\mathbf{v}}_d$, experimentan una fuerza magnética hacia arriba $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}}_d \times \vec{\mathbf{B}}$, y son desviados en la misma dirección, se acumulan en el borde superior del conductor plano, y dejan en el borde inferior un exceso de carga positiva en el borde inferior(figura 29.26a). Esta acumulación de carga en los bordes establece un campo eléctrico en el conductor y se incrementa hasta que la fuerza eléctrica en los portadores que quedan en el resto del conductor equilibran la fuerza magnética que actúa sobre los portadores. Cuando se alcanza el equilibrio, los electrones ya no son desviados hacia arriba. Como se ve en la figura 29.26, se puede medir la diferencia de potencial, conocida como el **voltaje Hall** ΔV_H, generado en el conductor, mediante un voltímetro suficientemente sensible conectado a través de la muestra.

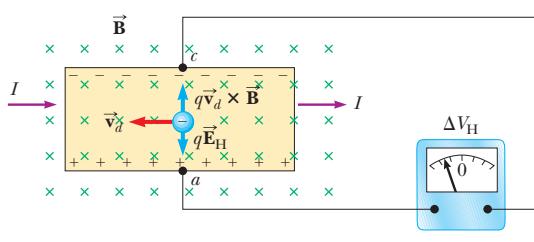
Si los portadores de carga son positivos y por tanto se desplazan en la dirección positiva de x (para una corriente hacia la derecha), como se muestra en las figuras 29.25 y 29.26b, también experimentan una fuerza magnética $q\vec{\mathbf{v}}_d \times \vec{\mathbf{B}}$ hacia arriba. Ello produce una acumulación de cargas positivas en el borde superior y deja un exceso de carga negativa en el borde inferior. De ahí que el signo del voltaje Hall generado en la muestra sea de signo opuesto al correspondiente a la desviación de electrones. Por lo tanto, el signo de los portadores de carga puede determinarse a partir de una medición de la polaridad que tiene el voltaje Hall.

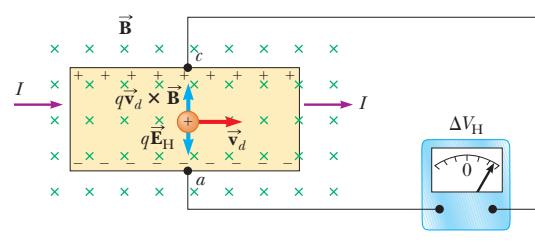
En la deducción de una expresión que defina el voltaje Hall, primero observe que la fuerza magnética ejercida sobre los portadores tiene una magnitud igual a qv_dB. En reposo, esta fuerza está equilibrada por la fuerza eléctrica qE_H, donde E_H es la magnitud del campo eléctrico debido a la separación de las cargas (conocido a veces como *campo Hall*). Debido a eso,

$$qv_dB = qE_H$$

$$E_H = v_dB$$

Si d es el ancho del conductor, el voltaje Hall es igual a

$$\Delta V_H = E_Hd = v_dBd \tag{29.19}$$

En consecuencia, el voltaje Hall observado da un valor de la rapidez de arrastre de los portadores de carga una vez conocidos los valores de d y B.

Es posible obtener la densidad n de los portadores de carga midiendo la corriente en la muestra. Por la ecuación 27.4, puede expresar la rapidez de arrastre como

$$v_d = \frac{I}{nqA} \tag{29.20}$$

donde A es el área de la sección transversal del conductor. Reemplazando la ecuación 29.20 en la ecuación 29.19, se obtiene

$$\Delta V_H = \frac{IBd}{nqA} \tag{29.21}$$

a)

b)

Figura 29.26 a) Cuando los portadores de carga en un dispositivo de efecto Hall son negativos, el borde superior del conductor se carga negativamente, y c queda a un potencial eléctrico inferior que a. b) Cuando los portadores de carga son positivos, el borde superior se carga positivamente, y c está a un potencial más elevado que a. En cualquier caso, los portadores de carga no se desvían cuando los bordes llegan a cargarse lo suficiente, de forma que se alcanza un equilibrio en los portadores de carga entre la fuerza electrostática qE_H y la fuerza de deflexión magnética qvB.

Porque $A = td$, siendo t el espesor del conductor, es también posible expresar la ecuación 29.21 de la forma

$$\Delta V_H = \frac{IB}{nqt} \quad \textbf{(29.22)}$$

◀ El voltaje Hall

donde $R_H = 1/nq$ es el **coeficiente de Hall**. Esta correspondencia muestra que un conductor correctamente calibrado puede ser utilizado para medir la magnitud de un campo magnético desconocido.

Gracias a que todos los valores de la ecuación 29.23 diferentes a nq pueden ser medidos, es posible obtener con facilidad un valor para el coeficiente de Hall. El signo y la magnitud de R_H dan el signo de los portadores de carga y su densidad numérica. En la mayor parte de los metales los portadores de carga son electrones, y la densidad de los portadores de carga se determina a partir de mediciones del efecto Hall si está en concordancia con los valores calculados para metales como el litio (Li), el sodio (Na), el cobre (Cu) y la plata (Ag), cuyos átomos ceden cada uno un electrón para actuar como portadores de corriente. En este caso, n es aproximadamente igual al número de electrones conductores por unidad de volumen. Sin embargo, este modelo clásico no resulta válido para metales como el hierro (Fe), el bismuto (Bi) y el cadmio (Cd), o para los semiconductores. Estas discrepancias sólo se explican con un modelo de acuerdo con la naturaleza cuántica de los sólidos.

EJEMPLO 29.7 **Efecto Hall para cobre**

Una tira de cobre rectangular de 1.5 cm de ancho y 0.10 cm de grosor porta una corriente de 5.0 A. Encuentre el voltaje Hall para un campo magnético de 1.2 T aplicado en una dirección perpendicular a la tira.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie cuidadosamente las figuras 29.25 y 29.26 y asegúrese de entender que un voltaje Hall se desarrolla entre los bordes superior e inferior de la tira.

Categorizar El voltaje Hall se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Si supone que un electrón por átomo está disponible para conducción, tome la densidad de portador de carga como 8.46×10^{28} electrones/m^3 (véase ejemplo 27.1). Sustituya este valor y los datos conocidos en la ecuación 29.22:

$$\Delta V_H = \frac{IB}{nqt}$$

$$= \frac{(5.0\text{ A})(1.2\text{ T})}{(8.46 \times 10^{28}\text{ m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(0.001\,0\text{ m})}$$

$$\Delta V_H = \boxed{0.44\ \mu\text{V}}$$

Tal voltaje Hall extremadamente pequeño se espera en los buenos conductores. (Observe que el ancho del conductor no es necesario en este cálculo.)

¿Qué pasaría si? ¿Y si la tira tiene las dimensiones pero está hecho de un semiconductor? ¿El voltaje Hall será menor o mayor?

Respuesta En los semiconductores, n es mucho menor de lo que es en metales que aportan un electrón por átomo a la corriente; en consecuencia, el voltaje Hall usualmente es mayor porque varía con el inverso de n. Por lo general las corrientes del orden de 0.1 mA se usan para tales materiales. Considere un trozo de silicón que tenga las mismas dimensiones que la tira de cobre en este ejemplo y cuyo valor para n es 1.0×10^{20} electrones/m^3. Si considera $B = 1.2$ T e $I = 0.10$ mA, se encuentra que $\Delta V_H = 7.5$ mV. Una diferencia de potencial de esta magnitud es fácilmente mensurable.

Resumen

DEFINICIONES

El **momento de dipolo magnético** $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ de una espira portadora de corriente I es

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} \equiv I\vec{\mathbf{A}} \quad (29.5)$$

donde el vector de área $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular al plano de la espira y $|\vec{\mathbf{A}}|$ es igual al área de la espira. La unidad SI de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ es $\text{A}\cdot\text{m}^2$.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La fuerza magnética que actúa sobre una carga q que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \quad (29.1)$$

La dirección de esta fuerza magnética es perpendicular tanto a la velocidad de la partícula como al campo magnético. La magnitud de esta fuerza es

$$F_B = |q|vB \operatorname{sen} \theta \quad (29.2)$$

donde θ es el ángulo más pequeño entre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. La unidad SI de $\vec{\mathbf{B}}$ es el **tesla** (T), donde $1\ \text{T} = 1\ \text{N/A}\cdot\text{m}$.

Si una partícula con carga se mueve en un campo magnético uniforme, de modo que su velocidad inicial es perpendicular al campo, la partícula se mueve en un círculo, cuyo plano es perpendicular al campo magnético. El radio de la trayectoria circular es

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (29.3)$$

donde m es la masa de la partícula y q su carga. La rapidez angular de la partícula con carga es

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (29.4)$$

Si un conductor recto de longitud L porta una corriente I, la fuerza ejercida sobre dicho conductor cuando se coloca en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}} \quad (29.10)$$

donde la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ es en la dirección de la corriente y $|\vec{\mathbf{L}}| = L$.

Si un alambre con forma arbitraria que porta una corriente I se coloca en un campo magnético, la fuerza magnética ejercida sobre un segmento muy pequeño $d\vec{\mathbf{s}}$ es

$$d\vec{\mathbf{F}}_B = I\, d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}} \quad (29.11)$$

Para determinar la fuerza magnética total sobre el alambre, debe integrar la ecuación 29.11 en todo el alambre, teniendo en mente que tanto $\vec{\mathbf{B}}$ como $d\vec{\mathbf{s}}$ pueden variar en cada punto.

El momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ sobre una espira de corriente colocado en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}} \quad (29.17)$$

La energía potencial del sistema de un dipolo magnético en un campo magnético es

$$U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \quad (29.18)$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

Las preguntas 2, 3 y 4 del capítulo 11 se pueden asignar con este capítulo.

1. **O** Responda sí o no a cada pregunta. Suponga que los movimientos y corrientes mencionados son a lo largo del eje x y los campos están en la dirección y. a) ¿Un campo eléctrico ejerce una fuerza sobre un objeto con carga inmóvil? b) ¿Un campo magnético lo hace? c) ¿Un campo eléctrico ejerce una fuerza sobre un objeto con carga móvil? d) ¿Un campo magnético lo hace? e) ¿Un campo eléctrico ejerce una fuerza sobre un alambre recto portador de corriente? f) ¿Un campo magnético lo hace? g) ¿Un campo eléctrico ejerce una fuerza sobre un haz de electrones? h) ¿Un campo magnético lo hace?

2. **O** El electrón A se dispara horizontalmente con rapidez de 1 Mm/s en una región donde existe un campo magnético vertical. El electrón B se dispara a lo largo de la misma trayectoria con rapidez 2 Mm/s. **i)** ¿Sobre cuál electrón se ejerce una mayor fuerza magnética? a) A. b) B. c) Las fuerzas tienen la misma magnitud distinta de cero. d) Las fuerzas son ambas cero. **ii)** ¿Cuál electrón tiene una trayectoria que se curva de manera más pronunciada? a) A. b) B. c) Las partículas siguen la misma trayectoria curva. d) Las partículas continúan en línea recta.

3. **O** Clasifique cada una de las siguientes como una cualidad de a) sólo fuerzas eléctricas, b) sólo de fuerzas magnéticas, c) de fuerzas eléctricas y magnéticas o d) ni de fuerza eléctrica ni de magnética. **i)** La fuerza es proporcional a la magnitud del campo que la ejerce. **ii)** La fuerza es proporcional a la magnitud de la carga del objeto sobre el que se ejerce la fuerza. **iii)** La fuerza que se ejerce sobre un objeto con carga negativa es opuesta en dirección a la fuerza sobre una carga positiva. **iv)** la fuerza que se ejerce sobre un objeto con carga inmóvil es cero. **v)** La fuerza que se ejerce sobre un objeto con carga en movimiento es cero. **vi)** La fuerza que se ejerce sobre un objeto cargado es proporcional a su rapidez. **vii)** La fuerza que se ejerce sobre un objeto con carga no puede alterar la rapidez del objeto. **viii)** La magnitud de la fuerza depende de la dirección de movimiento del objeto con carga.

4. **O** Clasifique las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre las siguientes partículas de mayor a menor. En su clasificación muestre cualquier caso de igualdad. a) Un electrón se mueve a 1 Mm/s perpendicular a un campo magnético de 1 mT. b) Un electrón se mueve a 1 Mm/s paralelo a un campo magnético de 1 mT. c) Un electrón se mueve a 2 Mm/s perpendicular a un campo magnético de 1 mT. d) Un electrón se mueve a 1 Mm/s perpendicular a un campo magnético de 2 mT. e) Un protón se mueve a 1 Mm/s perpendicular a un campo magnético de 1 mT. f) Un protón se mueve a 1 Mm/s en un ángulo de 45° en un campo magnético de 1 mT.

5. **O** En cierto instante, un protón se mueve en la dirección x positiva a través de un campo magnético en la dirección z negativa. ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética ejercida en el protón? a) x b) $-x$ c) y d) $-y$ e) z (f) $-z$ g) a la mitad del camino entre los ejes x y $-z$, a 45° a ambos h) la fuerza es cero.

6. **O** Una partícula con carga eléctrica se dispara en una región del espacio donde el campo eléctrico es cero y se mueve en línea recta. ¿Puede concluir que el campo magnético en dicha región es cero? a) Sí. b) No, el campo puede ser perpendicular a la velocidad de la partícula. c) No, el campo puede ser paralelo a la velocidad de la partícula. d) No, la partícula puede requerir tener carga del signo opuesto para que sobre ella se ejerza una fuerza. e) No, una observación de un objeto con carga *eléctrica* no da información acerca de un campo *magnético*.

7. Dos partículas con carga son proyectadas en la misma dirección en un campo magnético perpendicular a sus velocidades. ¿Si las partículas se desvían en direcciones opuestas, qué puede decir sobre ello?

8. ¿De qué manera se puede utilizar el movimiento de una partícula con carga para distinguir entre un campo magnético y un campo eléctrico? Dé un ejemplo específico para justificar su argumento.

9. **O** En el selector de velocidad que se muestra en la figura 29.12, los electrones con rapidez $v = E/B$ siguen una trayectoria recta. Los electrones que se mueven significativamente más rápido que esta rapidez a través del mismo selector se moverán a lo largo de, ¿qué tipo de trayectoria? a) un círculo b) una parábola c) una línea recta d) una trayectoria más complicada

10. ¿Es posible orientar una espira de corriente en un campo magnético uniforme de tal forma que la espira no tienda a girar? Explique.

11. Explique por qué no es posible determinar la carga y la masa de una partícula con carga por separado midiendo las aceleraciones producidas por fuerzas eléctricas y magnéticas que actúan sobre la partícula.

12. ¿De qué manera puede utilizarse una espira de corriente para determinar la presencia de un campo magnético en una región conocida del espacio?

13. Los rayos cósmicos, que son partículas con carga del espacio exterior, se impactan contra la Tierra con mayor frecuencia cerca de los polos que del ecuador. ¿Por qué?

14. ¿Un campo magnético constante puede poner en movimiento un electrón inicialmente en reposo? Explique su respuesta.

Problemas

Sección 29.1 Campos y fuerzas magnéticas

Los problemas 1, 2, 3, 4, 6, 7, y 10 del capítulo 11 se pueden resolver con este capítulo.

1. Determine la dirección inicial de la deflexión de las partículas con carga cuando entran en los campos magnéticos como los que se muestran en la figura P29.1.

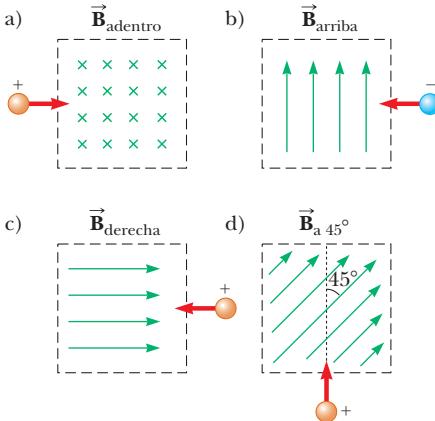



Figura P29.1

2. Considere un electrón cerca del ecuador de la Tierra. ¿En qué dirección tiende a desviarse si su velocidad está dirigida hacia a) abajo, b) el norte, c) el oeste o d) el sureste?

3. Un protón se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme $\vec{B}$ a una rapidez de 1.00×10^7 m/s y experimenta una aceleración de 2.00×10^{13} m/s^2 en la dirección positiva de x cuando su velocidad está en la dirección positiva de z. Determine la magnitud y la dirección del campo.

4. Un protón viaja con una rapidez de 3.00×10^6 m/s a un ángulo de 37.0° en la dirección de un campo magnético con un valor de 0.300 T en la dirección de las y positivas. ¿Cuáles son a) la magnitud de la fuerza magnética ejercida sobre el protón y b) su aceleración?

5. Un protón que se mueve a 4.00×10^6 m/s a través de un campo magnético de 1.70 T experimenta una fuerza magnética de magnitud 8.20×10^{-13} N. ¿Cuál es el ángulo que forma la velocidad del protón y el campo?

6. Un electrón es acelerado por medio de 2 400 V partiendo del reposo y después entra en un campo magnético uniforme de 1.70 T. ¿Cuáles son los valores a) máximo y b) mínimo, de fuerza magnética que puede experimentar esta carga?

7. Un protón se mueve con una velocidad $\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k})$ m/s en una región donde el campo magnético tiene un valor $\vec{B} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ T. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética que experimenta esta carga?

8. ● Un electrón tiene una velocidad de 1.20×10^4 m/s (en la dirección positiva de x), y una aceleración de 2.00×10^{12} m/s^2 (en la dirección positiva de z) en un campo uniforme eléctrico y magnético. Si el campo eléctrico tiene una magnitud de 20.0 N/C (en la dirección positiva de z), ¿qué puede determinar y qué no en relación con el campo magnético de la región?

Sección 29.2 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme

9. El campo magnético de la Tierra en cierta ubicación está dirigido verticalmente hacia abajo y tiene una magnitud de 50.0 μT. Un protón se encuentra trasladándose horizontalmente hacia el oeste en el campo con una rapidez de 6.20×10^6 m/s. a) ¿Cuáles son la dirección y la magnitud de la fuerza magnética que el campo ejerce sobre esta partícula? b) ¿Cuál es el radio del arco circular que ha recorrido el protón?

10. ● Se aplica un voltaje acelerador de 2 500 V a un cañón de electrones, lo que produce un haz de electrones que originalmente viajan horizontalmente al norte en el vacío hacia el centro de una pantalla a 35.0 cm de distancia. a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la desviación en la pantalla causada por el campo gravitacional de la Tierra? b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la desviación en la pantalla causada por la componente vertical del campo magnético de la Tierra, considerado como 20.0 μT hacia abajo? ¿Un electrón en este campo magnético vertical se mueve como un proyectil, con vector aceleración constante perpendicular a una componente de velocidad constante hacia el norte? ¿Es una buena aproximación suponer que tiene este movimiento de proyectil? Explique.

11. Un protón (con carga = $+e$ y masa = m_p), un deuterón (con carga = $+e$ y masa = $2m_p$) y una partícula alfa (con carga = $+2e$ y masa = $4m_p$) son acelerados mediante una diferencia de potencial común ΔV. Cada una de las partículas entra en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ con una velocidad en dirección perpendicular a $\vec{B}$. El protón se mueve en una trayectoria circular de radio r_p. Determine los radios de las órbitas circulares del deuterón, r_d, y de la partícula alfa, r_α, todos ellos en función de r_p.

12. **Problema de repaso.** Un electrón choca en forma elástica con un segundo electrón que está inicialmente en reposo. Después de la colisión, los radios de sus trayectorias son 1.00 cm y 2.40 cm. Las trayectorias son perpendiculares a un campo magnético uniforme de magnitud 0.044 0 T. Determine la energía (en keV) del electrón incidente.

13. **Problema de repaso.** Un electrón se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético constante de magnitud 1.00 mT. El momentum angular del electrón en relación con el centro del círculo es 4.00×10^{-25} kg · m^2/s. Determine a) el radio de la trayectoria circular y b) la rapidez del electrón.

14. Un ion con una sola carga de masa m es acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial ΔV. Después es desviado por un campo magnético uniforme (perpendicular a la velocidad del ion) en una trayectoria semicircular de radio R. Ahora un ion con doble carga de masa m' es acelerado por medio de la misma diferencia de potencial y desviado por el mismo campo magnético en un semicírculo de radio $R' = 2R$. ¿Cuál es la relación de las masas de estos iones?

15. Un protón de rayo cósmico en el espacio interestelar tiene una energía de 10.0 MeV y ejecuta una órbita circular de radio igual a la de la órbita de Mercurio alrededor del Sol (5.80×10^{10} m). ¿Cuál es el campo magnético existente en esa región del espacio?

16. Suponga que la región a la derecha de cierto plano vertical contiene un campo magnético vertical de 1.00 mT de magnitud y el campo es cero en la región a la izquierda del plano. Un electrón, que originalmente viaja perpendicular al plano frontera, pasa a la región del campo. a) Determine el intervalo de tiempo requerido para que el electrón salga de la región "llena de campo", y note que su trayectoria es un semicírculo. b) Encuentre la energía cinética del electrón, si supone que la máxima profundidad de penetración en el campo es 2.00 cm.

Sección 29.3 Aplicaciones que involucran partículas con carga móviles en un campo magnético

17. Un selector de velocidad está constituido por los campos eléctrico y magnético que se describen mediante las expresiones $\vec{\mathbf{E}} = E\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{j}}$, siendo $B = 15.0$ mT. Determine el valor de E tal que un electrón de 750 eV trasladándose a lo largo del eje positivo x no se desvíe.

18. ● Iones de uranio 238 con un sola carga se aceleran mediante una diferencia de potencial de 2.00 kV y entran en un campo magnético uniforme de 1.20 T dirigido perpendicularmente a sus velocidades. a) Determine el radio de su trayectoria circular. b) Repita lo anterior para iones de uranio 235. **¿Qué pasaría si?** ¿De qué manera la relación de los radios de estas trayectorias depende del voltaje acelerador y de la magnitud del campo magnético?

19. Considere el espectrómetro de masas que se muestra esquemáticamente en la figura 29.13. La magnitud del campo eléctrico entre las placas del selector de velocidad es 2 500 V/m, y el campo magnético tanto en el selector de velocidad como en la cámara de deflexión tiene una magnitud de 0.035 0 T. Calcule el radio de la trayectoria para un ion de una sola carga con una masa $m = 2.18 \times 10^{-26}$ kg.

20. Un ciclotrón, concebido para acelerar protones, tiene un radio exterior de 0.350 m. Los protones son emitidos, prácticamente desde el reposo, por una fuente ubicada en el centro y son acelerados por una diferencia de potencial de 600 V cada vez que atraviesan el espacio existente entre las "des". Éstas están instaladas entre los polos de un electroimán de campo 0.800 T. a) Determine la frecuencia del ciclotrón para los protones en este ciclotrón. b) Determine la rapidez a la cual los protones salen del ciclotrón y c) su energía cinética máxima. d) ¿Cuántas revoluciones efectúa un protón en el ciclotrón? e) ¿Durante qué intervalo de tiempo se acelera un protón?

21. Un ciclotrón, concebido para acelerar protones, tiene un campo magnético de 0.450 T de magnitud en una región de radio 1.20 m. ¿Qué valores tienen a) la frecuencia y b) la rapidez máxima adquirida por los protones?

22. ● Una partícula, en el ciclotrón que se muestra en la figura 29.15a, adquiere energía $q\,\Delta V$ de una fuente de energía alternante cada vez que pasa de una de a la otra. El intervalo de tiempo para cada órbita completa es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

de modo que la rapidez promedio de aumento de energía de la partícula es

$$\frac{2q\,\Delta V}{T} = \frac{q^2 B\,\Delta V}{\pi m}$$

Note que esta entrada de potencia es constante en el tiempo. a) Demuestre que la proporción de aumento en el radio r de su trayectoria no es constante, sino que se conoce por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\,\frac{\Delta V}{\pi B}$$

b) Describa cómo se podría dibujar de manera realista la trayectoria de las partículas en la figura 29.15a. c) ¿A qué relación aumenta la posición radial de los protones en el problema 20, inmediatamente antes de que los protones salgan del ciclotrón? d) ¿Por cuánto aumenta el radio de la trayectoria de los protones durante su última revolución completa?

23. El cinescopio de una televisión utiliza bobinas magnéticas deflectoras en lugar de placas de deflexión. Suponga que un haz de electrones es acelerado mediante una diferencia de potencial de 50.0 kV y después pasa a través de una región con un campo magnético uniforme de 1.00 cm de ancho. La pantalla está instalada a 10.0 cm del centro de las bobinas y tiene una anchura de 50.0 cm. Cuando el campo no está activado, el haz de electrones se impacta en el centro de la pantalla. ¿Qué magnitud de campo es requerida para desviar el haz hasta un costado de la pantalla? No tome en cuenta correcciones relativistas.

24. ● En su "descubrimiento del electrón", J.J. Thomson demostró que las mismas desviaciones de haz resultaban con tubos que tenían cátodos hechos de *diferentes* materiales y contenían *varios* gases antes de la evacuación. a) ¿Estas observaciones son importantes? Explique su respuesta. b) Cuando aplicó varias diferencias de potencial a las placas de desviación y encendió las bobinas magnéticas, solas o en combinación con las placas de desviación, Thomson observó que la pantalla fluorescente continuaba mostrando una *única y pequeña* mancha radiante. Argumente si su observación es importante. c) Haga los cálculos para demostrar que la relación carga-masa que obtuvo Thomson era enorme comparada con la de cualquier objeto macroscópico o cualquier átomo o molécula ionizado. ¿Cómo puede darle sentido a este hecho? d) ¿Podría Thomson observar alguna desviación del haz debido a gravitación? Haga los cálculos para argumentar para su respuesta. (Para obtener una mancha radiante visible en la pantalla fluorescente, la diferencia de potencial entre rendijas y el cátodo debe ser de 100 V o más.)

Sección 29.4 Fuerza magnética que actúa sobre un conductor que transporta corriente

25. Un alambre de masa por unidad de longitud igual a 0.500 g/cm conduce una corriente de 2.00 A horizontalmente hacia el sur. ¿Cuáles son la dirección y la magnitud del campo magnético mínimo necesario para levantar este alambre verticalmente hacia arriba?

26. Un alambre transporta una corriente estable de 2.40 A. Un tramo recto del alambre tiene 0.750 m de largo y yace a lo largo del eje x dentro de un campo magnético uniforme, $\vec{\mathbf{B}} = 1.60\hat{\mathbf{k}}$ T. Si la corriente está orientada en la dirección positiva de x, ¿cuál es la fuerza magnética que se ejerce sobre la sección del alambre?

27. Un alambre de 2.80 m de longitud conduce una corriente de 5.00 A en una región donde un campo magnético uniforme tiene una magnitud de 0.390 T. Calcule la magnitud de la fuerza magnética que se ejerce sobre el alambre, si el ángulo formado por el campo magnético y la corriente es igual a a) 60.0°, b) 90.0° y c) 120°.

28. Imagine que un alambre, con densidad de masa lineal de 2.40 g/m, rodea a la Tierra en su ecuador magnético, donde el campo se modela con el valor uniforme de 28.0 μT horizontalmente al norte. ¿Qué magnitud y dirección de la corriente en el alambre mantendrá al alambre elevado y flotando sobre el suelo?

29. **Problema de repaso.** Una varilla con 0.720 kg de masa y un radio de 6.00 cm descansa sobre dos rieles paralelos (figura P29.29) que están separados por un valor d = 12.0 cm y tiene una longitud L = 45.0 cm de largo. La varilla conduce una corriente I = 48.0 A en la dirección que se muestra y rueda por los rieles sin resbalar. Perpendicularmente a la varilla y a los rieles existe un campo magnético uniforme de magnitud 0.240 T. Si parte del reposo, ¿cuál será la rapidez de la varilla cuando se salga de los rieles?

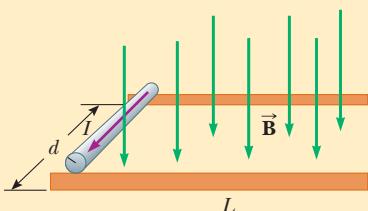



Figura P29.29 Problemas 29 y 30

30. **Problema de repaso.** Una varilla de masa m y de radio R descansa sobre dos rieles paralelos (figura P29.29) que están separados por una distancia d y que tienen una longitud L. La varilla conduce una corriente I en la dirección que se muestra y rueda a lo largo de los rieles sin resbalar. Un campo magnético uniforme B está dirigido perpendicularmente a la varilla y a los rieles. Si parte del reposo, ¿cuál será la rapidez de la varilla cuando se salga de los rieles?

31. *Un campo magnético no uniforme ejerce una fuerza neta sobre un dipolo magnético.* Por debajo de un anillo conductor horizontal de radio r que conduce una corriente I se coloca un poderoso imán, como se muestra en la figura P29.31. Si el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ forma un ángulo θ con la vertical en la ubicación del anillo, ¿cuál es la magnitud y dirección de la fuerza resultante sobre el anillo?

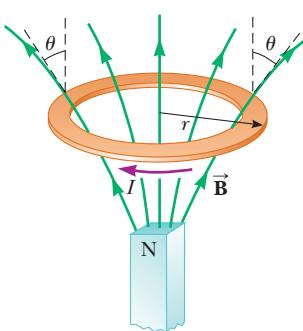



Figura P29.31

32. ● En la figura P29.32, el cubo tiene aristas de 40.0 cm. Cuatro segmentos rectos de alambre, ab, bc, cd y da forman una espira cerrada que conduce una corriente I = 5.00 A en la dirección que se muestra. En la dirección positiva de y existe un campo magnético uniforme de magnitud B = 0.020 0 T. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética que se ejerce sobre cada segmento. b) Explique cómo puede hallar la fuerza ejercida en el cuarto de estos segmentos partir de las fuerzas de los otros tres, sin cálculo adicional que involuvre el campo magnético.

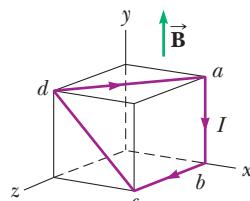



Figura P29.32

33. Suponga que en Atlanta, Georgia, el campo magnético de la Tierra tiene un valor de 52.0 μT hacia el norte a 60.0° por debajo de la horizontal. En un anuncio de neón un tubo conduce una corriente de 35.0 mA entre dos esquinas diagonalmente opuestas de un aparador, que está en un plano vertical norte sur. La corriente entra en el tubo en la esquina sur inferior de la ventana y sale en la esquina opuesta, que está a 1.40 m más al norte y 0.850 m más alta. Entre estos dos puntos, el tubo neón traza la palabra DONUTS. Determine la fuerza magnética vectorial total ejercida sobre el tubo. Puede usar el primer "enunciado importante" que se presenta en la sección Finalizar del ejemplo 29.4.

Sección 29.5 Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme

34. Se mantiene una corriente de 17.0 mA en solo una espira circular de 2.00 m de circunferencia. Un campo magnético de 0.800 T se dirige en paralelo al plano de la espira. a) Calcule el momento magnético de la espira. b) ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión ejercida por el campo magnético sobre la espira?

35. Una bobina rectangular está constituida por N = 100 vueltas muy apretadas y tiene como dimensiones a = 0.400 m y b = 0.300 m. La bobina se articula a lo largo del eje y, y su plano forma un ángulo θ = 30.0° con el eje x (figura P29.35). ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión ejercida sobre la bobina por un campo magnético uniforme B = 0.800 T dirigido a lo largo del eje x, cuando la corriente es I = 1.20 A en la dirección que se muestra en la figura? ¿Cuál es la dirección de rotación esperada de la bobina?

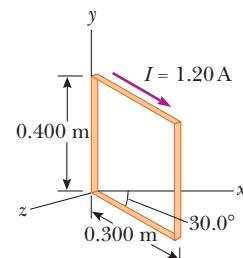



Figura P29.35

36. Una espira de corriente con un momento dipolar magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ se coloca en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$, formando su momento un ángulo θ con el campo. Escogiendo arbitrariamente $U = 0$ para $\theta = 90°$, demuestre que la energía potencial del sistema dipolo-campo es $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$. Puede seguir el análisis efectuado en el capítulo 26 referente a la energía potencial de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico.

37. ● La aguja de una brújula magnética tiene un momento magnético igual a 9.70 mA·m^2. En su ubicación, el campo magnético de la Tierra tiene un valor de 55.0 μT hacia el norte a 48.0° por debajo de la horizontal. a) Identifique las orientaciones de la aguja de la brújula que representan la energía potencial mínima, así como la máxima del sistema aguja-campo. b) ¿Cuánto trabajo debe realizarse sobre la aguja para moverla de la primera a la última orientación?

38. Un alambre se dobla formando un círculo de diámetro de 10.0 cm y se coloca en un campo magnético de 3.00 mT. El alambre conduce una corriente de 5.00 A. Determine a) el momento de torsión máximo sobre el alambre y b) el intervalo de las energías potenciales del sistema alambre-campo para distintas orientaciones del círculo.

39. ● Un alambre de 1.50 cm de largo conduce una corriente de 30.0 mA cuando se conecta a una batería. Todo el alambre se puede arreglar como un solo espira con la forma de un círculo, un cuadrado o un triángulo equilátero. Todo el alambre se puede convertir en una bobina circular compacta plana con N vueltas. Explique cómo se compara su momento magnético en todos estos casos. En particular, ¿su momento magnético puede tender a infinito? ¿A cero? ¿Su momento magnético tiene un valor máximo bien definido? Si es así, identifíquelo. ¿Tiene un valor mínimo? Si es así, identifíquelo.

40. El rotor en un determinado motor eléctrico es una bobina rectangular plana de 80 vueltas de alambre y de dimensiones 2.50 cm × 4.00 cm. El rotor gira en un campo magnético de 0.800 T. Cuando el plano del rotor es perpendicular a la dirección del campo magnético, lleva una corriente de 10.0 mA. En esta orientación, el momento magnético del rotor está en dirección opuesta al campo magnético. Después el rotor gira media revolución. Este proceso se repite haciendo que el rotor gire de manera estable a 3 600 revoluciones/min. a) Determine el momento de torsión máximo que actúa sobre el rotor. b) Determine el pico de potencia del motor. c) Encuentre el trabajo realizado por el campo magnético sobre el rotor en una revolución completa. d) ¿Cuál es la potencia media del motor?

Sección 29.6 El efecto Hall

41. En un experimento concebido para medir el campo magnético de la Tierra utilizando el efecto Hall, se coloca una barra de cobre de 0.500 cm de espesor en dirección este-oeste. Si una corriente de 8.00 A en el conductor da como resultado un voltaje Hall de 5.10×10^{-12} V, ¿cuál es la magnitud del campo magnético de la Tierra? (Suponga que $n = 8.46 \times 10^{28}$ electrones/m^3 y que el plano de la barra se gira para que quede perpendicular a la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$.)

42. Una sonda para el efecto Hall funciona con una corriente de 120 mA. Cuando la sonda se coloca en un campo magnético uniforme de magnitud 0.080 0 T, produce un voltaje Hall con un valor de 0.700 μV. a) Cuando se mide un campo magnético desconocido, el voltaje Hall es igual a 0.330 μV. ¿Cuál es la magnitud del campo desconocido? b) El espesor de la sonda en la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ es de 2.00 mm. Determine la densidad de los portadores de carga, cada uno con una carga de magnitud e.

Problemas adicionales

43. ● Los sistemas de circulación extracorpórea y las máquinas de diálisis emplean bombas sanguíneas. Un bomba mecánica puede destruir células sanguíneas. La figura P29.43 representa una bomba electromagnética. La sangre se confina en un tubo eléctricamente aislador, cilíndrico pero en la práctica representado como un rectángulo de ancho w y altura h. La simplicidad de diseño hace confiable a la bomba. La sangre se mantiene fácilmente sin contaminar; el tubo es simple de limpiar o barato para sustituir. Dos electrodos ajustan en lo alto y bajo del tubo. La diferencia de potencial entre ellos establece una corriente eléctrica a través de la sangre, con densidad de corriente J en una sección de longitud L. En la misma región existe un campo magnético perpendicular. a) Explique por qué este arreglo produce en el líquido una fuerza que se dirige a lo largo de la longitud de la tubería. b) Demuestre que la sección de líquido en el campo magnético experimenta un aumento de presión JLB. c) Después de que la sangre sale de la bomba, ¿ésta se carga? ¿Porta corriente? ¿Está imantada? La misma bomba magnética se puede usar para cualquier fluido que conduce electricidad, como el sodio líquido en un reactor nuclear.

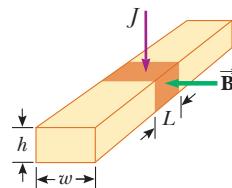



Figura P29.43

44. ● La figura 29.10 muestra una partícula con carga que viaja en un campo magnético no uniforme que forma una botella magnética. a) Explique por qué la partícula con carga positiva en la figura se debe mover en sentido de las manecillas del reloj. La partícula viaja a lo largo de una hélice cuyo radio disminuye y cuyo paso disminuye conforme la partícula se mueve en un campo magnético más intenso. Si la partícula se mueve hacia la derecha, a lo largo del eje x, su velocidad en esta dirección se reducirá a cero y será reflejado desde el lado derecho de la botella, que actúa como un "espejo magnético". La partícula termina rebotando de atrás para adelante entre los extremos de la botella. b) Explique cualitativamente por qué la velocidad axial se reduce a cero conforme la partícula se mueve en la región de campo magnético intenso al final de la botella. c) Explique por qué la velocidad tangencial aumenta conforme la partícula se aproxima al extremo de la botella. d) Explique por qué la partícula en órbita tiene un momento dipolar magnético. e) Bosqueje el momento magnético y use el resultado del problema 31 para explicar de nuevo cómo el campo magnético no uniforme ejerce una fuerza sobre la partícula en órbita a lo largo del eje x.

45. ● Suponga que en el plano del ecuador magnético de la Tierra, el campo del planeta es uniforme con el valor 25.0 μT al norte, perpendicular a este plano, en todas partes dentro de un radio de 100 Mm. También suponga que el campo de la Tierra es cero afuera de esta círculo. Un protón de rayos cósmicos, que viaja a un décimo de la rapidez de la luz se dirige directamente hacia el centro de la Tierra en el plano

del ecuador magnético. Encuentre el radio de curvatura de la trayectoria que sigue cuando entra a la región del supuesto campo del planeta. Explique si el protón golpeará la Tierra.

46. Una varilla de metal de 0.200 kg que conduce una corriente de 10.0 A se desliza sobre dos rieles horizontales que están separados 0.500 m. ¿Qué campo magnético vertical se requiere para mantener en movimiento la varilla con una velocidad constante si el coeficiente de fricción cinético entre la varilla y los rieles es de 0.100?

47. Protones con una energía cinética de 5.0 MeV se mueven en la dirección positiva de x y entran en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}} = 0.0500\hat{\mathbf{k}}$ T dirigido hacia fuera del plano de la página que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 1.00$ m, como se observa en la figura P29.47. a) Calcule la componente y del momentum de los protones cuando salen del campo magnético. b) Determine el ángulo α entre el vector inicial de velocidad del haz de protones y el vector de velocidad después de que el haz salga del campo. Ignore los efectos relativistas y observe que 1 eV $= 1.60 \times 10^{-19}$ J.

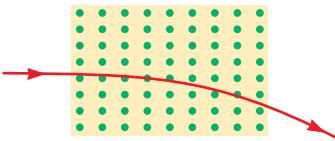



Figura P29.47

48. ● a) Un protón en movimiento en la dirección positiva de x con una velocidad $\mathbf{v} = v_i\hat{\mathbf{i}}$ experimenta una fuerza magnética $\mathbf{F} = F_i\hat{\mathbf{j}}$ en la dirección positiva de y. Explique lo que se puede o no inferir en relación con $\vec{\mathbf{B}}$ a partir de esta información. b) **¿Qué pasaría si?** En términos de F_i, ¿cuál sería la fuerza ejercida sobre un protón que se mueva con una velocidad de $\mathbf{v} = -v_i\hat{\mathbf{i}}$ en este mismo campo? c) ¿Cuál sería la fuerza ejercida sobre un electrón que se mueva con una velocidad de $\mathbf{v} = v_i\hat{\mathbf{i}}$ en este mismo campo?

49. Una carga positiva $q = 3.20 \times 10^{-19}$ C se mueve con una velocidad $\mathbf{v} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$ m/s a través de una región donde existen a la vez un campo magnético uniforme y un campo eléctrico uniforme. a) Calcule la fuerza total sobre la carga en movimiento (en notación del vector unitario), tomando $\vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ T y $\mathbf{E} = (4\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}})$ V/m. b) ¿Cuál es el ángulo que el vector de la fuerza formará con el eje positivo de las x?

50. Un protón, que tiene un velocidad inicial de $20.01\hat{\mathbf{i}}$ Mm/s entra a un campo magnético uniforme de 0.300 T de magnitud, con una dirección perpendicular a la velocidad del protón. Deja la región llena de campo con velocidad $-20.01\hat{\mathbf{j}}$ Mm/s. Determine a) la dirección del campo magnético, b) el radio de curvatura de la trayectoria del protón mientras está en el campo, c) la distancia que recorre el protón en el campo y d) el intervalo de tiempo que el protón está en el campo.

51. **Problema de repaso.** Un alambre de densidad lineal de masa igual a 1.00 g/cm se coloca sobre una superficie horizontal que tiene un coeficiente de fricción cinética de 0.200. El alambre conduce una corriente de 1.50 A hacia el este y se desliza horizontalmente hacia el norte. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del campo magnético más pequeño que provocará que el alambre se mueva de esta manera?

52. **Problema de repaso.** Un protón está en reposo en el plano vertical frontera de una región que contiene un campo magnético uniforme y vertical B. Una partícula alfa moviéndose horizontalmente choca de frente de forma elástica con el protón. Inmediatamente después de la colisión, ambas partículas entran en el campo magnético, moviéndose perpendicularmente a la dirección del campo. El radio de la trayectoria del protón es R. Determine el radio de la trayectoria de la partícula alfa. La masa de la partícula alfa es cuatro veces la correspondiente del protón y su carga el doble de la carga del protón.

53. El circuito de la figura P29.53 está formado de alambres en su parte superior e inferior y de resortes metálicos idénticos en los lados derecho e izquierdo. La porción superior del circuito está fija. El alambre inferior tiene una masa de 10.0 g y una longitud de 5.00 cm. Los resortes se estiran 0.500 cm bajo el peso del alambre y el circuito presenta una resistencia total de 12.0 Ω. Cuando el campo magnético se encuentra operando, hacia el exterior de la página, los resortes se estiran 0.300 cm adicionales. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético?

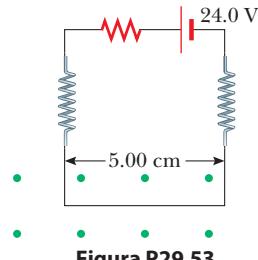



Figura P29.53

54. Una mezcladora eléctrica manual contiene un motor eléctrico. Represente el motor como una bobina circular, compacta y plana que lleva corriente eléctrica en una región donde existe un campo magnético producido por un imán permanente externo. Sólo necesita considerar un instante en la operación del motor. (Estudiará de nuevo los motores en el capítulo 31.) La bobina se mueve porque el campo magnético ejerce un momento de torsión sobre ella, como se describió en la sección 29.5. Estime el orden de magnitud del campo magnético, el momento de torsión en la bobina, su corriente, su área y el número de vueltas en la bobina, de manera que se relacionen entre sí de acuerdo con la ecuación 29.17. Observe que la potencia de entrada al motor es eléctrica, y está dada por $\mathcal{P} = I\,\Delta V$, y la potencia de salida útil es mecánica, $\mathcal{P} = \tau\omega$.

55. Una esfera no conductora tiene una masa de 80.0 g y un radio de 20.0 cm. A su alrededor se enrolla apretadamente una bobina plana y compacta de alambre con 5 vueltas, donde cada vuelta es concéntrica con la esfera. Como se puede ver en la figura P29.55, la esfera es colocada sobre un plano inclinado hacia la izquierda y abajo, formando un ángulo θ con la horizontal, de manera que la bobina resulta paralela al plano inclinado. En la región de la esfera existe un campo magnético uniforme de 0.350 T dirigido verticalmente hacia arriba. ¿Qué corriente debe pasar por la bobina para que la esfera quede en equilibrio sobre el plano inclinado? Demuestre que el resultado no depende del valor de θ.

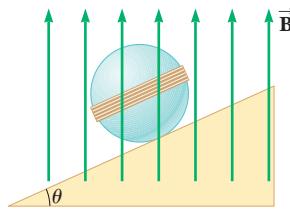



Figura P29.55

56. Un varilla metálica con una masa por unidad de longitud λ transporta una corriente I. La varilla cuelga de dos alambres verticales en un campo magnético vertical uniforme, como se muestra en la figura P29.56. Los alambres forman un ángulo θ

con la vertical cuando están en equilibrio. Determine la magnitud del campo magnético.

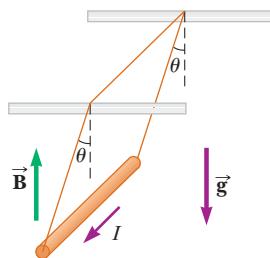



Figura P29.56

57. Un ciclotrón es utilizado ocasionalmente para determinar fechas por el método de carbono, como se describe en el capítulo 44. Del material cuya antigüedad se desea conocer, se obtienen iones de carbono-14 y de carbono-12, mismos que son acelerados en el ciclotrón. Si el ciclotrón tiene un campo magnético de magnitud 2.40 T, ¿cuál es la diferencia en las frecuencias del ciclotrón para los dos iones?

58. Un campo magnético uniforme de magnitud 0.150 T está dirigido a lo largo del eje positivo de x. Un positrón, que se mueve a 5.00×10^6 m/s, entra en el campo siguiendo una dirección que forma un ángulo de 85.0° con el eje de x (figura P29.58). Se espera que el movimiento de la partícula sea helicoidal, como fue descrito en la sección 29.2. Calcule a) el paso p y b) el radio r de la trayectoria.

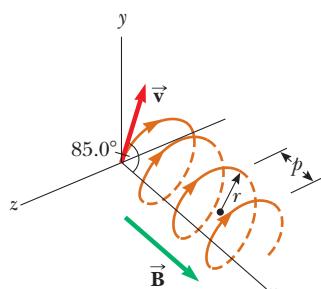



Figura P29.58

59. Considere un electrón que se encuentra en la órbita de un protón y que se conserva en una trayectoria circular fija de radio $R = 5.29 \times 10^{-11}$ m, debido a la fuerza de Coulomb. Si la carga en órbita se trata como si fuera una espira de corriente, calcule el momento de torsión resultante cuando el sistema está inmerso en un campo magnético de 0.400 T dirigido perpendicularmente al momento magnético del electrón.

60. Un protón que se mueve en el plano de la página tiene una energía cinética de 6.00 MeV. Un campo magnético de magnitud $B = 1.00$ T está orientado hacia el interior de la página. El protón entra en el campo magnético formando con su vector velocidad un ángulo $\theta = 45.0°$ con la frontera lineal del campo como se muestra en la figura P29.60. a) Determine x, que es la distancia desde el punto de entrada al lugar donde el protón saldrá del campo. b) Determine θ', que es el ángulo entre la frontera y el vector velocidad del protón cuando éste sale del campo.

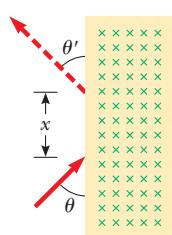



Figura P29.60

61. ● Un cirujano de corazón vigila mediante un monitor la cantidad de sangre que circula por una arteria utilizando un medidor de flujo electromagnético (figura P29.61). Los electrodos A y B están en contacto con la superficie exterior del vaso sanguíneo que tiene un diámetro interior de 3.00 mm. a) Ante un campo magnético de magnitud 0.040 0 T, entre los electrodos aparece una fem de 160 μV. Calcule la rapidez de la sangre. b) Compruebe que el electrodo A es positivo, según se ilustra. ¿El que los iones móviles presentes en la sangre estén la mayoría cargados positiva o negativamente depende del signo de la fem? Explique.

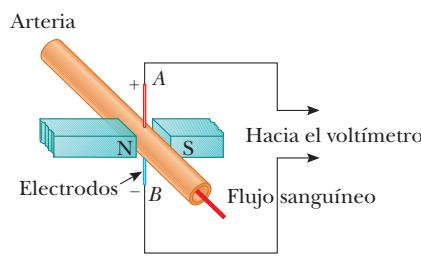



Figura P29.61

62. La tabla P29.62 muestra mediciones del voltaje Hall y del campo magnético correspondiente de una sonda que se utiliza para medir campos magnéticos. a) Trace estos datos y deduzca una relación entre las dos variables. b) Si las mediciones hubieran sido tomadas con una corriente de 0.200 A y la muestra está hecha con un material que tiene una densidad de portadores de carga de 1.00×10^{26} kg/m³, ¿cuál es el espesor de la muestra?

ΔV_H (μV)	B (T)
0	0.00
11	0.10
19	0.20
28	0.30
42	0.40
50	0.50
61	0.60
68	0.70
79	0.80
90	0.90
102	1.00

63. ● Como se puede observar en la figura P29.63, una partícula de masa m con una carga positiva q está en movimiento inicial a una velocidad $v\hat{\mathbf{j}}$. Entra en el origen de las coordenadas en una región entre $y = 0$ y $y = h$ que contiene un campo

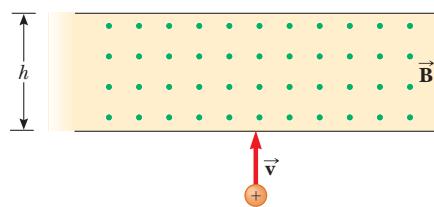



Figura P29.63

magnético uniforme $B\hat{\mathbf{k}}$ dirigido perpendicularmente alejandose de la página. a) ¿Cuál es el valor crítico de v para que la partícula llegue justo a $y = h$? Describa la trayectoria de la partícula en estas condiciones y haga una predicción de su velocidad final. b) Especifique la trayectoria que toma la partícula, así como su velocidad final, en el caso que v sea menor que el valor crítico. c) **¿Qué pasaría si?** Especifique la trayectoria que toma la partícula, así como su velocidad final, en el caso de que v sea mayor que el valor crítico.

64. En el modelo de 1913 de Niels Bohr del átomo de hidrógeno, el único electrón está en una órbita circular de 5.29×10^{-11} m de radio y su rapidez es 2.19×10^{6} m/s. a) ¿Cuál es la magnitud del momento magnético debido al movimiento del electrón? b) Si el electrón se mueve en un círculo horizontal, contra las manecillas del reloj, visto desde arriba, ¿cuál es la dirección de este vector de momento magnético?

65. ● **Problema de repaso.** Revise la sección 15.5 acerca del péndulo de torsión. a) Demuestre que un dipolo magnético en un campo magnético uniforme, desplazado de su orientación de equilibrio y liberado, puede oscilar como un péndulo de torsión en movimiento armónico simple. ¿Esta afirmación es cierta para todos los desplazamientos angulares, para todos los desplazamientos menores que 180° o sólo para pequeños desplazamientos angulares? Explique. b) Suponga que el dipolo es la aguja de una brújula, un imán de barra ligero, con un momento magnético de magnitud μ y tiene momento de inercia I en torno a su centro, donde está montada sobre un eje vertical sin fricción, y se coloca en un campo magnético horizontal de magnitud B. Evalúe su frecuencia de oscilación. c) Explique cómo se puede usar convenientemente la aguja de brújula como un indicador de la magnitud del campo magnético externo. Si su frecuencia es 0.680 Hz en el campo local de la Tierra, con una componente horizontal de 39.2 μT, ¿cuál es la magnitud de una campo en donde su frecuencia de oscilación es 4.90 Hz?

Respuestas a las preguntas rápidas

29.1 e) La regla de la mano derecha da la dirección. Asegúrese de considerar la carga negativa del electrón.

29.2 i) b) La fuerza magnética sobre la partícula aumenta en proporción con v, pero aumenta la aceleración centrípeta en función del cuadrado de v. El resultado es un radio mayor, como se puede observar en la ecuación 29.13. **ii**), a). La fuerza magnética que se ejerce sobre la partícula se incrementa en proporción con B. El resultado es un radio menor, como podemos observar en la ecuación 29.3.

29.3 c) Utilice la regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético.

29.4 i) c), b), a). Ya que todas las espiras encierran una misma área y tienen igual corriente, la magnitud de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ es la misma para todos. En el caso de c), $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ apunta hacia arriba y es perpendicular al campo magnético y $\tau = \mu B$, que es el momento de torsión máximo posible. Para la espira en el caso a), $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ apunta en la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ y el momento de torsión es igual a cero. En el caso b), el momento de torsión tiene un valor intermedio entre cero y el máximo. ii), a) = b) = c). Ya que el campo magnético es uniforme, hay una fuerza neta cero entre las tres espiras.

Un método propuesto para lanzar futuras cargas útiles al espacio es el cañon de riel, en el que los proyectiles se aceleran por medio de fuerzas magnéticas. Esta fotografía muestra el disparo de un proyectil a una velocidad de más de 3 km/s desde un cañón de riel experimental en Sandia National Research Laboratories, Albuquerque, New Mexico. [Defense Threat Reduction Agency (DTRA).]

30 Fuentes del campo magnético

En el capítulo anterior se explicó la fuerza magnética ejercida en una partícula con carga que se mueve en un campo magnético. Para completar la descripción de la interacción magnética, este capítulo explora el origen del campo magnético, cargas en movimiento. Primero se explica cómo utilizar la ley de Biot y Savart para calcular el campo magnético que produce en algún punto del espacio un pequeño elemento de corriente. Mediante este formalismo y el principio de sobreposición se calcula el campo magnético total producido por diferentes distribuciones de corriente. A continuación se muestra cómo determinar la fuerza entre dos conductores que transportan una corriente, lo que lleva a la definición del ampère. También se presenta la ley de Ampère, la cual es útil para calcular el campo magnético de una configuración altamente simétrica que lleva una corriente estable.

Este capítulo también muestra los procesos complejos que se presentan en los materiales magnéticos. Todos los efectos magnéticos de la materia pueden explicarse con base en los momentos magnéticos del átomo, que surgen del movimiento orbital de los electrones como por una propiedad intrínseca de los electrones conocida como espín.

30.1 Ley de Biot-Savart

Poco después de que en 1819 Oersted descubriera que la aguja de una brújula se desvía por la presencia de un conductor que lleva corriente, Jean-Baptiste Biot (1774–1862) y Félix Savart (1791–1841) realizaron experimentos cuantitativos en relación con la fuerza ejercida por una corriente eléctrica sobre un imán cercano. De sus resultados experimentales, Biot y Savart llegaron a una expresión mate-

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 30.1

La ley de Biot-Savart

El campo magnético que describe la ley de Biot-Savart se *debe a* un conductor por el que pasa una corriente. No confunda este campo con cualquier campo *externo* que pudiera aplicarse al conductor proveniente de alguna otra fuente.

mática que da el valor del campo magnético en algún punto del espacio, en función de la corriente que dicho campo produce. Esta expresión se basa en las siguientes observaciones experimentales para el campo magnético $d\vec{\mathbf{B}}$ en un punto P asociado con un elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$ de un alambre por el que pasa una corriente estable I (figura 30.1):

- El vector $d\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular tanto a $d\vec{\mathbf{s}}$ (que apunta en la dirección de la corriente) como al vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$, dirigido desde $d\vec{\mathbf{s}}$ hacia P.
- La magnitud de $d\vec{\mathbf{B}}$ es inversamente proporcional a r^2, donde r es la distancia de $d\vec{\mathbf{s}}$ a P.
- La magnitud de $d\vec{\mathbf{B}}$ es proporcional a la corriente y a la magnitud ds del elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$.
- La magnitud de $d\vec{\mathbf{B}}$ es proporcional a sen θ, donde θ es el ángulo entre los vectores $d\vec{\mathbf{s}}$ y $\hat{\mathbf{r}}$.

Estas observaciones se resumen en la expresión matemática conocida hoy en día como la **ley de Biot-Savart.**

Ley de Biot-Savart ►

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \textbf{(30.1)}$$

donde μ_0 es una constante llamada **permeabilidad del espacio libre:**

Permeabilidad del espacio libre ►

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A} \qquad \textbf{(30.2)}$$

Observe que el campo $d\vec{\mathbf{B}}$ en la ecuación 30.1 es creado en un punto por la corriente en sólo un pequeño elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$ del conductor. Para determinar el campo magnético *total* $\vec{\mathbf{B}}$ que se crea en algún punto por una corriente de tamaño finito, debe sumar las contribuciones de todos lo elementos de corriente $I\,d\vec{\mathbf{s}}$ que forman la corriente. Es decir, debe integrar la ecuación 30.1 para evaluar $\vec{\mathbf{B}}$.

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \textbf{(30.3)}$$

donde la integral se aplica sobre la distribución completa de la corriente. Esta expresión debe manejarse con especial cuidado ya que el integrando es un producto cruz y, por lo tanto, una cantidad vectorial. En el ejemplo 30.1 verá el caso de una integración de este tipo.

A pesar de que se desarrolla la ley de Biot-Savart para un alambre que conduce una corriente, también es válida para una corriente formada por cargas que fluyen a través del espacio, tal como el haz de electrones en un cinescopio de televisión. En ese caso, $d\vec{\mathbf{s}}$ representa la longitud de un segmento pequeño de espacio en el que fluyen las cargas.

Existen similitudes interesantes entre la ecuación 30.1 para el campo magnético debido a un elemento de corriente y la ecuación 23.9 para el campo eléctrico debido a una carga puntual. La magnitud del campo magnético varía con el cuadrado inverso de la distancia desde la fuente, como se presenta con el campo eléctrico debido a una carga puntual. Sin embargo, la dirección de los dos campos es muy diferente. El campo eléctrico creado por una carga puntual es radial, pero el campo magnético creado por un elemento de corriente es perpendicular tanto al elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$ como al vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$, como se describe en el producto cruz de la ecuación 30.1. En consecuencia, si el conductor yace en el plano de la página, como se muestra en la figura 30.1, $d\vec{\mathbf{B}}$ apunta hacia el exterior de la página en P y hacia el interior de la página en P'.

Figura 30.1 El campo magnético $d\vec{\mathbf{B}}$ en un punto debido a la corriente I que pasa a través de un elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$ está definido por la ley de Biot-Savart. La dirección de campo es hacia afuera de la página en P y hacia adentro de la página en P'.

Otra diferencia entre los campos eléctricos y magnéticos parte de la fuente del campo. Una carga eléctrica aislada establece un campo eléctrico. La ley de Biot-Savart expresa el valor del campo magnético correspondiente a un elemento de corriente aislado en algún punto, pero este elemento de corriente aislado no puede existir como lo hace una carga eléctrica aislada. Un elemento de corriente *debe* ser parte de una distribución mayor de corriente, ya que para que las cargas fluyan es necesario que exista un circuito completo. Por lo tanto, la ley de Biot-Savart (ecuación 30.1) es sólo la primera etapa para el cálculo de un campo magnético; acto seguido es necesario efectuar una integración sobre la extensión de la corriente, como en la ecuación 30.3.

Pregunta rápida 30.1 Considere el campo magnético debido a la corriente a lo largo del alambre que se muestra en la figura 30.2. Ordene de mayor a menor los puntos *A*, *B* y *C*, en función de la magnitud del campo magnético debido a la corriente existente a lo largo del elemento $d\vec{\mathbf{s}}$ que se muestra.

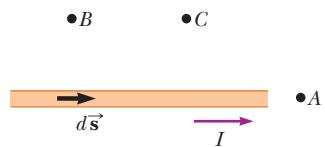



Figura 30.2 (Pregunta rápida 30.1) ¿Dónde es mayor el campo magnético?

EJEMPLO 30.1 Campo magnético alrededor de un conductor recto delgado

Considere un alambre recto delgado que porta una corriente constante *I* y está colocado a lo largo del eje *x*, como se muestra en la figura 30.3. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto *P* debido a esta corriente.

SOLUCIÓN

Conceptualizar A partir de la ley Biot-Savart, se espera que la magnitud del campo sea proporcional a la corriente en el alambre y disminuya conforme aumente la distancia *a* desde el alambre al punto *P*.

Categorizar Se pide encontrar el campo magnético debido a una distribución de corriente simple, así que este ejemplo es un problema representativo para el que es apropiada la ley Biot-Savart.

Analizar Comience por considerar un elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$ ubicado a una distancia *r* de *P*. La dirección del campo magnético en el punto *P* debida a la corriente en este elemento es hacia afuera de la página porque $d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}$ es hacia afuera de la página. De hecho, ya que *todos* los elementos de corriente $I\,d\vec{\mathbf{s}}$ yacen en el plano de la página, todos producen un campo magnético dirigido afuera de la página en el punto *P*. Por lo tanto, la dirección del campo magnético en el punto *P* es hacia afuera de la página y sólo es necesario encontrar la magnitud del campo. Coloque el origen en *O* y el punto *P* a lo largo del eje positivo *y*, con $\hat{\mathbf{k}}$ como un vector unitario que apunta hacia afuera de la página.

Figura 30.3 (Ejemplo 30.1) a) Un alambre recto delgado que porta una corriente *I*. El campo magnético en el punto *P* debido a la corriente en cada elemento $d\vec{\mathbf{s}}$ del alambre es hacia afuera de la página, así que el campo neto en el punto *P* también es hacia afuera de la página. b) Se aplican los ángulos θ_1 y θ_2 para determinar el campo neto.

Evalúe el producto cruz en la ley Biot-Savart:

$$d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}} = |d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}|\hat{\mathbf{k}} = \left[dx\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]\hat{\mathbf{k}} = (dx\cos\theta)\hat{\mathbf{k}}$$

Sustituya en la ecuación 30.1:

$$1)\quad d\vec{\mathbf{B}} = (dB)\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\cos\theta}{r^2}\hat{\mathbf{k}}$$

A partir de la geometría en la figura 30.3a, exprese *r* en términos de θ:

$$2)\quad r = \frac{a}{\cos\theta}$$

Observe que $\tan\theta = -x/a$ a partir del triángulo rectángulo en la figura 30.3a (el signo negativo es necesario porque $d\vec{\mathbf{s}}$ se ubica en un valor negativo de *x*) y resuelva para *x*:

$$x = -a\tan\theta$$

Encuentre la diferencial *dx*:

$$3)\quad dx = -a\sec^2\theta\,d\theta = -\frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}$$

Sustituya las ecuaciones 2) y 3) en la magnitud del campo a partir de la ecuación 1):

$$4)\quad dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(a\,d\theta)\cos\theta\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\theta\,d\theta$$

Integre la ecuación 4) sobre todos los elementos de longitud en el alambre, donde los ángulos subtendidos varían de θ_1 a θ_2, como se definió en la figura 30.3b:

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\ \theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2) \quad \textbf{(30.4)}$$

Finalizar Puede usar este resultado para encontrar el campo magnético de *cualquier* alambre recto portador de corriente si conoce la geometría y por ende los ángulos θ_1 y θ_2. Considere el caso especial de un alambre recto infinitamente largo. Si el alambre en la figura 30.3b se vuelve infinitamente largo, se ve que $\theta_1 = \pi/2$ y $\theta_2 = -\pi/2$ para elementos de longitud que varían entre las posiciones $x = -\infty$ y $x = +\infty$. Ya que $(\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2) = (\operatorname{sen}\pi/2 - \operatorname{sen}(-\pi/2)) = 2$, la ecuación 30.4 se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \textbf{(30.5)}$$

Las ecuaciones 30.4 y 30.5 muestran que la magnitud del campo magnético es proporcional a la corriente y disminuye con la distancia creciente desde el alambre, como se espera. La ecuación 30.5 tiene la misma forma matemática que la expresión para la magnitud del campo eléctrico debido a un largo alambre con carga (vea la ecuación 24.7).

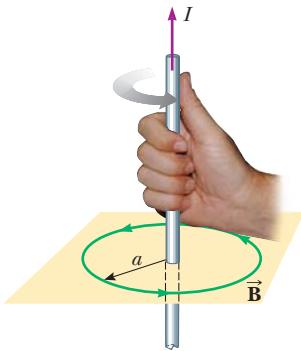



Figura 30.4 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético que rodea un alambre recto y largo que lleva una corriente. Observe que las líneas de campo magnético forman círculos alrededor del alambre.

El resultado del ejemplo 30.1 es importante ya que es frecuente la existencia de una corriente en la forma de un alambre recto y largo. La figura 30.4 muestra en perspectiva el campo magnético que rodea a un alambre recto y largo que conduce corriente. Debido a la simetría del alambre, las líneas de campo magnético forman círculos concéntricos con el alambre y existen en planos perpendiculares a éste. La magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ es constante en cualquiera de los círculos de radio a y está dada por la ecuación 30.5. Una regla útil para determinar la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ es tomar el alambre con la mano derecha, colocando el pulgar a lo largo de la dirección de la corriente y doblando los otros cuatro dedos en la dirección del campo magnético.

Otra observación que es posible hacer en la figura 30.4 es que la línea de campo magnético que se muestra no tiene ni principio ni fin. Forma una espira cerrada. Esta es una diferencia importante entre las líneas de campo magnético y las de campo eléctrico, que empiezan en cargas positivas y terminan en cargas negativas. Se explora más adelante, en la sección 30.5, esta característica de las líneas de campo magnético.

EJEMPLO 30.2 Campo magnético debido a un segmento de alambre curvo

Calcule el campo magnético en el punto O para el segmento de alambre portador de corriente que se muestra en la figura 30.5. El alambre consiste en dos porciones rectas y un arco circular de radio a, que subtiende un ángulo θ.

Figura 30.5 (Ejemplo 30.2) El campo magnético en O debido a la corriente en el segmento curvo AC es hacia la página. La aportación al campo en O debida a la corriente en los dos segmentos rectos es cero. La longitud del segmento curvo AC es s.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El campo magnético en O debido a la corriente en los segmentos rectos AA' y CC' es cero porque $d\vec{\mathbf{s}}$ es paralelo a $\hat{\mathbf{r}}$ a lo largo de estas trayectorias, lo que significa que $d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$ para estas trayectorias.

Categorizar Ya que se pueden ignorar los segmentos AA' y CC', este ejemplo se clasifica como una aplicación de la ley Biot-Savart al segmento de alambre curvo AC.

Analizar Cada elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$ a lo largo de la trayectoria AC está a la misma distancia a desde O, y la corriente en cada uno aporta un elemento de campo $d\vec{\mathbf{B}}$ dirigido hacia la página en O. Además, en cada punto sobre AC, $d\vec{\mathbf{s}}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}$; por tanto, $|d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}| = ds$.

A partir de la ecuación 30.1, encuentre la magnitud del campo en O debido a la corriente en un elemento de longitud ds:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,ds}{a^2}$$

Integre esta expresión a lo largo de la trayectoria curva AC, y note que I y a son constantes:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}s$$

A partir de la geometría, observe que $s = a\theta$ y sustituya:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(a\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\theta \qquad \textbf{(30.6)}$$

Finalizar La ecuación 30.6 da la magnitud del campo magnético en O. La dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ es hacia la página en O porque $d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}$ es hacia la página para todo elemento de longitud.

¿Qué pasaría si? ¿Y si se le pidiera encontrar el campo magnético en el centro de una espira de alambre circular de radio R que porte una corriente I? ¿Esta pregunta se puede responder en este punto de su comprensión de la fuente de los campos magnéticos?

Respuesta Sí, se puede. Los alambres rectos en la figura 30.5 no aportan al campo magnético. La única contribución es del segmento curvo. Conforme el ángulo θ aumenta, el segmento curvo se convierte en un círculo completo cuando $\theta = 2\pi$. Debido a eso, puede encontrar el campo magnético en el centro de una espira de alambre al hacer $\theta = 2\pi$ en la ecuación 30.6:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}2\pi = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

Este resultado es un caso límite de un resultado más general explicado en el ejemplo 30.3.

EJEMPLO 30.3 Campo magnético en el eje de una espira de corriente circular

Considere una espira de alambre circular de radio a ubicado en el plano yz y que porta una corriente estable I, como en la figura 30.6. Calcule el campo magnético en un punto axial P a una distancia x desde el centro de la espira.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 30.6 muestra la aportación al campo magnético $d\vec{\mathbf{B}}$ en P debida a un solo elemento de corriente en lo alto del anillo. Este vector de campo se puede resolver en componentes dB_x paralelo al eje del anillo y $dB_\perp$ perpendicular al eje. Piense en las aportaciones al campo magnético de un elemento de corriente en la parte baja de la espira. Debido a la simetría de la situación, las componentes perpendiculares del campo debido a los elementos en las partes superior e inferior del anillo se cancelan. Esta cancelación se presenta para todos los pares de segmentos alrededor del anillo, de modo que puede ignorar la componente perpendicular del campo y enfocarse exclusivamente en las componentes paralelas, que simplemente se suman.

Figura 30.6 (Ejemplo 30.3) Geometría para calcular el campo magnético en un punto P que se encuentra sobre el eje de una espira de corriente. Por simetría, el campo total $\vec{\mathbf{B}}$ es a lo largo del eje.

Categorizar Se pide encontrar el campo magnético debido a una distribución de corriente simple, así que este ejemplo es un problema representativo para el que la ley Biot-Savart es adecuada.

Analizar En esta situación cada elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$ es perpendicular al vector $\hat{\mathbf{r}}$ en la ubicación del elemento. Por lo tanto, para cualquier elemento, $|d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}| = (ds)\ (1)$ sen 90° $= ds$. Además, todos los elementos de longitud alrededor de la espira están a la misma distancia r de P, donde $r^2 = a^2 + x^2$.

Use la ecuación 30.1 para encontrar la magnitud de $d\vec{\mathbf{B}}$ debida a la corriente en cualquier elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{(a^2 + x^2)}$$

Encuentre la componente x del elemento de campo:

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{(a^2 + x^2)}\cos\theta$$

Integre a lo largo de toda la espira:

$$B_x = \oint dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds \cos\theta}{a^2 + x^2}$$

A partir de la geometría, evalúe cos θ:

$$\cos\theta = \frac{a}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

Sustituya esta expresión para cos θ en la integral y observe que x, a y θ son todas constantes:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds}{a^2 + x^2} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \oint ds$$

Integre alrededor de la espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} (2\pi a) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \textbf{(30.7)}$$

Finalizar Para encontrar el campo magnético en el centro de la espira, haga $x = 0$ en la ecuación 30.7. En este punto especial,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (\text{en } x = 0) \quad \textbf{(30.8)}$$

que es consistente con el resultado del **¿Qué pasaría si...?** del ejemplo 30.2.

El patrón de líneas de campo magnético para una espira de corriente circular se muestra en la figura 30.7a. Por claridad, las líneas se dibujan sólo para el plano que contiene el eje de la espira. El patrón de líneas de campo es axialmente simétrico y se parece al patrón alrededor de un imán de barra, que se muestra en la figura 30.7c.

¿Qué pasaría si? ¿Y si considera puntos sobre el eje x muy alejados de la espira? ¿Cómo se comporta el campo magnético en estos puntos distantes?

Respuesta En este caso, en el que $x \gg a$, se puede ignorar el término a^2 en el denominador de la ecuación 30.7 y obtener

Figura 30.7 (Ejemplo 30.3) a) Líneas de campo magnético que rodean un lazo de corriente. b) Líneas de campo magnético que rodean un lazo de corriente, mostradas con limaduras de hierro. c) Líneas de campo magnético que rodean un imán de barra. Note la similitud entre este patrón de líneas y el de un lazo de corriente.

$$B \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3} \quad (\text{para} \gg a) \quad \textbf{(30.9)}$$

La magnitud del momento magnético μ de la espira se define como el producto de corriente y el área de la espira (vea la ecuación 29.15): $\mu = I(\pi a^2)$ para la espira circular. La ecuación 30.9 se puede expresar como

$$B \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3} \quad \textbf{(30.10)}$$

Este resultado es similar en forma a la expresión para el campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico, $E = k_e(p/y^3)$ (vea el ejemplo 23.5), donde $p = 2qa$ es el momento del dipolo eléctrico, como se definió en la ecuación 26.16.

30.2 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos

En el capítulo anterior se describió la fuerza magnética que actúa sobre un conductor que lleva una corriente, colocado en un campo magnético externo. Ya que la corriente en un conductor genera su propio campo magnético, es fácil entender que dos conductores que transportan una corriente ejercen fuerzas magnéticas entre sí. Estas fuerzas se utilizan como base para definir el ampere y el coulomb.

Imagine dos alambres largos, rectos, paralelos, separados por una distancia a y que llevan corrientes I_1 e I_2 en la misma dirección, como se muestra en la figura 30.8. Es posible

Figura 30.8

Dos alambres paralelos que transportan cada uno una corriente estable y ejercen una fuerza magnética uno sobre el otro. El campo $\mathbf{B}_2$ debido a la corriente en el alambre 2 ejerce una fuerza magnética $F_1 = I_1 \ell B_2$ sobre el alambre 1. La fuerza es de atracción si las corrientes son paralelas (como se muestra) y de repulsión si las corrientes son antiparalelas.

determinar la fuerza ejercida sobre un alambre debido al campo magnético desplegado por el otro alambre. El alambre 2, que lleva una corriente I_2 y se identifica arbitrariamente como alambre fuente, crea un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}_2$ en la ubicación del alambre 1, el alambre de prueba. La dirección de $\vec{\mathbf{B}}_2$ es perpendicular al alambre 1, como se muestra en la figura 30.8. De acuerdo con la ecuación 29.10, la fuerza magnética en un tramo de longitud ℓ del alambre 1 es $\vec{\mathbf{F}}_1 = I_1 \vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}_2$. En vista de que en este caso ℓ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}_2$, la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_1$ es $F_1\ I_1 \ell B_2$. Ya que la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}_2$ está dada por la ecuación 30.5,

$$F_1 = I_1 \ell B_2 = I_1 \ell \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \ell \qquad \textbf{(30.11)}$$

La dirección de $\vec{\mathbf{F}}_1$ es hacia el alambre 2, debido a que $\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}_2$ va en esa dirección. Si se calcula el campo establecido por el alambre 1 sobre el alambre 2, se encontrará que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ que actúa sobre el alambre 2 es de igual magnitud y de dirección opuesta a $\vec{\mathbf{F}}_1$. Esto es lo que se esperaba, ya que la tercera ley de Newton debe cumplirse. Cuando las corrientes se encuentran en direcciones opuestas (esto es, cuando en la figura 30.8 se invierte una de las corrientes), las fuerzas se invierten y los alambres se repelen. En consecuencia, **conductores paralelos que llevan corrientes en una misma dirección se atraen, y conductores paralelos que llevan corrientes en direcciones opuestas se repelen.**

Debido a que es igual la magnitud de las fuerzas en ambos alambres, simplemente se señala la magnitud de la fuerza magnética entre alambres como F_B. Puede volver a escribir esta magnitud en función de la fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \qquad \textbf{(30.12)}$$

La fuerza entre dos alambres paralelos es utilizada para definir el **ampere** de esta manera:

◀ Definición de ampere

Cuando 2×10^{-7} N/m es la magnitud de la fuerza por unidad de longitud presente entre dos alambres largos y paralelos que llevan corrientes idénticas y están separados 1 m, se define la corriente en cada alambre como 1 A.

El valor 2×10^{-7} N/m se obtiene a partir de la ecuación 30.12 con $I_1 = I_2 = 1$ A y $a = 1$ m. Puesto que esta definición se basa en una fuerza, puede utilizarse una medición mecánica para estandarizar al ampere. Por ejemplo, el National Institute of Standards and Technology utiliza un instrumento llamado *balanza de corriente* para mediciones básicas de corriente. Los resultados son utilizados para estandarizar otros instrumentos más convencionales, como los amperímetros.

La unidad del SI de carga, el **coulomb**, se define en función del ampere: cuando un conductor lleva una corriente estable de 1 A, la cantidad de carga que fluye a través de la sección transversal del conductor durante 1 s es 1 C.

En la deducción de las ecuaciones 30.11 y 30.12, se supone que ambos alambres son largos, en comparación con la distancia que los separa. De hecho, sólo un alambre necesita ser largo. Las ecuaciones describen con precisión las fuerzas que un alambre largo y un alambre recto paralelo de longitud limitada ℓ ejercen uno sobre el otro.

Pregunta rápida 30.2 Un resorte relajado en espiral sin corriente se cuelga del techo. Cuando se cierra un interruptor para que exista una corriente en el resorte, ¿las espiras se a) acercan, b) separan o c) no se mueven en absoluto?

EJEMPLO 30.4 **Suspensión de un alambre**

Dos alambres paralelos infinitamente largos se encuentran en el suelo separados 1.00 cm, como se muestra en la figura 30.9a. Un tercer alambre, de 10.0 m de largo y 400 g de masa, porta una corriente $I_1 = 100$ A y está elevado y flotando sobre los dos primeros alambres, en una posición horizontal a la mitad entre ellos. Los alambres infinitamente largos portan iguales corrientes I_2 en la misma dirección, pero en la dirección opuesta a la del alambre elevado y flotando. ¿Qué corriente deben portar los alambres infinitamente largos para que los tres alambres formen un triángulo equilátero?

Figura 30.9 (Ejemplo 30.4) a) Dos alambres portadores de corriente que se encuentran sobre el suelo y un tercer alambre flotando en el aire mediante fuerzas magnéticas. b) Vista lateral. En la situación descrita en el ejemplo, los tres alambres forman un triángulo equilátero. Las dos fuerzas magnéticas sobre el alambre que flota en el aire son $\vec{\mathbf{F}}_{B,L}$, la fuerza debida al alambre de la izquierda sobre el suelo, y $\vec{\mathbf{F}}_{B,R}$, la fuerza debida al alambre de la derecha en el suelo. También se muestra la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ sobre el alambre flotando.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que la corriente en el alambre corto es opuesta a la de los alambres largos, el alambre corto es repelido de los otros dos. Imagine que aumentan las corrientes en los alambres largos. La fuerza repulsiva se vuelve más intensa, y el alambre elevado y flotando asciende al punto donde el peso del alambre está una vez más en equilibrio. La figura 30.9b muestra la situación deseada con los tres alambres formando un triángulo equilátero.

Categorizar El alambre flotando en el aire se modela como una partícula en equilibrio.

Analizar Las componentes horizontales de las fuerzas magnéticas sobre el alambre elevado y flotando se cancelan. Las componentes verticales son positivas y se suman.

Encuentre la fuerza magnética total en la dirección hacia arriba sobre el alambre que flota:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = 2\left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\,\ell\right)\cos 30.0°\,\hat{\mathbf{k}} = 0.866\,\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a}\,\ell\,\hat{\mathbf{k}}$$

Encuentre la fuerza gravitacional en el alambre que flota:

$$\vec{\mathbf{F}}_g = -mg\,\hat{\mathbf{k}}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al sumar las fuerzas e igualar a cero la fuerza neta:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_B + \vec{\mathbf{F}}_g = 0.866\,\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a}\,\ell\,\hat{\mathbf{k}} - mg\,\hat{\mathbf{k}} = 0$$

Resuelva para la corriente en los alambres sobre el suelo:

$$I_2 = \frac{mg\,\pi a}{0.866\,\mu_0 I_1 \ell}$$

Sustituya valores numéricos:

$$I_2 = \frac{(0.400\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)\pi(0.010\,0\text{ m})}{0.866(4\pi\times 10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A})(100\text{ A})(10.0\text{ m})}$$

$$= \boxed{113\text{ A}}$$

Finalizar Las corrientes en todos los alambres son del orden de 10^2 A. Tales corrientes grandes requerirían equipo especializado. Por lo tanto, esta situación sería difícil de establecer en la práctica.

30.3 Ley de Ampère

El descubrimiento de Oersted en 1819 del desvío de la aguja de las brújulas demuestra que un conductor que lleva una corriente produce un campo magnético. La figura 30.10a muestra la forma en que este efecto puede ser demostrado en el salón de clases. Se colocan muchas agujas de brújula en un plano horizontal cercano a un alambre vertical largo. Cuando no hay corriente en el alambre, todas las agujas apuntan en una misma dirección (la

del campo magnético de la Tierra), como era de esperarse. Cuando el alambre conduce una corriente, intensa y estable, todas las agujas se desvían en una dirección tangente al círculo, como en la figura 30.10b. Estas observaciones demuestran que la dirección del campo magnético producido por la corriente en el alambre es consistente con la regla de la mano derecha descrita en la figura 30.4. Cuando se invierte la dirección de la corriente, las agujas en la figura 30.10b también invierten su orientación.

Ya que las agujas de la brújula apuntan en la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$, se concluye que las líneas de $\vec{\mathbf{B}}$ forman círculos alrededor del alambre, como se explicó en la sección 30.1. Por simetría, la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ es la misma en cualquier parte de la trayectoria circular centrada en el alambre y que yace en un plano perpendicular a éste. Al variar la corriente y la distancia desde el alambre, se encuentra que B es proporcional a la corriente e inversamente proporcional a la distancia al alambre, como se describe en la ecuación 30.5.

Ahora se evalúa el producto $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ para un elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$ pequeño de la trayectoria circular definida por las agujas de las brújulas, y sume los productos para todos los elementos en toda la trayectoria circular cerrada.[1] A lo largo de esta trayectoria, los vectores $d\vec{\mathbf{s}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son paralelos en cada punto (véase la figura 30.10b), así que $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B\,ds$. Además, la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ es constante en este círculo y se conoce por la ecuación 30.5. Por lo tanto, la suma de los productos $B\,ds$ a lo largo de la trayectoria cerrada, que es equivalente a la integral lineal de $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$, es

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B\oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$

donde $\oint ds = 2\pi r$ es la circunferencia de la trayectoria circular. A pesar de que este resultado fue calculado para el caso especial de una trayectoria circular que rodea a un alambre, es válida para la trayectoria cerrada de *cualquier* forma (una *espira amperiana*) que rodea una corriente en un circuito cerrado. El caso general, conocido como la **ley de Ampère**, puede enunciarse como sigue:

◀ Ley de Ampère

La integral de línea de $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a $\mu_0 I$, donde I es la corriente total estable que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada.

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I \qquad \textbf{(30.13)}$$

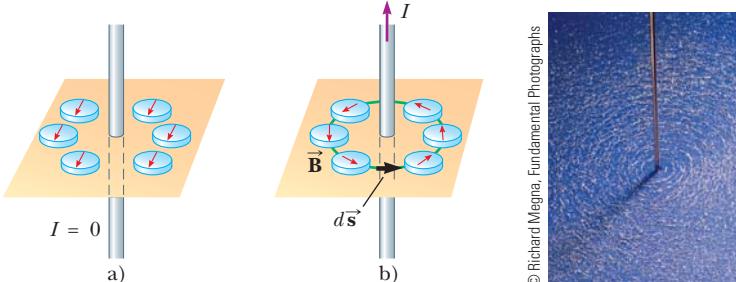



Figura 30.10

a) Cuando no existe corriente en el alambre, todas las agujas de las brújulas apuntan en la misma dirección (hacia el polo norte de la Tierra). b) Cuando el alambre lleva una corriente intensa, las agujas de las brújulas se desvían en dirección tangente al círculo, la dirección del campo magnético creado por la corriente. c) Líneas de campo magnético circulares que rodean un conductor de corriente, desplegadas mediante limaduras de hierro.

[1] Quizá se pregunte por qué se decidió hacer esto. El origen de la ley de Ampère se dio en la ciencia del siglo XIX, en la cual una "carga magnética" (la analogía supuesta para una carga eléctrica aislada) se imaginaba en movimiento alrededor de una línea de campo circular. El trabajo realizado por la carga se relacionó con $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ de la misma manera que el trabajo realizado al mover una carga eléctrica en un campo eléctrico se relacionó con $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Por lo tanto, la ley de Ampère, un principio válido y útil, ¡se originó a partir de un cálculo de trabajo erróneo y olvidado!

ANDRE-MARIE AMPÈRE

Físico francés (1775-1836)

A Ampère se le acredita el descubrimiento del electromagnetismo: la correspondencia entre corrientes eléctricas y campos magnéticos. El genio de Ampère, particularmente en las matemáticas, se hizo evidente cuando tenía 12 años; su vida personal, sin embargo, estuvo repleta de tragedias. Su padre, un rico concejal de la cuidad, fue guillotinado durante la Revolución Francesa, y su esposa murió joven, en 1803. Ampère murió de neumonía a los 61 años. Su opinión sobre su propia vida resulta evidente gracias al epitafio que él mismo seleccionó para su lápida: *Tandem Felix* (Feliz al fin).

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 30.2

Cómo evitar los problemas con los signos

Cuando utilice la ley de Ampère, aplique la regla de la mano derecha siguiente. Apunte su pulgar en la dirección de la corriente a través de la espira. Después sus dedos doblados apuntan en la dirección en que deberá integrar cuando recorre la espira para evitar tener que definir la corriente como negativa.

La ley de Ampère describe la creación de campos magnéticos para todas las configuraciones de corriente continua, pero a este nivel matemático, sólo es útil para calcular el campo magnético de configuraciones de corriente que tienen un alto grado de simetría. Su uso es similar al de la ley de Gauss para el cálculo de campos eléctricos con distribuciones de carga altamente simétricas.

Pregunta rápida 30.3 Clasifique de menor a mayor las magnitudes de $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ para las trayectorias cerradas de la figura 30.11.

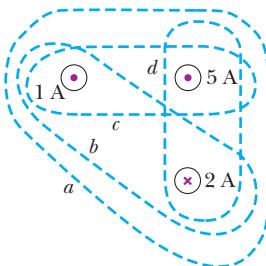



Figura 30.11 (Pregunta rápida 30.3) Cuatro trayectorias cerradas alrededor de tres alambres conductores de corriente.

Pregunta rápida 30.4 Ordene de menor a mayor las magnitudes de $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ para las trayectorias cerradas en la figura 30.12.

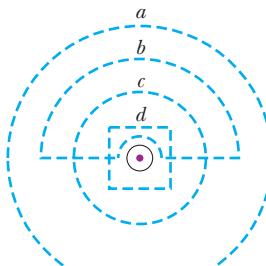



Figura 30.12 (Pregunta rápida 30.4) Varias trayectorias cerradas cerca de un solo alambre conductor de corriente.

EJEMPLO 30.5 Campo magnético creado por un alambre largo portador de corriente

Un alambre recto largo de radio R porta una corriente estable I que se distribuye uniformemente a través de la sección transversal del alambre (figura 30.13). Calcule el campo magnético a una distancia r desde el centro del alambre en las regiones $r \geq R$ y $r < R$.

Figura 30.13 (Ejemplo 30.5) Un alambre recto largo de radio R que porta una corriente estable I distribuida uniformemente a través de la sección transversal del alambre. El campo magnético en cualquier punto se puede calcular a partir de la ley de Ampère usando una trayectoria circular de radio r, concéntrica con el alambre.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 30.13 para entender la estructura del alambre y la corriente en el alambre. La corriente crea campos magnéticos en todas partes, tanto adentro como afuera del alambre.

Categorizar Ya que el alambre tiene un alto grado de simetría, este ejemplo se clasifica como un problema de ley de Ampère. Para el caso $r \geq R$, debe llegar al mismo resultado obtenido en el ejemplo 30.1, donde se aplicó la ley Biot-Savart a la misma situación.

Analizar Para el campo magnético exterior al alambre, elija para la trayectoria de integración el círculo 1 en la figura 30.13. A partir de la simetría, $\vec{\mathbf{B}}$ debe ser constante en magnitud y paralela a $d\vec{\mathbf{s}}$ en todo punto sobre este círculo.

Observe que la corriente total que pasa a través del plano del círculo es I y aplique la ley de Ampère:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

Resuelva para B: $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{para } r \geq R) \qquad \textbf{(30.14)}$$

Ahora considere el interior del alambre, donde $r < R$. En este caso la corriente I' que pasa a través del plano del círculo 2 es menor que la corriente total I.

Establezca la relación de la corriente I' encerrada por el círculo 2 a la corriente total I igual a la relación del área πr^2 encerrada por el círculo 2 al área de sección transversal πR^2 del alambre: $$\frac{I'}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

Resuelva para I': $$I' = \frac{r^2}{R^2} I$$

Aplique la ley de Ampère al círculo 2: $$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B(2\pi r) = \mu_0 I' = \mu_0 \left(\frac{r^2}{R^2} I\right)$$

Resuelva para B: $$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right) r \quad (\text{para } r < R) \qquad \textbf{(30.15)}$$

Finalizar El campo magnético exterior al alambre es idéntico en forma a la ecuación 30.5. Como frecuentemente es el caso en situaciones con gran simetría, es mucho más fácil usar la ley de Ampère que la ley Biot-Savart (ejemplo 30.1). El campo magnético interior al alambre es similar en forma a la expresión para el campo eléctrico adentro de una esfera uniformemente cargada (vea el ejemplo 24.3). En la figura 30.14 se grafica la magnitud del campo magnético en función de r para esta configuración. Dentro del alambre, $B \to 0$ conforme $r \to 0$. Además, las ecuaciones 30.14 y 30.15 dan el mismo valor del campo magnético en $r = R$, lo que demuestra que el campo magnético es continuo en la superficie del alambre.

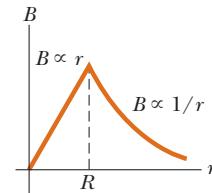



Figura 30.14 (Ejemplo 30.5) Magnitud del campo magnético en función de r para el alambre que se muestra en la figura 30.13. El campo es proporcional a r dentro del alambre y varía como $1/r$ afuera del alambre.

EJEMPLO 30.6 Campo magnético creado por un toroide

Un dispositivo llamado *toroide* (figura 30.15) se usa con frecuencia para crear un campo magnético casi uniforme en algún área cerrada. El dispositivo consiste en un alambre conductor enrollado alrededor de un anillo (un *toro*) hecho de un material no conductor. Para un toroide que tiene N vueltas de alambre muy juntas una de otra, calcule el campo magnético en la región ocupada por el toro, a una distancia r del centro.

Figura 30.15 (Ejemplo 30.6) Un toroide que consiste en muchas vueltas de alambre. Si las vueltas están muy juntas una de otra, el campo magnético en el interior del toro (la región sombreada en amarillo) es tangente al círculo discontinuo (espira 1) y varía como $1/r$. La dimensión a es el radio transversal del toro. El campo afuera del toroide es muy pequeño y se puede describir usando la espira amperiana (espira 2) en el lado derecho, perpendicular a la página.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie cuidadosamente la figura 30.15 para entender cómo el alambre se enrolla alrededor del toro. El toro podría ser un material sólido o podría ser aire, con un alambre rígido enrollado en la forma que se muestra en la figura 30.15 para formar un toroide vacío.

Categorizar Ya que el toroide tiene un alto grado de simetría, este ejemplo se clasifica como un problema de ley de Ampère.

Analizar Considere la espira amperiana circular (espira 1) de radio r en el plano de la figura 30.15. Por simetría, la magnitud del campo es constante en este círculo y tangente a él, de modo que $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B\,ds$. Además, el alambre pasa a través de la espira N veces, de modo que la corriente total a través de la espira es NI.

Aplique la ley de Ampère a la espira 1:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

Resuelva para B:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad \textbf{(30.16)}$$

Finalizar Este resultado demuestra que B varía como $1/r$ y por tanto *no es uniforme* en la región ocupada por el toro. Sin embargo, si r es muy grande en comparación con el radio de sección transversal a del toro, el campo es aproximadamente uniforme adentro del toro.

Para un toroide ideal, en el que las vueltas estén muy juntas, el campo magnético externo es cercano a cero, pero no es exactamente cero. En la figura 30.15, imagine que el radio r de la espira amperiana es más pequeño que b o mayor que c. En cualquier caso, la espira encierra cero corriente neta, de modo que $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$ Puede pensar que este resultado prueba que $\vec{\mathbf{B}} = 0$, pero no es así. Considere la espira amperiana (espira 2) en el lado derecho del toroide en la figura 30.15. El plano de esta espira es perpendicular a la página, y el toroide pasa a través de la espira. Conforme las cargas entran al toroide, como indican las direcciones de corriente en la figura 30.15, logran su avance contra las manecillas del reloj alrededor del toroide. Por lo tanto, ¡una corriente pasa a través de la espira amperiana perpendicular! Esta corriente es pequeña, pero no cero. Como resultado, el toroide actúa como una espira de corriente y produce un campo externo débil de la forma que se muestra en la figura 30.7. La causa por la que $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$ para las espiras amperianas de radio $r < b$ y $r > c$ en el plano de la página, es que las líneas de campo son perpendiculares a $d\vec{\mathbf{s}}$, *no* porque $\vec{\mathbf{B}} = 0$.

30.4 Campo magnético de un solenoide

Un **solenoide** es un alambre largo enrollado en forma de hélice. Con esta configuración, puede producirse un campo magnético razonablemente uniforme en el espacio rodeado por las vueltas del alambre —llamado *interior* del solenoide— cuando éste lleva una corriente. Cuando hay muy poco espacio entre las vueltas, cada una puede tratarse como si fuera una espira circular, y el campo magnético neto es la suma vectorial de los campos que resultan de todas las vueltas.

Figura 30.16 Líneas de campo magnético para un solenoide de vueltas poco apretadas.

La figura 30.16 muestra las líneas de campo magnético alrededor de un solenoide de espiras sueltas, no apretadas. Observe que las líneas de campo en el interior son casi paralelas, están uniformemente distribuidas y están juntas, lo que indica que en este espacio el campo es intenso y casi uniforme.

Si las vueltas están muy apretadas y el solenoide es de longitud finita, las líneas de campo magnético son como se muestra en la figura 30.17a. Esta distribución de líneas de campo es similar a la que rodea un imán de barra (véase la figura 30.17b). En consecuencia, un extremo del solenoide se comporta como polo norte del imán, y el extremo opuesto se comporta como polo sur. Conforme se incrementa la longitud del solenoide, el campo interior se vuelve más uniforme y el exterior más débil. Se obtiene un solenoide

Figura 30.17 a) Líneas de campo magnético para un solenoide con vueltas muy apretadas de longitud finita, que lleva una corriente estable. El campo en el espacio interior es intenso casi uniforme. Observe que las líneas de campo se parecen a las que existen alrededor de un imán de barra, lo que significa que efectivamente el solenoide tiene polos norte y sur. b) Patrón del campo magnético de un imán de barra, desplegadas mediante limaduras de hierro sobre una hoja de papel.

ideal, cuando las vueltas están muy apretadas y la longitud es mucho mayor que los radios de las vueltas. La figura 30.18 muestra la sección transversal longitudinal de una porción de un solenoide de este tipo, que lleva una corriente *I*. En este caso, el campo externo es cercano a cero, y el campo interior es uniforme en un volumen muy grande.

Si en la figura 30.18 considera la espira amperiana (espira 1) perpendicular a la página que rodea a un solenoide ideal, verá que ésta encierra una pequeña corriente conforme las cargas en el alambre se mueven espira por espira a lo largo del solenoide. En consecuencia, existe un campo magnético diferente de cero en el exterior del solenoide. Es un campo débil, con líneas de campo circulares, como las que son provocadas por una línea de corriente, según en la figura 30.4. Para un solenoide ideal, éste es el único campo externo a él. En la figura 30.18 es posible eliminar este campo si se añade un segunda capa de vueltas de alambre en el exterior del primer conjunto, con corriente a lo largo del eje del solenoide en dirección opuesta en comparación de la primera capa. En tal caso la corriente neta a lo largo del eje será igual a cero.

Figura 30.18 Vista de sección transversal de un solenoide ideal, donde el campo magnético interno es uniforme y el campo exterior es cercano a cero. La ley de Ampère aplicada a la trayectoria circular cerca de la parte baja cuyo plano es perpendicular a la página, se puede usar para mostrar que existe un campo débil exerno al solenoide. La ley de Ampère aplicada a la trayectoria rectangular discontinua en el plano de la página puede ser usada para calcular la magnitud del campo interno.

En un solenoide ideal puede utilizar la ley de Ampère para obtener una expresión cuantitativa del campo magnético interior. Ya que el solenoide es ideal, $\vec{\mathbf{B}}$ en el espacio interior es uniforme y paralelo al eje, y las líneas de campo magnético en el espacio exterior forman círculos alrededor del solenoide. Los planos de estos círculos son perpendiculares a la página. Considere la trayectoria rectangular (espira 2) de longitud ℓ y ancho w que se muestran en la figura 30.18. A esta trayectoria se le puede aplicar la ley de Ampère para evaluar la integral de $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ en cada lado del rectángulo. La contribución a lo largo del lado 3 es igual a cero, porque en esta región las líneas de campo magnético son perpendiculares a la trayectoria. Las contribuciones de los lados 2 y 4 son iguales a cero, de nuevo porque $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular a $d\vec{\mathbf{s}}$ a lo largo de estas trayectorias, tanto en el interior como en el exterior del solenoide. El lado 1 proporciona una contribución a la integral ya que, a lo largo de esta trayectoria, $\vec{\mathbf{B}}$ es uniforme y paralelo a $d\vec{\mathbf{s}}$. La integral de la trayectoria rectangular cerrada es, debido a eso,

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\text{trayectoria 1}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B \int_{\text{trayectoria 1}} ds = B\ell$$

El lado derecho de la ley de Ampère se refiere a la corriente total *I* a través del área limitada por la trayectoria de integración. En este caso, la corriente total a través de la trayectoria rectangular es igual a la corriente en cada vuelta multiplicada por el número de vueltas. Si en la longitud ℓ, *N* es el número de vueltas, la corriente total a través del rectángulo es *NI*. Por tanto, la ley de Ampère aplicada a esta trayectoria da

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B\ell = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 nI \qquad \textbf{(30.17)}$$

◀ Campo magnético en el interior de un solenoide

donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud.

También se podría obtener este resultado si reconsidera el campo magnético de un toroide (véase el ejemplo 30.6). Si el radio *r* del toroide de la figura 30.15 con *N* vueltas es mucho mayor que el radio *a* de la sección transversal del toroide, una pequeña sección del toroide se aproxima a un solenoide, para el cual $n = N/2\pi r$. En este límite, la ecuación 30.16 concuerda con la ecuación 30.17.

La ecuación 30.17 es válida sólo para los puntos cercanos al centro (es decir alejados de los extremos) de un solenoide muy largo. Como podía haberse esperado, el campo cerca de cada extremo es más pequeño que el valor dado por la ecuación 30.17. En el extremo de un solenoide largo, la magnitud del campo se reduce a la mitad de la magnitud en el centro (véase el problema 36).

Pregunta rápida 30.5 Considere un solenoide que, en comparación con su radio, es muy largo. Entre las siguientes opciones, la manera más efectiva de incrementar el campo magnético en el interior del solenoide es: a) duplicar su longitud; manteniendo constante el número de vueltas por unidad de longitud; b) reducir su radio a la mitad, manteniendo constante el número de vueltas por unidad de longitud; o c) recubrir el solenoide con otra capa de vueltas de alambre conductor.

30.5 Ley de Gauss en el magnetismo

El flujo asociado con un campo magnético se define de manera similar a la utilizada para definir el flujo eléctrico (véase la ecuación 24.3). Imagine un elemento de área dA sobre una superficie de forma arbitraria, como se muestra en la figura 30.19. Si el campo magnético en este elemento es $\vec{\mathbf{B}}$, el flujo magnético a través del elemento es $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$, donde $d\vec{\mathbf{A}}$ es un vector perpendicular a la superficie y que tiene una magnitud igual al área dA. Debido a eso, el flujo magnético total Φ_B a través de la superficie es

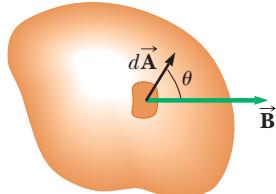
Definición de flujo magnético ▶

$$\Phi_B \equiv \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad (30.18)$$

Figura 30.19 El flujo magnético a través de un elemento de área dA es $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = B\,dA \cos\theta$, donde $d\vec{\mathbf{A}}$ es un vector perpendicular a la superficie.

Considere el caso especial de un plano de área A en un campo uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ que forma un ángulo θ con $d\vec{\mathbf{A}}$. El flujo magnético a través del plano en este caso es

$$\Phi_B = BA \cos\theta \qquad (30.19)$$

Si el campo magnético es paralelo al plano, como en la figura 30.20a, en tal caso $\theta = 90°$ y el flujo a través del plano es igual a cero. Si el campo es perpendicular al plano, como en la figura 30.20b, en consecuencia $\theta = 0$ y el flujo a través del plano es BA (el valor máximo).

La unidad del flujo magnético es $\mathrm{T \cdot m^2}$, la cual se define como un *weber* (Wb); $1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T \cdot m^2}$.

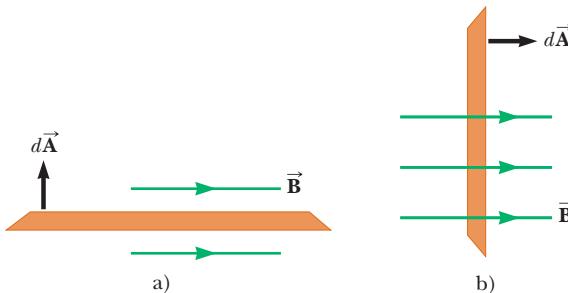



Figura 30.20 Flujo magnético a través de un plano que yace en un campo magnético. a) El flujo a través del plano es igual a cero cuando el campo magnético es paralelo a la superficie del plano. b) El flujo a través del plano es máximo cuando el campo magnético es perpendicular al plano.

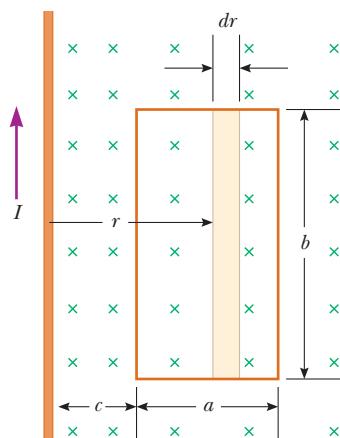
EJEMPLO 30.7 Flujo magnético a través de una espira rectangular

Una espira rectangular de ancho a y longitud b se ubica cerca de un alambre largo que conduce una corriente I (figura 30.21). La distancia entre el alambre y el lado más cercano de la espira es c. El alambre es paralelo al lado largo de la espira. Encuentre el flujo magnético total a través de la espira debido a la corriente en el alambre.

Figura 30.21 (Ejemplo 30.7) El campo magnético debido al alambre que conduce una corriente I no es uniforme en toda la espira rectangular.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se sabe que el campo magnético es una función de la distancia r desde un alambre largo. Por lo tanto, el campo magnético varía por toda el área de la espira rectangular.

Categorizar Ya que el campo magnético varía por toda el área de la espira, debe integrar de principio a fin esta área para encontrar el flujo total.

Analizar Observe que $\vec{\mathbf{B}}$ es paralelo a $d\vec{\mathbf{A}}$ en cualquier punto dentro de la espira, encuentre el flujo magnético a través del área rectangular mediante la ecuación 30.18 e incorpore la ecuación 30.14 para el campo magnético:

$$\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int B\,dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,dA$$

Exprese el elemento de área (la tira de color canela en la figura 30.21) como $dA = b\,dr$ y sustituya:

$$\Phi_B = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,b\,dr = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int \frac{dr}{r}$$

Integre desde $r = c$ hasta $r = a + c$:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_c^{a+c}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln r\Big|_c^{a+c}$$

$$= \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(\frac{a+c}{c}\right) = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{c}\right)$$

Finalizar Observe cómo el flujo depende del tamaño de la espira. Incrementar a o b aumenta el flujo como se esperaba. Si c se vuelve tan grande tal que la espira esté muy alejada del alambre, el flujo tiende a cero, también como se esperaba. Si c tiende a cero, el flujo se vuelve infinito. En principio, este valor infinito se presenta porque el campo se vuelve infinito en $r = 0$ (si supone un alambre infinitesimalmente delgado). Esto no ocurrirá en la realidad porque el grosor del alambre evita que el extremo izquierdo del lazo llegue a $r = 0$.

En el capítulo 24 se llegó a la conclusión de que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que rodea una carga neta es proporcional a dicha carga (ley de Gauss). En otras palabras, el número de líneas de campo eléctrico que salen de la superficie depende únicamente de la carga neta que se encuentra en su interior. Esta propiedad se basa en el hecho de que las líneas de campo eléctrico se originan y terminan en cargas eléctricas.

La situación es muy diferente para los campos magnéticos, que son continuos y forman espiras cerradas. En otras palabras, las líneas de campo magnético de una corriente en la figura 30.4 y de un imán de barra en la figura 30.22 no empiezan ni terminan en ningún punto. Observe que para cualquier superficie cerrada, como la que dibujan las líneas discontinuas de la figura 30.22, el número de líneas que entran a la superficie es igual al número de líneas que salen de ella; por lo tanto, el flujo magnético neto es igual a cero. En contraste, para una superficie cerrada que rodea una carga en un dipolo eléctrico (figura 30.23), el flujo eléctrico neto no es igual a cero.

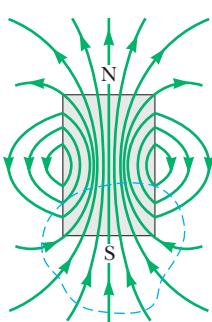



Figura 30.22 Las líneas de campo magnético de un imán de barra forman espiras cerradas. Advierta que el flujo magnético neto a través de una superficie cerrada que rodea a uno de los polos (o cualquier otra superficie cerrada) es igual a cero. (La línea discontinua representa la intersección de la superficie con la página.)

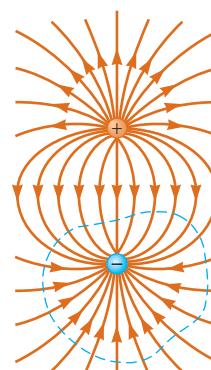



Figura 30.23 Las líneas de campo eléctrico que rodean un dipolo eléctrico parten de la carga positiva y terminan en la negativa. El flujo eléctrico a través de la superficie cerrada que rodea una de las cargas no es igual a cero.

La ley de Gauss en el magnetismo establece que

Ley de Gauss en el magnetismo

el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada siempre es igual a cero:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \tag{30.20}$$

Este enunciado representa que nunca han sido detectados polos magnéticos aislados (monopolos) y que quizá no existan. A pesar de lo anterior, los científicos continúan en su búsqueda, ya que ciertas teorías, que por otra parte tienen éxito explicando comportamientos físicos fundamentales, sugieren su posible existencia.

30.6 Magnetismo en la materia

El campo magnético producido por una corriente en una bobina de alambre da una pista sobre lo que hace que ciertos materiales exhiban propiedades magnéticas intensas. Anteriormente se encontró que una bobina como la que se muestra en la figura 30.17a tiene un polo norte y un polo sur. En general, *cualquier* espira de corriente tiene un campo magnético y, debido a eso, un momento dipolar magnético, incluyendo las espiras de corriente a nivel atómico descritas en algunos modelos del átomo.

Los momentos magnéticos de los átomos

Figura 30.24 Un electrón que se mueve en la dirección de la flecha gris en una órbita circular de radio r tiene un momentum angular $\vec{\mathbf{L}}$ en una dirección y un momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ en la dirección opuesta. Porque el electrón tiene una carga negativa, la dirección de la corriente debida a su movimiento alrededor del núcleo es opuesta a la dirección de dicho movimiento.

Se inicia la explicación con el modelo clásico del átomo, en el que los electrones se mueven en órbitas circulares alrededor de núcleos mucho más pesados. En este modelo, un electrón en órbita forma una espira de corriente minúscula (ya que se trata de una carga en movimiento) y el momento magnético del electrón está asociado con este movimiento orbital. Aunque este modelo tiene muchas deficiencias, algunas de sus predicciones están de acuerdo con la teoría correcta, la cual se expresa en función de la física cuántica.

En el modelo clásico, se supone que un electrón se mueve con una rapidez constante v en una órbita circular de radio r alrededor del núcleo, como en la figura 30.24. La corriente I asociada con este electrón en órbita es igual a su carga e dividida entre el periodo T. Utilizando $T = 2\pi/\omega$ and $\omega = v/r$, tiene

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r}$$

La magnitud del momento magnético asociada con esta espira de corriente es $\mu = IA$, donde $A = \pi r^2$ es el área encerrada por la órbita. Por lo tanto,

$$\mu = IA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)\pi r^2 = \tfrac{1}{2}evr \tag{30.21}$$

Ya que la magnitud del momentum angular orbital del electrón es $L = m_e vr$ (ecuación 11.12 con $\phi = 90°$), el momento magnético puede escribirse como

Momento magnético orbital

$$\mu = \left(\frac{e}{2m_e}\right)L \tag{30.22}$$

Este resultado demuestra que **el momento magnético del electrón es proporcional a su momentum angular orbital**. Ya que el electrón tiene carga negativa, los vectores $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ apuntan en direcciones *opuestas*. Ambos vectores son perpendiculares al plano de la órbita, como se indica en la figura 30.24.

Un resultado fundamental de la física cuántica es que el momentum angular orbital es cuantizado e igual a múltiplos de $\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34}$ J · s, donde h es la constante de Planck (vea capítulo 40). El valor diferente de cero más pequeño del momento magnético del electrón que resulta de su movimiento orbital es

$$\mu = \sqrt{2}\,\frac{e}{2m_e}\,\hbar \qquad \textbf{(30.23)}$$

En el capítulo 42 se comprenderá de dónde surgen las expresiones como la ecuación 30.23.

Ya que todas las sustancias contienen electrones, es lógico preguntar por qué la mayor parte de las sustancias no son magnéticas. El argumento principal es que en la mayoría, el momento magnético de un electrón en un átomo es cancelado por el correspondiente de otro electrón en órbita en dirección opuesta. El resultado neto es que, para la mayor parte de los materiales, **el efecto magnético producido por el movimiento orbital de los electrones es cero o muy pequeño**.

En adición a este momento magnético orbital (así como los protones, neutrones y otras partículas), un electrón tiene una propiedad intrínseca llamada **espín** que también contribuye a su momento magnético. Por lo común, un electrón puede considerarse como si estuviera girando sobre su eje, como se muestra en la figura 30.25, pero deberá tener mucho cuidado con esta interpretación clásica. La magnitud del momentum angular $\vec{\mathbf{S}}$ asociada con el espín es del mismo orden de magnitud que la magnitud del momentum angular $\vec{\mathbf{L}}$ debida al movimiento orbital. La magnitud del momentum angular del espín de un electrón, según la teoría cuántica, es

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hbar$$

El momento magnético característicamente asociado con el espín de un electrón tiene el valor

$$\mu_{\text{espín}} = \frac{e\hbar}{2m_e} \qquad \textbf{(30.24}$$

Esta combinación de constantes es conocida como el **magnetón de Bohr μ_B:**

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24}\,\text{J/T} \qquad \textbf{(30.25)}$$

Por lo tanto, los momentos magnéticos atómicos pueden expresarse como múltiplos del magnetón de Bohr. (Observe que $1\ \text{J/T} = 1\ \text{A} \cdot \text{m}^2$.)

En átomos que contienen muchos electrones, éstos por lo general forman parejas con espines opuestos entres sí; por lo tanto, los momentos magnéticos del espín se cancelan. Sin embargo, los átomos que contienen un número impar de electrones deben tener por lo menos un electrón sin par, por lo que el espín deberá tener algún momento magnético. El momento magnético total de un átomo es la suma vectorial de los momentos magnéticos orbitales y del espín. En la tabla 30.1 se dan algunos ejemplos. Advierta que el helio y el neón tienen momentos magnéticos iguales a cero porque sus espines individuales y sus momentos orbitales se cancelan.

El núcleo de un átomo también tiene un momento magnético asociado con sus protones y neutrones constitutivos. Sin embargo, el momento magnético de un protón o un neutrón es mucho más pequeño que el de un electrón y por lo general no se considera. Se comprenderá esto si se analiza la ecuación 30.25 reemplazando la masa del electrón con la masa de un protón o un neutrón. Ya que las masas del protón y del neutrón son mucho mayores que la del electrón, sus momentos magnéticos son 10^3 veces menores que los del electrón.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 30.3

El electrón no gira

El electrón físicamente no gira. Tiene un momentum angular intrínseco como si estuviera girando, pero la noción de rotación para una partícula puntual no tiene significado. La rotación sólo se aplica a un objeto rígido, con una extensión en el espacio, como en el capítulo 10. Realmente el momentum angular de giro es un efecto relativista.

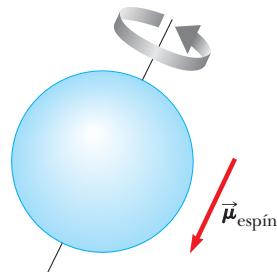
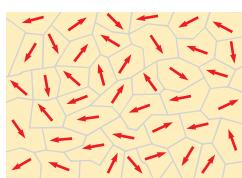



Figura 30.25 Modelo clásico de un electrón girando. Adopte este modelo para recordar que los electrones tienen un momentum angular intrínseco. Sin embargo, este modelo no debe ser llevado demasiado lejos: da una magnitud incorrecta para el momento magnético, da números cuánticos incorrectos, y demasiados grados de libertad.

Ferromagnetismo

Unas pocas sustancias cristalinas exhiben efectos magnéticos intensos, lo que se conoce como **ferromagnetismo.** Algunos ejemplos de sustancias ferromagnéticas son el hierro, el cobalto, el níquel, el gadolinio y el disprosio. Estas sustancias contienen momentos magnéticos atómicos permanentes que tienden a alinearse paralelamente uno con otro incluso en presencia de un campo magnético externo débil. Una vez alineados los momentos, la sustancia se mantiene magnetizada después de haberse retirado el campo externo. Esta alineación permanente se debe a un fuerte acoplamiento entre momentos vecinos, el cual puede entenderse sólo en términos de la mecánica cuántica.

Todos los materiales ferromagnéticos están constituidos por regiones microscópicas llamadas **dominios,** regiones dentro de las cuales todos los momentos magnéticos están

TABLA 30.1

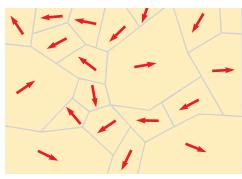
Momentos magnéticos de algunos átomos y iones

Átomo o ion	Momento magnético (10^{-24} J/T)
H	9.27
He	0
Ne	0
Ce^{3+}	19.8
Yb^{3+}	37.1

Figura 30.26 a) Orientación al azar de los dipolos magnéticos atómicos en los dominios de una sustancia no magnetizada. b) Cuando se aplica un campo externo $\vec{B}$, los dominios con componentes de momento magnético en la misma dirección que $\vec{B}$ se vuelven más grandes, dando a la muestra una magnetización neta. c) Conforme el campo se hace aún más intenso, los dominios con vectores de momentos magnéticos no alineados con el campo externo se vuelven muy pequeños.

alineados. Estos dominios tienen volúmenes de alrededor de 10^{-12} a 10^{-8} m^3 y contienen 10^{17} a 10^{21} átomos. Los límites entre diversos dominios con orientaciones diferentes se llaman **paredes del dominio.** En una muestra no magnetizada, los momentos magnéticos en los dominios están orientados al azar para que el momento magnético neto sea igual a cero, como en la figura 30.26a. Cuando la muestra se coloca en un campo magnético externo $\vec{B}$, crece el tamaño de aquellos dominios que tienen momentos magnéticos alineados con el campo, lo que da como resultado una muestra magnetizada, como en la figura 30.26b. Conforme el campo magnético se vuelve más intenso, como en la figura 30.26c, los dominios en los cuales los momentos magnéticos no están alineados con el campo se vuelven muy pequeños. Cuando se retira el campo magnético externo, la muestra puede retener una magnetización neta en la dirección del campo original. A temperaturas normales, la agitación térmica no es suficiente para alterar esta orientación de los momentos magnéticos.

Los discos magnéticos para computadora almacenan información al alternar la dirección de $\vec{B}$ para porciones de una capa delgada de material ferromagnético. Los discos flexibles, o floppy disks tienen la capa colocada sobre una hoja circular de plástico. Los discos duros contienen varios platos rígidos con recubrimientos magnéticos de cada lado. Los casetes de audio y video funcionan de la misma manera que los de discos flexibles, excepto que el material ferromagnético es una cinta de plástico muy larga. En una cabeza fonocaptora hay bobinas diminutas de alambre colocadas cerca de un material magnético (que se está moviendo rápidamente frente a la cabeza). Al variar la corriente en las bobinas se crea un campo magnético que magnetiza el material de grabación. Para recuperar la información, se hacer pasar el material magnetizado frente a una bobina reproductora. El magnetismo cambiante del material induce una corriente en la bobina, como se explica en el siguiente capítulo. Esta corriente es después amplificada por un equipo de audio o video, o es procesada por un circuito de computadora.

Cuando una sustancia ferromagnética alcanza o excede una temperatura crítica conocida como **temperatura Curie,** pierde su magnetización residual. Por debajo de la temperatura Curie, los momentos magnéticos están alineados y la sustancia es ferromagnética. Cuando supera la temperatura Curie, la agitación térmica es lo suficientemente grande para orientar al azar los momentos, y la sustancia se vuelve paramagnética. Las temperaturas de Curie para varias sustancias ferromagnéticas se muestran en la tabla 30.2.

Paramagnetismo

Las sustancias paramagnéticas tienen un magnetismo pequeño pero positivo, resultado de la presencia de átomos (o de iones) con momentos magnéticos permanentes. Estos momentos interactúan sólo de manera débil entre sí y se orientan al azar en ausencia de un campo magnético externo. Cuando la sustancia paramagnética se coloca en un campo magnético externo, sus momentos atómicos tienden a alinearse con el campo. Sin embargo, este proceso de alineamiento debe competir con el movimiento térmico, que tiende a orientar al azar a los momentos magnéticos.

Diamagnetismo

Cuando se aplica un campo magnético externo a una sustancia diamagnética, se induce un momento magnético débil en dirección opuesta al campo aplicado, esto hace que las sustancias diamagnéticas sean débilmente repelidas por un imán. Aunque el diamagnetismo está presente en toda materia, sus efectos son mucho menores que los del paramagnetismo o del ferromagnetismo, y sólo son evidentes cuando no existen esos otros efectos.

Puede llegar a tener cierta comprensión del diamagnetismo si considera un modelo clásico de dos electrones atómicos en órbita alrededor del núcleo, en direcciones opuestas pero con una misma rapidez. Los electrones se mantienen en sus órbitas circulares debido a la fuerza electrostática de atracción ejercida por el núcleo con carga positiva. Ya que los momentos magnéticos de los dos electrones son de igual magnitud pero de dirección opuesta, se cancelan entre sí, y el momento magnético del átomo es igual a cero. Cuando se le aplica un campo magnético externo, los electrones experimentan una fuerza magnética adicional $q\vec{v} \times \vec{B}$. Esta fuerza magnética añadida se combina con

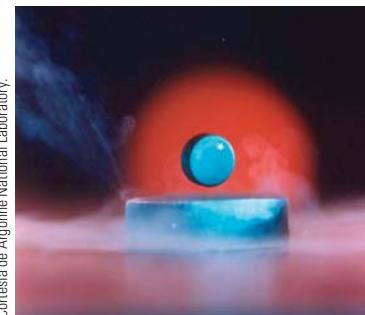



TABLA 30.2

Temperaturas Curie para varias sustancias ferromagnéticas

Sustancia	T_{Curie} (K)
Hierro	1 043
Cobalto	1 394
Níquel	631
Gadolinio	317
Fe_2O_3	893

Leon Lewandowski.

High Field Magnet Laboratory, University of Nijmegen, The Netherlands.

(*Izquierda*) Paramagnetismo: un material paramagnético, oxígeno líquido, es atraído hacia los polos de un imán. (*Derecha*) Diamagnetismo: una rana levita en un campo magnético de 16-T en el laboratorio Nijmegen High Field Magnet, en Holanda. La fuerza de suspensión es ejercida sobre las moléculas diamagnéticas del agua existentes en el cuerpo de la rana. La rana no sufrió ningún daño por causa de esta experiencia.

Cortesía de Argonne National Laboratory.

Figura 30.27 Este imán suspendido arriba de un disco superconductor cerámico enfriado que ilustra el efecto Meissner se ha convertido en la ilustración más clara de la superconductividad a altas temperaturas. La superconductividad es la pérdida de toda resistencia al paso de la corriente eléctrica, y es la clave para un uso más eficiente de la energía. En el efecto Meissner, el imán induce una corriente superconductora en el disco, el cual ha sido enfriado hasta −321°F (77 K). Las corrientes crean una fuerza magnética que repele al disco y lo pone en suspensión.

la fuerza electrostática para incrementar la rapidez orbital del electrón cuyo momento magnético es antiparalelo al campo y reduce la rapidez del electrón cuyo momento magnético es paralelo al mismo. Como resultado, los dos momentos magnéticos de los electrones ya no se cancelan, y la sustancia adquiere un momento magnético neto opuesto al campo aplicado.

Como recordará del capítulo 27, un superconductor es una sustancia en la cual, por debajo de alguna temperatura crítica, su resistencia eléctrica es igual a cero. Ciertos tipos de superconductores también exhiben en el estado de superconducción un diamagnetismo perfecto. Como resultado, un campo magnético aplicado es expulsado por el superconductor de manera que en su interior el campo se vuelve igual a cero. Este fenómeno se conoce como **efecto Meissner**. Si se coloca un imán permanente cerca de un superconductor, los dos objetos se repelen. Esto se ilustra en la figura 30.27, la cual muestra un pequeño imán permanente suspendido sobre un superconductor que se mantiene a 77 K.

30.7 Campo magnético de la Tierra

Cuando se dice que un imán de brújula tiene un polo norte y un polo sur, es más adecuado decir que tiene un polo "que busca el norte" y un polo "que busca el sur". Al decir esto se expresa que un polo del imán busca, o apunta hacia el polo norte geográfico de la Tierra. En vista de que el polo norte de un imán es atraído hacia el polo norte geográfico de la Tierra, se concluye que el **polo sur magnético de la Tierra está localizado cerca del polo norte geográfico, y el polo norte magnético de la Tierra está localizado cerca del polo sur geográfico.** De hecho, la configuración del campo magnético de la Tierra, que se ilustra en la figura 30.28 (página 856), se parece mucho al que se lograría enterrando profundamente en el interior de la Tierra un imán de barra gigantesco.

Si se suspende la aguja de una brújula en cojinetes que permitan que gire tanto en el plano vertical como en el horizontal, la aguja queda colocada horizontalmente respecto a la superficie de la Tierra sólo cuando está cerca del ecuador. Conforme la brújula es movida hacia el norte, la aguja gira de forma que apunta cada vez más hacia la superficie de la Tierra. Finalmente, en un punto cerca de la Bahía de Hudson en Canadá, el polo norte de la aguja apunta directamente hacia abajo. Este sitio, descubierto en 1832, se considera como la ubicación del polo sur magnético de la Tierra. Está a 1 300 millas del polo norte geográfico, y su posición exacta varía lentamente con el transcurso del tiempo. De manera similar, el polo norte magnético de la Tierra está alrededor de 1 200 millas lejos del polo sur magnético de la Tierra.

En vista de la distancia entre los polos norte geográfico y sur magnético, es sólo aproximadamente correcto decir que la aguja de una brújula apunta hacia el norte. La diferencia

Figura 30.28 Líneas de campo magnético de la Tierra. Observe que un polo sur magnético está cerca del polo norte geográfico, y un polo norte magnético está cerca del polo sur geográfico.

entre el norte verdadero, que se define como el polo norte geográfico, y el norte indicado por una brújula, varía de un punto a otro sobre la Tierra, y a la diferencia se le conoce como *declinación magnética*. Por ejemplo, a lo largo de una línea que pasa a través de Florida y Los Grandes Lagos, una brújula indicará el norte verdadero; sin embargo, en el estado de Washington, se alineará 25° al este del norte verdadero. La figura 30.29 muestra algunos valores representativos de la declinación magnética para Estados Unidos.

A pesar de que el patrón del campo magnético de la Tierra es similar al que se establecería utilizando un imán de barra enterrado a una gran profundidad en el interior de la Tierra, es fácil entender por qué la fuente del campo magnético de la Tierra no puede estar compuesta por grandes masas de material permanentemente magnetizado. Es cierto que la Tierra tiene grandes depósitos de hierro por debajo de su superficie, pero las elevadas temperaturas en el núcleo de la Tierra impedirían que el hierro retuviera cualquier magnetización permanente. Los científicos piensan que es más probable que el verdadero origen del campo magnético de la Tierra se deba a corrientes de convección en su núcleo. Iones cargados o electrones circulando en el interior líquido podrían producir un campo magnético igual a como ocurre en una espira de corriente. También existe una fuerte evidencia de que la magnitud del campo magnético de un planeta está relacionada con su velocidad de rotación. Por ejemplo, Júpiter gira más rápido que la Tierra, y las sondas espaciales indican que el campo magnético de Júpiter es más fuerte que el terrestre. Venus, por otro lado, gira más despacio que la Tierra, y su campo magnético es más débil. Actualmente se investigan las causas del magnetismo de la Tierra.

Un aspecto interesante al respecto indica que la dirección del campo magnético de la Tierra se invirtió varias veces durante el último millón de años. La evidencia de este fenómeno se encuentra en el basalto, un tipo de roca que contiene hierro y que se forma con base en el material expulsado por actividad volcánica en el fondo del océano. Conforme la lava se enfría se solidifica y conserva una huella de la dirección del campo magnético de la Tierra. Mediante otros medios se determina la edad de estas rocas a fin de tener un calendario de estas inversiones periódicas del campo magnético.

Figura 30.29 Mapa de Estados Unidos que muestra varias líneas de declinación magnética constante.

Resumen

DEFINICIONES

El **flujo magnético** Φ_B a través de una superficie se define por la integral de superficie

$$\Phi_B \equiv \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad \textbf{(30.18)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **ley Biot-Savart** dice que el campo magnético $d\vec{\mathbf{B}}$ en un punto P debido a un elemento de longitud $d\vec{\mathbf{s}}$ que porta una corriente estable I es

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \textbf{(30.1)}$$

donde μ_0 es la **permeabilidad del espacio libre**, r es la distancia desde el elemento hasta el punto P y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta desde $d\vec{\mathbf{s}}$ hacia el punto P. El campo total en P se encuentra al integrar esta expresión en toda la distribución de corriente.

La fuerza magnética por unidad de longitud entre dos alambres paralelos separados por una distancia a y que porta corrientes I_1 e I_2 tiene una magnitud

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \qquad \textbf{(30.12)}$$

La fuerza es de atracción si las corrientes están en la misma dirección y de repulsión si están en direcciones opuestas.

La **ley de Ampère** dice que la integral de línea de $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a $\mu_0 I$, donde I es la corriente estable total a través de cualquier superficie acotada por la trayectoria cerrada:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I \qquad \textbf{(30.13)}$$

La magnitud del campo magnético a una distancia r de un alambre recto largo que porta una corriente eléctrica I es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \textbf{(30.14)}$$

Las líneas de campo son círculos concéntricos con el alambre.

Las magnitudes de los campos adentro de un toroide y solenoide son

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad \text{(toroide)} \qquad \textbf{(30.16)}$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 n I \quad \text{(solenoide)} \qquad \textbf{(30.17)}$$

donde N es el número total de vueltas.

La **ley de Gauss del magnetismo** afirma que el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es cero.

Las sustancias se clasifican en una de tres categorías que describen su comportamiento magnético. Las sustancias **diamagnéticas** son aquellas en las que el momento magnético es débil y opuesto al campo magnético aplicado. Las sustancias **paramagnéticas** son aquellas en las que el momento magnético es débil y en la misma dirección que el campo magnético aplicado. En las sustancias **ferromagnéticas**, las interacciones entre los átomos hacen que los momentos magnéticos se alineen y ocasionan una fuerte magnetización que permanece después de que el campo externo se retira.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** ¿Qué produce un campo magnético? Elija toda respuesta correcta. a) un objeto inmóvil con carga eléctrica, b) un objeto en movimiento con carga eléctrica, c) un conductor inmóvil que porta corriente eléctrica, d) una diferencia en potencial eléctrico, e) un resistor eléctrico. *Nota:* En el capítulo 34 se verá que un campo eléctrico variable también origina un campo magnético.
2. **O** Un alambre metálico, vertical y largo porta corriente eléctrica hacia abajo. **i)** ¿Cuál es la dirección del campo magnético que se crea en un punto a 2 cm horizontalmente al este del centro del alambre? a) norte, b) sur, c) este, d) oeste, e) arriba, f) abajo. **ii)** ¿Cuál sería la dirección del campo si la corriente consistía en cargas positivas en movimiento hacia abajo, en lugar de electrones en movimiento hacia arriba? Elija entre las mismas posibilidades.
3. **O** Suponga que está de frente a un espejo de estructura alta sobre una pared vertical. Los tubos fluorescentes que enmarcan el espejo portan una corriente eléctrica en sentido de las manecillas del reloj. **i)** ¿Cuál es la dirección del campo magnético creado por dicha corriente en un punto ligeramente a la derecha del centro del espejo? a) arriba, b) abajo, c) izquierda, d) derecha, e) horizontalmente hacia usted, f) alejándose de usted. **ii)** ¿Cuál es la dirección del campo que crea la corriente en un punto sobre la pared afuera del marco a la derecha? Elija entre las mismas posibilidades.
4. Explique por qué se repelen dos alambres paralelos con corrientes en direcciones opuestas.
5. **O** En la figura 30.8, suponga $I_1 = 2$ A e $I_2 = 6$ A. ¿Cuál es la correspondencia entre la magnitud F_1 de la fuerza ejercida sobre el alambre 1 y la magnitud F_2 de la fuerza ejercida sobre el alambre 2? a) $F_1 = 6F_2$, b) $F_1 = 3F_2$, c) $F_1 = F_2$, d) $F_1 = F_2/3$, e) $F_1 = F_2/6$.
6. **O** Responda a cada pregunta sí o no. a) ¿Es posible que cada una de tres partículas inmóviles con carga ejerza una fuerza de atracción sobre las otras dos? b) ¿Es posible que cada una de tres partículas inmóviles con carga rechace a las otras dos? c) ¿Es posible que cada uno de tres alambres metálicos portadores de corriente atraiga a los otros dos? d) ¿Es posible que cada uno de tres alambres metálicos portadores de corriente repele a los otros dos? Los experimentos de André-Marie Ampère acerca del electromagnetismo son modelos de precisión lógica e incluían observaciones de los fenómenos a los que se refiere esta pregunta.
7. ¿Es válida la ley de Ampère para todas las trayectorias cerradas que rodean un conductor? ¿Por qué no resulta útil para el cálculo de $\vec{\mathbf{B}}$ en todas las trayectorias?
8. Compare la ley de Ampère con la ley de Biot-Savart. ¿Cuál es generalmente la más útil para calcular $\vec{\mathbf{B}}$ en un conductor que transporta corriente?
9. Un tubo de cobre hueco transporta corriente a todo lo largo. ¿Por qué $\vec{\mathbf{B}}$ es igual a 0 en el interior del tubo? ¿$\vec{\mathbf{B}}$ es diferente de cero en el exterior del tubo?
10. **O i)** ¿Qué ocurre con la magnitud del campo magnético adentro de un largo solenoide si la corriente se duplica? a) Se vuelve 4 veces mayor. b) Se duplica. c) No cambia. d) Se reduce a la mitad. e) Se convierte en un cuarto. **ii)** ¿Qué ocurre con el campo si se duplica la longitud del solenoide, mientras el número de vueltas se mantiene igual? Elija entre las mismas posibilidades. **iii)** ¿Qué ocurre con el campo si el número de vueltas se duplica, y la longitud se mantiene constante? Elija entre las mismas posibilidades. **iv)** ¿Qué ocurre con el campo si el radio se duplica? Elija entre las mismas posibilidades.
11. **O** Un largo solenoide con espiras cercanamente espaciadas porta corriente eléctrica. ¿Cada vuelta de alambre ejerce a) una fuerza de atracción sobre la siguiente vuelta adyacente, b) una fuerza repulsiva sobre la siguiente espira adyacente, c) fuerza cero sobre la siguiente espira adyacente o d) una fuerza de atracción o una de repulsión, dependiendo de la dirección de la corriente en el solenoide?
12. **O** Un campo magnético uniforme se dirige a lo largo del eje *x*. ¿Para qué orientación de una bobina rectangular plana el flujo a través del rectángulo es un máximo? a) Es un máximo en el plano *xy*. b) Es un máximo en el plano *xz*. c) Es un máximo en el plano *yz*. d) El flujo tiene el mismo valor distinto de cero para todas estas orientaciones. e) El flujo es cero en todos los casos.
13. La cantidad $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ en la ley de Ampère se llama *circulación magnética*. La figura 30.10 y la figura 30.13 muestran trayectorias alrededor de las que se evaluó la circulación. Cada una de estas trayectorias encierra un área. ¿Cuál es el flujo magnético a través de cada área? Explique su respuesta.
14. **O** a) Dos partículas inmóviles con carga ejercen fuerzas de atracción una sobre otra. Una de las partículas tiene carga negativa. ¿La otra es positiva o negativa? b) El campo eléctrico neto en un punto a la mitad entre las partículas es mayor, menor o igual en magnitud al campo debido a una carga por sí sola? c) Dos alambres rectos y verticales portadores de corriente ejercen fuerzas de atracción uno sobre otro. Uno de ellos porta corriente hacia abajo. ¿El otro alambre porta corriente hacia arriba o hacia abajo? d) ¿El campo magnético neto en un punto a la mitad entre los alambres es mayor, menor o igual en magnitud al campo debido a un alambre por sí solo?
15. **O** Clasifique las magnitudes de los siguientes campos magnéticos de mayor a menor, y señale cualquier caso de igualdad. a) El campo a 2 cm de distancia de un alambre recto largo que porta una corriente de 3 A, b) el campo en el centro de una bobina circular, compacta y plana, de 2 cm de radio, con 10 vueltas, que porta una corriente de 0.3 A, c) el campo en el centro de un solenoide de 2 cm de radio y 200 cm de largo, con 1 000 vueltas, que porta una corriente de 0.3 A, d) el campo en el centro de una barra metálica recta larga, de 2 cm de radio, que porta una corriente de 300 A, e) un campo de 1 mT.
16. Un polo de un imán atrae un clavo. ¿El otro polo del imán atrae el clavo? Explique. Explique cómo un imán se pega a la puerta de un refrigerador.
17. Un imán atrae un fragmento de hierro. A su vez, el hierro puede atraer otro fragmento de hierro. Con base en la alineación de dominios, explique lo que ocurre en cada pedazo de hierro.

18. ¿Por qué si se golpea un imán con un martillo se reduce su magnetismo?

19. ¿En cuál dirección apunta una brújula si usted estuviese en el polo magnético norte de la Tierra?

20. La figura P30.20 muestra cuatro imanes permanentes, cada uno con un orificio en el centro. Observe que los imanes azul y amarillo levitan sobre los rojos. a) ¿Cómo ocurre esta levitación? b) ¿Qué propósito tienen las barras? c) ¿Qué puede decir acerca de los polos de los imanes a partir de esta observación? d) Si el imán superior se invirtiera, ¿qué supone que ocurriría?

© Thomson Learning/Charles D. Winters

Figura P30.20

Problemas

Sección 30.1 Ley de Biot-Savart

1. En el modelo de Niels Bohr de 1913 del átomo de hidrógeno, un electrón gira alrededor del protón a una distancia de 5.29×10^{-11} m con una rapidez de 2.19×10^{6} m/s. Calcule la magnitud del campo magnético que produce su movimiento en el sitio ocupado por el protón.

2. Calcule la magnitud del campo magnético en un punto que está a 100 cm de distancia de un conductor delgado y largo que lleva una corriente de 1.00 A.

3. a) Un conductor con la forma de una espira cuadrada con un lado $\ell = 0.400$ m lleva una corriente $I = 10.0$ A, como en la figura P30.3. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el centro del cuadro. b) **¿Qué pasaría si?** este conductor toma la forma de una sola vuelta circular y lleva la misma corriente, ¿cuál es el valor del campo magnético en el centro?

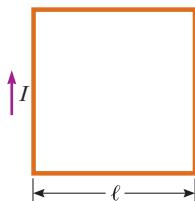



Figura P30.3

4. Un conductor está constituido por una espira circular de radio R y dos secciones largas y rectas, como se muestra en la figura P30.4. El alambre yace en el plano del papel y lleva una corriente I. Determine una expresión para el vector del campo magnético en el centro de la espira.

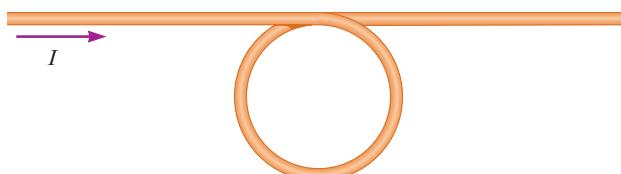



Figura P30.4

5. Determine el campo magnético en un punto P localizado a una distancia x de la esquina de un alambre infinitamente largo doblado de manera que forma un ángulo recto, como se muestra en la figura P30.5. El alambre lleva una corriente estable I.

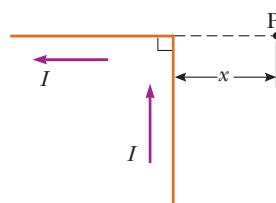



Figura P30.5

6. Considere una espira de corriente circular plana de radio R que lleva una corriente I. Haga que el eje de x quede a lo largo del eje de la espira, con el origen en el centro de ella. Trace una gráfica de la relación de la magnitud del campo magnético en la coordenada x con la del origen, para $x = 0$ hasta $x = 5R$. Puede resultar útil una calculadora programable o una computadora para resolver este problema.

7. Dos alambres paralelos, muy largos y rectos, conducen corrientes que están dirigidas perpendicularmente a la página, como se muestra en la figura P30.7. El alambre 1 lleva una corriente I_1 hacia el interior de la página (en la dirección $-z$) y pasa a través del eje x en $x = +a$. El alambre 2 pasa a través del eje x en $x = -2a$ y lleva una corriente desconocida I_2. El campo magnético total en el origen debido a estos alambres conductores tiene una magnitud de $2\mu_0 I_1/(2\pi a)$. La corriente I_2 puede tener dos valores posibles. a) Determine el valor de I_2 utilizando la magnitud más pequeña, expresándola en función de I_1 y dando su dirección. b) Determine el otro valor posible para I_2.

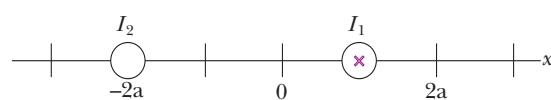



Figura P30.7

8. Un alambre recto largo conduce corriente I. Se hace un ángulo recto al doblarlo por la mitad del alambre. El doblez forma un arco de círculo de radio r como se muestra en la figura P30.8. Determina la magnitud del campo en el centro del arco.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

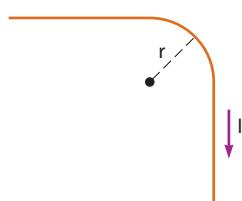



Figura P30.8

9. Un alambre muy largo lleva una corriente de 30.0 A hacia la izquierda a lo largo del eje x. Un segundo alambre muy largo lleva una corriente de 50.0 A hacia la derecha a lo largo de la línea (y = 0.280 m, z = 0). a) ¿En qué parte del plano de los dos alambres el campo magnético es igual a cero? b) Una partícula con una carga de −2.00 μC se mueve a una velocidad de 150 $\hat{\mathbf{i}}$ Mm/s a lo largo de la línea (y = 0.100 m, z = 0). Calcule el vector de la fuerza magnética que actúa sobre la partícula. c) **¿Qué pasaría si?** se aplica un campo eléctrico uniforme a fin de permitir que esta partícula pase a través de esta región sin desviarse. Calcule el vector del campo eléctrico requerido.

10. Una trayectoria de corriente con la forma que se muestra en la figura P30.10 produce un campo magnético en P, el centro del arco. Si el arco subtiende un ángulo de 30.0° y el radio del arco es 0.600 m, ¿cuáles son la magnitud y la dirección del campo producido en P si la corriente es de 3.00 A?

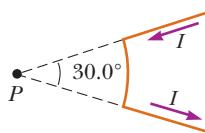



Figura P30.10

11. Tres largos conductores paralelos portan corrientes de I = 2.00 A. La figura P30.11 es la vista de un extremo de los conductores, donde cada corriente sale de la página. Si considera a = 1.00 cm, determine la magnitud y la dirección del campo magnético en los puntos A, B y C.

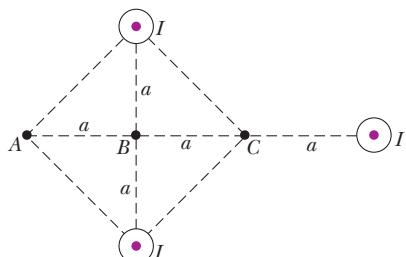



Figura 30.11

12. ● En el recorrido de un relámpago vertical, recto y largo, los electrones se mueven hacia abajo y los iones positivos se mueven hacia arriba, para constituir una corriente de 20.0 kA de magnitud. En una posición 50.0 m al este de la mitad del recorrido, un electrón libre se dirige a través del aire hacia el oeste con una rapidez de 300 m/s. a) Encuentre el vector fuerza que el relámpago ejerce sobre el electrón. Elabore un bosquejo que muestre los diferentes vectores involucrados. Ignore el efecto del campo magnético de la Tierra. b) Encuentre el radio de la trayectoria del electrón. ¿Es una buena aproximación modelar el electrón como moviéndose en un campo uniforme? Explique su respuesta. c) Si no choca con algún obstáculo, ¿cuántas revoluciones completará el electrón durante los 60.0 μs de duración del relámpago?

13. ● Un alambre que lleva una corriente I es doblado de manera que forma un triángulo equilátero de lados L. a) Determine la magnitud del campo magnético en el centro del triángulo. b) En un punto a igual distancia entre el centro y cualquier vértice, ¿el campo es más intenso o más débil que en el centro? Dé un argumento cualitativo a su respuesta.

14. Determine el campo magnético (en función de I, a y d) en el origen causado por la espira de corriente en la figura P30.14.

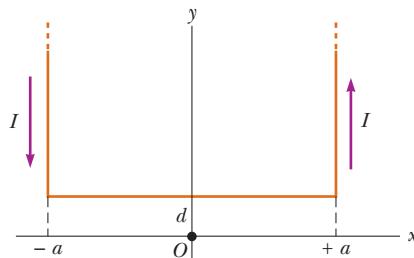



Figura P30.14

15. Dos conductores largos y paralelos llevan corrientes I_1 = 3.00 A e I_2 = 3.00 A, ambas dirigidas en dirección a la página en la figura P30.15. Determine la magnitud y la dirección del campo magnético resultante en P.

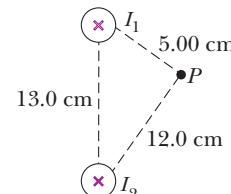



Figura P30.15

16. La idea de que un campo magnético puede tener valor terapéutico ha permanecido durante siglos. Un imán de tierra rara vendido para aliviar el dolor de la articulación es un disco de 1.20 mm de grosor y 3.50 mm de diámetro. Sus caras circulares planas son sus polos norte y sur. Suponga que se modela con precisión como un dipolo magnético, también que la ecuación 30.10 describe el campo magnético que produce en todos los puntos a lo largo de su eje. El campo es más intenso, con el valor de 40.0 mT, en el centro de cada cara plana. ¿A qué distancia de la superficie la magnitud del campo magnético es la de la Tierra, con un valor de 50.0 μT?

Sección 30.2 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos

17. En la figura P30.17, la corriente en el alambre largo y recto es igual a I_1 = 5.00 A y el alambre yace en el plano de la espira rectangular, la cual lleva una corriente I_2 = 10.0 A. Las dimensiones son c = 0.100 m, a = 0.150 m y ℓ = 0.450 m. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético producido por el alambre.

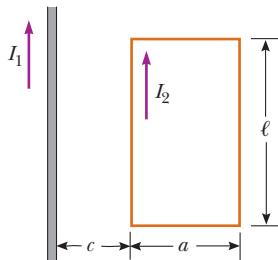



Figura P30.17

18. Dos conductores largos y paralelos separados 10 cm, transportan corrientes en una misma dirección. El primer alambre lleva una corriente $I_1 = 5.00$ A y el segundo lleva una $I_2 = 8.00$ A. a) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético producido por I_1 en la ubicación de I_2? b) ¿Cuál es la fuerza por cada unidad de longitud ejercida por I_1 sobre I_2? c) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético producido por I_2 en la ubicación de I_1? d) ¿Cuál es la fuerza por cada unidad de longitud ejercida por I_2 sobre I_1?

19. Dos alambres largos y paralelos se atraen entre sí con una fuerza por unidad de longitud igual a 320 μN/m cuando están separados una distancia vertical de 0.500 m. La corriente en el alambre superior es de 20.0 A hacia la derecha. Determine la ubicación de la línea en el plano de los dos alambres a lo largo de la cual el campo magnético total es igual a cero.

20. ● Tres alambres largos (alambre 1, alambre 2 y alambre 3) cuelgan en forma vertical. La distancia entre el alambre 1 y el 2 es de 20.0 cm. A la izquierda, el alambre 1 lleva una corriente hacia arriba de 1.50 A. A la derecha, el alambre 2 lleva una corriente hacia abajo de 4.00 A. El alambre 3 está localizado de forma que cuando lleva cierta corriente, ninguno de los alambres experimenta una fuerza neta. a) ¿Son posibles otras maneras? Describa b) la posición del alambre 3 y c) la magnitud y dirección de la corriente en el alambre 3.

21. ● La unidad de flujo magnético recibe su nombre en honor de Wilhelm Weber. Una unidad de tamaño práctico de campo magnético recibe su nombre en honor de Johann Karl Friedrich Gauss. Ambos fueron científicos en Göttingen, Alemania. Además de sus logros individuales, juntos construyeron un telégrafo en 1833. Consistía en una batería e interruptor, en un extremo de una línea de transmisión de 3 km de largo, que operaba un electroimán en el otro extremo. (André Ampère sugirió la señalización eléctrica en 1821; Samuel Morse construyó una línea telegráfica entre Baltimore y Washington, D.C., en 1844.) Suponga que la línea de transmisión de Weber y Gauss era como se diagrama en la figura P30.21. Dos alambres paralelos largos, cada uno con una masa por cada unidad de longitud de 40.0 g/m, están sostenidos en un plano horizontal mediante cuerdas de 6.00 cm de largo. Cuando ambos alambres portan la misma corriente I, los alambres se repelen mutuamente de modo que el ángulo θ entre las cuerdas de sostén es de 16.0°. a) ¿Las corrientes están en la misma dirección o en direcciones opuestas? b) Encuentre la magnitud de la corriente. c) Si este aparato se llevase a Marte, ¿la corriente requerida para separar los alambres 16° sería mayor o menor que la de la Tierra? ¿Por qué?

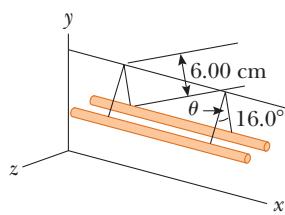



Figura P30.21

22. ● Dos conductores de cobre paralelos tienen cada uno 0.500 m de largo. Portan corrientes de 10.0 A en direcciones opuestas. a) Qué separación entre sus centros deben tener los conductores si se deben repeler mutuamente con una fuerza de 1.00 N? b) ¿Esta situación es físicamente posible? Explique.

Sección 30.3 Ley de Ampère

23. Cuatro conductores largos y paralelos transportan corrientes iguales de $I = 5.00$ A. La figura P30.23 muestra un extremo de los conductores. La dirección de la corriente es hacia la página en los puntos A y B (indicado por las cruces) y hacia afuera de la página en C y D (indicado por los puntos). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P, localizado en el centro del cuadrado de 0.200 m de lado.

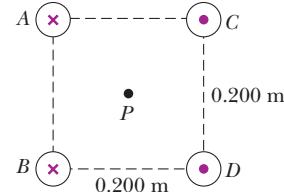



Figura P30.23

24. Un alambre largo y recto yace sobre una mesa horizontal y lleva una corriente de 1.20 μA. En el vacío, un protón se mueve paralelamente al alambre (en dirección opuesta a la corriente) con una rapidez constante de 2.30×10^4 m/s y a una distancia d por encima del alambre. Determine el valor de d. Puede ignorar el campo magnético causado por la Tierra.

25. La figura P30.25 es la vista de la sección transversal de un cable coaxial. El conductor central está rodeado por una capa de hule, la cual está rodeada por un conductor exterior, que a su vez está rodeado por otra capa de hule. En una aplicación particular, la corriente en el conductor interno es de 1.00 A hacia afuera de la página y la corriente en el conductor externo es de 3.00 A hacia adentro de la página. Determine la magnitud y la dirección del campo magnético en los puntos a y b.

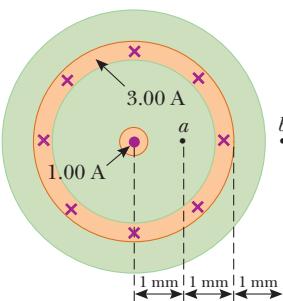
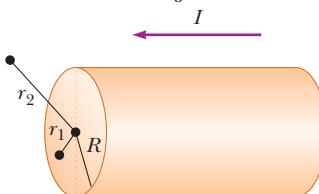
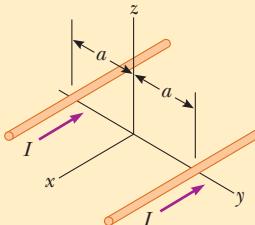
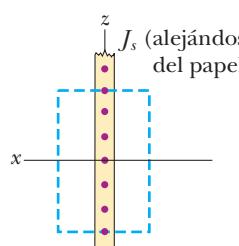



Figura P30.25

26. El campo magnético que está a 40.0 cm de un alambre largo y recto que lleva una corriente de 2.00 A es igual a 1.00 μT. a) ¿A qué distancia existe un valor de campo de 0.100 μT? b) **¿Qué pasaría si?** en un instante dado, los dos conductores de un cable largo de una extensión doméstica llevan corrientes iguales de 2.00 A en direcciones opuestas. Los dos alambres se en-

cuentran a 3.00 mm de distancia. Determine el campo magnético a 40.0 cm del centro del cable recto, en el plano de los dos alambres. c) ¿A qué distancia se reduce el campo a la décima parte? d) El alambre central en un cable coaxial lleva una corriente de 2.00 A en una dirección y la funda que la rodea lleva una corriente de 2.00 A en dirección opuesta. ¿Qué campo magnético produce el cable en los puntos exteriores?

27. ● Un paquete de 100 alambres rectos, largos y aislados, forma un cilindro de radio $R = 0.500$ cm. a) Si cada alambre conduce 2.00 A, ¿cuál es la magnitud y dirección de la fuerza magnética por unidad de longitud que actúa sobre un alambre localizado a 0.200 cm del centro del paquete? b) **¿Qué pasaría si?** Un alambre en el borde exterior del paquete ¿experimentaría una fuerza mayor o menor que el valor calculado en el inciso a)? Dé un argumento cualitativo a su respuesta.

28. Las bobinas magnéticas de un reactor de fusión tokamak tienen forma toroidal con un radio interno de 0.700 m y un radio externo de 1.30 m. El toroide tiene 900 vueltas de alambre de gran diámetro, cada una de las cuales lleva una corriente de 14.0 kA. Determine la magnitud del campo magnético en el interior del toroide a lo largo de a) el radio interno y b) el radio externo.

29. Considere una columna de corriente eléctrica que pasa a través de un plasma (gas ionizado). Los filamentos de corriente en el interior se atraen magnéticamente y se pueden apretar para crear una densidad de corriente muy grande en una región pequeña, así como un intenso campo magnético. A veces la corriente puede ser interrumpida momentáneamente gracias a este *efecto de constricción*. (En un alambre metálico el efecto de constricción no es importante, debido a que los electrones que conducen corriente se repelen mediante fuerzas eléctricas.) El efecto de constricción se puede demostrar haciendo que un recipiente de aluminio vacío conduzca una corriente grande paralela a su eje. Suponga que R representa el radio del recipiente e I la corriente hacia arriba, uniformemente distribuida en toda su pared curva. Determine el campo magnético a) justo en el interior de la pared y b) justo en el exterior. c) Determine la presión sobre la pared.

30. El niobio se convierte en un superconductor cuando es enfriado por debajo de 9 K. Su superconductividad se destruye cuando el campo magnético superficial excede de 0.100 T. Determine la corriente máxima que pueda llevar un alambre de niobio de 2.00 mm de diámetro y mantenerse como superconductor, en ausencia de cualquier campo magnético externo.

31. Un conductor cilíndrico largo de radio R lleva una corriente I, como se muestra en la figura P30.31. Sin embargo, la densidad de corriente J no es uniforme en toda la sección transversal del conductor, sino que es una función del radio según $J = br$, donde b es una constante. Determine la expresión para el campo magnético B a) a una distancia $r_1 < R$ y b) a una distancia $r_2 > R$, medida desde su eje.

Figura P30.31

32. En la figura P30.32, ambas corrientes en los alambres infinitamente largos son de 8.00 A en la dirección x negativa. Los alambres están separados por la distancia $2a = 6.00$ cm. a) Bosqueje el patrón de campo magnético en el plano yz. b) ¿Cuál es el valor del campo magnético en el origen? ¿En ($y = 0$, $z \to \infty$)? c) Encuentre el campo magnético en los puntos a lo largo del eje z como función de z. d) ¿A qué distancia d a lo largo del eje z positivo el campo magnético es un máximo? e) ¿Cuál es este valor máximo?

Figura P30.32

33. Una hoja infinita de corriente que yace en el plano yz porta una corriente superficial con densidad lineal J_s. La corriente es en la dirección y y J_s representa la corriente por unidad de longitud medida a lo largo del eje z. La figura P30.33 es una vista del borde de la hoja. Pruebe que el campo magnético cerca de la hoja es paralelo a la hoja y perpendicular a la dirección de la corriente, con magnitud $\mu_0 J_s/2$. *Sugerencia*: Use la ley de Ampère y evalúe la integral de línea para una trayectoria rectangular alrededor de la hoja, representada por la línea discontinua en la figura P30.33.

Figura P30.33

Sección 30.4 Campo magnético creado por un solenoide

34. ● Se le proporciona cierto volumen de cobre a partir del cual elabora alambre de cobre. Para aislar el alambre puede tener tanto esmalte como quiera. Usted usará el alambre para fabricar un solenoide firmemente devanado de 20 cm de largo que tenga el mayor campo magnético posible en el centro y usar una fuente de energía que pueda entregar una corriente de 5 A. El solenoide se puede enrollar con alambre en una o más capas. a) ¿Debe hacer el alambre largo y delgado, o más corto y grueso? Explique. b) ¿Debe hacer el radio del solenoide pequeño o grande? Explique.

35. ¿Qué corriente se requiere en los embobinados de un solenoide que tiene 1 000 vueltas distribuidas uniformemente en toda una longitud de 0.400 m, para producir en el centro del solenoide un campo magnético de magnitud 1.00×10^{-4} T?

36. Considere un solenoide de longitud ℓ y de radio R, que contiene N vueltas apretadas y que transporta una corriente estable I. a) En función de estos parámetros, determine el campo magnético en un punto a lo largo del eje como función de la distancia a desde el extremo del solenoide. b) Demuestre que conforme ℓ aumenta, B se acerca a $\mu_0 NI/2\ell$ en cada uno de los extremos del solenoide.

37. Una espira cuadrada de una sola vuelta, con 2.00 cm por lado, transporta una corriente en dirección de las manecillas del reloj de 0.200 A. La espira está en el interior de un solenoide, con el plano de la misma perpendicular al campo magnético del solenoide. El solenoide tiene 30 vueltas/cm y lleva una corriente en la dirección de las manecillas del reloj de 15.0 A. Determine la fuerza que se ejerce en cada lado de la espira y el momento de torsión que actúa sobre la misma.

38. Un solenoide de 10.0 cm de diámetro y 75.0 cm de largo está hecho de alambre de cobre de 0.100 cm de diámetro, con aislamiento muy delgado. El alambre se enrolla en un tubo de cartón en una sola capa, con vueltas adyacentes que se tocan mutuamente. ¿Qué potencia debe entregar al solenoide si debe producir un campo de 8.00 mT en su centro?

Sección 30.5 Ley de Gauss en el magnetismo

39. Un cubo con aristas de longitud $\ell = 2.50$ cm se coloca como se muestra en la figura P30.39. En la región existe un campo magnético uniforme conocido por la expresión $\vec{\mathbf{B}} = (5\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})$T. a) Calcule el flujo a través de la cara sombreada. b) ¿Cuál es el flujo total a través de las seis caras?

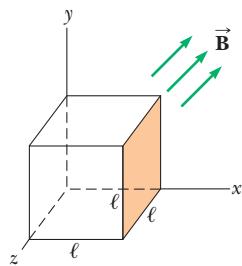



Figura P30.39

40. Considere la superficie hemisférica cerrada de la figura P30.40. El hemisferio está en un campo magnético uniforme que forma un ángulo θ con la vertical. Calcule el flujo magnético a través de a) la superficie plana S_1 y b) la superficie hemisférica S_2.

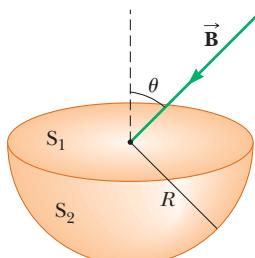



Figura P30.40

41. Un solenoide de 2.50 cm de diámetro y 30.0 cm de largo tiene 300 vueltas y transporta 12.0 A. a) Calcule el flujo a través de la superficie de un disco de radio de 5.00 cm colocado perpendicularmente a, y centrado en el eje del solenoide, como se muestra en la figura P30.41a. b) La figura P30.41b muestra una vista ampliada por el extremo del mismo solenoide. Calcule el flujo a través del área color azul, que está definida por un anillo de radio interno de 0.400 cm y de radio externo de 0.800 cm.

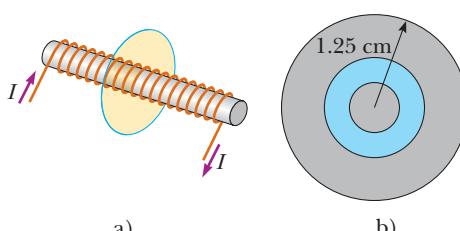



Figura P30.41

42. *Compare este problema con el problema 65 del capítulo 24.* Considere un campo magnético que sea uniforme en dirección en todas partes de cierto volumen. ¿Puede ser uniforme en magnitud? ¿Debe ser uniforme en magnitud? Proporcione evidencia para sus respuestas.

Sección 30.6 Magnetismo en la materia

43. En la *saturación*, cuando prácticamente todos los átomos tienen sus momentos magnéticos alineados, el campo magnético en una muestra de hierro puede ser de 2.00 T. Si cada electrón contribuye con un momento magnético de 9.27×10^{-24} A · m^2 (un magnetón de Bohr), ¿cuántos electrones por cada átomo contribuyen al campo saturado del hierro? El hierro contiene aproximadamente 8.50×10^{28} átomos/m^3.

Sección 30.7 Campo magnético de la Tierra

44. Una bobina circular de 5 vueltas y con un diámetro de 30.0 cm está orientada en un plano vertical con su eje perpendicular a la componente horizontal del campo magnético de la Tierra. Se coloca una brújula horizontal en el centro de la bobina y se desvía 45.0° del norte magnético cuando pasa una corriente de 0.600 A en la bobina. a) ¿Cuál es la componente horizontal del campo magnético de la Tierra? b) La corriente en la bobina se corta. Una "aguja de depresión" es una brújula magnética montada de manera que pueda girar en un plano vertical norte-sur. En esta ubicación, una aguja de depresión forma un ángulo de 13.0° con la vertical. ¿Cuál es la magnitud total del campo magnético de la Tierra en esta ubicación?

45. El momento magnético de la Tierra es de aproximadamente 8.00×10^{22} A · m^2. a) Imagine que el campo magnético planetario tuviera como causa la magnetización completa de un enorme depósito de hierro. ¿Cuántos electrones no apareados participarían? b) Con dos electrones no apareados por átomo de hierro, ¿cuántos kilogramos de hierro tendría el depósito? El hierro tiene una densidad de 7 900 kg/m^3 y aproximadamente 8.50×10^{28} átomos de hierro/m^3.

46. ● Una posición particular en la superficie de la Tierra se caracteriza por un valor de campo gravitacional, un valor de campo magnético y un valor de presión atmosférica. a) ¿Cuáles de estas cantidades son vectoriales y cuáles son escalares? b) Determine un valor para cada cantidad en su ubicación actual. Incluya la dirección de cada cantidad vectorial. Establezca sus fuentes. c) ¿Cuáles de estas cantidades tienen causas distintas de las otras?

Problemas adicionales

47. Una tira de metal delgada y muy larga con un ancho w lleva a todo lo largo una corriente I, como se muestra en la figura P30.47. Determine el campo magnético en el punto P del diagrama. El punto P está en el plano de la tira a una distancia b de ella.

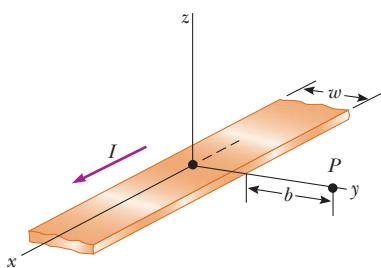



Figura P30.47

48. La magnitud del campo magnético de la Tierra en cualquiera de sus polos es aproximadamente de 7.00×10^{-5} T. Suponga que el campo se va desvaneciendo, antes de su próxima inversión. Exploradores, marineros y políticos conservacionistas alrededor del mundo se unen en un programa para reemplazar el campo. Un plan consiste en utilizar una espira de corriente alrededor del ecuador, sin apoyarse en la magnetización de cualquiera de los materiales en el interior de la Tierra. Determine la corriente que podría generar un campo con dichas características si el plan se llevara a cabo. Considere el radio de la Tierra como $R_E = 6.37 \times 10^6$ m.

49. Una barra delgada de cobre de longitud $\ell = 10.0$ cm es soportada horizontalmente por dos contactos (no magnéticos). La barra lleva una corriente $I_1 = 100$ A en la dirección $-x$, como se muestra en la figura P30.49. A una distancia $h = 0.500$ cm por debajo de un extremo de la barra, un alambre largo y recto conduce una corriente $I_2 = 200$ A en dirección z. Determine la fuerza magnética ejercida sobre la barra.

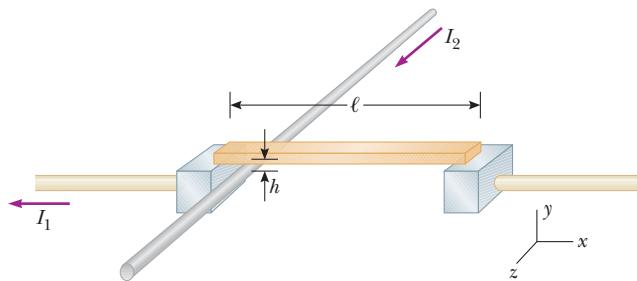



Figura P30.49

50. Suponga que instala una brújula en el centro del tablero de un automóvil. Estime el orden de magnitud de aproximación del campo magnético en esta posición, generado por la corriente presente cuando enciende los faros. ¿Cómo se compara esto con el campo magnético de la Tierra? Puede suponer que el tablero está hecho principalmente de plástico.

51. Un anillo no conductor con un radio de 10.0 cm está uniformemente cargado con una carga total positiva de 10.0 μC. El anillo gira a una rapidez angular constante de 20.0 rad/s alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del anillo. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético sobre el eje del anillo, a 5.00 cm de su centro?

52. Un anillo no conductor de radio R está uniformemente cargado con una carga total positiva q. El anillo gira con una rapidez angular constante ω alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del anillo. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético sobre el eje del anillo, a una distancia $R/2$ de su centro?

53. Dos bobinas circulares de radio R, cada una con N vueltas, son perpendiculares a un eje común. Los centros de las bobinas están separados una distancia R. Cada bobina lleva una corriente estable I en la misma dirección, como se muestra en la figura P30.53. a) Demuestre que el campo magnético sobre el eje a una distancia x del centro de la bobina es

$$B = \frac{N\mu_0 IR^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(2R^2 + x^2 - 2Rx)^{3/2}}\right]$$

b) Demuestre que dB/dx y d^2B/dx^2 son ambos iguales a cero en el punto medio entre las bobinas. Esto significa que el campo magnético a la mitad del camino entre las bobinas es uniforme. En esta configuración las bobinas se llaman *bobinas de Helmholtz*.

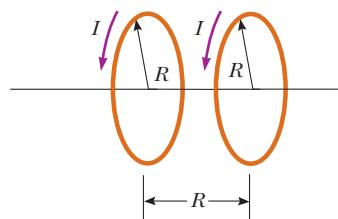



Figura P30.53 Problemas 53 y 54.

54. Dos bobinas de alambre idénticas, circulares y planas, tienen cada una 100 vueltas y un radio de 0.500 m. Las bobinas están organizadas como un juego de bobinas de Helmholtz (véase la figura P30.53), paralelas y separadas 0.500 m. Cada bobina conduce una corriente de 10.0 A. Determine la magnitud del campo magnético en un punto sobre el eje común de las bobinas y a la mitad del camino entre éstas.

55. Se ha visto que un solenoide largo produce un campo magnético uniforme dirigido a lo largo del eje de una región cilíndrica. Sin embargo, para producir un campo magnético uniforme dirigido paralelamente a un *diámetro* de una región cilíndrica, se pueden utilizar las *bobinas de desviación* que se ilustran en la figura P30.55. Las espiras están enrolladas sobre un tubo ligeramente aplanado. Suponga que los tramos rectos del alambre son muy largos. La vista desde un extremo del tubo muestra cómo están aplicados los embobinados. La distribución global de la corriente es la sobreposición de dos cilindros circulares traslapados de una corriente uniformemente distribuida, una hacia el lector y la otra alejándose. La densidad de corriente J es la misma en cada cilindro. La posición del eje de un cilindro está representada por un vector de posición $\vec{\mathbf{a}}$ en relación con el otro cilindro. Pruebe que el campo magnético en el interior del tubo hueco es $\mu_0 Ja/2$ hacia abajo. *Sugerencia:* Utilice métodos vectoriales para simplificar el cálculo.

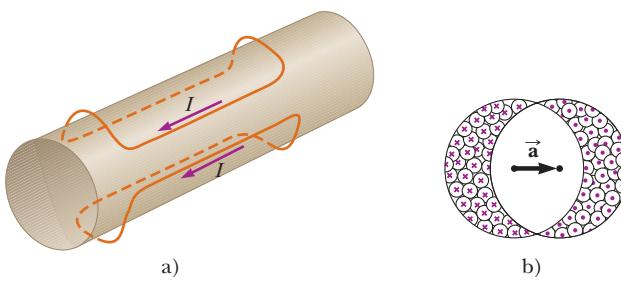



Figura P30.55

56. Puede usar el resultado del problema 33 para resolver este problema. Un capacitor de placas paralelas muy grandes lleva

una carga en la placa superior con una carga uniforme por unidad de área $+\sigma$ y $-\sigma$ en la placa inferior. Las placas están en posición horizontal y ambas se mueven horizontalmente con una rapidez v hacia la derecha. a) ¿Cuál es el campo magnético entre las placas? b) ¿Cuál es el campo magnético cerca de las placas pero fuera del capacitor? c) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza magnética por unidad de área en la placa superior? d) ¿A qué rapidez extrapolada v se equilibrará la fuerza magnética de una placa con la fuerza eléctrica en la misma? Calcule esta rapidez numéricamente.

57. ● Dos espiras circulares son paralelas, coaxiales, y están casi en contacto, con una separación de 1.00 mm (figura P30.57). Cada espira tiene 10.0 cm de radio. La espira superior conduce una corriente de 140 A en sentido de las manecillas del reloj. La inferior conduce una corriente también de 140 A, pero en el sentido opuesto. a) Calcule la fuerza magnética ejercida por la espira inferior sobre la superior. b) Considere que un estudiante piensa la primera etapa de solución del inciso a) al aplicar la ecuación 30.7 para hallar el campo magnético producido por una de las espiras. ¿Cómo debatiría en favor o en contra de esta idea? *Sugerencia:* Piense acerca de cómo se ve desde una espira a un insecto balanceado en la otra espira. c) La espira superior tiene una masa de 0.021 0 kg. Calcule su aceleración, suponiendo que las únicas fuerzas que actúan en ella son la fuerza en el inciso a) y la fuerza de gravedad.

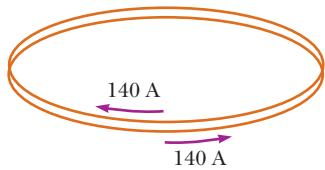



Figura P30.57

58. ¿Qué objetos experimentan una fuerza dentro de un campo eléctrico? En el capítulo 23 encuentra la respuesta: cualquier objeto con carga eléctrica, inmóvil o en movimiento, distinta de la que generó el campo. ¿Qué produce un campo eléctrico? Cualquier objeto con carga eléctrica, inmóvil o en movimiento, como se vio en el capítulo 23. ¿Qué objetos experimentan una fuerza en un campo magnético? Una corriente eléctrica o una carga eléctrica en movimiento, distinta de la corriente o a la carga que haya creado el campo, como se vio en el capítulo 29. ¿Qué produce un campo magnético? Una corriente eléctrica, como se vio en la sección 30.1, o una carga eléctrica en movimiento, como se muestra en este problema. a) Para comprender cómo una carga en movimiento crea un campo magnético, considere una carga q moviéndose a la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$. Defina el vector de posición $\vec{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}}$ conducido desde la carga hacia alguna ubicación. Demuestre que el campo magnético en dicha ubicación es

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

b) Determine la magnitud del campo magnético a 1.00 mm al lado de un protón que se mueve a 2.00×10^7 m/s. c) Determine la fuerza magnética sobre un segundo protón en el mismo punto, y que se mueve con la misma rapidez pero en dirección opuesta. d) Determine la fuerza eléctrica sobre el segundo protón.

59. El capítulo muestra al inicio una fotografía de un cañon de riel. Se han sugerido *los cañones de rieles* para el lanzamiento de proyectiles hacia el espacio sin necesidad de cohetes químicos y para lanzar antimisiles tierra-aire. Un modelo a escala del cañón de rieles (figura P30.59) está constituido por dos rieles largos paralelos separados 3.50 cm, atravesados por una barra *BD* con una masa de 3.00 g. La barra está originalmente en reposo en el punto medio de los rieles y se desliza libremente sin fricción. Cuando se cierra el interruptor, se establece rápidamente una corriente eléctrica en el circuito *ABCDEA*. Los rieles y la barra presentan una resistencia eléctrica baja, y la corriente queda limitada por la fuente de energía a 24.0 A constante. a) Determine la magnitud del campo magnético a 1.75 cm de un solo alambre recto muy largo que lleva una corriente de 24.0 A. b) Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto *C* en el diagrama, el punto medio de la barra, inmediatamente después de que se cierre el interruptor. *Sugerencia:* Considere las conclusiones que puede deducir de la ley de Biot-Savart. c) En otros puntos a lo largo de la barra *BD*, el campo está en la misma dirección que el punto *C*, pero es mayor en magnitud, suponga que el campo magnético efectivo promedio a lo largo de *BD* es cinco veces más grande que el campo en *C*. Con esta suposición, determine la magnitud y dirección de la fuerza sobre la barra. d) Determine la aceleración de la barra cuando está en movimiento. e) ¿La barra se mueve con aceleración constante? f) Determine la velocidad de la barra después de que recorra 130 cm hacia el extremo de los rieles.

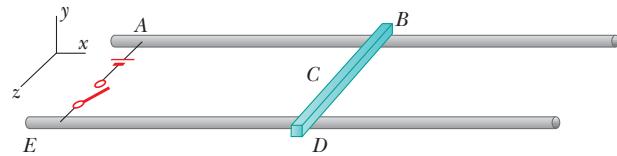



Figura P30.59

60. Se enrollan apretadamente 50 vueltas de alambre aislado de 0.100 cm de diámetro formando una espiral plana. La espiral llena un disco que está alrededor de un círculo con un radio de 5.00 cm y que se extiende a un radio de 10.00 cm en el borde externo. Suponga que el alambre lleva una corriente I en el centro de su sección transversal y que cada vuelta de alambre forma aproximadamente un círculo. En tal caso existe una espira de corriente de 5.05 cm de radio, otra con 5.15 cm, y así sucesivamente. Calcule numéricamente el campo magnético en el centro de la bobina.

61. Un alambre recto, infinitamente largo, que lleva una corriente I_1 se encuentra rodeado en forma parcial por una espira, como se muestra en la figura P30.61. La espira tiene una longitud L, un radio R y lleva una corriente I_2. El eje de la espira coincide con el del alambre. Calcule la fuerza ejercida sobre la espira.

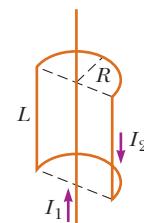



Figura P30.61

62. La fuerza sobre un dipolo magnético $\vec{\mu}$ alineado con un campo magnético no uniforme en la dirección x está dada por $F_x = |\vec{\mu}| dB/dx$. Suponga que dos espiras planas de alambre tienen cada una un radio R y llevan una corriente I. a) Las espiras están organizadas coaxialmente y separadas por una distancia variable x, grande en comparación con R. Demuestre que la fuerza magnética entre ellas varía en función de $1/x^4$. b) Evalúe la magnitud de esta fuerza cuando $I = 10.0$ A, $R = 0.500$ cm y $x = 5.00$ cm.

63. Un alambre se dobla en forma de un cuadrado con un costado de longitud L (figura P30.63). Demuestre que cuando la corriente en la espira es igual a I, el campo magnético en el punto P, a una distancia x del centro del cuadrado a lo largo de su eje, es

$$B = \frac{\mu_0 I L^2}{2\pi(x^2 + L^2/4)\sqrt{x^2 + L^2/2}}$$

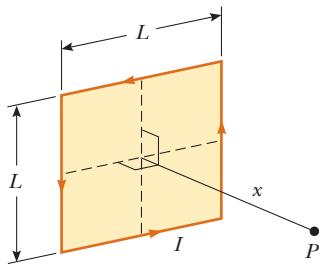



Figura P30.63

64. Un alambre que lleva una corriente I es doblado para formar una espira exponencial, $r = e^\theta$, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$, como se sugiere en la figura P30.64. Para cerrar la espira, los extremos se conectan mediante un alambre recto a lo largo del eje x. Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ en el origen. *Sugerencia:* utilice la ley de Biot-Savart. El ángulo β entre una línea radial y su tangente en cualquier punto de la curva $r = f(\theta)$ está relacionado con la función de la siguiente manera:

$$\tan \beta = \frac{r}{dr/d\theta}$$

Por lo tanto, en este caso $r = e^\theta$, $\tan \beta = 1$ y $\beta = \pi/4$. Así, el ángulo entre $d\vec{\mathbf{s}}$ y $\hat{\mathbf{r}}$ es $\pi - \beta = 3\pi/4$. Además,

$$ds = \frac{dr}{\text{sen}(\pi/4)} = \sqrt{2}\, dr$$

Figura P30.64

65. Una esfera de radio R tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Determine el campo magnético en el centro de la esfera cuando gira como objeto rígido con rapidez angular ω alrededor de un eje que pasa por su centro (figura P30.65).

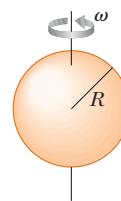



Figura P30.65 Problemas 65 y 66.

66. Una esfera de radio R tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Determine el momento dipolar magnético de la esfera cuando gira como cuerpo rígido con una rapidez angular ω alrededor de un eje que pasa por su centro (figura P30.65).

67. Un conductor cilíndrico largo de radio a tiene dos cavidades cilíndricas de diámetro a en toda su longitud, como se muestra en la figura P30.67. Se dirige una corriente I hacia afuera de la página y tiene un valor uniforme en toda la sección transversal del conductor. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en función de μ_0, I, r y a en a) el punto P_1 y b) en el punto P_2.

Figura P30.67

Respuestas a las preguntas rápidas

30.1 *B, C, A*. El punto *B* es el más cercano al elemento de corriente. El punto *C* es el más alejado y el campo queda reducido aún más por el factor sen θ en el producto cruz $d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}$. El campo en *A* es igual a cero porque $\theta = 0$.

30.2 a) Las bobinas actúan como alambres que llevan corrientes paralelas en la misma dirección y, por consecuencia, se atraen.

30.3 *b, d, a, c*. La ecuación 30.13 indica que el valor de la integral de línea depende sólo de la corriente neta que pasa a través de cada trayectoria cerrada. La trayectoria *b* encierra 1 A, la trayectoria *d* encierra 3 A, la trayectoria *a* encierra 4 A y la trayectoria *c* encierra 6 A.

30.4 *b*, por lo tanto $a = c = d$. Las trayectorias *a*, *c* y *d* dan todas el mismo valor distinto de cero $\mu_0 I$, porque el tamaño y la forma de las trayectorias carecen de importancia. La trayectoria *b* no encierra corriente, y en consecuencia su integral de línea es igual a cero.

30.5 c). El campo magnético en un solenoide muy largo es independiente de su longitud o radio. Cubierta de más con una capa adicional de alambre incrementa el número de espiras por cada unidad de longitud.

En una planta generadora de energía, gigantescos generadores producen energía que es transferida al exterior de la planta por transmisión eléctrica. Estos generadores utilizan la inducción magnética para producir una diferencia de potencial al girar las bobinas de alambre del generador en el interior de un campo magnético. La fuente de energía necesaria para que las bobinas giren puede provenir de una caída de agua, de la combustión de productos fósiles o de una reacción nuclear. (Michael Melford/Getty Images.)

31 Ley de Faraday

Hasta ahora el estudio sobre la electricidad y el magnetismo se ha concentrado a los campos eléctricos producidos por cargas fijas y a los campos magnéticos producidos por cargas en movimiento. Este capítulo explora los efectos causados por campos magnéticos que varían con el tiempo.

Los experimentos de Michael Faraday en Inglaterra en 1831 y los efectuados de forma independiente por Joseph Henry en Estados Unidos, ese mismo año, mostraron que es posible inducir una fem en un circuito utilizando un campo magnético variable. Los resultados de estos experimentos sirvieron como base para enunciar una ley básica y muy importante del electromagnetismo que se conoce como la *ley de la inducción de Faraday*. Una fem (y, por lo tanto, también una corriente) puede ser inducida en diferentes procesos que involucran un cambio en el flujo magnético.

Permiso cortesía del Presidente y del Consejo de la Royal Society.

MICHAEL FARADAY
Físico y químico inglés (1791-1867)
Faraday ha sido considerado a menudo el científico experimental más grande del siglo XIX. Sus innumerables contribuciones al estudio de la electricidad incluyen la invención del motor eléctrico, del generador eléctrico y del transformador, así como el descubrimiento de la inducción electromagnética y de las leyes de la electrólisis. Influido poderosamente por la religión, se negó a trabajar para las fuerzas armadas británicas en el desarrollo de gases venenosos.

31.1 Leyes de inducción de Faraday

A fin de poder observar cómo es posible inducir una fem debido a un campo magnético cambiante, considere una espira de alambre conectada a un amperímetro sensible, como se ilustra en la figura 31.1 (página 868). Cuando el imán se acerca a la espira, la lectura del amperímetro cambia desde cero en una dirección, que en la figura 31.1a se ha ilustrado de forma arbitraria con una desviación negativa. En cuanto se deja el imán en reposo y se le mantiene fijo en relación con la espira (figura 31.1b), se observa una lectura de

Figura 31.1

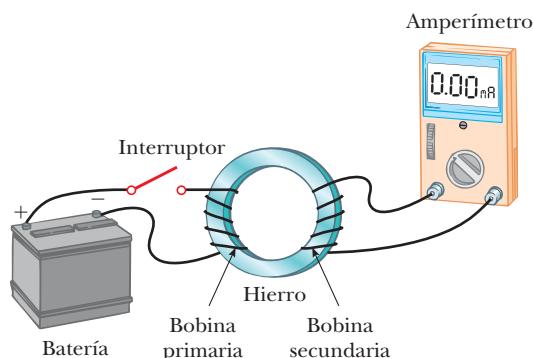
a) Cuando se mueve un imán hacia una espira de alambre conectada a un amperímetro sensible, su lectura cambia desde cero, lo que indica que se ha inducido una corriente en la espira. b) Cuando el imán se mantiene fijo, no existe corriente inducida en la espira, aun cuando el imán esté físicamente en el interior de la espira. c) Cuando el imán se mueve alejándose de la espira, la lectura del amperímetro se desvía en la dirección opuesta, lo que indica que la corriente inducida tiene dirección contraria a la que se muestra en el inciso a). Cuando se cambia la dirección del movimiento del imán, se cambia también la dirección de la corriente inducida por dicho movimiento.

cero. Cuando el imán es alejado de la espira, la lectura en el amperímetro cambia en la dirección opuesta, como se ve en la figura 31.1c. Por último, si el imán se mantiene fijo y la espira se mueve ya sea hacia el imán o en la dirección opuesta, la lectura cambia desde cero. A partir de estas observaciones, se concluye que la espira detecta que el imán se está moviendo respecto a la espira, y esta detección se correlaciona con un cambio en el campo magnético. Debido a eso, parece existir una correspondencia entre la corriente y un campo magnético cambiante.

Estos resultados son realmente notables porque **¡se establece una corriente a pesar de que no existe una batería presente en el circuito!** A esta corriente se le conoce como *corriente inducida,* y se dice que es producida por una *fem inducida.*

Ahora se describe un experimento conducido por Faraday, que se ilustra en la figura 31.2. Una bobina primaria se enrolla alrededor de un anillo de hierro, y se conecta a un interruptor y a una batería. Una corriente en la bobina produce un campo magnético al cerrarse el interruptor. Una bobina secundaria también está enrollada alrededor del anillo y se encuentra conectada a un amperímetro sensible. En el circuito secundario no hay batería alguna, y la bobina secundaria no está conectada eléctricamente con la bobina primaria. Cualquier corriente que se detecte en el circuito secundario deberá haber sido inducida por algún agente externo.

Inicialmente, se podría pensar que nunca podrá detectarse una corriente en el circuito secundario. Sin embargo, cuando se abre o se cierra el interruptor existente en el circuito primario, se presenta algo bastante asombroso. En el momento en que se cierra el interruptor, la lectura del amperímetro cambia de cero en una dirección y después regresa a cero. En el instante en que el interruptor se abre, el amperímetro cambia en la dirección opuesta y de nuevo vuelve a cero. Por último, el amperímetro marca cero cuando existe una corriente estable o no existe corriente en el circuito primario. La clave para comprender lo que está ocurriendo en este experimento es considerar que cuando el interruptor está cerrado, la corriente en el circuito primario genera un campo magnético que penetra en el circuito secundario. Además, cuando el interruptor está cerrado, el campo magnético producido por la corriente en el circuito primario cambia de cero hacia algún valor durante un tiempo finito, y este campo cambiante induce una corriente en el circuito secundario.

Como resultado de estas observaciones, Faraday concluyó que **es posible inducir una corriente eléctrica en una espira mediante un campo magnético cambiante.** La corriente inducida existe sólo mientras el campo magnético que pasa a través de la espira cambia. En cuanto el campo magnético alcanza un valor estable, la corriente en la espira secundaria desaparece. En efecto, la espira se comporta como si se hubiera conectado una fuente de fem durante un lapso breve. Es habitual decir que **una fem inducida se produce en la espira debido al campo magnético cambiante.**

Los experimentos mostrados en las figuras 31.1 y 31.2 tienen algo en común: en ambos casos se induce una fem en una espira cuando el flujo magnético a través de la espira cambia con el tiempo. En general, la fem es directamente proporcional a la rapidez de

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 31.1

Una fem inducida requiere de un cambio

La *existencia* de un flujo magnético a través de un área no es suficiente para producir una fem inducida. Es necesario que exista un *cambio* en el flujo magnético para inducir una fem.

Figura 31.2

Experimento de Faraday. Cuando se cierra el interruptor en el circuito primario, la lectura del amperímetro conectado en el circuito secundario cambia momentáneamente. La fem inducida en el circuito secundario es causada por el campo magnético cambiante a través de la bobina secundaria.

cambio con el tiempo del flujo magnético a través de la espira. Este enunciado, puede ser escrito matemáticamente como **ley de inducción de Faraday**

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{31.1}$$

◀ Ley de Faraday

donde $\Phi_B = \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ es el flujo magnético a través de la espira. (Véase la sección 30.5.)

Si una bobina construida de N espiras, con la misma área, y Φ_B es el flujo magnético a través de una espira, se induce una fem en todas las espiras. Las espiras están en serie, por lo que sus fem se suman; debido a eso, la fem total inducida en la bobina se conoce por la expresión

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{31.2}$$

El signo negativo que aparece en las ecuaciones 31.1 y 31.2 es de un significado físico de importancia, como se explica en la sección 31.3.

Suponga que una espira que encierra una superficie A se encuentra en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$, como se ve en la figura 31.3. El flujo magnético a través de la espira es igual a BA cos θ; por esto, la fem inducida puede expresarse como

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta) \tag{31.3}$$

Figura 31.3 Espira conductora que encierra un área A en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. El ángulo formado entre $\vec{\mathbf{B}}$ y la normal a la espira es θ.

A partir de esta expresión observe que una fem puede ser inducida en el circuito de varias formas:

- La magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ cambia con el tiempo.
- El área encerrada por la espira cambia con el tiempo.
- El ángulo θ existente entre $\vec{\mathbf{B}}$ y la normal a la espira puede cambiar con el tiempo.
- Cualquier combinación puede presentarse de lo anterior.

Pregunta rápida 31.1 Una espira de alambre circular está en un campo magnético uniforme con el plano de la espira perpendicular a las líneas de campo. ¿Cuál de los siguientes casos *no* causará la inducción de una corriente en la espira? a) Si se aplasta la espira; b) si se gira la espira respecto a un eje perpendicular a las líneas de campo; c) conservando fija la orientación de la espira y moviéndola a lo largo de dichas líneas; d) retirando la espira fuera del campo.

Algunas aplicaciones de la ley de Faraday

El interruptor por fallas a tierra (GFI, por sus siglas en inglés) es un dispositivo de seguridad interesante que protege a los usuarios de aparatos electrodomésticos contra descargas eléctricas. Su operación utiliza la ley de Faraday. En el GFI que se muestra en la figura 31.4, el alambre 1 se dirige de la toma de energía en la pared al aparato electrodoméstico que se va a proteger y el alambre 2 se dirige del aparato electrodoméstico de regreso a la toma de corriente en la pared. En una sección del anillo de hierro que rodea ambos alambres se ha enrollado una bobina de detección. Ya que las corrientes en los alambres están en direcciones opuestas y de igual magnitud, no hay campo magnético alrededor de los alambres y el flujo magnético neto a través de la bobina detectora es igual a cero. Sin embargo, si la corriente de vuelta en el alambre 2 cambia, es decir, si las dos corrientes no son iguales, las líneas del campo magnético existen alrededor del par de alambres. (Esto puede ocurrir, por ejemplo, si el aparato electrodoméstico se moja, permitiendo que se fugue una corriente a tierra.) En consecuencia, el flujo magnético neto a través de la bobina sensible no es más de cero. Puesto que la corriente doméstica es corriente alterna (significa, que su dirección se está invirtiendo de manera continua), el flujo magnético a través de la bobina detectora cambia con el tiempo, induciendo en ésta una fem. Esta fem inducida se utiliza para disparar un cortacircuitos que corta la corriente antes de que alcance un nivel peligroso.

Figura 31.4 Componentes esenciales de un interruptor por fallas a tierra.

Otra aplicación interesante de la ley de Faraday es el sonido que produce una guitarra eléctrica. La bobina en este caso, que se llama *bobina captadora*, se coloca cerca de la cuerda

Figura 31.5 a) En una guitarra eléctrica una cuerda magnetizada en vibración induce una fem en una bobina captadora. b) Las bobinas captadoras (los círculos que aparecen por debajo de las cuerdas metálicas) de esta guitarra eléctrica, detectan las vibraciones de las cuerdas y envían esta información a través de un amplificador a los altavoces. (Un interruptor en la guitarra permite al ejecutante seleccionar el conjunto de las seis bobinas captadoras que se van a utilizar.)

de la guitarra vibrante, que está fabricada con un metal magnetizable. Un imán permanente en el interior de la bobina magnetiza la porción de la cuerda más cercana a ella (figura 31.5a). Cuando la cuerda vibra con cierta frecuencia, su segmento magnetizado produce un flujo magnético cambiante a través de la bobina. Este flujo cambiante induce una fem en la bobina que alimenta a un amplificador. La salida del amplificador se envía a los altavoces, que producen las ondas sonoras que escucha.

EJEMPLO 31.1 Inducción de una fem en una bobina

Una bobina constituida de 200 vueltas de alambre. Cada vuelta es un cuadrado de lado d = 18 cm y se establece un campo magnético uniforme en dirección perpendicular al plano de la bobina. Si el campo cambia linealmente de 0 a 0.50 T en 0.80 s, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida en la bobina mientras el campo varía?

SOLUCIÓN

Conceptualizar A partir de la descripción en el problema, imagine que líneas de campo magnético pasan a través de la bobina. Ya que el campo magnético cambia en magnitud, en la bobina se induce una fem.

Categorizar Se evaluará la fem usando la ley de Faraday de esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la ecuación 31.2 para la situación descrita en esta caso, y observe que el campo magnético cambia linealmente con el tiempo:

$$|\mathcal{E}| = N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = N\frac{\Delta(BA)}{\Delta t} = NA\frac{\Delta B}{\Delta t} = Nd^2\frac{B_f - B_i}{\Delta t}$$

Sustituya valores numéricos:

$$|\mathcal{E}| = (200)(0.18\text{ m})^2\frac{(0.50\text{ T} - 0)}{0.80\text{ s}} = 4.0\text{ V}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si se le pidiera encontrar la magnitud de la corriente inducida en la bobina mientras el campo varía? ¿Puede responder a esta pregunta?

Respuesta Si los extremos de la bobina no están conectados a un circuito, la respuesta a esta pregunta es sencilla: ¡la corriente es cero! (Las cargas se mueven dentro del alambre de la bobina, pero no se pueden mover adentro o afuera de los extremos de la bobina.) Para que exista una corriente estable, los extremos de la bobina se deben conectar a un circuito externo. Suponga que la bobina se conecta a un circuito y que la resistencia total de la bobina y el circuito es de 2.0 Ω. Entonces la corriente en la bobina es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{4.0\text{ V}}{2.0\ \Omega} = 2.0\text{ A}$$

EJEMPLO 31.2 **Campo B que decae exponencialmente**

Una espira de alambre que encierra un área A se coloca en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. La magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $B = B_{\text{máx}}e^{-at}$, donde a es alguna constante. Es decir: en $t = 0$, el campo es $B_{\text{máx}}$, y para $t > 0$, el campo disminuye exponencialmente (figura 31.6). Encuentre la fem inducida en la espira como función del tiempo.

Figura 31.6 (Ejemplo 31.2) Disminución exponencial en la magnitud del campo magnético con el tiempo. La fem inducida y la corriente inducida varían con el tiempo en la misma forma.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La situación física es similar a la del ejemplo 31.1, excepto por dos cosas: existe únicamente una espira y el campo varía exponencialmente con el tiempo en lugar de linealmente.

Categorizar Se evaluará la fem mediante la ley de Faraday de esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la ecuación 31.1 para la situación descrita en este caso:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(AB_{\text{máx}}e^{-at}) = -AB_{\text{máx}}\frac{d}{dt}e^{-at} = aAB_{\text{máx}}e^{-at}$$

Esta expresión indica que la fem inducida decae exponencialmente en el tiempo. La fem máxima se presenta en $t = 0$, donde $\mathcal{E}_{\text{máx}} = aAB_{\text{máx}}$. La gráfica de $\mathcal{E}$ en función de t es similar a la curva B en comparación con t que se muestra en la figura 31.6.

31.2 Fem de movimiento

En los ejemplos 31.1 y 31.2 se consideran casos en los que se induce una fem en un circuito estacional colocado en un campo magnético, el cual cambia con el tiempo. En esta sección, se describe la **fem de movimiento**, que es la fem inducida en un conductor en movimiento a través de un campo magnético constante.

El conductor recto de longitud ℓ que se muestra en la figura 31.7 se mueve a través de un campo magnético uniforme dirigido hacia el interior de la página. Por simplicidad, suponga que el conductor es móvil en una dirección perpendicular al campo con una velocidad constante bajo la influencia de algún agente externo. Los electrones en el conductor experimentan una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ que está dirigida a lo largo de la longitud ℓ, perpendicularmente tanto a $\vec{\mathbf{v}}$ como a $\vec{\mathbf{B}}$ (ecuación 29.1). Bajo la influencia de esta fuerza, los electrones se mueven hacia el extremo inferior del conductor, en donde se acumulan, dejando una carga positiva neta en el extremo superior. Como resultado de esta separación de cargas, se produce un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ dentro del conductor. Las cargas se acumulan en ambos extremos hasta que la fuerza magnética qvB dirigida hacia abajo sobre las cargas que quedan en el conductor se equilibran por la fuerza eléctrica qE hacia arriba. Esta condición de equilibrio requiere que las fuerzas sobre los electrones se equilibren

$$qE = qvB \quad \text{o} \quad E = vB$$

El campo eléctrico que se produce en el conductor está relacionado con la diferencia de potencial a través de los extremos del conductor, de acuerdo con la correspondencia $\Delta V = E\ell$ (véase ecuación 25.6). Entonces, para la condición de equilibrio,

$$\Delta V = E\ell = B\ell v \tag{31.4}$$

donde el extremo superior del conductor en la figura 31.7 está con un potencial eléctrico más elevado que el extremo inferior. En consecuencia, **se mantiene una diferencia de potencial entre los extremos del conductor siempre que éste se siga moviendo a través del campo magnético uniforme**. Si se invierte la dirección del movimiento, también se invierte la polaridad de la diferencia de potencial.

Una situación más interesante se presenta cuando el conductor en movimiento forma parte de una trayectoria de conducción cerrada. Esta situación es de utilidad particular para ilustrar cómo el flujo magnético cambiante origina una corriente inducida en un

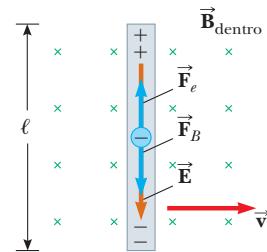



Figura 31.7 Conductor eléctrico recto de longitud ℓ que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ a través de un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ con dirección perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$. Debido a la fuerza magnética ejercida sobre los electrones, los extremos del conductor se cargan con cargas opuestas y establecen un campo eléctrico en el conductor. En estado estable, las fuerzas eléctricas y magnéticas sobre un electrón presente en el alambre están en equilibrio.

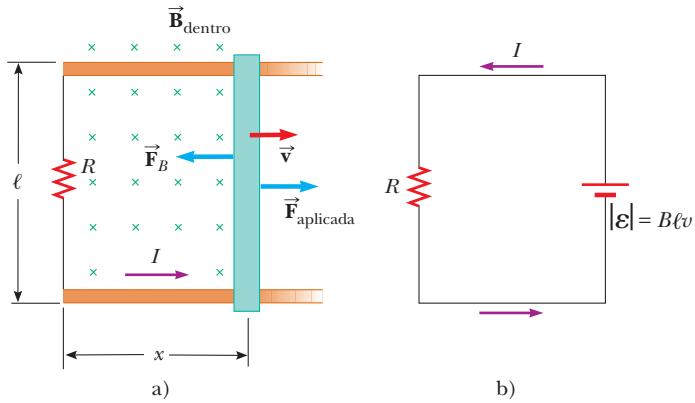



Figura 31.8

a) Barra conductora que se desliza con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ a lo largo de dos rieles conductores bajo la acción de la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$. La fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}_B$ se opone al movimiento y se induce una corriente en dirección contraria a las manecillas del reloj I en la espira. b) El diagrama de circuito equivalente para el arreglo se muestra en el inciso a).

circuito cerrado. Considere un circuito constituido por una barra conductora de longitud ℓ que se desliza a lo largo de dos rieles conductores paralelos fijos, como se muestra en la figura 31.8a. Por simplicidad, suponga que la barra tiene una resistencia igual a cero y que la parte fija del circuito tiene una resistencia R. Se aplica un campo magnético uniforme y constante $\vec{\mathbf{B}}$ perpendicular al plano del circuito. Conforme se mueve la barra hacia la derecha con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ bajo la influencia de una fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$, las cargas libres en la barra experimentan una fuerza magnética dirigida a lo largo de su longitud. Esta fuerza establece una corriente inducida, ya que las cargas tienen la libertad para moverse en la trayectoria conductora cerrada. En este caso, la rapidez de cambio del flujo magnético a través del circuito y la fem de movimiento correspondiente inducida en la barra en movimiento son proporcionales al cambio de área del circuito.

Dado que en cualquier instante el área encerrada por el circuito es igual a ℓx, donde x es la posición de la barra, el flujo magnético a través de dicha área es

$$\Phi_B = B\ell x$$

Al utilizar la ley de Faraday y observar que x cambia con el tiempo con una rapidez de $dx/dt = v$, encuentre que la fem de movimiento inducida es igual a

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell\frac{dx}{dt}$$

Fem de movimiento ▶

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -B\ell v \quad \textbf{(31.5)}$$

En vista de que la resistencia en el circuito es R, la magnitud de la corriente inducida es

$$I = \frac{|\boldsymbol{\mathcal{E}}|}{R} = \frac{B\ell v}{R} \quad \textbf{(31.6)}$$

En la figura 31.8b aparece el diagrama de circuito equivalente correspondiente a este ejemplo.

Ahora examine el sistema bajo consideraciones energéticas. Ya que el circuito no tiene batería, podría preguntar cuál es el origen de la corriente inducida y de la energía entregada al resistor. Es posible comprender el origen de esta corriente y energía al advertir que la fuerza aplicada realiza trabajo sobre la barra conductora. Por lo tanto, modele el circuito como un sistema no aislado. El movimiento de la barra a través del campo hace que las cargas se muevan a lo largo de la barra con cierta velocidad de arrastre promedio, por eso, se establece una corriente. El cambio en energía en el sistema durante cierto intervalo de tiempo debe ser igual a la transferencia de energía hacia el sistema mediante el trabajo, lo que es consistente con el principio general de conservación de energía descrito por la ecuación 8.2.

Verifique lo anterior en términos matemáticos. Conforme la barra se mueve a través de un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$, experimenta una fuerza magnética $\vec{\mathbf{F}}_B$ de magnitud $I\ell B$ (véase la sección 29.4). Ya que la barra se mueve con una velocidad constante se modela como una partícula en equilibrio y la fuerza magnética debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza aplicada, o a la izquierda en la figura 31.8a. (Si $\vec{\mathbf{F}}_B$ actuara en la dirección del movimiento, haría que la barra se acelere, lo que es una violación del principio de conservación de energía). A partir la ecuación 31.6 y de que F_{aplicada} $F_B = I\ell B$, encontramos que la potencia entregada por la fuerza aplicada es igual a

$$\mathcal{P} = F_{\text{aplicada}}\, v = (I\ell B)v = \frac{B^2\ell^2 v^2}{R} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}^2}{R} \qquad \textbf{(31.7)}$$

Por la ecuación 27.21, esta potencia de entrada es igual a la rapidez a la cual se entrega energía al resistor.

Pregunta rápida 31.2 En la figura 31.8a, una cierta fuerza aplicada de magnitud F_{aplicada} resulta en una rapidez constante v y una potencia de entrada $\mathcal{P}$. Imagine que se incrementa la fuerza de forma que la rapidez constante de la barra se duplica hasta $2v$. Bajo estas condiciones, cuáles son la fuerza y la potencia de entrada nuevas: a) $2F$ y $2\mathcal{P}$, b) $4F$ y $2\mathcal{P}$, c) $2F$ y $4\mathcal{P}$ y d) $4F$ y $4\mathcal{P}$.

EJEMPLO 31.3 Fuerza magnética que actúa sobre una barra deslizante

La barra conductora ilustrada en la figura 31.9 se mueve sobre dos rieles paralelos sin fricción en presencia de un campo magnético uniforme dirigido hacia la página. La barra tiene masa m y su longitud es ℓ. A la barra se le da una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ hacia la derecha y se libera en $t = 0$.

Figura 31.9 (Ejemplo 31.3) A una barra conductora de longitud ℓ sobre dos rieles conductores fijos se le da una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ hacia la derecha.

A) Con las leyes de Newton encuentre la velocidad de la barra como función del tiempo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conforme la barra se desliza hacia la derecha (en la figura 31.9) en el circuito, que consiste en la barra, los rieles y el resistor, se establece una corriente en sentido contrario al de las manecillas del reloj. La corriente hacia arriba en la barra resulta en una fuerza magnética hacia la izquierda sobre la barra, como se muestra en la figura. Por lo tanto, la barra debe frenar, de modo que la solución matemática debe demostrar esto.

Categorizar El texto clasifica este problema como uno apropiado para el uso de las leyes de Newton. Modele la barra como una partícula bajo una fuerza neta.

Analizar A partir de la ecuación 29.10, la fuerza magnética es $F_B = -I\ell B$, donde el signo negativo indica que la fuerza es hacia la izquierda. La fuerza magnética es la *única* fuerza horizontal que actúa sobre la barra.

Aplique la segunda ley de Newton a la barra en la dirección horizontal:

$$F_x = ma = m\frac{dv}{dt} = -I\ell B$$

Sustituya $I = B\ell v/R$ de la ecuación 31.6:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2\ell^2}{R}v$$

Reordene la ecuación de modo que todos los casos de la variable v estén a la izquierda y los de t estén a la derecha:

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)dt$$

Integre esta ecuación usando la condición inicial $v = v_i$ en $t = 0$ y observe que $(B^2\ell^2/mR)$ es una constante:

$$\int_{v_i}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_i}\right) = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)t$$

Defina la constante $\tau = mR/B^2\ell^2$ y resuelva para la velocidad:

$$1) \quad v = v_i e^{-t/\tau}$$

Finalizar Esta expresión para v indica que la velocidad de la barra disminuye con el tiempo bajo la acción de la fuerza magnética, como se esperaba a partir de la conceptualización del problema.

B) Demuestre que se encuentra el mismo resultado al usar un planteamiento energético.

SOLUCIÓN

Categorizar El texto de esta parte del problema pide usar un planteamiento energético para la misma situación. Todo el circuito de la figura 31.9 se modela como un sistema aislado.

Finalizar Considere la barra deslizante como un componente del sistema que posee energía cinética, que disminuye porque se transfiere energía *afuera* de la barra mediante transmisión eléctrica a través de los rieles. El resistor es otro componente del sistema que posee energía interna, que se eleva porque se transfiere energía *al* resistor. Ya que la energía no sale del sistema, la rapidez de transferencia de energía afuera de la barra es igual a la rapidez de transferencia de energía al resistor.

Iguale la potencia que entra al resistor con la que sale de la barra:

$$\mathcal{P}_{\text{resistor}} = -\mathcal{P}_{\text{bar}}$$

Sustituya para la potencia eléctrica entregada al resistor y la relación de cambio en el tiempo de energía cinética para la barra:

$$I^2R = -\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$$

Use la ecuación 31.6 para la corriente y realice la derivada:

$$\frac{B^2\ell^2v^2}{R} = -mv\frac{dv}{dt}$$

Reordene términos:

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)dt$$

Finalizar Este resultado es la misma expresión que se encontró en el inciso A).

¿Qué pasaría si? Suponga que quiere aumentar la distancia a través de la cual la barra se mueve entre el tiempo que inicialmente se proyecta y el tiempo cuando en esencia llega al reposo. Puede hacer esto al cambiar una de tres variables: v_i, R o B por un factor de 2 o $\frac{1}{2}$. ¿Cuál variable debe cambiar para maximizar la distancia, y la duplicaría o la reduciría a la mitad?

Respuesta Aumentar v_i haría que la barra se moviera más lejos. Incrementar R reduciría la corriente y por tanto la fuerza magnética, lo que haría que la barra se moviera más lejos. Reducir B reduciría la fuerza magnética y haría que la barra se moviera más lejos. Sin embargo, ¿cuál método es el más efectivo?

Use la ecuación 1) para encontrar por integración la distancia que la barra se mueve:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_i e^{-t/\tau}$$

$$x = \int_0^\infty v_i e^{-t/\tau}\,dt = -v_i \tau e^{-t/\tau}\Big|_0^\infty$$

$$= -v_i\tau(0-1) = v_i\tau = v_i\left(\frac{mR}{B^2\ell^2}\right)$$

Esta expresión demuestra que duplicar v_i o R duplicará la distancia. No obstante, cambiar B en un factor de $\frac{1}{2}$, ¡hace que la distancia sea cuatro veces mayor!

EJEMPLO 31.4 Fem de movimiento inducida en una barra giratoria

Una barra conductora de longitud ℓ da vueltas con una rapidez angular constante ω en torno a un pivote en un extremo. Un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ se dirige perpendicular al plano de rotación, como se muestra en la figura 31.10. Encuentre la fem de movimiento inducida entre los extremos de la barra.

Figura 31.10 (Ejemplo 31.4) Una barra conductora gira en torno a un pivote en un extremo en un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano de rotación. Una fem de movimiento se induce a través de los extremos de la barra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La barra giratoria es diferente en naturaleza a la barra deslizante en la figura 31.8. Sin embargo, considere un pequeño segmento de la barra. Se trata de una longitud corta de conductor en movimiento en un campo magnético que tiene una fem generada en ella. Al pensar en cada pequeño segmento como una fuente de fem, se ve que todos los segmentos están en serie y las fem se suman.

Categorizar En términos de la conceptualización del problema, este ejemplo se plantea como en el ejemplo 31.3, con la característica añadida de que los segmentos cortos de la barra viajan en trayectorias circulares.

Analizar Evalúe la magnitud de la fem inducida en un segmento de la barra de longitud dr que tenga una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ a partir de la ecuación 31.5:

$$d\mathcal{E} = Bv\,dr$$

Encuentre la fem total entre los extremos de la barra al sumar las fem inducidas a través de todos los segmentos:

$$\mathcal{E} = \int Bv\,dr$$

La rapidez tangencial v de un elemento se relaciona con la rapidez angular ω mediante la correspondencia $v = r\omega$ (ecuación 10.10); use ese hecho e integre:

$$\mathcal{E} = B\int v\,dr = B\omega\int_0^{\ell} r\,dr = \boxed{\tfrac{1}{2}B\omega\ell^2}$$

Finalizar En la ecuación 31.5 para una barra deslizante se puede aumentar $\mathcal{E}$ al aumentar B, ℓ o v. Incrementar cualquiera de estas variables por un factor determinado aumenta $\mathcal{E}$ por el mismo factor. Por lo tanto, usted elegiría cualquiera de estas tres variables que sea la más conveniente de aumentar. Sin embargo, para la barra giratoria, hay una ventaja al aumentar la longitud de la barra para elevar la fem, porque ℓ es al cuadrado. Duplicar la longitud le da cuatro veces la fem, mientras que duplicar la rapidez angular sólo duplica la fem.

¿Qué pasaría si? Suponga, después de leer este ejemplo, que da con una brillante idea. Una rueda de la fortuna tiene rayos metálicos entre el centro y el borde circular. Estos rayos se mueven en el campo magnético de la Tierra, de modo que cada rayo actúa como la barra en la figura 31.10. Planea usar la fem generada por la rotación de la rueda de la fortuna para activar los focos de la rueda. ¿Funcionará esta idea?

Respuesta Estime la fem que se genera en esta situación. A partir de la tabla 29.1 se conoce la magnitud del campo magnético de la Tierra: $B = 0.5 \times 10^{-4}$ T. Un rayo representativo de una rueda de la fortuna puede tener una longitud del orden de 10 m. Suponga que el periodo de rotación es del orden de 10 s.

Determine la rapidez angular del rayo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10\text{ s}} = 0.63\text{ s}^{-1} \sim 1\text{ s}^{-1}$$

Suponga que las líneas del campo magnético de la Tierra son horizontales en la ubicación de la rueda de la fortuna y perpendiculares a los rayos. Encuentre la fem generada:

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}B\omega\ell^2 = \tfrac{1}{2}(0.5 \times 10^{-4}\text{ T})(1\text{ s}^{-1})(10\text{ m})^2$$
$$= 2.5 \times 10^{-3}\text{ V} \sim 1\text{ mV}$$

Este valor es una fem diminuta, mucho más pequeña que la requerida para operar las lámparas.

Una dificultad adicional se relaciona con la energía. Incluso si supone que puede encontrar lámparas que operen usando una diferencia de potencial del orden de milivolts, un rayo debe ser parte de un circuito para proporcionar un voltaje a las lámparas. En consecuencia, el rayo debe portar una corriente. Ya que este rayo portador de corriente está en un campo magnético, sobre el rayo se ejerce una fuerza magnética en la dirección opuesta a su dirección de movimiento.

Como resultado, el motor de la rueda de la fortuna debe suministrar más energía para realizar trabajo contra esta fuerza de arrastre magnético. A final de cuentas, el motor debe proporcionar la energía que opere las lámparas, ¡y usted no ha ganado nada de manera gratuita!

31.3 Ley de Lenz

La ley de Faraday (ecuación 31.1) indica que la fem inducida y el cambio en el flujo tienen signos algebraicos opuestos. Lo anterior tiene una interpretación física muy real que ha llegado a ser conocida como la **ley de Lenz:**[1]

Ley de Lenz ▶

> La corriente inducida en una espira está en la dirección que crea un campo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético en el área encerrada por la espira.

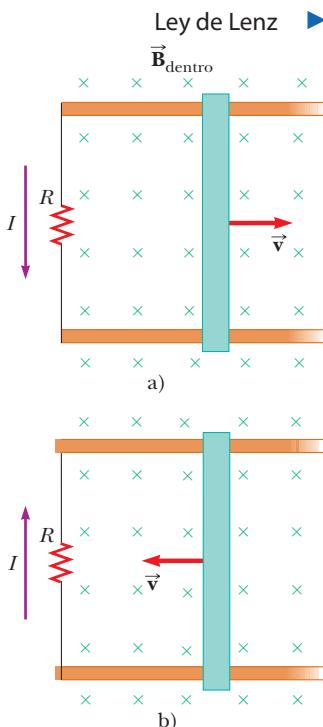



Figura 31.11 a) Mientras la barra conductora se desliza sobre los dos rieles conductores fijos, el flujo magnético debido al campo magnético externo dirigido hacia la página a través del área encerrada por la espira aumenta con el transcurso del tiempo. Según la ley de Lenz, la corriente inducida debe estar en dirección contraria a las manecillas del reloj para producir un campo magnético contrarrestante dirigido hacia afuera de la página. b) Cuando la barra se mueve hacia la izquierda, la corriente inducida debe moverse en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Por qué?

Es decir, la corriente inducida tiende a mantener el flujo magnético original a través de la espira por alteración. Ahora se demostrará que esta ley es una consecuencia de la ley de conservación de energía.

Para comprender la ley de Lenz, considere el ejemplo de la barra que se mueve hacia la derecha sobre dos rieles paralelos en presencia de un campo magnético uniforme (el campo magnético *externo*, figura 31.11a). Conforme se mueve la barra hacia la derecha el flujo magnético a través del área encerrada por el circuito se incrementa con el tiempo ya que el área aumenta. La ley de Lenz establece que la corriente inducida debe estar dirigida de forma que el campo magnético que produzca se oponga al cambio en el flujo magnético externo. Ya que el flujo magnético debido a un campo externo dirigido hacia adentro de la página está en aumento, la corriente inducida, si ha de oponerse a este cambio, debe producir un campo dirigido hacia el exterior de la página. En consecuencia, la corriente inducida debe dirigirse en dirección opuesta a las manecillas del reloj cuando la barra se mueve hacia la derecha. (Utilice la regla de la mano derecha para verificar esta dirección.) Si la barra se mueve hacia la izquierda, como en la figura 31.11b, el flujo magnético externo a través del área encerrada por la espira se reduce con el transcurso del tiempo. Ya que el campo está dirigido hacia la página, la dirección de la corriente inducida deberá estar en sentido de las manecillas del reloj si ha de producir un campo que también quede dirigido hacia la página. En cualquiera de los casos, la corriente inducida tiende a mantener el flujo original a través del área encerrada por la espira de corriente.

Ahora examine esta situación a partir de consideraciones de energía. Suponga que a la barra se le da un ligero impulso hacia la derecha. En la explicación anterior, se encontró que este movimiento establece una corriente en la espira en dirección contraria a las manecillas del reloj. ¿Qué pasaría si supone que la corriente está en la dirección de las manecillas del reloj, de forma que la dirección de la fuerza magnética que se ejerce sobre la barra esté dirigida hacia la derecha? Esta fuerza aceleraría la barra e incrementaría su velocidad, lo que a su vez haría que el área encerrada por la espira se incrementara con mayor rapidez, lo cual daría como resultado un incremento en la corriente inducida, provocando un incremento en la fuerza, lo que a su vez produciría un incremento en la corriente, y así sucesivamente. De hecho, el sistema estaría adquiriendo energía sin ninguna entrada de la misma. Sin duda este comportamiento es inconsistente con todas las experiencias y viola la ley de la conservación de la energía. Por lo tanto, la corriente debe ir en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Pregunta rápida 31.3 La figura 31.12 muestra una espira redonda de alambre que cae hacia un alambre que conduce corriente hacia la izquierda. La dirección de la corriente inducida en la espira es a) en sentido de las manecillas del reloj, b) opuesta a las manecillas del reloj, c) cero, d) imposible de determinar.

Figura 31.12 (Pregunta rápida 31.3)

[1] Desarrollada por el físico alemán Heinrich Lenz (1804-1865).

EJEMPLO CONCEPTUAL 31.5 Aplicación de la ley de Lenz

Se coloca un imán cerca de una espira metálica, como se muestra en la figura 31.13a.

A) Encuentre la dirección de la corriente inducida en la espira cuando el imán se empuja hacia la espira.

SOLUCIÓN

Conforme el imán se mueve a la derecha, hacia la espira, el flujo magnético externo a través de la espira aumenta con el tiempo. Para contrarrestar este aumento en flujo debido a un campo hacia la derecha, la corriente inducida produce su propio campo magnético hacia la izquierda, como se ilustra en la figura 31.13b; por eso, la corriente inducida está en la dirección que se muestra. Al saber que polos magnéticos similares se repelen, se concluye que la cara izquierda de la espira de corriente actúa como un polo norte y la cara derecha actúa como un polo sur.

B) Encuentre la dirección de la corriente inducida en la espira cuando el imán se aleja de la espira.

SOLUCIÓN

Si el imán se mueve hacia la izquierda, como en la figura 31.13c, su flujo a través del área encerrada por la espira disminuye en el tiempo. Ahora la corriente inducida en la espira está en la dirección que se muestra en la figura 31.13d porque esta dirección de corriente produce un campo magnético en la misma dirección que el campo externo. En este caso, la cara izquierda de la espira es un polo sur y la cara derecha es un polo norte.

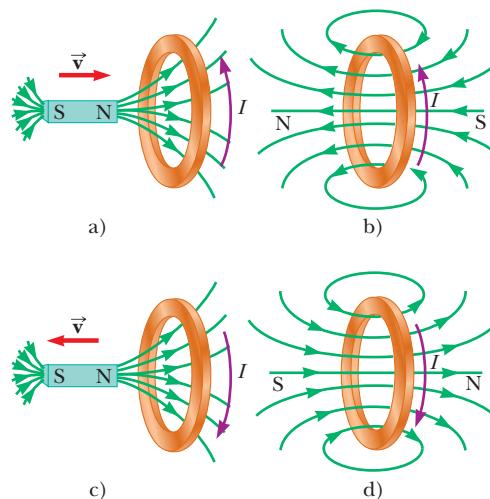



Figura 31.13 (Ejemplo conceptual 31.5) a) Cuando el imán se mueve hacia la espira conductora estacionaria, se induce una corriente en la dirección que se muestra. Las líneas de campo magnético mostradas se deben al imán de barra. b) Esta corriente inducida produce su propio campo magnético dirigido hacia la izquierda, que contrarresta el creciente flujo externo. Las líneas de campo magnético que se muestran se deben a la corriente inducida en el anillo. c) Cuando el imán se mueve alejándose de la espira conductora estacionaria, se induce una corriente en la dirección que se muestra. Las líneas de campo magnético que se muestran son debidas al imán de barra. d) Esta corriente inducida produce un campo magnético que se dirige hacia la derecha y por lo tanto contrarresta el flujo externo decreciente. Las líneas de campo magnético que se muestran son debidas a la corriente inducida en el anillo.

EJEMPLO CONCEPTUAL 31.6 Una espira móvil a través de un campo magnético

Una espira metálica rectangular, con dimensiones ℓ y w y resistencia R, se mueve con rapidez constante v hacia la derecha, como en la figura 31.14a. La espira pasa a través de un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ dirigido hacia la página y que se extiende una distancia $3w$ a lo largo del eje x. Defina x como la posición del lado derecho de la espira a lo largo del eje x.

A) Grafique, como función de x, el flujo magnético a través del área encerrada por la espira.

SOLUCIÓN

La figura 31.14b muestra el flujo a través del área encerrada por la espira como función de x. Antes de que la espira entre al campo, el flujo a través de la espira es cero. Conforme la espira entra al campo, el flujo aumenta linealmente con la posición hasta que el borde izquierdo de la espira está justo adentro del campo. Por último, el flujo a través de la espira disminuye linealmente a cero conforme la espira sale del campo.

B) Grafique, como función de x, la fem de movimiento inducida en la espira.

Figura 31.14 (Ejemplo conceptual 31.6) a) Una espira conductora rectangular de ancho w y longitud ℓ que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ a través de un campo magnético uniforme que se extiende una distancia $3w$. b) Flujo magnético a través del área encerrada por la espira como función de la posición de la espira. c) Fem inducida como función de la posición de la espira. d) Fuerza aplicada requerida para velocidad constante como función de la posición de la espira.

SOLUCIÓN

Antes de que la espira entre al campo, no se induce fem de movimiento en él porque no hay campo presente (figura 31.14c). Conforme el lado derecho de la espira entra al campo, el flujo magnético dirigido hacia la página aumenta. Por lo tanto, de acuerdo

con la ley de Lenz, la corriente inducida es contra las manecillas del reloj porque debe producir su propio campo magnético dirigido hacia afuera de la página. La fem de movimiento $-B\ell v$ (de la ecuación 31.5) surge de la fuerza magnética experimentada por las cargas en el lado derecho de la espira. Cuando la espira está completamente en el campo, el cambio en flujo magnético a través de la espira es cero; en consecuencia, la fem de movimiento desaparece. Esto ocurre porque, una vez que el lado izquierdo de la espira entra al campo, la fem de movimiento inducida en él cancela la fem de movimiento presente en el lado derecho de la espira. Conforme el lado derecho de la espira sale del campo, el flujo a través de la espira comienza a disminuir, se induce una corriente en sentido de las manecillas del reloj y la fem inducida es $B\ell v$. Tan pronto como el lado izquierdo sale del campo, la fem disminuye a cero.

C) Grafique, como función de x, la fuerza aplicada externa necesaria para contrarrestar la fuerza magnética y mantener v constante.

SOLUCIÓN

La fuerza externa que se debe aplicar a la espira para mantener este movimiento se grafica en la figura 31.14d. Antes de que la espira entre el campo, ninguna fuerza magnética actúa sobre ella; por eso, la fuerza aplicada debe ser cero si v es constante. Cuando el lado derecho de la espira entra al campo, la fuerza aplicada necesaria para mantener constante la rapidez debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza magnética ejercida sobre dicho lado. Cuando la espira está completamente en el campo, el flujo a través de la espira no cambia con el tiempo. Por eso, la fem inducida neta en la espira es cero y la corriente también es cero. Por lo tanto, no se necesita fuerza externa para mantener el movimiento. Por último, conforme el lado derecho sale del campo, la fuerza aplicada debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza magnética que actúa sobre el lado izquierdo de la espira.

A partir de esta explicación, se concluye que la potencia se suministra sólo cuando la espira está entrando o saliendo del campo. Además, ¡este ejemplo demuestra que la fem de movimiento inducida en la espira puede ser cero aun cuando haya movimiento a través del campo! Una fem de movimiento *sólo* se induce cuando el flujo magnético a través de la espira *cambia en el tiempo*.

31.4 Fem inducida y campos eléctricos

Figura 31.15 Espira conductora de radio r en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira. Si $\vec{B}$ cambia con el transcurso del tiempo, se induce un campo eléctrico en una dirección que es tangente a la circunferencia de la espira.

Se ha visto que un flujo magnético cambiante induce una fem y una corriente en una espira conductora. Cuando estudió la electricidad, se relacionó una corriente con un campo eléctrico que aplica fuerzas eléctricas sobre partículas con carga. De igual manera, es posible relacionar una corriente inducida en una espira conductora con un campo eléctrico al afirmar que **se produce un campo eléctrico en un conductor como resultado de un flujo magnético cambiante**.

También se observó que la existencia de un campo eléctrico es independiente de la presencia de cualquier carga de prueba. Lo anterior sugiere que incluso en ausencia de una espira conductora, un campo magnético cambiante genera un campo eléctrico en el vacío.

Este campo eléctrico es *no conservativo*, a diferencia del campo electrostático producido por cargas fijas. Para ilustrar lo anterior considere una espira conductora de radio r situada en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira, como en la figura 31.15. Si el campo magnético cambia con el tiempo, según la ley de Faraday (ecuación 31.1), se induce en la espira una fem $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$. La inducción de una corriente en la espira implica la presencia de un campo eléctrico inducido $\vec{E}$, que debe ser tangente a la espira, ya que ésta es la dirección en la cual se mueven las cargas en el alambre en respuesta a la fuerza eléctrica. El trabajo invertido por el campo eléctrico al mover una carga de prueba q una vez alrededor de la espira es igual a $q\mathcal{E}$. Puesto que la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga es $q\vec{E}$, el trabajo invertido por el campo eléctrico para mover la carga una vez alrededor de la espira es $qE(2\pi r)$, siendo $2\pi r$ la circunferencia de la espira. Estas dos expresiones para el trabajo realizado deben ser iguales; por lo tanto,

$$q\mathcal{E} = qE(2\pi r)$$

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

Con este resultado, además de la ecuación 31.1 y del hecho de que para una espira circular $\Phi_B = BA = B\pi r^2$, el campo eléctrico inducido se puede expresar de la forma

$$E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \qquad \textbf{(31.8)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 31.2

Campos eléctricos inducidos

No es que exista un campo magnético cambiante en la ubicación del campo eléctrico inducido. En la figura 31.15, incluso una espira externa a la región del campo magnético experimentará un campo eléctrico inducido.

Si se conoce la variación en el tiempo del campo magnético, será fácil calcular el campo eléctrico inducido a partir de la ecuación 31.8.

La fem correspondiente a cualquier trayectoria cerrada puede expresarse como la integral de línea de $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ a lo largo de la trayectoria: $\mathcal{E} = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. En casos más generales, es posible que E no sea constante, y la trayectoria puede no ser circular. Por eso, la ley de la inducción de Faraday, $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$, se puede escribir de la forma general

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \textbf{(31.9)}$$

◄ Ley de Faraday en su forma general

El campo eléctrico inducido $\vec{\mathbf{E}}$ de la ecuación 31.9 es un campo no conservativo generado por un campo magnético cambiante. El campo $\vec{\mathbf{E}}$ que satisface la ecuación 31.9 no puede ser un campo electrostático, ya que, de serlo, sería conservativo y la integral de línea de $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ en una espira cerrada sería igual a cero (véase la sección 25.1) que estaría en contradicción a la ecuación 31.9.

EJEMPLO 31.7 Campo eléctrico inducido por un campo magnético variable en un solenoide

Un largo solenoide de radio R tiene n vueltas de alambre por cada unidad de longitud y porta una corriente variable en el tiempo que varía sinusoidalmente como $I = I_{\text{máx}} \cos \omega t$, donde $I_{\text{máx}}$ es la máxima corriente y ω es la frecuencia angular de la fuente de corriente alternante (figura 31.16).

Figura 31.16 (Ejemplo 31.7) Un largo solenoide que porta una corriente variable en el tiempo conocida por $I = I_{\text{máx}} \cos \omega t$. Un campo eléctrico se induce tanto adentro como afuera del solenoide.

A) Determine la magnitud del campo eléctrico inducido en el exterior del solenoide a una distancia $r > R$ desde su eje central largo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 31.16 muestra la situación física. Conforme cambia la corriente en las bobinas, imagine un campo magnético cambiante en todos los puntos del espacio, así como un campo eléctrico inducido.

Categorizar Ya que la corriente varía en el tiempo, el campo magnético cambia, lo que conduce a un campo eléctrico inducido que se opone a los campos eléctricos electrostáticos debidos a cargas eléctricas inmoviles.

Analizar Primero considere un punto externo y tome la trayectoria para la integral de línea como un círculo de radio r con centro en el solenoide, como se ilustra en la figura 31.16.

Evalúe el lado derecho de la ecuación 31.9 y note que $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al círculo acotado por la trayectoria de integración y que su campo magnético sólo existe adentro del solenoide:

$$1)\quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

Evalúe el campo magnético en el solenoide a partir de la ecuación 30.17:

$$2)\quad B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_{\text{máx}} \cos \omega t$$

Sustituya la ecuación 2) en la ecuación 1):

$$3)\quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi R^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \pi R^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \omega \operatorname{sen} \omega t$$

Evalúe el lado izquierdo de la ecuación 31.9 y note que la magnitud de $\vec{\mathbf{E}}$ es constante en la trayectoria de integración y $\vec{\mathbf{E}}$ es tangente a ella:

$$4)\quad \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = E(2\pi r)$$

Sustituya las ecuaciones 3) y 4) en la ecuación 31.9:

$$E(2\pi r) = \pi R^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \omega \operatorname{sen} \omega t$$

Resuelva para la magnitud del campo eléctrico:

$$E = \frac{\mu_0 n I_{\text{máx}} \omega R^2}{2r} \text{ sen } \omega t \quad (\text{para } r > R)$$

Finalizar Este resultado muestra que la amplitud del campo eléctrico afuera del solenoide cae como $1/r$ y varía sinusoidalmente con el tiempo. Como aprenderá en el capítulo 34, el campo eléctrico variable en el tiempo produce una aportación adicional al campo magnético. El campo magnético puede ser un poco más intenso de lo que se estableció al principio, tanto adentro como afuera del solenoide. La corrección al campo magnético es pequeña si la frecuencia angular ω es pequeña. No obstante, a altas frecuencias, puede dominar un nuevo fenómeno: los campos eléctrico y magnético, cada uno reconstruyendo al otro, constituyen una onda electromagnética radiada por el solenoide, como se estudiará en el capítulo 34.

B) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide, a una distancia r desde su eje?

SOLUCIÓN

Analizar Para un punto interior ($r < R$), el flujo magnético a través de una espira de integración se conoce por $\Phi_B = B\pi r^2$.

Evalúe el lado derecho de la ecuación 31.9:

$$5) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Sustituya la ecuación 2) en la ecuación 5):

$$6) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \pi r^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \omega \text{ sen } \omega t$$

Sustituya las ecuaciones 4) y 6) en la ecuación 31.9:

$$E(2\pi r) = \pi r^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \omega \text{ sen } \omega t$$

Resuelva para la magnitud del campo eléctrico:

$$E = \frac{\mu_0 n I_{\text{máx}} \omega}{2} r \text{ sen } \omega t \quad (\text{para } r < R)$$

Finalizar Este resultado muestra que la amplitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide por el flujo magnético cambiante a través del solenoide aumenta linealmente con r y varía sinusoidalmente con el tiempo.

31.5 Generadores y motores

Los generadores eléctricos reciben energía mediante trabajo y la transfieren al exterior por medio de una transmisión eléctrica. Para comprender cómo funciona, piense en el **generador de corriente alterna (CA)**. En su forma más simple, está constituido por una espira de alambre que gira en un campo magnético por algún medio externo (figura 31.17a).

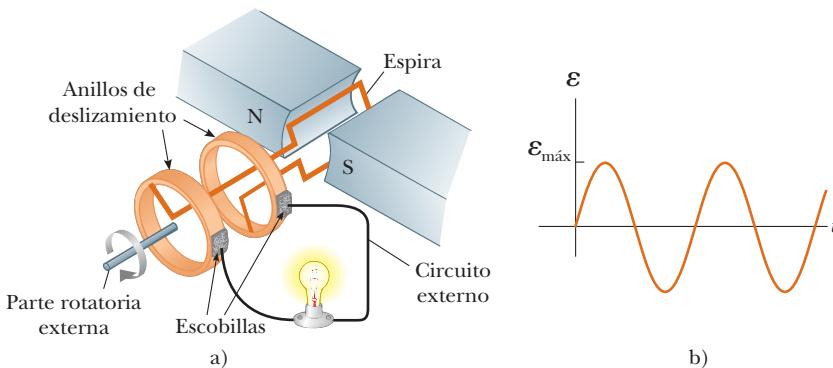



Figura 31.17

a) Diagrama de un generador de CA. Se induce una fem en una espira que gira en un campo magnético. b) Fem alternante inducida en la espira graficada en función del tiempo.

En las plantas eléctricas, la energía requerida para hacer girar la espira se puede obtener de una diversidad de fuentes. Por ejemplo, en una planta hidroeléctrica, el movimiento rotatorio se produce por una caída de agua dirigida hacia las aspas de una turbina; en una planta termoeléctrica a base de coque de carbón, la energía liberada al quemar el carbón se utiliza para convertir el agua en vapor y éste es dirigido hacia las aspas de la turbina.

Conforme gira una espira en un campo magnético, el flujo magnético a través del área encerrada por la espira cambia en función del tiempo; esto, de acuerdo con la ley de Faraday, induce una fem así como una corriente en la espira. Los extremos de la espira se conectan a anillos de deslizamiento que giran con ella. Las conexiones de estos anillos, que actúan como terminales de salida del generador al circuito externo, se realizan mediante escobillas inmóviles que están en contacto con ellos.

Figura 31.18 Espira que encierra un área A y que tiene N vueltas, girando con una velocidad angular constante ω en un campo magnético. La fem inducida en la espira varía senoidalmente con el tiempo.

Suponga que, en lugar de una sola vuelta, la espira tiene N vueltas (una solución más práctica), todas con la misma área A, y giran en un campo magnético con una rapidez angular constante ω. Si θ es el ángulo formado entre el campo magnético y la normal al plano de la espira, como ocurre en la figura 31.18, el flujo magnético a través de la espira para cualquier instante es igual a

$$\Phi_B = BA\cos\theta = BA\cos\omega t$$

donde utiliza la correspondencia $\theta = \omega t$ existente entre la posición angular y la rapidez angular (véase la ecuación 10.3 del volumen I). (El reloj se ajusta de manera que $t = 0$ cuando $\theta = 0$.) Por eso, la fem inducida en la bobina es

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NAB\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = NAB\omega \operatorname{sen}\omega t \qquad \textbf{(31.10)}$$

Este resultado indica que la fem varía de manera senoidal en función del tiempo, tal y como está graficado en la figura 31.17b. Por la ecuación 31.10, la fem máxima tiene como valor

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = NAB\omega \qquad \textbf{(31.11)}$$

que se presenta cuando $\omega t = 90°$, o bien, igual a 270°. En otras palabras, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}}$ cuando el campo magnético está en el plano de la bobina y la relación de cambio en el tiempo del flujo es máxima. Además, la fem es igual a cero cuando $\omega t = 0$, o bien igual a 180°, esto es, cuando $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano de la bobina y la relación de cambio con el tiempo del flujo es cero.

La frecuencia de los generadores comerciales existentes en Estados Unidos y Canadá es de 60 Hz, en tanto que en algunas naciones europeas la frecuencia es de 50 Hz. (Recuerde que $\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia en hertz.)

Pregunta rápida 31.4 En un generador de CA, una bobina de N vueltas de alambre gira en un campo magnético. Entre las opciones que siguen, ¿cuál es la que *no* causa un incremento en la fem producida en la bobina? a) Reemplazando el alambre de la bobina por uno de menor resistencia, b) haciendo que la bobina gire con mayor rapidez, c) incrementando el campo magnético, o d) incrementando el número de vueltas de alambre en la bobina.

EJEMPLO 31.8 Fem inducida en un generador

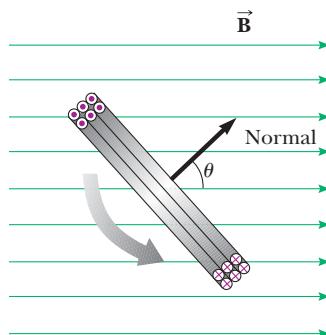
La bobina en un generador CA consiste en ocho vueltas de alambre, cada una de área $A = 0.090\,0\ \text{m}^2$, y la resistencia total del alambre es de 12.0 Ω. La bobina da vueltas en un campo magnético de 0.500 T con una frecuencia constante de 60.0 Hz.

A) Encuentre la máxima fem inducida en la bobina.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 31.17 para asegurarse de que entiende la operación de un generador CA.

Categorizar Se evalúan los parámetros usando ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 31.11 para encontrar la máxima fem inducida: $\mathcal{E}_{\text{máx}} = NAB\omega = NAB(2\pi f)$

Sustituya valores numéricos: $\mathcal{E}_{\text{máx}} = 8(0.090\,0\text{ m}^2)(0.500\text{ T})(2\pi)(60.0\text{ Hz}) = 136\text{ V}$

B) ¿Cuál es la máxima corriente inducida en la bobina cuando las terminales de salida se conectan a un conductor de baja resistencia?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 27.7 y el resultado de la parte A): $I_{\text{máx}} = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{R} = \dfrac{136\text{ V}}{12.0\ \Omega} = 11.3\text{ A}$

El **generador de corriente directa** (**CD**) se explica en la figura 31.19a. Por ejemplo, estos generadores se utilizan en automóviles antiguos para cargar la batería. Los componentes son esencialmente los mismos que los de un generador de CA, excepto que los contactos con la bobina giratoria se fabrican utilizando un anillo dividido que se conoce como *conmutador*.

En esta configuración, el voltaje de salida tiene siempre la misma polaridad y pulsos con el tiempo, como se observa en la figura 31.19b. Comprenderá lo anterior al advertir que los contactos que se hacen con el anillo dividido invierten sus roles cada medio ciclo. Al mismo tiempo, la polaridad de la fem inducida se invierte; por esto la polaridad del anillo dividido (que es la misma que la polaridad del voltaje de salida) se conserva igual.

Una CD pulsante no es adecuada para la mayor parte de las aplicaciones. Para obtener una corriente que sea CD, los generadores de CD utilizan muchas bobinas y conmutadores distribuidos de forma que los pulsos senoidales de las diversas bobinas queden fuera de fase. Cuando estos pulsos se sobreponen, la salida de CD está prácticamente libre de fluctuaciones.

Los **motores** son dispositivos en los que se transfiere energía mediante transmisión eléctrica y de los cuales se transfiere energía hacia afuera en forma de trabajo. En esencia, un motor es un generador que funciona a la inversa. En vez de generar una corriente mediante el giro de una espira, una batería suministra corriente a la bobina, y el momento de torsión que actúa en la bobina conductora de corriente hace que ésta gire (sección 29.5).

Se puede consumir trabajo mecánico útil si se une la espira rotatoria con algún dispositivo externo. Sin embargo, cuando la bobina gira en un campo magnético, el flujo magnético cambiante induce una fem en la bobina; la fem inducida siempre actuará para reducir la corriente en la bobina. De no ser así, se hubiera violado la ley de Lenz. La fuerza contraelectromotriz aumenta en magnitud conforme se incrementa la rapidez de rotación de la bobina. (El término *fuerza contraelectromotriz* se utiliza para indicar que una fem tiene tendencia a reducir la corriente suministrada.) Ya que el voltaje disponible para el suministro de la corriente es igual a la diferencia entre el voltaje de alimentación y la fuerza contraelectromotriz, la corriente que pasa por la espira rotatoria queda limitada por esta última.

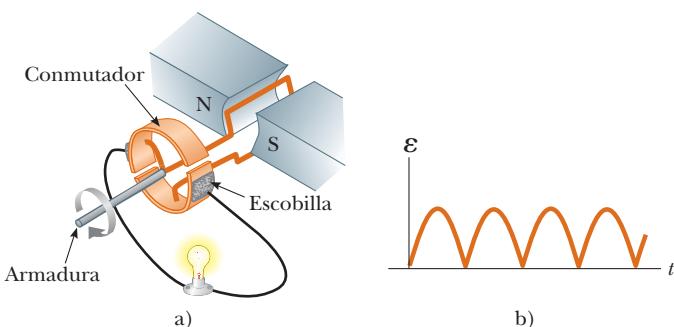



Figura 31.19

a) Diagrama esquemático de un generador de CD. b) La magnitud de la fem varía con el transcurso del tiempo, pero sin que nunca cambie la polaridad.

Cuando se activa un motor, inicialmente no existe fuerza contraelectromotriz y la corriente resulta muy grande porque está limitada únicamente por la resistencia de la bobina. Conforme la bobina empieza a girar, la fuerza contraelectromotriz inducida se opone al voltaje aplicado, reduciendo así la corriente en la bobina. Si la carga mecánica se incrementa, el motor reduce su velocidad, lo que provoca una reducción de la fuerza contraelectromotriz. Esta reducción de la fuerza contraelectromotriz incrementa la corriente en la bobina y en consecuencia también aumenta la potencia necesaria suministrada de la fuente externa de voltaje. Por esta causa, las necesidades de energía para administrar un motor son mayores con cargas pesadas que con cargas ligeras. Si se le permite al motor participar sin carga mecánica, la fuerza contraelectromotriz reduce la corriente a un valor sólo lo suficientemente grande para cubrir las pérdidas de energía debidas a la energía interna y a la fricción. Si una carga pesada detiene el motor de forma que ya no pueda girar, la falta de una fuerza contraelectromotriz puede llevar a un nivel peligrosamente alto de corriente en el alambre del motor. Esta situación es peligrosa, y se explora en la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 31.9.

John W. Jewett, Jr.

Figura 31.20 Compartimiento de motor del Toyota Prius, un vehículo híbrido.

El desarrollo de los *sistemas de impulsión híbridos* se ve en la aplicación actual de los motores en los automóviles. En éstos se combinan una máquina a gasolina y un motor eléctrico para incrementar la economía de combustible del vehículo y reducir sus emisiones. La figura 31.20 muestra el cofre del Toyota Prius, uno entre el reducido número de automóviles híbridos disponibles en Estados Unidos. En este automóvil la potencia enviada a las ruedas puede venir ya sea del motor a gasolina o del motor eléctrico. En conducción normal, el motor eléctrico acelera al vehículo a partir del reposo hasta que se mueve a una rapidez aproximada de 15 millas/h (24 km/h). Durante este periodo de aceleración, no funciona la máquina, por lo que no se utiliza combustible y no hay emisiones. Con magnitudes de velocidad altas, el motor y la máquina funcionan juntos de tal manera que la máquina funciona siempre con o cerca de su rapidez más eficiente. El resultado es un rendimiento significativamente más alto con gasolina diferente del obtenido por un automóvil tradicional impulsado con gasolina. Cuando frena un vehículo híbrido, el motor actúa como generador y regresa parte de la energía cinética del vehículo hacia la batería como energía almacenada. En un vehículo normal, esta energía cinética simplemente se pierde al transformarse en energía interna en los frenos y en la superficie del pavimento.

EJEMPLO 31.9 Corriente inducida en un motor

Un motor contiene una bobina con una resistencia total de 10 Ω producida por un voltaje de 120 V. Cuando el motor funciona a su máxima rapidez, la fuerza contraelectromotriz es de 70 V.

A) Encuentre la corriente en la bobina en el instante en que el motor se enciende.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en el motor justo después de que se enciende. Todavía no se mueve, de modo que no hay fuerza contraelectromotriz generada. Como resultado, la corriente en el motor es alta. Después de que el motor comienza a girar, se genera una fuerza contraelectromotriz y la corriente disminuye.

Categorizar Necesita combinar la nueva comprensión de los motores con la correspondencia entre corriente, voltaje y resistencia.

Analizar Evalúe la corriente en la bobina a partir de la ecuación 27.7 sin fuerza contraelectromotriz generada:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{120\text{ V}}{10\ \Omega} = \boxed{12\text{ A}}$$

B) Encuentre la corriente en la bobina cuando el motor alcanza máxima rapidez.

SOLUCIÓN

Evalúe la corriente en la bobina con la máxima fuerza contraelectromotriz generada:

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{contra}}}{R} = \frac{120\text{ V} - 70\text{ V}}{10\ \Omega} = \frac{50\text{ V}}{10\ \Omega} = \boxed{5.0\text{ A}}$$

Finalizar La corriente extraída por el motor cuando funciona a su máxima rapidez es significativamente menor que la extraída antes de que comience a girar.

¿Que pasaría si? Suponga que este motor está en una sierra circular. Cuando funciona la sierra, el aspa se atasca en un trozo de madera y el motor no puede girar. ¿En qué porcentaje aumenta la potencia de entrada del motor cuando está atascado?

Respuesta Es posible que haya tenido experiencias cotidianas con motores que se calientan cuando algo evita que giren. Esto se debe al aumento de potencia de entrada al motor. La mayor rapidez de transferencia de energía resulta en un aumento en la energía interna de la bobina, un efecto indeseable.

Establezca la proporción de la potencia de entrada al motor cuando se atasca, que es la calculada en el inciso A), a la que se presenta cuando no está atascado, inciso B):

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{atascado}}}{\mathcal{P}_{\text{no atascado}}} = \frac{I_A{}^2 R}{I_B{}^2 R} = \frac{I_A{}^2}{I_B{}^2}$$

Al sustituir valores numéricos se obtiene

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{atascado}}}{\mathcal{P}_{\text{no atascado}}} = \frac{(12\text{ A})^2}{(5.0\text{ A})^2} = 5.76$$

¡que representa un aumento de 476% en la potencia de entrada! Tan alta potencia de entrada hace que la bobina se caliente y se daña.

31.6 Corrientes de Eddy

Como se ha comprendido, en un circuito se induce una fem y una corriente debido a la presencia de un flujo magnético cambiante. De la misma manera, se inducen corrientes circulantes, conocidas como **corrientes de Eddy** en piezas voluminosas de metal que se mueven a través de un campo magnético. Este fenómeno se demuestra si se deja una placa plana de cobre o de aluminio unida al extremo de una barra rígida en oscilación a través de un campo magnético (figura 31.21). Conforme la placa entra en el campo, el flujo magnético cambiante induce una fem en ella, la cual, a su vez, hace que los electrones libres presentes en la placa se muevan, produciendo corrientes de Eddy en remolino. De acuerdo con la ley de Lenz, la dirección de las corrientes de Eddy es tal que genera campos magnéticos que se oponen al cambio que causan dichas corrientes. Por esta causa, las corrientes de eddy deben producir polos magnéticos efectivos sobre la placa, que son repelidos por los polos del imán; esto da lugar a una fuerza de repulsión que se opone al movimiento de la placa. (Si lo contrario fuera verdadero, la placa se aceleraría y su energía se incrementaría después de cada oscilación, lo que violaría la ley de conservación de energía.)

Figura 31.21 Formación de corrientes parásitas o de eddy en una placa conductora que se mueve a través de un campo magnético. Como la placa entra o sale del campo, el flujo magnético cambiante induce una fem, que es la que genera corrientes de eddy en la placa.

Como se indica en la figura 31.22a, con $\vec{\mathbf{B}}$ dirigido hacia el interior de la página, la corriente de eddy inducida va en dirección opuesta a las manecillas del reloj conforme la placa oscilante entra en el campo en la posición 1, debido a que se está incrementando el flujo causado por el campo magnético externo hacia el interior de la página a través de la placa. Por esto, según la ley de Lenz, la corriente inducida debe proveer su propio campo magnético hacia el exterior de la página. Lo opuesto ocurre conforme la placa sale del campo en la posición 2, donde la corriente está en el sentido de las manecillas del reloj. Ya que las corrientes de Eddy inducidas siempre producen una fuerza magnética de retardo $\vec{\mathbf{F}}_B$ cuando la placa entra o sale del campo, la placa oscilante finalmente regresa a una posición de reposo.

Si, como se muestra en la figura 31.22b, se abren ranuras en la placa, se reducen las corrientes de Eddy y la fuerza de retardo correspondiente de manera importante. Comprenderá lo anterior al darse cuenta de que los cortes en la placa impiden la formación de largas espiras de corriente.

Los sistemas de frenado en muchos trenes subterráneos y trolebuses aprovechan la inducción electromagnética y las corrientes de Eddy. Un electroimán unido al tren está colocado cerca de los rieles de acero. (En esencia, un electroimán es un solenoide con núcleo de hierro.) El efecto de freno se presenta cuando se hace pasar una corriente muy grande por el electroimán. El movimiento relativo existente entre el imán y los rieles induce en éstos corrientes de Eddy, y la dirección de estas corrientes produce una fuerza de arrastre sobre el tren en movimiento. Ya que estas corrientes disminuyen uniformemente en magnitud al disminuir la velocidad del tren, el efecto de frenado es muy suave. Como

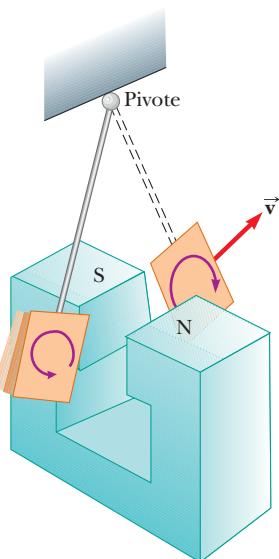
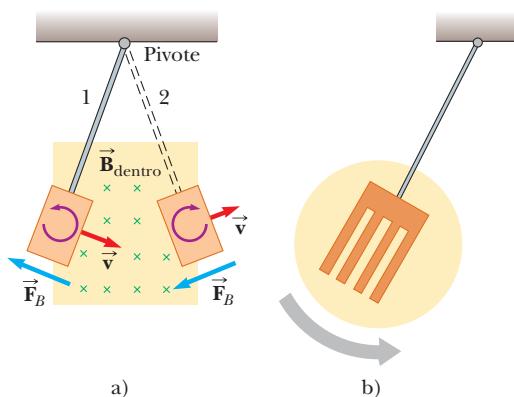
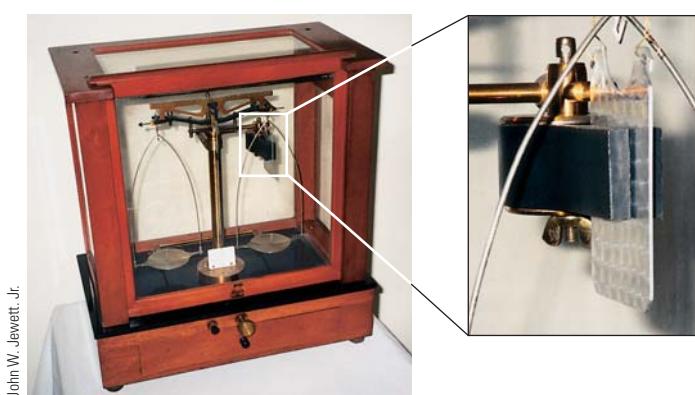



Figura 31.22

a) Conforme la placa conductora entra en el campo (posición 1), las corrientes de Eddy giran en sentido contrario a las manecillas del reloj. Conforme la placa sale del campo (posición 2), las corrientes giran en sentido de las manecillas del reloj. En cualquiera de los casos, la fuerza sobre la placa es opuesta a la velocidad y finalmente la placa alcanza el reposo. b) Cuando se ranura la placa conductora, las corrientes de eddy se reducen y la placa oscila con mayor libertad a través del campo magnético.

medida de seguridad, algunas herramientas eléctricas las utilizan para detener rápidamente las aspas en rotación una vez apagado el dispositivo.

Con frecuencia, este tipo de corrientes son indeseables, ya que representan una transformación de energía mecánica en energía interna. A fin de reducir esta pérdida de energía, a menudo las piezas conductoras se fabrican laminadas, es decir, con capas delgadas de material separadas por otro material no conductor, como por ejemplo las lacas o algún óxido metálico. Esta estructura en capas evita espiras de corriente grandes y limita de manera efectiva las corrientes a espiras pequeñas en cada capa individual. Estas estructuras laminadas se usan en los núcleos de los transformadores (véase la sección 33.8) y en los motores para minimizar las corrientes de eddy y, por consiguiente, incrementar la eficiencia de dichos dispositivos.

Pregunta rápida 31.5 En balanzas de brazos iguales de principios del siglo XX (figura 31.23), se puede observar que de uno de los brazos cuelga una hoja de aluminio que pasa entre los polos de un imán, lo que causa el rápido decaimiento de las oscilaciones de la balanza. De no tener este frenado magnético, las oscilaciones podrían continuar durante un tiempo considerable, por lo que el investigador tendría que esperar para conseguir una lectura. Las oscilaciones se amortiguan porque a) la hoja de aluminio es atraída hacia el imán, b) las corrientes en la hoja de aluminio establecen un campo magnético que se opone a las oscilaciones, o c) el aluminio es un material paramagnético.

Figura 31.23 (Pregunta rápida 31.5) En una antigua balanza de brazos iguales, una hoja de aluminio cuelga entre los polos de un imán.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Ley de inducción de Faraday afirma que la fem inducida en una espiral es directamente proporcional a la relación de cambio en el tiempo del flujo magnético a través de la espira, o bien

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \textbf{(31.1)}$$

donde $\Phi_B = \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ es el flujo magnético a través de la espira.

Cuando una barra conductora de longitud ℓ se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ a través de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$, donde $\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular a la barra y a $\vec{\mathbf{v}}$, la **fem de movimiento** inducida en la barra es

$$\mathcal{E} = -B\ell v \quad \textbf{(31.5)}$$

La **ley de Lenz** afirma que la corriente inducida y la fem inducida en un conductor están en una dirección tal que establecen un campo magnético que se opone al cambio que los produce.

Una forma general de la **ley de inducción de Faraday** es

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \textbf{(31.9)}$$

donde $\vec{\mathbf{E}}$ es el campo eléctrico no conservativo que se produce mediante el flujo magnético cambiante.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Cuál es la diferencia entre flujo magnético y campo magnético?

2. **O** La figura P31.2 es una gráfica del flujo magnético a través de cierta bobina de alambre como función del tiempo, durante un intervalo mientras el radio de la bobina aumenta, la bobina da vueltas a través de 1.5 revoluciones y la fuente externa del campo magnético se apaga, en ese orden. Clasifique la fuerza electromotriz inducida en la bobina en los instantes marcados del A al F, del mayor valor positivo al valor negativo de mayor magnitud. En su clasificación anote cualquier caso de igualdad y también cualquier instante cuando la fem sea cero.

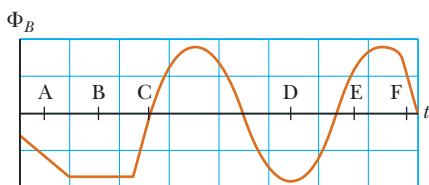



Figura P31.2

3. **O** Una bobina plana de alambre se coloca en un campo magnético uniforme que está en la dirección *y*. **i)** El flujo magnético a través de la bobina es un máximo si la bobina está a) en el plano *xy*, b) en el plano *xy* o en el *yz*, c) en el plano *xz*, d) en cualquier orientación, porque es una constante. **ii)** ¿Para qué orientación el flujo es cero? Elija la mejor respuesta entre las mismas posibilidades.

4. **O** Una bobina cuadrada y plana de alambre se jala con velocidad constante a través de una región de campo magnético uniforme dirigido perpendicular al plano de la bobina, como se muestra en la figura P31.4. **i)** ¿Se induce corriente en la bobina? a) Sí, en el sentido de las manecillas del reloj, b) sí, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, c) no. **ii)** ¿En la bobina se presenta separación de carga? a) Sí, con la parte superior positiva, b) sí, con la parte superior negativa, c) no.

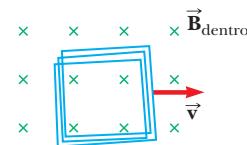



Figura P31.4 Preguntas 4 y 6.

5. La barra de la figura P31.5 se mueve sobre rieles hacia la derecha con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$, y el campo magnético constante y uniforme está dirigido hacia el exterior de la página. ¿Por qué la corriente inducida está en el sentido de las manecillas del reloj? Si la barra se estuviera moviendo hacia la izquierda, ¿cuál sería la dirección de la corriente inducida?

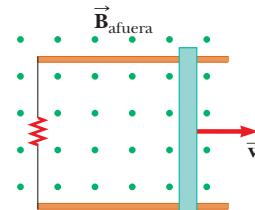



Figura P31.5 Preguntas 5 y 6.

6. **O i)** Conforme la bobina cuadrada de alambre en la figura P31.4 se mueve perpendicular al campo, ¿se requiere una fuerza externa para mantenerla en movimiento con rapidez constante? **ii)** Responda la misma pregunta para la barra en la

figura P31.5. **iii)** Responda la misma pregunta para la barra en la figura P31.6.

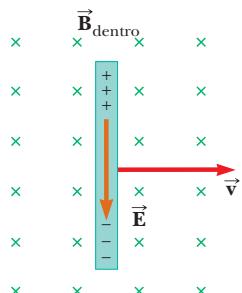
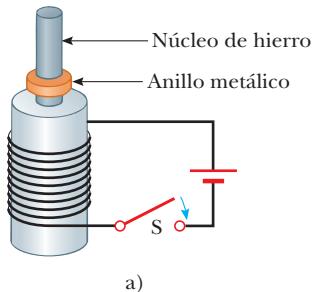



Figura P31.6

7. En una presa hidroeléctrica, ¿cómo se produce energía que después se transfiere mediante transmisión eléctrica? Es decir: ¿cómo la energía de movimiento del agua se convierte en energía que se transmite mediante electricidad CA?

8. Una pieza de aluminio se deja caer verticalmente hacia abajo entre los polos de un electroimán. ¿El campo magnético afecta la velocidad del aluminio?

9. **O** ¿Qué sucede con la amplitud de la fem inducida cuando se duplica la rapidez de rotación de una bobina de un generador? a) Es cuatro veces mayor. b) Es dos veces mayor. c) No cambia. d) Se vuelve la mitad. e) Se vuelve $\frac{1}{4}$.

10. Cuando se cierra el interruptor de la figura P31.10a, se establece una corriente en la bobina y el anillo metálico salta hacia arriba (figura P31.10b). Explique este comportamiento.

Figura P31.10 Preguntas 10 y 11.

11. Suponga que la batería de la figura P31.10a es reemplazada por una fuente de CA y que el interruptor sigue cerrado. Si se mantiene así, el anillo metálico que está encima del solenoide se calienta. ¿Por qué?

12. **O** Un imán de barra mantiene una orientación vertical sobre una espira de alambre que yace en un plano horizontal, como se muestra en la figura P31.12. El polo sur del imán está en el extremo inferior, más cerca de la espira de alambre. El imán se deja caer hacia la espira. **i)** Mientras el imán cae hacia la espira, ¿cuál es la dirección de corriente en el resistor? a) A la izquierda, b) a la derecha, c) no hay corriente, d) hacia izquierda y derecha, e) hacia abajo. **ii)** Después de que el imán pasa a través del lazo y se aleja de él, ¿cuál es la dirección de la corriente en el resistor? Elija entre las mismas posibilidades. **iii)** Ahora suponga que el imán, que produce un campo simétrico, se mantiene en una orientación horizontal y luego se deja caer. Mientras se aproxima a la espira, ¿cuál es la dirección de la corriente en el resistor? Elija entre las mismas posibilidades.

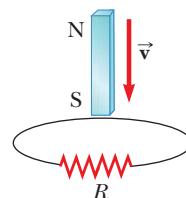



Figura P31.12

13. **O** ¿Cuál es la dirección de la corriente en el resistor de la figura P31.13 **i)** en un instante inmediatamente después de que el interruptor se cierra, **ii)** después de que el interruptor se cierra durante varios segundos y **iii)** en un instante después de que el interruptor se abre? Elija cada respuesta entre estas posibilidades: a) izquierda, b) derecha, c) a izquierda y derecha, d) la corriente es cero.

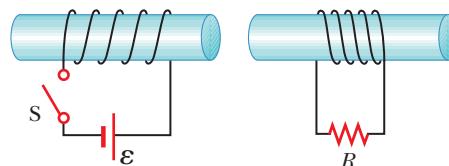



Figura P31.13

14. En la sección 7.7 se definen las fuerzas conservativas y no conservativas. En el capítulo 23 se afirmó que una carga eléctrica produce un campo eléctrico que produce una fuerza conservativa. Ahora argumente que la inducción genera un campo eléctrico que produce una fuerza no conservativa.

Problemas

Sección 31.1 Ley de inducción de Faraday

Sección 31.3 Ley de Lenz

1. La *estimulación magnética transcraneal* es una técnica no agresiva que se usa para estimular regiones del cerebro humano. Una pequeña bobina se coloca en el cuero cabelludo, y una breve explosión de corriente en la bobina produce un campo magnético que cambia rápidamente dentro del cerebro. La fem inducida puede estimular actividad neuronal. a) Uno de tales dispositivos genera un campo magnético hacia arriba dentro

del cerebro que se eleva de cero a 1.50 T en 120 ms. Determine la fem inducida en torno a un círculo horizontal de tejido de 1.60 mm de radio. b) **¿Qué pasaría si?** A continuación el campo cambia a 0.500 T hacia abajo en 80.0 ms. ¿Cómo se compara la fem inducida en este proceso con el inciso a)?

2. Una espira plana de alambre formada por una sola vuelta de 8.00 cm^2 de área de sección transversal es perpendicular a un campo magnético que aumenta uniformemente de magnitud de 0.500 T a 2.50 T en 1.00 s. ¿Cuál es la corriente inducida resultante si la espira tiene una resistencia de 2.00 Ω?

3. Una bobina circular de 25 vueltas tiene un diámetro de 1.00 m. Está colocada con su eje orientado en la dirección del campo magnético de la Tierra de valor 50.0 μT, y después de 0.200 s se le hace girar 180°. ¿De qué magnitud es la fem promedio generada en la bobina?

4. ● Su profesor de física le pide ayuda para montar una demostración de la ley de Faraday para la clase. Como se muestra en la figura P31.4, el aparato consiste en un fuerte imán permanente que produce un campo de 110 mT entre sus polos, una bobina de 12 vueltas de 2.10 cm de radio unido en un marco de madera con una manija, algunos alambres conectores flexibles y un amperímetro. La idea es jalar la bobina desde el centro del campo magnético tan rápidamente como pueda y leer la corriente promedio registrada en el medidor. La resistencia equivalente de la bobina, terminales y medidor es de 2.30 Ω. Usted puede sacar la bobina del campo en aproximadamente 180 ms. El amperímetro tiene una sensibilidad de tamaño natural de 1000 μA. a) ¿Este medidor es lo suficientemente sensible para mostrar claramente la corriente inducida? Explique su razonamiento. b) ¿El medidor en el diagrama registra una corriente positiva o negativa? Explique su razonamiento.

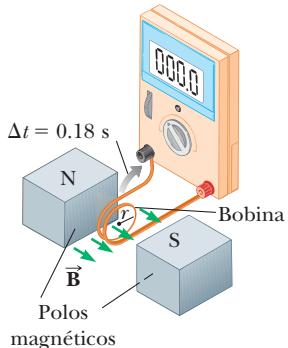



Figura P31.4

5. Una espira rectangular de área A se coloca en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. Se le permite al campo variar su magnitud en el tiempo, según la expresión $B = B_{\text{máx}} e^{-t/\tau}$ donde tanto $B_{\text{máx}}$ como τ son constantes. El campo tiene para $t < 0$ un valor constante $B_{\text{máx}}$. a) Utilice la ley de Faraday para demostrar que la fem inducida en la espira se conoce por

$$\mathcal{E} = \frac{AB_{\text{máx}}}{\tau} e^{-t/\tau}$$

b) Obtenga un valor numérico para $\mathcal{E}$ en $t = 4.00$ s cuando $A = 0.160$ m^2, $B_{\text{máx}} = 0.350$ T y $\tau = 2.00$ s. c) Para los valores de A, $B_{\text{máx}}$ y τ del inciso b), ¿cuál es el valor máximo de $\mathcal{E}$?

6. Para monitorear la respiración de un paciente de hospital, un cinturón delgado se ciñe alrededor del pecho del paciente. El cinturón es una bobina de 200 vueltas. Cuando el paciente inhala, el área encerrada por la bobina aumenta en 39.0 cm^2. La magnitud del campo magnético de la Tierra es de 50.0 μT y forma un ángulo de 28.0° con el plano de la bobina. Si supone que un paciente tarda 1.80 s en inhalar, encuentre la fem inducida promedio en la bobina durante este intervalo de tiempo.

7. Un fuerte electroimán produce un campo magnético uniforme de 1.60 T sobre una área de sección transversal de 0.200 m^2. Una bobina que tiene 200 vueltas y una resistencia total de 20.0 Ω se coloca alrededor del electroimán. Después se reduce de manera uniforme la corriente en el electroimán, hasta que alcanza cero en 20.0 ms. ¿Cuál es la corriente inducida en la bobina?

8. Una espira de alambre en forma de rectángulo de ancho w y de longitud L y un alambre largo y recto que conduce una corriente I yacen sobre una mesa como se muestra en la figura P31.8. a) Determine el flujo magnético a través de la espira debido a la corriente I. b) Suponga que la corriente cambia con el tiempo según la ecuación $I = a + bt$, donde a y b son constantes. Determine la fem inducida en la espira si $b = 10.0$ A/s, $h = 1.00$ cm, $w = 10.0$ cm y $L = 100$ cm. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el rectángulo?

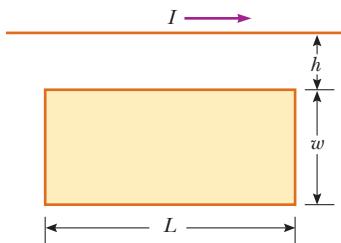



Figura P31.8 Problemas 8 y 67.

9. Un anillo de aluminio de 5.00 cm de radio y 3.00×10^{-4} Ω de resistencia se coloca en el extremo de un solenoide largo de núcleo de aire, con 1000 vueltas por cada metro y 3.00 cm de radio como se muestra en la figura P31.9. Suponga que el componente axial del campo producido por dicho solenoide es sólo la mitad de intenso en toda el área del extremo del solenoide que el correspondiente en el centro del mismo. Además suponga que el solenoide produce un campo despreciable fuera de su área de sección transversal. La corriente en el solenoide se incrementa con una proporción de 270 A/s. a) ¿Cuál es la corriente inducida en el anillo? En el centro de éste, ¿cuáles son b) la magnitud y c) la dirección del campo magnético producido por la corriente inducida?

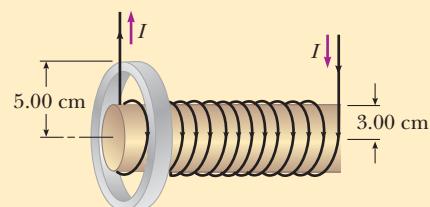



Figura P31.9 Problemas 9 y 10.

10. Un anillo de aluminio de radio r_1 y de resistencia R se coloca alrededor del extremo de un solenoide largo con núcleo de aire con n vueltas por cada metro y con un radio menor r_2, como el que se muestra en la figura P31.9. Suponga que el componente axial del campo producido por el solenoide en el área correspondiente al extremo de éste es la mitad de intenso que en el centro del mismo. Tambien suponga que el solenoide pro-

duce un campo despreciable por fuera de su área de sección transversal. La corriente en el solenoide se incrementa en una proporción de $\Delta I/\Delta t$. a) ¿Cuál es la corriente inducida en el anillo? b) En el centro del anillo, ¿cuál es el campo magnético producido por la corriente inducida en él? c) ¿Cuál es la dirección de este campo?

11. Un solenoide largo con un radio de 2.00 cm y de 1.0×10^3 vueltas/metro (figura P31.11) está rodeado por una bobina con un radio de 10 cm y de 15 vueltas. La corriente en el solenoide cambia según la expresión $I = (5.00 \text{ A}) \text{ sen } (120t)$. Encuentre la fem inducida en la bobina de 15 vueltas en función del tiempo.

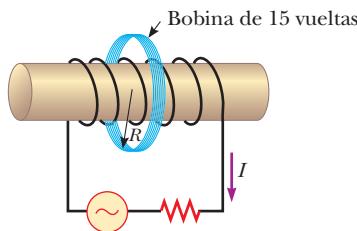



Figura P31.11

12. Dos bobinas circulares se encuentran en el mismo plano. La siguiente ecuación describe la fem inducida en la bobina más pequeña por una corriente cambiante en la bobina más grande. a) Calcule esta fem. b) Escriba el enunciado de un problema, que incluya datos para los que la ecuación dé la solución.

$$\mathcal{E} = -20 \frac{d}{dt}\left[\frac{130\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}\right)\left(3\text{ A} - \frac{(6\text{ A})t}{13 \times 10^{-6}\text{ s}}\right)}{2(0.40\text{ m})} \pi(0.03\text{ m})^2 \cos 0°\right]$$

13. Encuentre la corriente a través de la sección PQ de longitud $a = 65.00$ cm de la figura P31.13. El circuito está inmerso en un campo magnético cuya magnitud varía con el tiempo según la expresión $B = (1.00 \times 10^{-3} \text{ T/s})t$. Suponga que la resistencia por cada longitud del alambre es de 0.100 Ω/m.

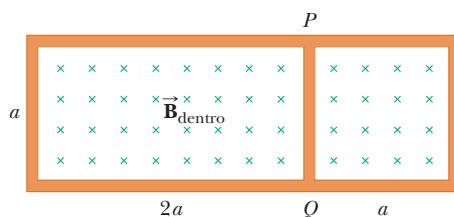



Figura P31.13

14. Una bobina circular de 30 vueltas con un radio de 4.00 cm y una resistencia de 1.00 Ω se coloca en un campo magnético con dirección perpendicular al plano de la bobina. La magnitud del campo magnético varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $B = 0.010\,0t + 0.040\,0t^2$, donde t se mide en segundos y B en teslas. Calcule la fem inducida en la bobina en t = 5.00 s.

15. Un solenoide largo tiene n = 400 vueltas por cada metro y lleva una corriente conocida por $I = (30.0 \text{ A})(1 - e^{-1.60t})$. En el interior del solenoide, colocada en forma coaxial con el mismo se encuentra una bobina que tiene un radio de 6.00 cm y está formada por N = 250 vueltas de alambre delgado (figura P31.15). ¿Cuál es la fem inducida en la bobina por la corriente cambiante?

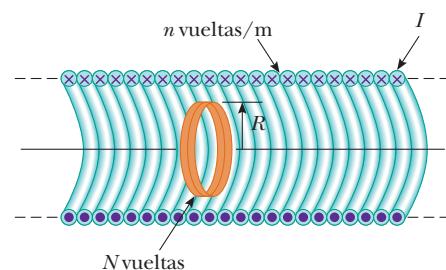



Figura P31.15

16. ● Cuando un alambre conduce una corriente CA de frecuencia conocida, es posible utilizar una *bobina Rogowski* para determinar la amplitud $I_{\text{máx}}$ de la corriente sin desconectar el alambre para desviar la corriente por un medidor. La bobina Rogowski que se muestra en la figura P31.16, simplemente se sujeta alrededor del alambre. Está constituida de un conductor toroidal enroscado alrededor de una cuerda circular de regreso. El toroide tiene n vueltas por cada unidad de longitud a lo largo de ella y un área de sección transversal A. La corriente que se va a medir está dada por $I(t) = I_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$. a) Demuestre que la amplitud de la fem inducida en la bobina Rogowski es $\mathcal{E}_{\text{máx}} = \mu_0 n A \omega I_{\text{máx}}$. b) Explique la causa por la cual el alambre que conduce la corriente desconocida no necesita estar en el centro de la bobina Rogowski, así como por qué la bobina no responderá a corrientes cercanas que no estén dentro de ella.

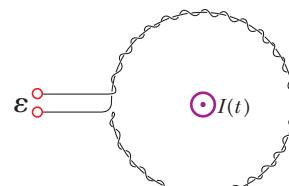
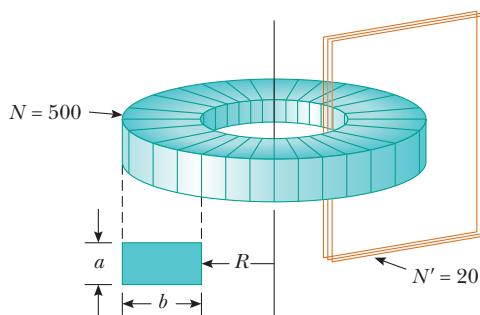



Figura P31.16

17. Una bobina formada por 50 vueltas de alambre en forma de cuadrado, se coloca en un campo magnético de forma que la normal al plano de la bobina forme un ángulo de 30.0° con la dirección del campo. Cuando el campo magnético aumenta de manera uniforme de 200 μT a 600 μT en 0.400 s, se induce en la bobina una fem de 80.0 mV. ¿Cuál es la longitud total del alambre?

18. Un toroide de sección transversal rectangular (a = 2.00 cm por b = 3.00 cm) y de radio interno R = 4.00 cm está formado por 500 vueltas de alambre que conducen una corriente senoidal $I = I_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$, con $I_{\text{máx}}$ = 50.0 A y una frecuencia $f = \omega/2\pi$ = 60 Hz. Una bobina con 20 vueltas de alambre está acoplada con el toroide, como se observa en la figura P31.18. Determine la fem inducida en la bobina en función del tiempo.

Figura P31.18

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

19. Un tramo de alambre aislado se dobla para formar un ocho, como se muestra en la figura P31.19. El radio del círculo superior es de 5.00 cm y el inferior de 9.00 cm. El alambre tiene una resistencia uniforme por unidad de longitud de 3.00 Ω/m. Un campo magnético uniforme es aplicado en forma perpendicular al plano de los dos círculos en la dirección que se muestra. El campo magnético aumenta con una rapidez constante de 2.00 T/s. Determine la magnitud y dirección de la corriente inducida en el alambre.

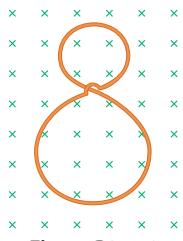



Figura P31.19

Sección 31.2 Fem de movimiento

Sección 31.3 Ley de Lenz

El problema 61 del capítulo 29 puede ser asignado a esta sección.

20. Un automóvil tiene una antena de radio vertical de 1.20 m de alto. El automóvil viaja a 65.0 km/h en una carretera horizontal donde el campo magnético de la Tierra es de 50.0 μT dirigido hacia el norte hacia abajo y forma un ángulo de 65.0° por debajo de la horizontal. a) Especifique la dirección en que debe moverse el automóvil a fin de generar en la antena una fem de movimiento máxima, que para la punta de la antena sea positiva en relación con la base. b) Calcule la magnitud de esta fem inducida.

21. ● Un avión pequeño, con una envergadura de 14.0 m, vuela hacia el norte con una rapidez de 70.0 m/s sobre una región donde la componente vertical del campo magnético de la Tierra es 1.20 μT hacia abajo. a) ¿Qué diferencia de potencial se desarrolla entre las puntas de las alas? ¿Cuál punta de ala está a mayor potencial? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cómo cambiaría la respuesta si el avión vira para volar hacia el este? c) ¿Se puede usar esta fem para activar una luz en el compartimiento de pasajeros? Explique su respuesta.

22. Considere el arreglo que se muestra en la figura P31.22. Suponga que $R = 6.00\ \Omega$, $\ell = 1.20$ m y un campo magnético uniforme de 2.50 T dirigido hacia el interior de la página. ¿Con qué rapidez deberá moverse la barra para producir una corriente de 0.500 A en el resistor?

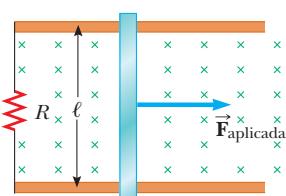



Figura P31.22 Problemas 22, 23 y 24.

23. La figura P31.22 muestra una vista superior de una barra que puede deslizarse sin fricción. El resistor es de 6.00 Ω y un campo magnético de 2.50 T está dirigido perpendicularmente hacia abajo hacia el interior del papel. Sea $\ell = 1.20$ m. a) Calcule la fuerza aplicada requerida para mover la barra hacia la derecha con una rapidez constante de 2.00 m/s. b) ¿Con qué rapidez se entrega energía al resistor?

24. ● Una varilla conductora de longitud ℓ se mueve sobre dos rieles horizontales libres de fricción, como se observa en la figura P31.22. Si una fuerza constante de 1.00 N mueve la barra a 2.00 m/s a través de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ dirigido hacia el interior de la página, a) ¿cuál es la corriente que pasa a través del resistor R de 8.00 Ω? b) ¿Con qué rapidez se suministra energía al resistor? c) ¿Cuál es la potencia mecánica entregada por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\text{aplicada}}$? d) ¿Explique la correspondencia entre las cantidades calculadas en los incisos b) y c).

25. El *generador homopolar,* también conocido como *disco de Faraday*, es un generador eléctrico de bajo voltaje y de corriente elevada. Está formado por un disco conductor giratorio con una escobilla inmóvil (un contacto eléctrico deslizante) sobre su eje y otra escobilla en algún punto de su circunferencia, como se muestra en la figura P31.25. Si aplica un campo magnético perpendicular al plano del disco, suponga que el campo tiene un valor de 0.900 T, que la rapidez angular es de 3200 rev/min y que el radio del disco es de 0.400 m. Determine la fem generada entre las escobillas. Cuando se utilizan bobinas superconductoras para producir un gran campo magnético, un generador homopolar puede llegar a tener una potencia de salida de varios megawatts. Este tipo de generador es útil, por ejemplo, para la purificación de metales mediante electrólisis. Si se aplica un voltaje a las terminales de salida del generador, éste funcionará a la inversa, como un *motor homopolar* capaz de entregar un momento de torsión elevado, lo que es útil en la propulsión de los barcos.

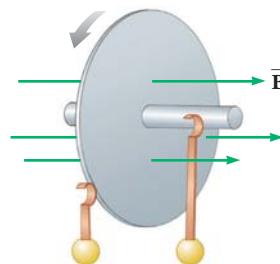



Figura P31.25

26. **Problema de repaso.** Para reencordar su guitarra acústica un estudiante une una simple cuerda metálica flexible con una densidad lineal de 3.00×10^{-3} kg/m entre dos puntos fijos a 64.0 cm de distancia aplicando una tensión de 267 N y es distraído por un videojuego. Su compañero de cuarto conecta un voltímetro entre los extremos de la cuerda metálica y coloca un imán a tavés de la cuerda, como se muestra en la

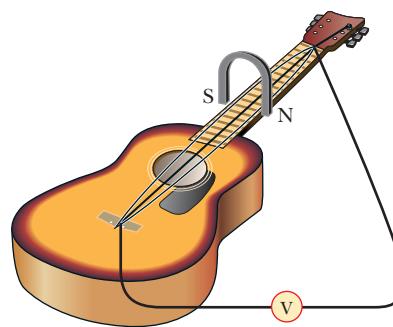



Figura P31.26

figura P31.26. El imán no toca la cuerda. Suponga que este imán produce un campo magnético de 4.50 mT a lo largo de un tramo de 2.00 cm de largo en el centro de la cuerda, y un campo despreciable en otras partes. Se establece una vibración en la cuerda a su frecuencia fundamental (la más baja). La sección de la cuerda en el campo magnético se mueve perpendicular al campo con una amplitud uniforme de 1.50 cm. Determine a) la frecuencia y b) la amplitud de la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de la cuerda.

27. Un helicóptero tiene aspas de 3.00 m de longitud que se extienden desde un eje central y giran a 2.00 rev/s. Si el componente vertical del campo magnético de la Tierra es de 50.0 μT, ¿cuál es la fem inducida entre la punta del aspa y el eje central?

28. Utilice la ley de Lenz para responder las siguientes preguntas relativas a la dirección de las corrientes inducidas. a) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el resistor R de la figura P31.28a cuando el imán de barra se mueve hacia la izquierda? b) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el resistor R inmediatamente después de haber cerrado el interruptor S de la figura P31.28b? c) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en R cuando la corriente I de la figura P31.28c disminuye rápidamente hasta cero? d) Una barra de cobre se mueve hacia la derecha manteniendo su eje perpendicular al campo magnético, como se muestra en la figura P31.28d. Si la parte superior de la barra se hace positiva en relación con la parte inferior, ¿cuál es la dirección del campo magnético?

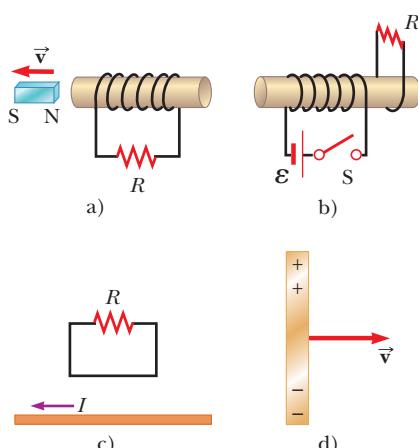



Figura P31.28

29. Una bobina rectangular con una resistencia R tiene N vueltas, longitud ℓ y ancho w, como se observa en la figura P31.29. La bobina se mueve hacia un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}$. ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza magnética total sobre la bobina a) conforme entra en el campo magnético, b) conforme se mueve en el interior de éste, y c) conforme sale de él?

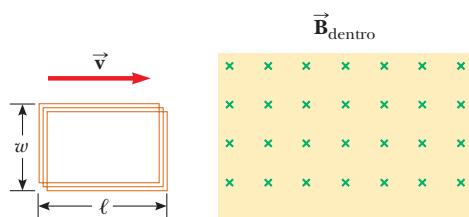



Figura P31.29

30. ● En la figura P31.30, el imán de barra se mueve hacia la espira. ¿El valor $V_a - V_b$ es positivo, negativo o cero? Explique su razonamiento.

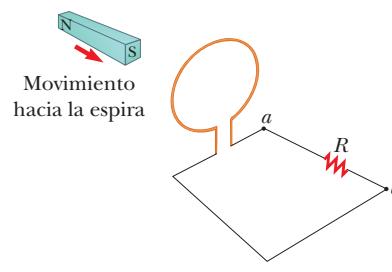



Figura P31.30

31. Dos rieles paralelos de resistencia despreciable tienen una separación de 10.0 cm y están interconectados mediante un resistor de 5.00 Ω. El circuito también contiene dos varillas metálicas con resistencias de 10.0 Ω y de 15.0 Ω que se deslizan sobre los rieles (figura P31.31). Las varillas se desplazan hacia afuera del resistor a rapidez constante de 4.00 m/s y 2.00 m/s, respectivamente. Se aplica un campo magnético de magnitud 0.010 0 T perpendicular al plano de los rieles. Determine la corriente en el resistor de 5.00 Ω.

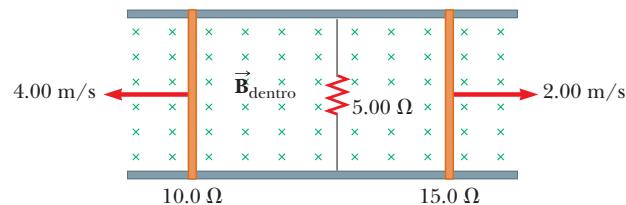



Figura P31.31

Sección 31.4 Fem inducida y campos eléctricos

32. Para la situación que se muestra en la figura P31.32, el campo magnético cambia con el tiempo según la expresión $B = (2.00t^3 - 4.00t^2 + 0.800)$T, y $r_2 = 2R = 5.00$ cm. a) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida sobre un electrón localizado en el punto P_2 cuando $t = 2.00$ s. b) ¿En qué instante esta fuerza es igual a cero?

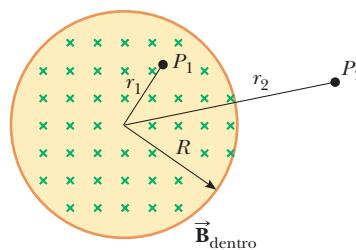



Figura P31.32 Problemas 32 y 33.

33. Un campo magnético dirigido hacia el interior de la página cambia con el transcurso del tiempo según la expresión $B = (0.030\,0t^2 + 1.40)$T, donde t está en segundos. El campo tiene una sección transversal circular con un radio $R = 2.50$ cm (figura P31.32). ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto P_1 cuando $t = 3.00$ s y $r_1 = 0.020\,0$ m?

34. Un solenoide largo con 1000 vueltas por cada metro y un radio de 2.00 cm lleva una corriente oscilatoria determinada por $I = (5.00 \text{ A}) \text{ sen } (100\ \pi t)$. ¿Cuál es el campo eléctrico inducido en el radio $r = 1.00$ cm desde eje del solenoide? ¿Cuál es la dirección de este campo eléctrico cuando la corriente en la bobina crece en dirección contraria a las manecillas del reloj?

Sección 31.5 Generadores y motores

Los problemas 40 y 54 del capítulo 29 pueden asignarse a esta sección.

35. Una bobina con un área de 0.100 m^2 gira a 60.0 rev/s con su eje de rotación perpendicular a un campo magnético de 0.200 T. a) Si la bobina tiene 1000 vueltas, ¿cuál es la fem máxima generada en la misma? b) ¿Cuál es la orientación de la bobina en relación con el campo magnético cuando se presenta la fem máxima inducida?

36. En un alternador de automóvil de 250 vueltas, el flujo magnético de cada vuelta es de $\Phi_B = (2.50 \times 10^{-4}\text{Wb}) \cos \omega t$, donde ω es la rapidez angular del alternador. Este último está acoplado para girar 3 veces el número de revoluciones del motor. Cuando éste funciona con una rapidez angular de 1000 rev/min, determine a) la fem inducida en el alternador como una función del tiempo y b) la fem máxima en el alternador.

37. Un solenoide largo, con su eje a lo largo del eje x, está formado por 200 vueltas por cada metro de alambre y tiene una corriente estable de 15.0 A. Se forma una espira al enrollar 30 vueltas de alambre delgado alrededor de un marco circular con un radio de 8.00 cm. La bobina se coloca en el interior del solenoide y se monta sobre un eje que es un diámetro de la bobina y coincide con el eje y. A continuación se hace que la bobina gire con una rapidez angular de 4.00π rad/s. El plano de la bobina yace en el plano yz en $t = 0$. Determine la fem que se genera en la bobina como una función del tiempo.

38. A un imán de barra se le hace girar con una rapidez angular constante ω alrededor de un eje, como se muestra en la figura P31.38. El imán está rodeado por una espira conductora rectangular plana e inmovil, y en $t = 0$ el imán está orientado según se aprecia. Dibuje una gráfica cualitativa de la corriente inducida en la espira como una función del tiempo, con las corrientes en dirección contraria a las manecillas del reloj como positivas y las corrientes en el sentido opuesto como negativas.

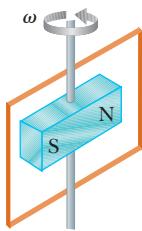



Figura P31.38

39. Un motor con un funcionamiento normal lleva una corriente directa de 0.850 A cuando está conectado a una alimentación de energía de 120 V. La resistencia de los embobinados del motor es de 11.8 Ω. Mientras funciona normalmente, a) ¿cuál es la contrafuerza electromotriz que genera? b) ¿Con qué rapidez se produce energía interna en los embobinados? c) **¿Qué pasaría si?** Suponga que algún desperfecto detiene el giro de la flecha del motor. ¿Con qué rapidez se producirá energía interna en los embobinados en esta situación? (La mayoría de los motores tienen un interruptor térmico que desconecta el motor cuando esto se presenta, lo que evita el sobrecalentamiento.)

40. La espira giratoria cuadrada de un generador de CA tiene 10.0 cm por lado. Se hace girar a 60.0 Hz en un campo uniforme de 0.800 T. Calcule a) el flujo a través de ella como una función del tiempo, b) la fem inducida, c) la corriente inducida si ésta tiene una resistencia de 1.00 Ω, d) la potencia entregada y e) el momento de torsión que se debe ejercer para que gire.

Sección 31.6 Corrientes de eddy

41. ● La figura P31.41 representa un freno electromagnético que utiliza corrientes de eddy. El electroimán cuelga de un carro de ferrocarril cerca de uno de los rieles. Para frenar el carro, se envía una corriente considerable a través de las bobinas del electroimán. El electroimán móvil induce corrientes de eddy en los rieles, cuyos campos se oponen al cambio en el campo del electroimán. Los campos magnéticos de las corrientes de eddy ejercen fuerza sobre la corriente del electroimán, reduciendo así la velocidad del carro. Las direcciones de este último y de la corriente en el electroimán están ilustradas correctamente en la imagen. Determine cuál de las corrientes de eddy que se muestran sobre los rieles es la correcta. Explique su respuesta.

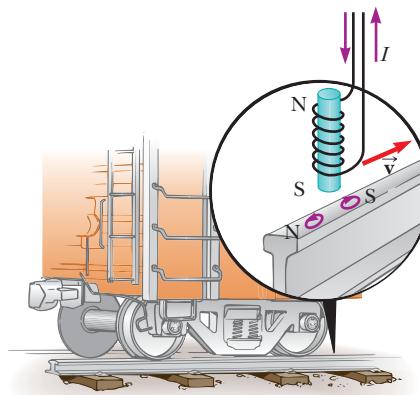



Figura P31.41

42. Un *horno de inducción* aplica inducción electromagnética para producir corrientes de eddy en un conductor, lo que eleva la temperatura del conductor. La unidades comerciales funcionan con frecuencias que varían de 60 Hz a aproximadamente 1 MHz y entregan potencias desde algunos watts hasta varios megawatts. El calentamiento por inducción se puede usar para calentar una sartén metálica en una estufa de cocina y para evitar oxidación y contaminación del metal cuando se suelda en una caja al vacío. Con altas frecuencias, las corrientes inducidas se presentan sólo cerca de la superficie del conductor, en un fenómeno llamado "efecto piel". Al crear una corriente inducida durante un breve intervalo de tiempo con una frecuencia adecuadamente alta, uno puede calentar una muestra abajo a una profundidad controlada. Por ejemplo, la superficie de un arado se puede templar para hacerla dura y quebradiza para un corte efectivo mientras mantiene el metal interior suave y dúctil para resistir el rompimiento.

Para explorar el calentamiento por inducción, considere un disco conductor plano de radio R, grosor b y resistividad ρ. Un campo magnético sinusoidal $B_{\text{máx}} \cos \omega t$ se aplica perpendicular al disco. Suponga que el campo es uniforme en el espacio y la frecuencia es tan baja que el efecto piel no es importante; también que las corrientes de eddy se presentan en círculos concéntricos con el disco. a) Calcule la potencia pro-

medio entregada al disco. b) **¿Qué pasaría si?** ¿En qué factor cambia la potencia cuando la amplitud del campo se duplica? c) ¿Cuando la frecuencia se duplica? d) ¿Cuando el radio del disco se duplica?

43. ● Una espira rectangular conductora de masa M, resistencia R y dimensiones w por ℓ cae desde el reposo en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$, como se ilustra en la figura P31.43. Durante el intervalo de tiempo que transcurre antes de que el borde superior de la espira llegue al campo, ésta se acerca con una rapidez terminal v_T. a) Demuestre que

$$v_T = \frac{MgR}{B^2w^2}$$

b) ¿Por qué v_T es proporcional a R? c) ¿Por qué es inversamente proporciona a B^2?

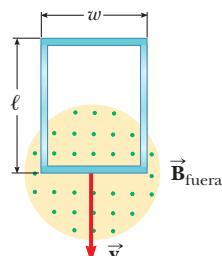



Figura P31.43

Problemas adicionales

44. ● Considere el aparato que se muestra en la figura P31.44, en el que una barra conductora se puede mover a lo largo de dos rieles conectados a una lámpara. Todo el sistema está sumergido en un campo magnético de 0.400 T perpendicular hacia dentro de la página. La distancia vertical entre los rieles horizontales es 0.800 m. La resistencia de la lámpara es 48.0 Ω, supuesta como constante. La barra y los rieles tienen resistencia despreciable. La barra se mueve hacia la derecha por una fuerza constante de 0.600 N de magnitud. a) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el circuito? b) Si la rapidez de la barra es 15.0 m/s en un instante particular, ¿cuál es el valor de la corriente inducida? c) Argumente que la fuerza constante hace que la rapidez de la barra aumente y tienda a cierta rapidez terminal. Encuentre el valor de esta rapidez máxima. d) ¿Qué potencia se entrega a la lámpara cuando la barra se mueve a su rapidez terminal? e) Se supuso que la resistencia de la lámpara es constante. En realidad, conforme aumenta la potencia entregada a la lámpara, la temperatura del filamento aumenta y la resistencia aumenta. Explique conceptualmente (no algebraicamente) si la rapidez terminal encontrada en el inciso c) cambia si la resistencia aumenta. Si la rapidez terminal cambia, ¿aumenta o disminuye? f) Con la suposición de que la resistencia de la lámpara aumenta conforme la corriente aumenta, explique matemáticamente si la potencia encontrada en el inciso d) cambia debido al aumento en la resistencia. Si cambia, ¿la potencia real es mayor o menor que el valor encontrado anteriormente?

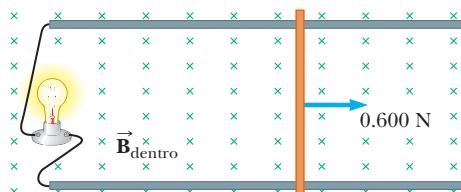



Figura P31.44

45. Ante una cuerda de guitarra de acero que vibra (figura 31.5a), la componente del campo magnético perpendicular al área de una bobina captora cercana se conoce por

$$B = 50.0 \text{ mT} + (3.20 \text{ mT}) \operatorname{sen}(1046\pi t)$$

La bobina captora circular tiene 30 vueltas y un radio de 2.70 mm. Determine la fem inducida en la bobina como una función del tiempo.

46. En los procesos médicos como la visualización mediante resonancia magnética, o IRM, se usan campos magnéticos intensos. Un técnico que usa un brazalete de latón que encierra un área de 0.005 00 m² coloca su mano en un solenoide cuyo campo magnético es 5.00 T con dirección perpendicular al plano del brazalete. La resistencia eléctrica alrededor del círculo del brazalete es 0.020 0 Ω. Una falla súbita de potencia hace que el campo caiga a 1.50 T en un intervalo de tiempo de 20.0 ms. Encuentre a) la corriente inducida en el brazalete y b) la potencia entregada al brazalete. *Nota:* Como implica este problema, no debe usar objetos metálicos cuando trabaje en regiones de campos magnéticos intensos.

47. La figura P31.47 es una gráfica de la fem inducida en función del tiempo para una bobina de N vueltas que gira con una rapidez angular ω en un campo magnético uniforme con dirección perpendicular al eje de rotación de la bobina. **¿Qué pasaría si?** Copie este dibujo (a una escala mayor), y en el mismo conjunto de ejes muestre la gráfica de la fem en función de t a) si duplica el número de vueltas de la bobina; b) si en vez de lo anterior duplica la rapidez angular, y c) si se duplica la rapidez angular y al mismo tiempo se reduce a la mitad el número de vueltas.

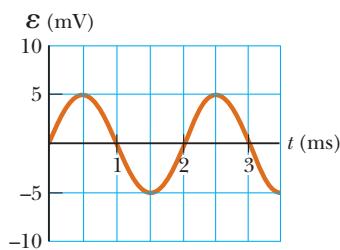



Figura P31.47

48. Dos solenoides infinitamente largos (ilustrados de manera transversal) pasan a través de un circuito, como se muestra en la figura P31.48. La magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ en el interior de cada uno de los solenoides es la misma y se incrementa a una proporción de 100 T/s. ¿Cuál es la corriente que pasa por cada resistor?

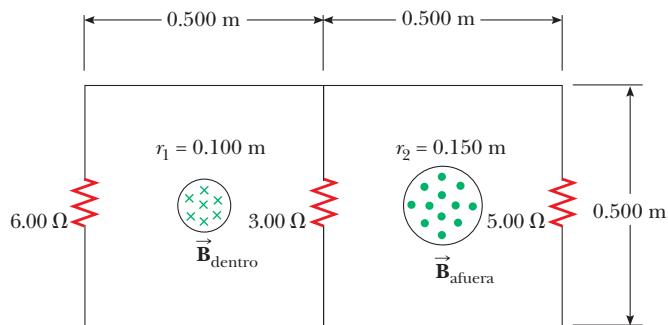



Figura P31.48

49. Una varilla conductora de longitud $\ell = 35.0$ cm está libre para deslizarse sobre dos barras paralelas conductoras, como se muestra en la figura P31.49. Dos resistores, $R_1 = 2.00\ \Omega$ y $R_2 = 5.00\ \Omega$, están conectados en los extremos de las barras formando una espira. Un campo magnético constante $B = 2.50$ T está dirigido perpendicularmente hacia el interior de la página. Un agente externo jala la varilla hacia la izquierda con una rapidez constante $v = 8.00$ m/s. Determine a) las corrientes que pasan por ambos resistores, b) la potencia total entregada a la resistencia del circuito y c) la magnitud de la fuerza aplicada necesaria para mover la varilla a esta velocidad constante.

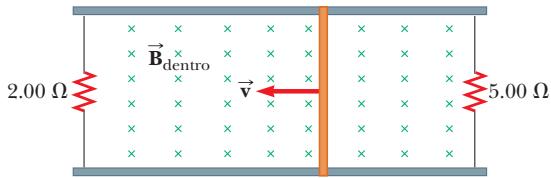



Figura P31.49

50. Una barra de masa m, longitud d y resistencia R se desliza sin fricción en un plano horizontal sobre rieles paralelos, como los que se muestran en la figura P31.50. Entre los rieles está conectada una batería que mantiene una fem $\mathcal{E}$ constante, y existe un campo magnético constante $\vec{\mathbf{B}}$ con dirección perpendicular al plano de la página. Si la barra parte del reposo, demuestre que en el tiempo t se mueve con una rapidez

$$v = \frac{\mathcal{E}}{Bd}\left(1 - e^{-B^2d^2t/mR}\right)$$

Figura P31.50

51. Suponga que, con el fin de fabricar una bobina, enrolla alambre en el cartón de soporte de un rollo de cinta de celofán. Describa cómo podrá utilizar un imán de barra para producir un voltaje inducido en la bobina. ¿Cuál es el orden de magnitud de la fem generada? Diga qué cantidades se han tomado como datos, así como sus valores.

52. Con frecuencia los valores de campo magnético se determinan con el uso de un dispositivo conocido como *bobina exploradora*. Esta técnica depende de la medición de la carga total que pasa a través de una bobina en un intervalo de tiempo en que el flujo magnético que liga los devanados cambia o debido al movimiento de la bobina o a un cambio en el valor de B. a) Demuestre que, conforme el flujo a través de la bobina cambia de Φ_1 a Φ_2, la carga transferida a través de la bobina se conoce por $Q = N(\Phi_2 - \Phi_1)/R$, donde R es la resistencia de la bobina y un amperímetro sensible conectado a través de ella y N es el número de vueltas. b) Como ejemplo específico, calcule B cuando una bobina de 100 vueltas, de 200 Ω de resistencia y área de sección transversal de 40.0 cm^2, produce los siguientes resultados. Una carga total de 5.00×10^{-4} C pasa a través de la bobina cuando da vueltas en un campo uniforme desde una posición donde el plano de la bobina es perpendicular al campo a una posición donde el plano de la bobina es paralelo al campo.

53. El plano de una espira cuadrada de alambre con $a = 0.200$ m de lado es perpendicular al campo magnético de la Tierra en un punto donde $B = 15.0\ \mu$T, como se observa en la figura P31.53. La resistencia total de la espira y de los alambres de conexión a un amperímetro de alta sensibilidad es de 0.500 Ω. Si aparecen súbitamente fuerzas horizontales y hacen que la espira se colapse como se muestra, ¿cuál es la carga total que pasa por el amperímetro?

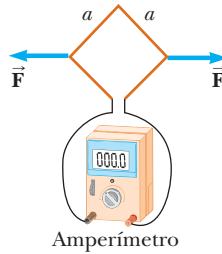



Figura P31.53

54. **Problema de repaso.** Una partícula de masa 2.00×10^{-16} kg y con una carga de 30.0 nC es acelerada a partir del reposo por un campo eléctrico muy intenso, y es disparada desde una fuente pequeña en el interior de una región de un campo magnético uniforme constante de 0.600 T. La velocidad de la partícula es perpendicular al campo. La órbita circular de la partícula encierra un flujo magnético de 15.0 μWb. a) Calcule la rapidez de la partícula. b) Estime, asimismo, la diferencia de potencial a través de la cual se aceleró la partícula en el interior de la fuente.

55. ● En la figura P31.55, el eje de rodamiento de 1.50 m de largo es empujado a lo largo de los rieles con una rapidez constante $v = 3.00$ m/s. En los puntos a y b de los rieles, directamente uno frente al otro, se conecta un resistor $R = 0.400\ \Omega$. Las ruedas hacen un buen contacto eléctrico con los rieles y, por tanto, el eje, los rieles y R forman un circuito cerrado. La única resistencia significativa en el circuito es R. En sentido vertical y hacia abajo existe un campo magnético uniforme $B = 0.080\,0$ T. a) Determine la corriente I inducida en el resistor. b) ¿Cuál es la fuerza horizontal F necesaria para mantener rodando el eje con rapidez constante? c) ¿Cuál de los extremos del resistor, a o b, está a un potencial eléctrico más elevado? d) **¿Qué pasaría si?** Cuando el eje circule más allá del resistor, ¿la corriente en R lo hará en dirección inversa? Explique su respuesta.

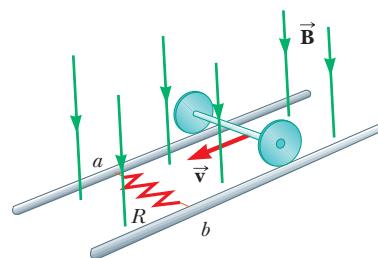



Figura P31.55

56. Una varilla conductora se mueve con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}$ en una dirección perpendicular a un alambre largo y recto que lleva una corriente I, como se observa en la figura P31.56. Demuestre que la magnitud de la fem generada entre los extremos de la varilla es igual a

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 v I \ell}{2\pi r}$$

En este caso, observe que la fem disminuye cuando se incrementa r, lo que era de esperarse.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

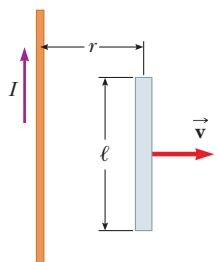



Figura P31.56

57. ● En la figura P31.57, un campo magnético uniforme disminuye con una rapidez constante $dB/dt = -K$, donde K es una constante positiva. En él se coloca una espira circular de alambre de radio a con una resistencia R y una capacitancia C con su plano normal al campo. a) Determine la carga Q en el capacitor cuando esté totalmente cargado. b) ¿Cuál de las placas estará con un potencial más elevado? c) Explique la fuerza que causa la separación de las cargas.

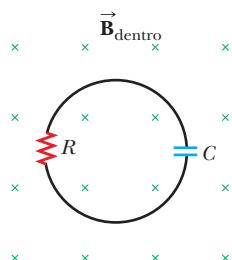



Figura P31.57

58. ● La figura P31.58 muestra una bobina circular compacta con 220 vueltas y 12.0 cm de radio sumergido en un campo magnético uniforme paralelo al eje de la bobina. La rapidez de cambio del campo tiene la magnitud constante de 20.0 mT/s. a) La siguiente pregunta no se puede responder con la información dada. *¿La bobina porta corriente en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario?* ¿Qué información adicional es necesaria para responder esta pregunta? b) La bobina se sobrecalienta si se le entregan más de 160 W de potencia. ¿Qué resistencia tendría la bobina en este punto crucial? Para presentarse más fría, ¿debe tener menor o mayor resistencia?

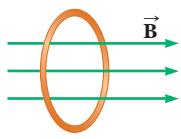



Figura P31.58

59. Una bobina rectangular de 60 vueltas, de dimensiones 0.100 m por 0.200 m y con una resistencia total de 10.0 Ω, gira con una rapidez angular de 30.0 rad/s sobre su eje y en una zona donde un campo magnético de 1.00 T está dirigido a lo largo del eje x. La rotación se inicia de forma que el plano de la bobina es perpendicular a la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ cuando $t = 0$. Calcule a) la fem inducida máxima en la bobina, b) la rapidez de cambio máxima del flujo magnético a través de la bobina, c) la fem inducida en el momento $t = 0.050\ 0$ s y d) el momento de torsión ejercido por el campo magnético sobre la bobina en el instante en que la fem registra un valor máximo.

60. Una rondana circular pequeña con un radio de 0.500 cm está sujeta directamente por debajo de un alambre largo recto que lleva una corriente de 10.0 A. La rondana está localizada 0.500 m por encima de una mesa (figura P31.60). a) Si se deja caer la rondana a partir del reposo, ¿cuál es la magnitud de la fem promedio inducida en la rondana desde que se deja libre hasta el momento en que se impacta sobre la mesa? Suponga que el campo magnético es prácticamente constante sobre el área de la rondana y es igual al campo magnético en el centro de la rondana. b) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la rondana?

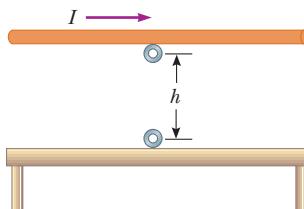



Figura P31.60

61. Una varilla conductora de longitud ℓ se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en paralelo con un alambre largo que lleva una corriente estable I. El eje de la varilla se mantiene perpendicular al alambre, con el extremo cerano a una distancia r del alambre, como se muestra en la figura P31.61. Demuestre que la magnitud de la fem inducida en la varilla es igual a

$$|\boldsymbol{\mathcal{E}}| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{\ell}{r}\right)$$

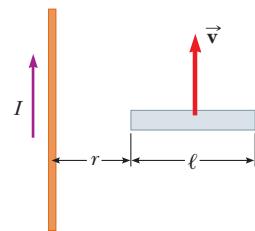



Figura P31.61

62. Una espira rectangular de dimensiones ℓ y w se mueve con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}$ alejándose de un alambre largo que conduce una corriente I en el plano de la espira (figura P31.62), cuya resistencia total es R. Deduzca una expresión para la corriente en la espira en el instante en que el lado cercano esté a una distancia r del alambre.

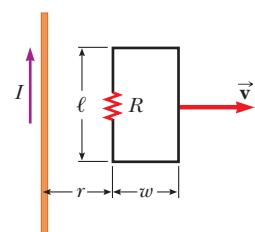



Figura P31.62

63. El flujo magnético a través de un anillo metálico varía con el tiempo t según $\Phi_B = 3(at^3 - bt^2)$ T · m², con $a = 2.00$ s^{-3} y $b = 6.00$ s^{-2}. La resistencia del anillo es de 3.00 Ω. Determine la corriente máxima inducida en el anillo durante el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 2.00$ s.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

64. **Problema de repaso.** La barra de masa m de la figura P31.64 es desplazada horizontalmente sobre rieles paralelos y sin fricción mediante un hilo sin masa que pasa por encima de una polea ligera y sin fricción unida a un objeto suspendido de masa M. El campo magnético uniforme tiene una magnitud B y ℓ es la distancia entre los rieles. La única resistencia eléctrica significante es el resistor de carga R, que conecta a los rieles en sus extremos. Deduzca una expresión que proporcione la rapidez horizontal de la barra en función del tiempo, si el objeto suspendido se libera con la barra en reposo en $t = 0$.

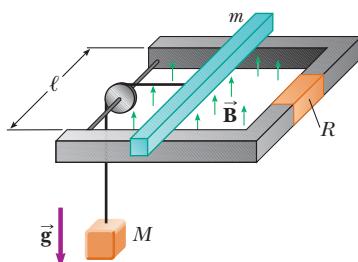



Figura P31.64

65. Un *betatrón* es un dispositivo que acelera electrones a energías en el intervalo de MeV mediante inducción electromagnética. Los electrones en una cámara de vacío se mantienen en una órbita circular mediante un campo magnético perpendicular al plano orbital. El campo magnético se aumenta gradualmente para inducir un campo eléctrico alrededor de la órbita. a) Demuestre que el campo eléctrico está en la dirección correcta para hacer que los electrones aumenten su velocidad.

b) Suponga que el radio de la órbita permanece constante. Demuestre que el campo magnético promedio sobre el área encerrada por la órbita debe ser el doble de grande que el campo magnético en la circunferencia del círculo.

66. Un alambre retorcido de 30.0 cm de largo se mantiene paralelo a un alambre largo que conduce 200 A que yace en el piso (figura P31.66) y a 80.0 cm por encima de éste. El alambre de 30.0 cm se suelta y cae en el instante $t = 0$, siempre en paralelo con el alambre conductor de corriente. Suponga que el alambre que cae se acelera a 9.80 m/s². a) Deduzca una ecuación para la fem inducida como una función del tiempo. b) ¿Cuál es el valor mínimo de la fem? c) ¿Cuál es el valor máximo? d) ¿Cuál es la fem inducida 0.300 s después de soltarlo?

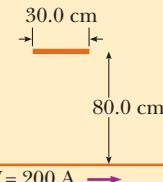



Figura P31.66

67. Un alambre recto y largo lleva una corriente según la expresión $I = I_{máx}$ sen $(\omega t + \phi)$ y yace en el plano de una bobina rectangular de N vueltas de alambre, según se observa en la figura P31.8. Las cantidades $I_{máx}$, ω y ϕ son constantes. Determine la fem inducida en la bobina por el campo magnético creado por la corriente en el alambre recto. Suponga que $I_{máx} = 50.0$ A, $\omega = 200\ \pi s^{-1}$, $N = 100$, $h = \omega = 5.00$ cm y $L = 20.0$ cm.

Respuestas a las preguntas rápidas

31.1 c) En todos los casos, con excepción de éste, existe un cambio en el flujo magnético a través de la espira.

31.2 c) La fuerza sobre el alambre tiene una magnitud $F_{aplicada} = F_B = I\ell B$, con I definida por la ecuación 31.6. Debido a eso, la fuerza es proporcional a la rapidez y se duplica. Puesto que $\mathcal{P} = F_{aplicada}v$, la duplicación de la fuerza *y* de la rapidez da como resultado una potencia cuatro veces más grande.

31.3 b) En la posición de la espira, las líneas de campo magnético causadas por el alambre apuntan hacia el interior de la página. La espira entra en la región de un campo magnético más intenso conforme cae hacia el alambre, por lo que el flujo se incrementa. La corriente inducida debe establecer un campo magnético que se oponga a este incremento. Para ello genera un campo magnético dirigido hacia el exterior de la página. Según la regla de la mano derecha para espiras de corriente, esto exige en la espira la presencia de una corriente en sentido contrario a las manecillas del reloj.

31.4 a) Aunque al reducir la resistencia es posible incrementar la corriente que el generador suministra a una carga, esto no altera a la fem. La ecuación 31.11 muestra que la fem depende de ω, B y N, por lo que todas las demás elecciones incrementan la fem.

31.5 b) Cuando se mueve una hoja de aluminio entre los polos del imán, se establecen en el aluminio corrientes de eddy. Según la ley de Lenz, estas corrientes tienen una dirección tal que se oponen al cambio original, esto es, el movimiento de la hoja de aluminio dentro del campo magnético. Se utiliza el mismo principio en las balanzas comunes de laboratorio de tres astiles. Procure tener a la mano un imán y una hoja de aluminio la próxima vez que utilice una balanza de este tipo.

Un bucador de tesoros usa un detector de metales en busca de objetos enterrados en una playa. En el extremo del detector de metales hay una bobina de alambre que es parte de un circuito. Cuando la bobina está cerca de un objeto metálico, la inductancia de la bobina se afecta y la corriente en el circuito cambia. Este cambio provoca una señal en los audífonos que lleva puestos el buscador.

32 Inductancia

En el capítulo 31 se vio que en una espira de alambre se inducen una fem y una corriente cuando el flujo magnético a través del área encerrada por la espira cambia con el tiempo. Este fenómeno de la inducción electromagnética tiene algunas consecuencias prácticas. En este capítulo, primero se describe un efecto conocido como *autoinducción*, en el cual una corriente variable con el tiempo en un circuito produce una fem inducida que se opone a la fem establecida inicialmente por dicha corriente. La autoinducción es la base del *inductor*, un elemento de circuito eléctrico. Se explica la energía almacenada en el campo magnético de un inductor y la densidad de energía asociada con el campo magnético.

A continuación estudiará la forma en que se induce una fem en una bobina como resultado de un flujo magnético cambiante producido por una segunda bobina; este es el principio básico de la *inducción mutua*. Por último, examinará las características de circuitos que contienen inductores, resistores y capacitores en diferentes combinaciones.

32.1 Autoinducción e inductancia

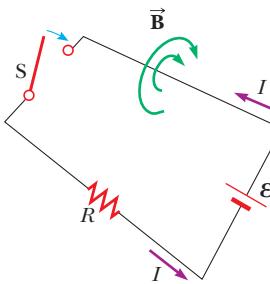
En este capítulo será necesario distinguir cuidadosamente entre fems y corrientes causadas por fuentes físicas como baterías y aquellas inducidas por campos magnéticos cambiantes. Cuando se utiliza un término sin adjetivos (por ejemplo, *fem* y *corriente*) se describe

JOSEPH HENRY
Físico estadounidense (1797-1878)
Henry se convirtió en el primer director del Instituto Smithsoniano y en el primer presidente de la Academia de Ciencias Naturales. Mejoró el diseño del electroimán y construyó uno de los primeros motores. También descubrió el fenómeno de la autoinducción, pero no publicó sus resultados. La unidad de la inductancia, el henry, es llamada así en su honor.

Figura 32.1 Una vez cerrado el interruptor, la corriente produce un flujo magnético a través del área encerrada por la espira. Conforme la corriente aumenta hacia su valor de equilibrio, este flujo magnético cambia con el tiempo e induce una fem en la espira.

los parámetros asociados con una fuente física y si se utiliza el adjetivo *inducido* se describe aquellas fems y corrientes causadas por un campo magnético cambiante.

Considere un circuito formado por un interruptor, un resistor y una fuente de fem, como se muestra en la figura 32.1. El diagrama de circuito se representa en perspectiva para mostrar las orientaciones de algunas líneas de campo magnético debido a la corriente en el circuito. Cuando el interruptor se coloca en posición cerrada, la corriente no salta inmediatamente de cero a su valor máximo $\mathcal{E}/R$. Para describir este efecto se puede utilizar la ley de la inducción electromagnética de Faraday (ecuación 31.1). Conforme la corriente aumenta con el tiempo, el flujo magnético debido a esta corriente, a través de la espira del circuito, también aumenta. Este flujo creciente genera una fem inducida en el circuito. La dirección de la fem inducida es tal que causaría una corriente inducida en la espira (si ésta no llevase ya una corriente), que establecería un campo magnético opuesto al cambio en el campo magnético original. Por lo tanto, la dirección de la fem inducida es en sentido opuesto a la dirección de la fem de la batería, lo que da como resultado un incremento gradual, en vez de instantáneo, de la corriente hasta que alcance su valor de equilibrio final. Debido a la dirección de la fem inducida también se le conoce como *fuerza contraelectromotriz*, que es similar a la que se presenta en un motor, como se explicó en el capítulo anterior. Este efecto se llama **autoinducción** debido a que el flujo cambiante a través del circuito y la fem inducida resultante surge del circuito mismo. La fem $\mathcal{E}_L$ establecida en este caso se llama **fem autoinducida**.

Para obtener una descripción cuantitativa de la autoinducción, recuerde la ley de Faraday, la cual dice que la fem inducida es igual al negativo de la rapidez de cambio en el tiempo del flujo magnético. Éste es proporcional al campo magnético que en su momento es proporcional a la corriente en el circuito. Debido a eso, **una fem autoinducida siempre es proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo de la corriente**. Para cualquier espira de alambre, se puede escribir esta proporcionalidad como

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} \tag{32.1}$$

donde L es una constante de proporcionalidad —llamada **inductancia** de la espira— que depende de la geometría de la espira y de otras características físicas. Si considera una bobina con espacios cerrados de N vueltas (un toroide o un solenoide ideal) que lleva una corriente I y contiene N vueltas, la ley de Faraday dice que $\mathcal{E}_L = -N\,d\Phi_B/dt$, Al combinar esta expresión con la ecuación 32.1 da:

Inductancia de una bobina N vueltas ►

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \tag{32.2}$$

donde se supone que pasa el mismo flujo magnético a través de cada una de las vueltas y L es la inductancia de toda la bobina. Por la ecuación 32.1, también se escribe la inductancia como la relación

Inductancia ►

$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt} \tag{32.3}$$

Recuerde que la resistencia mide la oposición a la corriente ($R = \Delta V/I$); en comparación, la ecuación 32.3 muestra que la inductancia es una medida de oposición a un *cambio* en la corriente.

La unidad del SI para la inductancia es el **henry** (H), el que, como se puede ver por la ecuación 32.3, equivale a 1 volt-segundo por cada ampere: $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A}$.

Como se muestra en el ejemplo 32.1, la inductancia de una bobina depende de su geometría. Esta dependencia es similar a la capacitancia de un capacitor que depende de la geometría de sus placas, como se vio en el capítulo 26. Calcular la inductancia puede ser bastante complicado en el caso de geometrías complejas; sin embargo, los ejemplos que se dan a continuación involucran situaciones simples para evaluar fácilmente sus inductancias.

Pregunta rápida 32.1 Una bobina con una resistencia igual a cero tiene sus extremos señalados como *a* y *b*. El potencial en *a* es mayor que en *b*. ¿Cuál de los siguientes incisos es consistente con este caso? a) La corriente es constante y se dirige de *a* a *b*; b) la corriente es constante y se dirige de *b* a *a*; c) la corriente está en aumento y se dirige de *a* a *b*; d) la corriente disminuye y se dirige de *a* a *b*; e) la corriente aumenta y se dirige de *b* a *a*; f) la corriente es decreciente y se dirige de *b* a *a*.

EJEMPLO 32.1 Inductancia de un solenoide

Considere un solenoide con *N* vueltas y longitud ℓ devanado uniformemente. Suponga que ℓ es mucho mayor que el radio de los devanados y que el núcleo del solenoide es aire.

A) Encuentre la inductancia del solenoide.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las líneas de campo magnético de cada vuelta del solenoide pasan a través de todas las vueltas, de modo que una fem inducida en cada bobina se opone al cambio en la corriente.

Categorizar Ya que el solenoide es largo, se pueden usar los resultados para un solenoide ideal obtenidos en el capítulo 30.

Analizar Encuentre el flujo magnético a través de cada vuelta de área *A* en el solenoide; use la expresión para el campo magnético de la ecuación 30.17:

$$\Phi_B = BA = \mu_0 nIA = \mu_0 \frac{N}{\ell} IA$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 32.2:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \qquad \textbf{(32.4)}$$

B) Calcule la inductancia del solenoide si contiene 300 vueltas, su longitud es de 25.0 cm y su área de sección transversal es de 4.00 cm^2.

SOLUCIÓN

Sustituya los valores numéricos en la ecuación 32.4:

$$L = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{(300)^2}{25.0 \times 10^{-2} \text{ m}} (4.00 \times 10^{-4} \text{ m}^2)$$

$$= 1.81 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2\text{/A} = 0.181 \text{ mH}$$

C) Calcule la fem autoinducida en el solenoide si la corriente que porta disminuye a la relación de 50.0 A/s.

SOLUCIÓN

Sustituya $dI/dt = -50.0$ A/s en la ecuación 32.1:

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = -(1.81 \times 10^{-4} \text{ H})(-50.0 \text{ A/s})$$

$$= 9.05 \text{ mV}$$

Finalizar El resultado para el inciso A) muestra que L depende de la geometría y es proporcional al cuadrado del número de vueltas. Porque $N = n\ell$, el resultado también se puede expresar en la forma

$$L = \mu_0 \frac{(n\ell)^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A\ell = \mu_0 n^2 V \tag{32.5}$$

donde $V = A\ell$ es el volumen interior del solenoide.

32.2 Circuitos *RL*

Si un circuito contiene una bobina, como un solenoide, la autoinductancia de ésta impide que la corriente en el circuito aumente o disminuya de manera instantánea. Un elemento de circuito con una gran inductancia se conoce como **inductor** y utiliza el símbolo de circuito —ᴗᴗᴗ—. Siempre suponga que la inductancia del resto del circuito se puede ignorar en comparación con la del inductor, sin embargo. Recuerde que incluso un circuito sin una bobina tiene algo de inductancia que puede afectar su comportamiento.

Dado que la inductancia en un inductor resulta en una fuerza contraelectromotriz, **un inductor en un circuito se opone a los cambios en la corriente dentro de dicho circuito**. El inductor intenta mantener la corriente igual a como estaba antes de que ocurriera el cambio. Si el voltaje de la batería en el circuito se incrementa para aumentar la corriente, el inductor se opone a este cambio, y el aumento de corriente no es instantáneo. Si se reduce el voltaje de la batería, el inductor da como resultado una reducción lenta de la corriente en vez de una caída inmediata. Por lo tanto, el inductor hace que el circuito sea lento en reaccionar a los cambios en el voltaje.

Considere el circuito que se muestra en la figura 32.2, que contiene una batería de resistencia interna despreciable. Este circuito es un **circuito *RL*** porque los elementos conectados a la batería son un resistor y un inductor. Las líneas curvas en el interruptor S_2 sugieren que este interruptor nunca se puede abrir; siempre está en a o en b. (Si el interruptor no se conecta ni a a ni a b, cualquier corriente en el circuito súbitamente se detiene.) Suponga que S_2 se pone en a y que el interruptor S_1 se abre para $t < 0$ y luego se cierra en $t = 0$. La corriente en el circuito comienza a aumentar y en el inductor se induce una fuerza contraelectromotriz (ecuación 32.1) que se opone a la corriente creciente.

Figura 32.2

Circuito *RL*. Cuando el interruptor S_2 está en la posición a, la batería está en el circuito. Cuando el interruptor S_1 se cierra, la corriente aumenta y se induce una fem en el inductor que se opone a la corriente creciente. Cuando el interruptor está en la posición b, la batería ya no es parte del circuito y la corriente disminuye. El interruptor está diseñado de modo que nunca se abre, lo que haría que la corriente se detuviera.

Con esto en mente, es posible aplicar la regla de la espira de Kirchhoff a este circuito, recorriendo el circuito en el sentido de las manecillas del reloj:

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{32.6}$$

donde IR es la caída de voltaje a través del resistor. (Las reglas de Kirchhoff se desarrollan para circuitos con corrientes estables, pero también pueden aplicarse a un circuito en que la corriente está cambiando, si imagina que representan un circuito en un *instante* de tiempo.) Ahora debe buscar una solución para esta ecuación diferencial, una similar a la que aplicó para un circuito RC (véase la sección 28.4.)

Una solución matemática de la ecuación 32.6 representa la corriente en el circuito como una función del tiempo. Para determinar esta solución, cambie las variables, haciendo que $x = (\mathcal{E}/R) - I$, para que $dx = -dI$. Con estas sustituciones, escriba la ecuación 32.6 de la siguiente manera

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

Reordenando e integrando esta última expresión, tiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}t$$

donde x_0 es el valor de x en el tiempo $t = 0$. Si toma el antilogaritmo de este resultado, obtiene

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

Porque $I = 0$ en $t = 0$, observe a partir de la definición de x que $x_0 = \mathcal{E}/R$. En consecuencia, esta última expresión es equivalente a

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-Rt/L}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Esta expresión muestra cómo la corriente es afectada por el inductor. La corriente no aumenta de manera instantánea hasta su valor de equilibrio final cuando el interruptor se cierra, sino que aumenta de acuerdo con una función exponencial. Si retira la inductancia del circuito, al hacer que L tienda a cero, el término exponencial será cero y en este caso la corriente no depende del tiempo; en ausencia de la inductancia la corriente aumenta de manera instantánea a su valor de equilibrio final.

También escriba esta expresión como

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad \textbf{(32.7)}$$

donde la constante τ es la **constante de tiempo** del circuito *RL*:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \textbf{(32.8)}$$

◀ Constante de tiempo de un circuito *RL*.

Físicamente, τ es el intervalo de tiempo necesario para que la corriente en el circuito alcance $(1 - e^{-1}) = 0.632 = 63.2\%$ de su valor final $\mathcal{E}/R$. La constante de tiempo es un parámetro útil para comparar el tiempo de respuesta de diferentes circuitos.

La figura 32.3 representa la corriente en función del tiempo en el circuito *RL*. Observe que el valor de equilibrio de la corriente, que se presenta cuando t tiende a infinito, es igual a $\mathcal{E}/R$. Verifique esto con dI/dt igual a cero en la ecuación 32.6 y resolviendo en función de la corriente I. (En el equilibrio, el cambio en la corriente es igual a cero.) Por tanto, al inicio la corriente aumenta con mucha rapidez y después se acerca gradualmente al valor de equilibrio $\mathcal{E}/R$ conforme t tiende a infinito.

Figura 32.3 Gráfica de la corriente en función del tiempo para el circuito *RL* que se muestra en la figura 32.2. El interruptor se cierra en $t = 0$, y la corriente aumenta hacia su valor máximo $\mathcal{E}/R$. La constante de tiempo τ es el intervalo de tiempo necesario para que I alcance 63.2% de su valor máximo.

Investigue la rapidez del cambio en el tiempo de la corriente. Tomando la primera derivada con el tiempo de la ecuación 32.7, da

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-t/\tau} \quad \textbf{(32.9)}$$

Este resultado muestra que la rapidez del cambio en el tiempo de la corriente es máximo (igual a $\mathcal{E}/L$) en $t = 0$ y disminuye exponencialmente hasta cero conforme t tiende a infinito (figura 32.4).

Ahora considere el circuito *RL* que se muestra en la figura 32.2. Suponga que el interruptor S_2 se ha colocado en la posición a (y el interruptor S_1 permanece cerrado) el suficiente tiempo para permitir que la corriente llegue a su valor de equilibrio $\mathcal{E}/R$. En este caso, el circuito queda descrito por la espira externa de la figura 32.2. Si S_2 se mueve de a a b, el circuito queda descrito ahora sólo por la espira a la derecha de la figura 32.2. Por lo tanto, la batería ha sido eliminada del circuito. Con $\mathcal{E} = 0$ en la ecuación 32.6 obtenemos

$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

Figura 32.4 Gráfica de dI/dt en función del tiempo para el circuito *RL* que se muestra en la figura 32.2. La relación de cambio en el tiempo de la corriente es máxima en $t = 0$, instante en el que se cierra el interruptor. La relación disminuye de manera exponencial con el tiempo conforme I aumenta hacia su valor máximo.

Queda como un problema (problema 10) para demostrar que la solución de esta ecuación diferencial es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau} = I_i e^{-t/\tau} \quad \textbf{(32.10)}$$

donde $\mathcal{E}$ es la fem de la batería e $I_i = \mathcal{E}/R$ es la corriente inicial en el instante en que el interruptor se coloca en b.

Si el circuito no incluyera un inductor, la corriente se reduciría de inmediato a cero al retirar la batería. Cuando el inductor está presente, se opone a la disminución de la

Figura 32.5

Corriente en función del tiempo para la espira del lado derecho del circuito que aparece en la figura 32.2. Para $t < 0$, el interruptor S_2 está en la posición *a*. En $t = 0$, el interruptor está colocado en la posición *b*, y la corriente pasa por su valor máximo $\mathcal{E}/R$.

corriente y hace que ésta disminuya en forma exponencial. Una gráfica de la corriente en función del tiempo (figura 32.5) muestra que la corriente disminuye continuamente con el tiempo.

Pregunta rápida 32.2 Considere el circuito de la figura 32.2, con S_1 abierto y S_2 en la posición *a*. Ahora se cierra el interruptor S_1. **i)** En el instante en que se cierra, ¿a través de cuál elemento de circuito el voltaje es igual a la fem de la batería? a) el resistor, b) el inductor, c) el inductor y el resistor. **ii)** Después de un tiempo considerable, ¿a través de cuál elemento de circuito el voltaje es igual a la fem de la batería? Elija entre las mismas respuestas.

EJEMPLO 32.2 Constante de tiempo de un circuito *RL*

Considere de nuevo el circuito de la figura 32.2. Suponga que los elementos del circuito tienen los siguientes valores: $\mathcal{E} = 12.0$ V, $R = 6.00\ \Omega$ y $L = 30.0$ mH.

A) Encuentre la constante de tiempo del circuito.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Debe comprender el comportamiento de este circuito a partir de la explicación de esta sección.

Categorizar Los resultados se evalúan con las ecuaciones desarrolladas en esta sección, de modo que este ejemplo es un problema de sustitución.

Evalúe la constante de tiempo a partir de la ecuación 32.8:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30.0 \times 10^{-3}\text{ H}}{6.00\ \Omega} = \boxed{5.00\text{ ms}}$$

B) El interruptor S_2 está en la posición *a* y el interruptor S_1 se cierra en $t = 0$. Calcule la corriente en el circuito en $t = 2.00$ ms.

SOLUCIÓN

Evalúe la corriente en $t = 2.00$ ms a partir de la ecuación 32.7:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{12.0\text{ V}}{6.00\ \Omega}(1 - e^{-2.00\text{ ms}/5.00\text{ ms}}) = 2.00\text{ A}\,(1 - e^{-0.400})$$

$$= \boxed{0.659\text{ A}}$$

C) Compare la diferencia de potencial a través del resistor con que cruza el inductor.

SOLUCIÓN

En el instante en que el interruptor se cierra, no hay corriente y por tanto no hay diferencia de potencial a través del resistor. En dicho instante, el voltaje de la batería aparece por completo a través del inductor en la forma de una fuerza contraelectromotriz de 12.0 V conforme el inductor intenta mantener la condición de corriente cero. (El extremo superior del inductor en la figura 32.2 está a un mayor potencial eléctrico que el extremo inferior.) Conforme pasa el tiempo, la fem a través del inductor disminuye y la corriente en el resistor (y por tanto el voltaje a través de él) aumenta como se muestra en la figura 32.6. La suma de los dos voltajes en todo momento es 12.0 V.

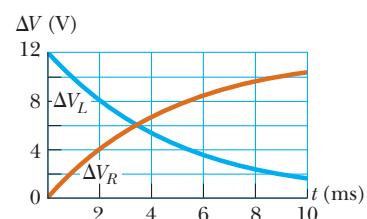



Figura 32.6 (Ejemplo 32.2) Comportamiento en el tiempo de los voltajes a través del resistor y el inductor en la figura 32.2, dados los valores proporcionados en este ejemplo.

¿Qué pasaría si? En la figura 32.6, los voltajes a través del resistor y el inductor son iguales en 3.4 ms. ¿Y si usted quiere retrasar la condición en la que los voltajes sean iguales en cierto instante posterior, como $t = 10.0$ ms? ¿Para lograr esto cuál parámetro, L o R, requeriría menos ajuste, en términos de un cambio porcentual?

Respuesta La figura 32.6 muestra que los voltajes son iguales cuando el voltaje a través del inductor. Ha caído a la mitad de su valor original. En consecuencia, el intervalo de tiempo requerido para que los voltajes sean iguales es la *vida media* $t_{1/2}$ del decaimiento. La vida media se introdujo en la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 28.10 para describir el decaimiento exponencial en los circuitos RC, donde $t_{1/2} = 0.693\tau$.

A partir de la vida media deseada de 10.0 ms, use el resultado del ejemplo 28.10 para encontrar la constante de tiempo del circuito:

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{0.693} = \frac{10.0 \text{ ms}}{0.693} = 14.4 \text{ ms}$$

Mantenga L fija y encuentre el valor de R que dé esta constante de tiempo:

$$\tau = \frac{L}{R} \rightarrow R = \frac{L}{\tau} = \frac{30.0 \times 10^{-3} \text{ H}}{14.4 \text{ ms}} = 2.08\ \Omega$$

Ahora mantenga R fija y encuentre el valor apropiado de L:

$$\tau = \frac{L}{R} \rightarrow L = \tau R = (14.4 \text{ ms})(6.00\ \Omega) = 86.4 \times 10^{-3} \text{ H}$$

El cambio en R corresponde a una disminución de 65%, comparada con la resistencia inicial. ¡El cambio en L representa un aumento de 188% en inductancia! Por lo tanto, un ajuste porcentual mucho más pequeño en R puede lograr el efecto deseado del ajuste que se requeriría en L.

32.3 Energía en un campo magnético

Una batería en un circuito contiene un inductor que proporciona más energía que un circuito sin inductor. Parte de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en la reistencia del circuito en tanto que la energía restante es almacenada en el campo magnético del inductor. Si multiplica cada uno de los términos de la ecuación 32.6 por I y reordenando la expresión,

$$I\mathcal{E} = I^2R + LI\frac{dI}{dt} \quad \textbf{(32.11)}$$

Al reconocer $I\mathcal{E}$ como la rapidez a la cual la energía se suministra por la batería e I^2R como la rapidez a la cual se entrega energía al resistor, $LI(dI/dt)$ debe representar la rapidez a la cual se almacena energía en el inductor. Si U representa la energía almacenada en el inductor en cualquier instante, se puede escribir la relación dU/dt con la cual se almacena energía de la forma

$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

Para determinar la energía total almacenada en el inductor en cualquier instante, rescriba esta expresión de la forma $dU = LI\,dI$ e integre:

$$U = \int dU = \int_0^I LI\,dI = L\int_0^I I\,dI$$

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 \quad \textbf{(32.12)}$$

◀ Energía almacenada en un inductor

donde L es constante y ha sido retirada de la integral. La ecuación 32.12 representa la energía almacenada en el campo magnético del inductor cuando la corriente es igual a I. Advierta que esta ecuación es similar en forma a la ecuación 26.11 para la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor, $U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$. En cualquier caso, la energía es necesaria para establecer un campo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 32.1

En un capacitor, un resistor y un inductor se almacena energía de manera diferente

En capacitores, inductores y resistores, los mecanismos de almacenaje de energía son diferentes. Un capacitor cargado almacena energía como energía potencial eléctrica. Un inductor almacena energía en lo que se podría llamar energía potencial magnética, cuando transporta corriente. La energía entregada a un resistor se transforma en energía interna.

También es posible determinar la densidad de energía de un campo magnético. Para hacerlo más simple, considere un solenoide cuya inductancia se conoce por la ecuación 32.5:

$$L = \mu_0 n^2 V$$

El campo magnético de un solenoide se proporciona por la ecuación 30.17:

$$B = \mu_0 n I$$

Al sustituir la expresión para L y para $I = B/\mu_0 n$ en la ecuación 32.12, obtiene

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 = \tfrac{1}{2}\mu_0 n^2 V\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}V \quad \textbf{(32.13)}$$

La densidad de energía magnética, o la energía almacenada por cada unidad de volumen en el campo magnético del inductor, es igual a

Densidad de energía magnética ►

$$u_B = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \textbf{(32.14)}$$

A pesar de que esta expresión se dedujo para el caso especial de un solenoide, aplica también para cualquier región del espacio en el que exista un campo magnético. Observe que la ecuación 32.14 es similar en forma a la ecuación 26.13 para la energía por cada unidad de volumen almacenada en un campo eléctrico, $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. En ambos casos, la densidad de energía es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo.

Pregunta rápida 32.3 Se realiza un experimento que requiere la densidad de energía más alta posible en el interior de un solenoide muy largo que transporta corriente. ¿Cuál de las siguientes opciones aumenta la densidad de energía? (Puede haber más de una elección correcta.) a) Aumentar el número de vueltas por cada unidad de longitud en el solenoide, b) incrementar el área de la sección transversal del solenoide, c) aumentar sólo la longitud del solenoide mientras se mantiene fijo el número de vueltas por cada unidad de longitud fija o d) incrementar la corriente en el solenoide.

EJEMPLO 32.3 ¿Qué ocurre con la energía en el inductor?

Considere una vez más el circuito RL que se muestra en la figura 32.2, con el interruptor S_2 en la posición a y a la corriente en su valor de estado estable. Cuando S_2 se pasa a la posición b, la corriente en la espira derecha decae exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión $I = I_i e^{-t/\tau}$, donde $I_i = \mathcal{E}/R$ es la corriente inicial en el circuito y $\tau = L/R$ es la constante de tiempo. Demuestre que toda la energía inicialmente almacenada en el campo magnético del inductor aparece como energía interna en el resistor conforme la corriente decae a cero.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Antes de que S_2 se ponga en b, desde la batería se entrega energía con una relación constante al resistor, y la energía se almacena en el campo magnético del inductor. Después de $t = 0$, cuando S_2 está en la posición b, la batería ya no puede proporcionar energía y la energía se entrega sólo al resistor desde el inductor.

Categorizar La espira derecha del circuito se modela como un sistema aislado, de modo que la energía se transfiere entre componentes del sistema pero no sale del sistema.

Analizar La energía en el campo magnético del inductor en cualquier tiempo es U. La relación dU/dt con la que sale la energía del inductor y se entrega al resistor es igual a I^2R, donde I es la corriente instantánea.

Sustituya la corriente conocida por la ecuación 32.10 en $dU/dt = I^2R$:

$$\frac{dU}{dt} = I^2R = (I_i e^{-Rt/L})^2 R = I_i^2 R e^{-2Rt/L}$$

Resuelva para dU e integre esta expresión sobre los límites $t = 0$ a $t \to \infty$:

$$U = \int_0^\infty I_i^2 R e^{-2Rt/L}\,dt = I_i^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L}\,dt$$

Se puede demostrar que el valor de la integral definida es $L/2R$ (véase el problema 26). Use este resultado para evaluar U:

$$U = I_i^2 R\left(\frac{L}{2R}\right) = \frac{1}{2}LI_i^2$$

Finalizar Este resultado es igual a la energía inicial almacenada en el campo magnético del inductor, dado por la ecuación 32.12, como se debía comprobar.

EJEMPLO 32.4 El cable coaxial

Con frecuencia los cables coaxiales se usan para conectar dispositivos eléctricos como su sistema estereofónico y en la recepción de señales de los sistemas de televisión por cable. Modele un cable coaxial largo como dos cubiertas conductoras cilíndricas delgadas y concéntricos de radios a y b y longitud ℓ, como en la figura 32.7. Las cubiertas conductoras portan la misma corriente I en direcciones opuestas. Calcule la inductancia L de este cable.

Figura 32.7 (Ejemplo 32.4) Sección de un cable coaxial largo. Los conductores interior y exterior portan corrientes iguales en direcciones opuestas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 32.7. Aunque no se tiene una bobina visible en esta geometría, imagine una rebanada radial delgada del cable coaxial tal como el rectángulo dorado claro en la figura 32.7. Si los conductores interior y exterior se conectan a los extremos del cable (arriba y abajo de la figura), esta rebanada representa una gran espira conductora. La corriente en la espira establece un campo magnético entre los conductores interior y exterior que pasa a través de esta espira. Si la corriente cambia, el campo magnético cambia y la fem inducida se opone al cambio original en la corriente en los conductores.

Categorizar Esta situación se clasifica como una en la que se debe regresar a la definición fundamental de inductancia, ecuación 32.2.

Analizar Debe encontrar el flujo magnético a través del rectángulo dorado claro de la figura 32.7. La ley de Ampère (vea la sección 30.3) dice que el campo magnético en la región entre las cubiertas se debe al conductor interior y que su magnitud es $B = \mu_0 I/2\pi r$, donde r se mide desde el centro común de las cubiertas. El campo magnético es cero afuera de la cubierta exterior ($r > b$) porque la corriente neta que pasa a través del área encerrada por una trayectoria circular que rodea el cable es cero; por tanto, a partir de la ley de Ampère, $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$. El campo magnético es cero adentro de la cubierta interior porque la cubierta es hueca y no hay corriente presente dentro de un radio $r < a$.

El campo magnético es perpendicular al rectángulo dorado claro de longitud ℓ y ancho $b - a$, la sección transversal de interés. Ya que el campo magnético varía con la posición radial a través de este rectángulo, debe usar el cálculo para encontrar el flujo magnético total.

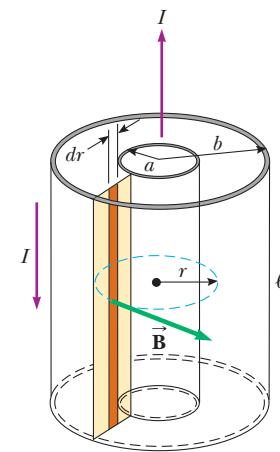
Divida el rectángulo dorado claro en tiras de ancho dr como la tira más oscura en la figura 32.7. Evalúe el flujo magnético a través de tal tira:

$$\Phi_B = \int B\,dA = \int B\ell\,dr$$

Sustituya para el campo magnético e integre en todo el rectángulo dorado claro:

$$\Phi_B = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ell\,dr = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Use la ecuación 32.2 para encontrar la inductancia del cable:

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Finalizar La inductancia aumenta si ℓ aumenta, si b aumenta o si a disminuye. Este resultado es consistente con la conceptualización: cualquiera de estos cambios aumenta el tamaño de la espira representada por la rebanada radial y a través de la que pasa el campo magnético, que aumenta la inductancia.

32.4 Inductancia mutua

Con frecuencia, el flujo magnético a través del área encerrada por un circuito varía con el tiempo debido a corrientes variables con el tiempo en circuitos cercanos. Esta situación induce una fem a través de un proceso conocido como *inductancia mutua*, denominada así porque depende de la interacción de dos circuitos.

Considere dos bobinas de alambre enrolladas apretadamente, como se muestra en la vista de la sección transversal de la figura 32.8. La corriente I_1 de la bobina 1, la cual tiene N_1 vueltas, produce un campo magnético. Parte de las líneas de este campo pasan a través de la bobina 2, la cual tiene N_2 vueltas. El flujo magnético causado por la corriente de la bobina 1 y que pasa a través de la bobina 2 está representado por Φ_{12}. En analogía con la ecuación 32.2, se puede identificar la **inductancia mutua** M_{12} de la bobina 2 respecto a la bobina 1:

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \tag{32.15}$$

La inductancia mutua depende de la geometría de ambos circuitos y de su orientación mutua. Conforme aumenta la distancia de separación de los circuitos, la inductancia mutua disminuye, ya que el flujo que une los circuitos decrece.

Si la corriente I_1 varía con el tiempo, según la ley de Faraday y la ecuación 32.15, la fem inducida por la bobina 1 en la bobina 2 es igual a

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{M_{12} I_1}{N_2}\right) = -M_{12} \frac{dI_1}{dt} \tag{32.16}$$

En la explicación anterior, se supone que la corriente pasa por la bobina 1. También puede imaginar una corriente I_2 en la bobina 2. La explicación precedente puede repetirse para demostrar que existe una inductancia mutua M_{21}. Si la corriente I_2 varía con el tiempo, la fem inducida por la bobina 2 en la bobina 1 es igual a

$$\mathcal{E}_1 = -M_{21} \frac{dI_2}{dt} \tag{32.17}$$

En la inductancia mutua, la fem inducida en una bobina siempre es proporcional a la rapidez con la cual cambia la corriente de la otra bobina. A pesar de que las constantes de proporcionalidad M_{12} y M_{21} fueron tratadas por separado, puede demostrarse que son iguales. Por lo tanto, con $M_{12} = M_{21} = M$, las ecuaciones 32.16 y 32.17 se convierten en

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$$

Figura 32.8 Vista de la sección transversal de dos bobinas adyacentes. Una corriente en la bobina 1 establece un campo magnético y parte de las líneas del campo magnético pasan a través de la bobina 2.

Estas dos ecuaciones son similares en forma a la ecuación 32.1 de la fem autoinducida $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$. La unidad de la inductancia mutua es el henry.

Pregunta rápida 32.4 En la figura 32.8, la bobina 1 se coloca más cerca de la bobina 2, conservando fija la orientación de ambas bobinas. Debido a este movimiento, la inductancia mutua de las dos bobinas a) aumenta, b) disminuye o c) no es afectada.

EJEMPLO 32.5 Cargador de batería "inalámbrico"

Un cepillo dental eléctrico tiene una base diseñada para sostener el mango del cepillo dental cuando no está en uso. Como se muestra en la figura 32.9a, el mango tiene un orificio cilíndrico que encaja holgadamente sobre un cilindro coincidente en la base. Cuando el mango se coloca en la base, una corriente cambiante en un solenoide dentro del cilindro de la base induce una corriente en una bobina dentro del mango. Esta corriente inducida carga la batería en el mango.

a)

b)

Figura 32.9 (Ejemplo 32.5) a) Este cepillo dental eléctrico usa la inducción mutua de solenoides como parte de su sistema cargador de batería. b) Una bobina de N_H vueltas enrollada alrededor del centro de un solenoide de N_B vueltas.

La base se puede modelar como un solenoide de longitud ℓ con N_B vueltas (figura 32.9b), que porta una corriente I y tiene un área de sección transversal A. La bobina del mango contiene N_H vueltas y rodea por completo la bobina de la base. Encuentre la inductancia mutua del sistema.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Asegúrese de poder identificar las dos bobinas en la situación y entender que una corriente cambiante en una bobina induce una corriente en la segunda bobina.

Categorizar El resultado se evaluará usando los conceptos explicados en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 30.17 para expresar el campo magnético en el interior del solenoide de la base:

$$B = \mu_0 \frac{N_B}{\ell} I$$

Encuentre la inductancia mutua y note que el flujo magnético Φ_{BH} a través de la bobina del mango causado por el campo magnético de la bobina de la base es BA:

$$M = \frac{N_H \Phi_{BH}}{I} = \frac{N_H BA}{I} = \boxed{\mu_0 \frac{N_B N_H}{\ell} A}$$

El cargado inalámbrico se usa en muchos otros dispositivos "sin cables". Un ejemplo significativo es el cargado inductivo utilizado por algunos fabricantes de automóviles eléctricos que evitan el contacto directo metal a metal entre el automóvil y el aparato cargador.

32.5 Oscilaciones en un circuito *LC*

Cuando se conecta un capacitor con un inductor, como se ilustra en la figura 32.10, la combinación es un **circuito *LC***. Si el capacitor está inicialmente con carga y en ese momento se cierra el interruptor, tanto la corriente en el circuito como la carga en el capacitor oscilan entre valores máximos positivos y negativos. Si la resistencia del circuito es igual a cero, no existe transformación de energía en energía interna. En la explicación siguiente la resistencia del circuito es despreciable. También se supone una situación ideal donde no se radia energía hacia afuera del circuito. En el capítulo 34 se explica esta radiación.

Suponga que el capacitor tiene una carga inicial $Q_{máx}$ (carga máxima) y que el interruptor se abre en $t < 0$ y después se cierra en $t = 0$. Ahora investigue lo que sucede desde un punto de vista energético.

Cuando el capacitor está totalmente cargado, la energía U en el circuito se almacena en el campo eléctrico del capacitor y es igual a $Q_{máx}^2/2C$ (ecuación 26.11). En este momento, la corriente en el circuito es igual a cero; debido a eso, no existe energía almacenada en el inductor. Después de que se cierre el interruptor, la rapidez a la que entran o salen las cargas de las placas del capacitor (que es también la rapidez a la cual cambia la carga en éste) es igual a la corriente en el circuito. Conforme el capacitor comienza a descargarse después de que se cierra el interruptor, la energía almacenada en su campo eléctrico disminuye. La descarga del capacitor representa una corriente en el circuito y alguna parte de la energía está ahora almacenada en el campo magnético del inductor. Por lo tanto, la energía ha sido transferida del campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor. Cuando el capacitor está completamente descargado, no almacena energía. En este momento la corriente alcanza su valor máximo y toda la energía queda almacenada en el inductor. La corriente continúa en la misma dirección, disminuyendo en magnitud, finalmente con el capacitor cargándose de nuevo por completo, pero con la polaridad de sus placas ahora opuesta a la polaridad inicial. A lo anterior le sigue otra descarga, hasta que el circuito vuelve a su estado original de carga máxima, $Q_{máx}$, y la polaridad de la placa que aparece en la figura 32.10. La energía sigue oscilando entre el inductor y el capacitor.

Figura 32.10 Circuito LC simple. El capacitor tiene una carga inicial $Q_{máx}$, y el interruptor se abre en $t < 0$ y después se cierra en $t = 0$.

Las oscilaciones del circuito LC son electromagnéticamente similares a las oscilaciones mecánicas de un sistema bloque-resorte, que estudió en el capítulo 15. Mucho

Figura 32.11

Transferencia de energía en un circuito LC sin resistencia y no radiante. El capacitor tiene una carga $Q_{máx}$ en $t = 0$, en el instante en que el interruptor se cierra. La analogía mecánica de este circuito es un sistema bloque-resorte.

de lo que se explicó allí es aplicable a las oscilaciones LC. Por ejemplo, se investigó el efecto que tiene pulsar un oscilador mecánico con una fuerza externa, lo que nos llevó al fenómeno de la *resonancia*. El mismo fenómeno se observa en un circuito LC. (Véase la sección 33.7.)

En la figura 32.11 se muestra una representación de la transferencia de energía en un circuito LC. Como se mencionó, el comportamiento del circuito es análogo al del sistema oscilatorio bloque-resorte estudiado en el capítulo 15. La energía potencial $\frac{1}{2}kx^2$ almacenada en un resorte estirado es análoga a la energía potencial $Q_{máx}^2/2C$ almacenada en el capacitor. La energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ del bloque en movimiento es análoga a la energía magnética $\frac{1}{2}LI^2$ almacenada en el inductor, que requiere la presencia de cargas en movimiento. En la figura 32.11a, toda la energía se almacena como energía potencial eléctrica en el capacitor en $t = 0$ (porque $I = 0$), lo mismo que toda la energía en un sistema bloque-resorte inicialmente está almacenada como energía potencial en el resorte si se estira y libera en $t = 0$. En la figura 32.11b, toda la energía se almacena como energía magnética $\frac{1}{2}LI_{máx}^2$ en el inductor, donde $I_{máx}$ es la corriente máxima. Las figuras 32.11c y 32.11d muestran situaciones consecutivas de cuarto de ciclo en que la energía es toda eléctrica o toda magnética. En puntos intermedios, parte de la energía es eléctrica y parte es magnética.

Considere algún tiempo arbitrario t después de cerrar el interruptor, de forma que el capacitor tenga una carga $Q < Q_{máx}$ y la corriente sea $I < I_{máx}$. En este momento, ambos elementos del circuito almacenan energía, pero la suma de las dos energías debe ser igual a la energía total inicial U en el capacitor totalmente cargado en $t = 0$:

Energía total almacenada en un circuito LC ►

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \qquad (32.18)$$

Ya que se ha supuesto que la resistencia del circuito es igual a cero y se ignora cualquier radiación electromagnética, la energía no se transforma en energía interna y tampoco se transfiere hacia el exterior del sistema del circuito. Debido a eso, *la energía total del sistema debe permanecer constante en el tiempo*. Se le describe a la energía del sistema constate matemáticamente mediante la colocación de $dU/dt = 0$. Por lo tanto, derivando la ecuación 32.18 respecto al tiempo mientras señala que Q e I varían con el tiempo, obtiene

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C} + \tfrac{1}{2}LI^2\right) = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0 \qquad \textbf{(32.19)}$$

Es posible simplificar lo anterior a una ecuación diferencial de una variable si recuerda que la corriente en el circuito es igual a la rapidez a la cual cambia la carga en el capacitor: $I = dQ/dt$. De lo anterior, se sigue que $dI/dt = d^2Q/dt^2$. Si sustituye estas correspondencias en la ecuación 32.19, obtiene

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q \qquad \textbf{(32.20)}$$

Resuelva en función de Q señalando que esta expresión tiene la misma forma que las ecuaciones análogas 15.3 y 15.5 para un sistema bloque-resorte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

donde k es la constante del resorte, m es la masa del bloque y $\omega = \sqrt{k/m}$. La solución de esta ecuación mecánica tiene la forma general (ecuación 15.6):

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

donde A es la amplitud del movimiento armónico simple (el valor máximo de x), ω es la frecuencia angular y ϕ es la constante de fase; los valores de A y ϕ dependen de las condiciones iniciales. Ya que la ecuación 32.20 es de la misma forma que la ecuación diferencial del oscilador armónico simple, tiene la solución

$$Q = Q_{\text{máx}}\cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(32.21)}$$

◀ Carga como función del tiempo para un circuito *LC* ideal

donde $Q_{\text{máx}}$ es la carga máxima del capacitor y la frecuencia angular ω es

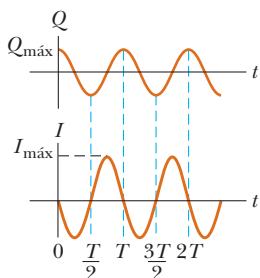
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \textbf{(32.22)}$$

◀ Frecuencia angular de oscilación en un circuito *LC*

Advierta que la frecuencia angular de las oscilaciones depende solamente de la inductancia y capacitancia del circuito. La ecuación 32.22 proporciona la *frecuencia natural* de oscilación del circuito *LC*.

Ya que Q varía de manera sinusoidal con el tiempo, la corriente en el circuito también varía de la misma forma. Lo anterior es demostrable derivando la ecuación 32.21 en función del tiempo:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_{\text{máx}}\,\text{sen}(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(32.23)}$$

◀ Corriente como función del tiempo para un circuito *LC* ideal

Para determinar el valor del ángulo de fase ϕ, examine las condiciones iniciales, que en este caso requieren que en $t = 0$, $I = 0$ y $Q = Q_{\text{máx}}$. La colocación de $I = 0$ en $t = 0$ en la ecuación 32.23, da

$$0 = -\omega Q_{\text{máx}}\,\text{sen}\,\phi$$

Figura 32.12

Gráficas de la carga con el tiempo y de la corriente en función del tiempo para un circuito LC sin resistencia y sin radiación. Observe que Q e I están 90° fuera de fase entre sí.

.

lo que demuestra que $\phi = 0$. Este valor de ϕ también es consistente con la ecuación 32.21 y con la condición de que $Q = Q_{máx}$ en $t = 0$. Por lo tanto, en este caso, las expresiones para Q e I son

$$Q = Q_{máx} \cos \omega t \tag{32.24}$$

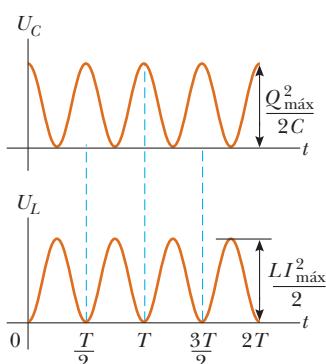
$$I = -\omega Q_{máx} \operatorname{sen} \omega t = -I_{máx} \operatorname{sen} \omega t \tag{32.25}$$

En la figura 32.12 se muestran gráficas de Q en función de t y de I en función de t. Observe que la carga en el capacitor oscila entre los valores extremos $Q_{máx}$ y $-Q_{máx}$, y que la corriente oscila entre $I_{máx}$ y $-I_{máx}$. Además, la corriente está 90° fuera de fase con la carga. Es decir, cuando la carga está en un valor máximo, la corriente es igual a cero, y cuando la carga es cero, la corriente tiene su valor máximo.

De regreso con la explicación de energía del circuito LC. Sustituya las ecuaciones 32.24 y 32.25 en la ecuación 32.18, por lo que la energía total es igual a

$$U = U_C + U_L = \frac{Q_{máx}^2}{2C} \cos^2 \omega t + \tfrac{1}{2} L I_{máx}^2 \operatorname{sen}^2 \omega t \tag{32.26}$$

Esta expresión contiene todas las características descritas cualitativamente al principio de esta sección. Muestra que la energía de un circuito LC oscila de manera continua entre energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor y energía almacenada en el campo magnético del inductor. Cuando la energía almacenada en el capacitor llega a su valor máximo, $Q_{máx}^2/2C$, la energía almacenada en el inductor es igual a cero. Cuando la energía en el inductor tiene su valor máximo, $\frac{1}{2}LI_{máx}^2$, la energía en el capacitor es igual a cero.

En la figura 32.13 se muestran gráficamente variaciones de U_C y U_L en función del tiempo. La suma de $U_C + U_L$ es una constante y es igual a la energía total $Q_{máx}^2/2C$, o $\frac{1}{2}LI_{máx}^2$. Verificar analíticamente lo anterior es simple. Las amplitudes de las dos gráficas en la figura 32.13 deben ser iguales porque la energía máxima almacenada en el capacitor (cuando $I = 0$) debe ser igual a la energía máxima almacenada en el inductor (cuando $Q = 0$). Esta igualdad se expresa matemáticamente como

$$\frac{Q_{máx}^2}{2C} = \frac{LI_{máx}^2}{2}$$

Si utiliza esta expresión en la ecuación 32.26 para la energía total obtiene

$$U = \frac{Q_{máx}^2}{2C} (\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t) = \frac{Q_{máx}^2}{2C} \tag{32.27}$$

ya que $\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t = 1$.

En el caso ideal las oscilaciones persistirán en el circuito de manera indefinida; sin embargo, recuerde que la energía total U en el circuito permanece constante sólo si se ignoran las transferencias y transformaciones de energía. En circuitos reales siempre existirá alguna resistencia y, en consecuencia, parte de la energía se transformará en energía interna. Al principio de esta sección se mencionó que también se ignoraría la radiación del circuito. En realidad, en este tipo de circuito la radiación es inevitable y la energía total del circuito disminuye de manera continua como consecuencia de este proceso.

Figura 32.13 Gráficas de U_C con el t y de U_L en función de t para un circuito LC sin resistencia y sin radiación. La suma de las dos curvas es una constante y es igual a la energía total almacenada en el circuito.

Pregunta rápida 32.5 **i**) En un instante del tiempo durante las oscilaciones de un circuito LC, la corriente pasa por su valor máximo. En ese instante, ¿qué pasa con el voltaje a través del capacitor? a) Es diferente del correspondiente en las terminales del inductor, b) es igual a cero, c) alcanza su máximo valor, d) es imposible de determinar. En el instante en que hay oscilaciones en el circuito LC, la corriente es momentáneamente igual a cero. Para las mismas opciones, describa el voltaje a través del capacitor en este instante.

EJEMPLO 32.6 Oscilaciones en un circuito *LC*

En la figura 32.14, la batería tiene una fem de 12.0 V, la inductancia es de 2.81 mH y la capacitancia es de 9.00 pF. El interruptor se pone en la posición *a* durante un tiempo considerable, de modo que el capacitor se carga. Luego el interruptor se pone en la posición *b*, retirando la batería del circuito y se conecta el capacitor directamente a través del inductor.

Figura 32.14 (Ejemplo 32.6) Primero el capacitor está completamente cargado con el interruptor colocado en la posición *a*. Luego el interruptor se pone en la posición *b* y la batería ya no está en el circuito.

A) Hallar la frecuencia de oscilación del circuito.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Cuando el interruptor se pone en la posición *b*, la parte activa del circuito es la espira de la derecha, que es un circuito *LC*.

Categorizar Se aplican las ecuaciones desarrolladas en esta sección; este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 32.22 para encontrar la frecuencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$f = \frac{1}{2\pi[(2.81 \times 10^{-3}\text{ H})(9.00 \times 10^{-12}\text{ F})]^{1/2}} = \boxed{1.00 \times 10^{6}\text{ Hz}}$$

B) ¿Cuáles son los valores máximos de carga en el capacitor y la corriente en el circuito?

SOLUCIÓN

Encuentre la carga inicial en el capacitor, que es igual a la carga máxima:

$$Q_{\text{máx}} = C\,\Delta V = (9.00 \times 10^{-12}\text{ F})(12.0\text{ V}) = \boxed{1.08 \times 10^{-10}\text{ C}}$$

Use la ecuación 32.25 para encontrar la corriente máxima a partir de la carga máxima:

$$I_{\text{máx}} = \omega Q_{\text{máx}} = 2\pi f Q_{\text{máx}} = (2\pi \times 10^{6}\text{ s}^{-1})(1.08 \times 10^{-10}\text{ C})$$
$$= \boxed{6.79 \times 10^{-4}\text{ A}}$$

32.6 Circuito *RLC*

Ahora se dirige la atención a un circuito más realista que consiste en un resistor, un inductor y un capacitor conectados en serie, como se muestra en la figura 32.15. Se supone que la resistencia del resistor representa toda la resistencia en el circuito. Suponga que el interruptor está en la posición *a*, de modo que el capacitor tiene una carga inicial $Q_{\text{máx}}$. Ahora el interruptor se coloca en la posición *b*. Después de este instante, la energía total almacenada en el capacitor y en el inductor en cualquier tiempo se conoce por la ecuación 32.18. Sin embargo, esta energía total ya no es constante como lo era en el circuito *LC*, porque el resistor causa transformación a energía interna. (En esta explicación aún se ignora la radiación electromagnética del circuito.) Porque la rapidez de transformación de energía a energía interna dentro de un resistor es I^2R,

Figura 32.15

Circuito *RLC* en serie. El interruptor se pone en la posición *a* y el capacitor se carga. Luego el capacitor se coloca en la posición *b*.

$$\frac{dU}{dt} = -I^2R$$

donde el signo negativo significa que la energía *U* del circuito disminuye con el tiempo. Sustituyendo este resultado en la ecuación 32.19, da

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = -I^2R \qquad \textbf{(32.28)}$$

Para convertir esta ecuación en una forma que permita comparar las oscilaciones eléctricas con su análogo mecánico, primero utilice el hecho de que $I = dQ/dt$, y mueva todos los términos al lado izquierdo de la igualdad para obtener

$$LI\frac{d^2Q}{dt^2} + I^2R + \frac{Q}{C}I = 0$$

Ahora divida todo entre I:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + IR + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \qquad \textbf{(32.29)}$$

El circuito RLC es similar al oscilador armónico amortiguado que se explicó en la sección 15.6 y que se ilustra en la figura 15.20. La ecuación del movimiento para un sistema bloque-resorte amortiguado es, de la ecuación 15.31,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \textbf{(32.30)}$$

Si compara las ecuaciones 32.29 y 32.30 en cualquier instante Q corresponde a la posición x del bloque, L a la masa m del bloque, R al coeficiente de amortiguación b, y C a $1/k$, donde k es la constante de fuerza del resorte. En la tabla 32.1 se muestran éstas y otras correspondencias.

TABLA 32.1

Analogías entre sistemas eléctricos y mecánicos

Circuito eléctrico		Sistema mecánico de una dimensión
Carga	$Q \leftrightarrow x$	Posición
Corriente	$I \leftrightarrow v_x$	Velocidad
Diferencia de potencial	$\Delta V \leftrightarrow F_x$	Fuerza
Resistencia	$R \leftrightarrow b$	Coeficiente de amortiguación viscosa
Capacitancia	$C \leftrightarrow 1/k$	(k = constante del resorte)
Inductancia	$L \leftrightarrow m$	Masa
Corriente = derivada respecto al tiempo de la carga	$I = \frac{dQ}{dt} \leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$	Velocidad = derivada respecto al tiempo de posición
Rapidez de cambio de la corriente = segunda derivada respecto al tiempo de la carga	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Aceleración = segunda derivada respecto al tiempo de posición
Energía en el inductor	$U_L = \frac{1}{2}LI^2 \leftrightarrow K = \frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética de un objeto en movimiento
Energía en el capacitor	$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \leftrightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$	Energía potencial almacenda en un resorte
Rapidez de pérdida de energía causada por la resistencia	$I^2R \leftrightarrow bv^2$	Rapidez de pérdida de energía causada por la fricción
Circuito RLC	$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$	Objeto amortiguado en un resorte

Porque la solución analítica de la ecuación 32.29 es muy compleja, se muestra sólo una descripción cualitativa del comportamiento del circuito. En el caso más simple, cuando $R = 0$, la ecuación 32.29 se reduce a un circuito LC simple, como era de esperarse, y la carga y la corriente oscilan sinusoidalmente con el transcurso del tiempo. Esto es equivalente a retirar todo amortiguamiento en el oscilador mecánico.

Cuando R es pequeña —una situación semejante a un amortiguamiento ligero en el oscilador mecánico— la solución de la ecuación 32.29 es

$$Q = Q_{\text{máx}} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t \qquad \textbf{(32.31)}$$

donde ω_d, que es la frecuencia angular con el que oscila el circuito, se conoce por

$$\omega_d = \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \textbf{(32.32)}$$

Es decir, el valor de la carga en el capacitor se somete a una oscilación armónica amortiguada en analogía con el sistema bloque-resorte móvil en un medio viscoso. La ecuación 32.32 muestra que cuando $R \ll \sqrt{4L/C}$ (de manera que el segundo término entre los paréntesis cuadrados es mucho menor que el primero), la frecuencia ω_d del oscilador amortiguado se acerca al oscilador no amortiguado, 1/= $\sqrt{L/C}$. Porque $I = dQ/dt$, se deduce que la corriente también se somete a una oscilación armónica amortiguada. En la figura 32.16a se muestra la gráfica de la carga con el tiempo para el oscilador amortiguado y en la figura 32.16b se muestra una línea de registro de un osciloscopio para un circuito real RLC. El valor máximo de Q disminuye después de cada oscilación, lo mismo que disminuye con el tiempo la amplitud de un sistema bloque-resorte.

Cuando considere valores de R más grandes, las oscilaciones se amortiguan con mayor rapidez; de hecho, existe un valor crítico de la resistencia $R_C = \sqrt{4L/C}$ por encima del cual no se presentan oscilaciones. Se dice que un sistema con $R = R_c$ está *críticamente amortiguado*. Cuando R excede a R_c, se dice que el sistema está *sobreamortiguado*.

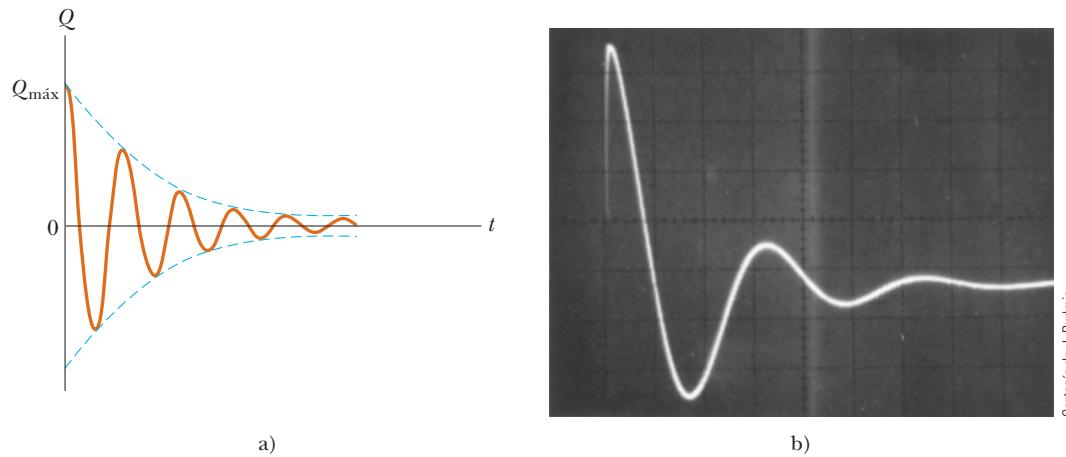



Figura 32.16

a) Carga en función del tiempo para un circuito RLC amortiguado. La carga disminuye en esta forma cuando $R < \sqrt{4L/C}$. La curva de Q en función de t representa gráficamente a la ecuación 32.31.
b) Patrón de osciloscopio que muestra el decaimiento en las oscilaciones de un circuito RLC.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cuando la corriente en una espira de alambre cambia con el tiempo, se induce una fem en la espira de acuerdo con la ley de Faraday. La **fem autoinducida** es

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} \quad \textbf{(32.1)}$$

donde L es la **inductancia** de la espira.
La inductancia es una medida de cuánta oposición ofrece la espira a un cambio en la corriente en la espira. La inductancia tiene la unidad SI de **henry** (H), donde 1 H = 1 V · s/A.

La inductancia de cualquier bobina es

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad \textbf{(32.2)}$$

donde N es el número total de vueltas y Φ_B es el flujo magnético a través de la bobina. La inductancia de un dispositivo depende de su geometría. Por ejemplo, la inductancia de un solenoide con núcleo de aire es

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \quad \textbf{(32.4)}$$

donde ℓ es la longitud del solenoide y A es el área de sección transversal.

Si un resistor y un inductor se conectan en serie a una batería de fem $\mathcal{E}$ en el tiempo $t = 0$, la corriente en el circuito varía en el tiempo de acuerdo con la expresión

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad \textbf{(32.7)}$$

donde $\tau = L/R$ es la **constante de tiempo** del circuito RL. Si se sustituye la batería en el circuito por un alambre sin resistencia, la corriente decae exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \quad \textbf{(32.10)}$$

donde $\mathcal{E}/R$ es la corriente inicial en el circuito.

La energía almacenada en el campo magnético de un inductor que porta una corriente I es

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 \quad \textbf{(32.12)}$$

Esta energía es la contraparte magnética de la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor cargado.

La densidad de energía en un punto donde el campo magnético es B es

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \textbf{(32.14)}$$

La **inductancia mutua** de un sistema de dos bobinas es

$$M_{12} = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} = M_{21} = \frac{N_1\Phi_{21}}{I_2} = M \quad \textbf{(32.15)}$$

Esta inductancia mutua permite relacionar la fem inducida en una bobina con la fuente de corriente cambiante en una bobina cercana usando las correspondencias

$$\mathcal{E}_2 = -M_{12}\frac{dI_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M_{21}\frac{dI_2}{dt} \quad \textbf{(32.16, 32.17)}$$

En un circuito LC que tenga resistencia cero y no radie electromagnéticamente (una idealización), los valores de la carga en el capacitor y la corriente en el circuito varían sinusoidalmente en el tiempo con una frecuencia angular conocida por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \textbf{(32.22)}$$

La energía en un circuito LC se transfiere de manera continua entre la energía almacenada en el capacitor y la energía almacenada en el inductor.

En un circuito RLC con pequeña resistencia, la carga en el capacitor varía con el tiempo de acuerdo con

$$Q = Q_{\text{máx}} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t \quad \textbf{(32.31)}$$

donde

$$\omega_d = \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]^{1/2} \quad \textbf{(32.32)}$$

Preguntas

O Indica pregunta complementaria

1. La corriente en un circuito que contiene una bobina, un resistor y una batería ha llegado a un valor constante. ¿La bobina tiene inductancia? ¿Afecta la bobina el valor de la corriente?

2. ¿Qué parámetros afectan la inductancia de una bobina? ¿La inductancia de una bobina depende de la corriente en la bobina?

3. **O** Inicialmente, un inductor sin resistencia porta una corriente constante. Luego la corriente se lleva a un nuevo valor constante el doble de grande. *Después* de este cambio, ¿qué le sucede a la fem en el inductor? a) Es mayor que antes del cambio en un factor de 4. b) Es mayor por un factor de 2. c) Tiene el mismo valor distinto de cero. d) Continúa siendo cero. e) Disminuyó.

4. **O** Un alambre fino largo se enreda en una bobina con inductancia de 5 mH. La bobina se conecta a través de las terminales de una batería y la corriente se mide algunos segundos después de realizar la conexión. El alambre se desenrolla y enrolla de nuevo en una bobina diferente con $L = 10$ mH. Esta segunda bobina se conecta a través de la misma batería y la corriente se mide de la misma forma. Comparada con la corriente en la primera bobina, ¿la corriente en la segunda bobina es a) cuatro veces mayor, b) dos veces mayor, c) no cambia, d) la mitad o e) un cuarto?

5. **O** Dos bobinas solenoidales, A y B, se enredan con iguales longitudes del mismo tipo de alambre. La longitud del eje de cada bobina es grande comparada con su diámetro. La longitud axial de la bobina A es el doble de la de B, y la bobina A tiene el doble de vueltas que la bobina B. ¿Cuál es la relación de la inductancia de la bobina A a la de la bobina B? a) 8, b) 4, c) 2, d) 1, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{1}{4}$, g) $\frac{1}{8}$.

6. Un interruptor controla la corriente en un circuito que tiene una inductancia grande. ¿Hay mayor probabilidad de que se produzca una chispa (véase la figura P32.6) cuando el interruptor se abre, o cuando se cierra, o no tiene importancia? El arco eléctrico puede derretir y oxidar las superficies de los contactos, dando como resultado una gran resistividad de los contactos y una eventual destrucción del interruptor. Antes de que se inventaran los encendidos electrónicos, los pun tos de contacto del distribuidor de un automóvil tenían que ser periódicamente reemplazados. Los interruptores en las redes de distribución de energía y los interruptores que controlan grandes motores, los generadores y los electroimanes pueden verse afectados por el arco y ser peligrosos de operar.

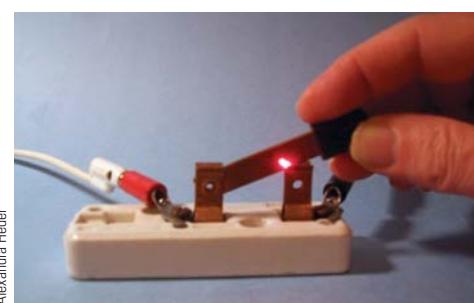



Figura P32.6

7. **O** En la figura P32.7, el interruptor se deja en la posición *a* durante un largo intervalo de tiempo y luego rápidamente se coloca en la posición *b*. Clasifique las magnitudes de los voltajes a través de los cuatro elementos de circuito poco tiempo después, de mayor a menor.

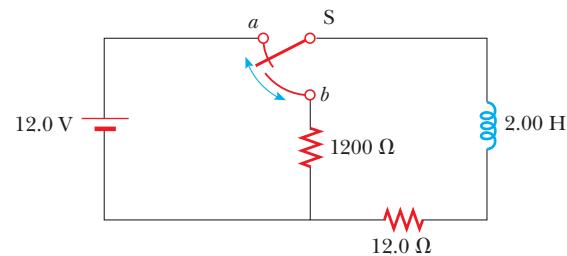



Figura P32.7

8. Considere los cuatro circuitos que se muestran en la figura P32.8, donde cada uno consiste en una batería, un interruptor, una lámpara, un resistor y un capacitor o un inductor. Suponga que el capacitor tiene una gran capacitancia y que el inductor tiene una gran inductancia mas no resistencia. La lámpara tiene alta eficiencia y brilla siempre que conduce corriente eléctrica. **i)** Describa lo que hace la lámpara en cada uno de los circuitos a), b), c) y d) después de que el interruptor se cierra. **ii)** Describa lo que hace la lámpara en cada circuito después de que, luego de haber estado cerrado un largo intervalo de tiempo, el interruptor se abre.

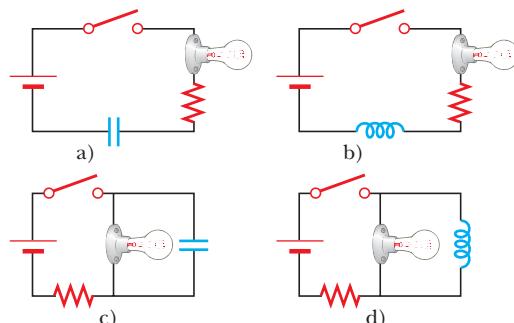



Figura P32.8

9. **O** *No haga esto, es peligroso e ilegal.* Suponga que un criminal quiere robar energía de la compañía eléctrica al colocar una bobina rectangular plana de alambre cerca de, pero sin tocar, un largo alambre horizontal recto en una línea de transmisión. El largo alambre recto porta una corriente que varía sinusoidalmente. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? a) El método funciona mejor si la bobina está en un plano vertical que rodea al alambre recto. b) El método funciona mejor si la bobina está en un plano vertical con los dos lados largos del rectángulo paralelos al alambre largo e igualmente alejado de él. c) El método funciona mejor si la bobina y el alambre largo están en el mismo plano horizontal con un lado largo del rectángulo cerca del alambre. d) El método funciona para cualquier orientación de la bobina. e) El método no puede funcionar sin contacto entre la bobina y el alambre largo.

10. Considere esta tesis: "Joseph Henry, el primer físico profesional estadounidense, influyó en el cambio básico más reciente del punto de vista humano sobre el Universo, cuando descubrió

alrededor de 1830 la autoinducción durante unas vacaciones escolares en la Academia Albany. Antes de esto, se pensaba que el Universo estaba compuesto sólo por una sola cosa: materia. La energía que mantiene temporalmente la corriente después de haber retirado la batería a una bobina, por otro lado, no es energía que corresponda a alguna porción de materia. Se trata de energía que existe en el campo magnético sin masa que rodea a la bobina. Con el descubrimiento de Henry, la Naturaleza le descubrió al hombre que el Universo está constituido por campos, así como por materia." Argumente a favor o en contra de esta afirmación. ¿Qué es lo que, desde su punto de vista, conforma al Universo?

11. **O** Si la corriente en un inductor se duplica, ¿en qué factor se multiplica la energía almacenada? a) 4, b) 2, c) 1, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{1}{4}$.

12. **O** Un inductor solenoidal se volverá a diseñar para una tarjeta de circuito impreso. Para ahorrar peso, el número de vueltas se reduce a la mitad mientras las dimensiones geométricas se mantienen igual. ¿En cuánto cambia la corriente si la energía almacenada en el inductor debe permanecer igual? a) Debe ser cuatro veces mayor. b) Debe ser dos veces mayor. c) Debe ser mayor por un factor de $\sqrt{2}$. d) Debe dejarse igual. e) Debe ser la mitad. f) Ningún cambio en la corriente puede compensar la reducción en el número de vueltas.

13. Explique las similitudes entre la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor cargado y la energía almacenada en el campo magnético de una bobina portadora de corriente.

14. El interruptor abierto en la figura P32.14 se cierra en $t = 0$. Antes de que el interruptor se cierre, el capacitor se descarga y todas las corrientes son cero. Determine las corrientes en L, C y R y las diferencias de potencial a través de L, C y R a) en el instante después de que el interruptor se cierra y b) mucho después de que se cierra.

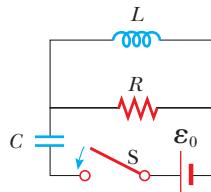



Figura P32.14

15. **O** Los centros de dos espiras circulares están separados por una distancia fija. **i)** ¿Para qué orientación relativa de las espiras su inductancia mutua es un máximo? a) coaxial y que se encuentren en planos paralelos, b) que se encuentren en el mismo plano, c) que se encuentren en planos perpendiculares, con el centro de uno en el eje del otro, d) La orientación no hace diferencia. **ii)** ¿Para qué orientación relativa su inductancia mutua es un mínimo? Elija entre las mismas posibilidades.

16. En el circuito LC que se muestra en la figura 32.10, la carga en el capacitor a veces es cero, pero en tales instantes la corriente en el circuito no es cero. ¿Cómo es posible este comportamiento?

17. ¿Cómo se puede saber si un circuito RLC está sobreamortiguado o subamortiguado?

18. ¿ Un objeto puede ejercer fuerza sobre sí mismo? Cuando una bobina induce una fem en sí misma, ¿está ejerciendo una fuerza sobre sí misma?

Problemas

Sección 32.1 Autoinductancia

1. Un inductor de 2.00 H lleva una corriente estable de 0.500 A. Cuando se abre el interruptor en el circuito, después de 10.0 ms, la corriente es, efectivamente, igual a cero. ¿Cuál es la fem inducida promedio en el inductor durante este tiempo?

2. Un cable de teléfono enroscado forma una espira de 70 vueltas, con un diámetro de 1.30 cm y una longitud sin estirar de 60.0 cm. Determine la autoinductancia de un conductor en el cable sin estirar.

3. Un inductor de 10.0 mH conduce una corriente $I = I_{\text{máx}}$ sen ωt, con $I_{\text{máx}} = 5.00$ A y $\omega/2\pi = 60.0$ Hz. ¿Cuál es la fem autoinducida como una función de tiempo?

4. Una fem de 24.0 mV es inducida en una bobina de 500 vueltas en el instante en que la corriente es de 4.00 A y está cambiando con una rapidez de 10.0 A/s. ¿Cuál es el flujo magnético que a través de cada vuelta de la bobina?

5. Se tiene un inductor con forma de solenoide, de 420 vueltas, longitud de 16.0 cm y un área de sección transversal de 3.00 cm^2. ¿Qué rapidez uniforme de disminución de la corriente a través del inductor induce una fem de 175 μV?

6. La corriente de un inductor de 90.0 mH cambia con el transcurso del tiempo de la forma $I = 1.00\,t^2 - 6.00\,t$ (en unidades del SI). Determine la magnitud de la fem inducida en a) $t = 1.00$ s y b) $t = 4.00$ s. c) ¿En qué momento será la fem igual a cero?

7. ● Un solenoide con núcleo de aire, uniformemente devanado, con 450 vueltas, 15.0 mm de diámetro y 12.0 cm de longitud, porta una corriente de 40.0 mA. Calcule a) el campo magnético dentro del solenoide, b) el flujo magnético a través de cada vuelta y c) la inductancia del solenoide. d) **¿Qué pasaría si?** la corriente fuese diferente, ¿cuál de estas cantidades cambiaría?

8. Un toroide tiene un radio mayor R y un radio menor r, y está estrechamente enrollado con N vueltas de alambre, como se muestra en la figura P32.8. Si $R \gg r$, el campo magnético en la región encerrada por el alambre del toroide, de área de sección transversal $A = \pi r^2$, es esencialmente el mismo que

el campo magnético de un solenoide que ha sido doblado en un gran círculo de radio R. Modele con un campo uniforme de un solenoide largo y demuestre que la autoinductancia de dicho toroide es aproximadamente igual a

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi R}$$

(Una expresión exacta de la inductancia de un toroide de sección transversal rectangular se deduce en el problema 57.)

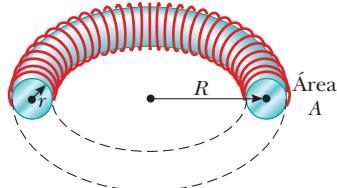



Figura P32.8

9. En un solenoide de inductancia L, una fem autoinducida cambia con el tiempo de la forma $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-kt}$. Determine la carga total que pasa a través del solenoide, si existe una carga finita.

Sección 32.2 Circuitos *RL*

10. Demuestre que $I = I_i e^{-t/\tau}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

donde I_i es la corriente en $t = 0$ y $\tau = L/R$.

11. Una batería de 12.0 V está conectada en un circuito en serie que contiene un resistor de 10.0 Ω y un inductor de 2.00 H. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la corriente alcance a) 50.0% y b) 90.0% de su valor final?

12. ● En el circuito diagramado en la figura P32.12, sea $\mathcal{E}$ = 12.0 V y R = 24.0 Ω. Suponga que el interruptor está abierto para $t < 0$ y se cierra en $t = 0$. En un solo conjunto de ejes, bosqueje gráficas de la corriente en el circuito como función del tiempo para $t \geq 0$, si supone que a) la inductancia en el circuito es esencialmente cero, b) la inductancia tiene un valor intermedio y c) la inductancia tiene un valor muy grande. Etiquete los valores inicial y final de la corriente.

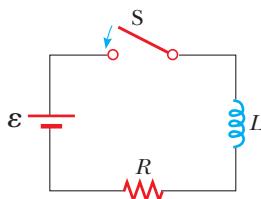



Figura P32.12 Problemas 12, 13, 14 y 15.

13. Considere el circuito de la figura P32.12, con los valores $\mathcal{E}$ = 6.00 V, L = 8.00 mH, y R = 4.00 Ω. a) ¿Cuál es la constante de tiempo inductiva del circuito? b) Calcule la corriente en el circuito 250 μs después de que se cerró el interruptor. c) ¿Cuál es el valor de la corriente final en estado estable? d) ¿Cuánto tiempo le toma a la corriente alcanzar 80.0% de su valor máximo?

14. En el circuito que se muestra en la figura P32.12, suponga que L = 7.00 H, R = 9.00 Ω y $\mathcal{E}$ = 120 V. ¿Cuál es la fem autoinducida 0.200 s después de que se ha cerrado el interruptor?

15. Para el circuito RL que se muestra en la figura P32.12, sea la inductancia igual a 3.00 H, la resistencia igual a 8.00 Ω, y la fem de la batería igual a 36.0 V. a) Calcule la relación de la diferencia de potencial del resistor a la fem del inductor cuando la corriente es igual a 2.00 A. b) Calcule la fem a través del inductor cuando la corriente es igual a 4.50 A.

16. Una batería de 12.0 V está conectada en serie con un resistor y un inductor. El circuito tiene una constante de tiempo de 500 μs, y la corriente máxima es de 200 mA. ¿Cuál es el valor de la inductancia del inductor?

17. Un inductor que tiene una inductancia de 15.0 H y una resistencia de 30.0 Ω está conectado a una batería de 100 V. ¿Cuál es la rapidez de incremento de la corriente a) en $t = 0$ y b) en t = 1.50 s?

18. El interruptor de la figura P32.18 está abierto durante $t < 0$ y después se cierra en $t = 0$. Determine la corriente en el inductor y la corriente en el interruptor como funciones de tiempos posteriores.

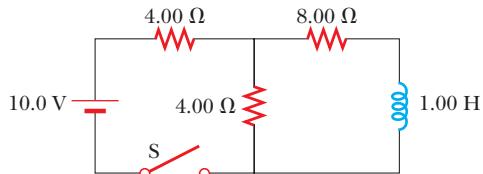



Figura P32.18 Problemas 18 y 52.

19. Un circuito RL en serie con L = 3.00 H y un circuito RL en serie con C = 3.00 μF tienen idénticas constantes de tiempo. Si los dos circuitos contienen la misma resistencia R, a) ¿cuál es el valor de R? y b) ¿cuál es el valor de la constante de tiempo?

20. Un pulso de corriente es alimentado al circuito parcial que se muestra en la figura P32.20. La corriente comienza desde cero y se convierte después en 10.0 A entre $t = 0$ y t = 200 μs, y a continuación vuelve a ser igual a cero. Determine la corriente en el inductor como una función del tiempo.

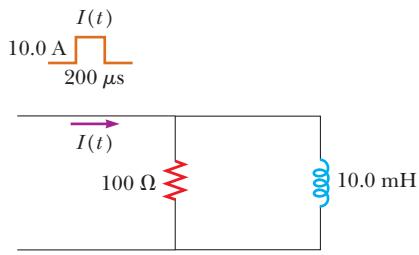



Figura P32.20

21. Un inductor de 140 mH y un resistor de 4.90 Ω están conectados con un interruptor a una batería de 6.00 V, como se muestra en la figura P32.21. a) Si el interruptor se coloca en a (conectando la batería), ¿cuánto tiempo transcurre antes de que la corriente alcance 220 mA? b) ¿Cuál es la corriente en el inductor 10.0 s después de que el interruptor se cierra? c) En este caso se pasa rápidamente el interruptor de a a b. ¿Cuánto

tiempo transcurre antes de que la corriente disminuya hasta 160 mA?

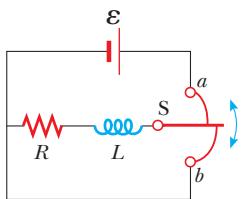



Figura P32.21

22. ● Considere dos inductores ideales L_1 y L_2 que tienen una resistencia interna igual a *cero* y muy separados uno del otro, de forma que sus campos magnéticos no influyen entre sí. a) Si los inductores están conectados en serie, demuestre que son equivalentes a un solo inductor ideal que tenga $L_{eq} = L_1 + L_2$. b) Si los dos inductores están conectados en paralelo, demuestre que son equivalentes a un solo inductor ideal que tenga $1/L_{eq} = 1/L_1 + 1/L_2$. c) **¿Qué pasaría si?** Ahora considere dos inductores L_1 y L_2 que tengan, respectivamente, resistencias internas R_1 y R_2 *diferentes de cero*. Suponga que incluso se encuentran alejadas una de la otra, de manera que su inductancia mutua sea igual a cero. Si los inductores están conectados en serie, demuestre que son equivalentes a un solo inductor que tenga $L_{eq} = L_1 + L_2$ y $R_{eq} = R_1 + R_2$. d) Si estos mismos inductores estuvieran conectados en paralelo, ¿es cierto que son equivalentes a un solo inductor ideal que tenga $1/L_{eq} = 1/L_1 + 1/L_2$ y $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$? Explique su respuesta.

Sección 32.3 Energía en un campo magnético

23. Un solenoide de 68 vueltas con núcleo de aire tiene 8.00 cm de largo y un diámetro de 1.20 cm. ¿Cuánta energía se almacena en su campo magnético cuando conduce una corriente de 0.770 A?

24. El campo magnético en el interior de un solenoide superconductor es de 4.50 T. El solenoide tiene un diámetro interno de 6.20 cm y una longitud de 26.0 cm. Determine a) la densidad de energía magnética en el campo y b) la energía almacenada en el campo magnético en el interior del solenoide.

25. En un día despejado, en cierto lugar, existe un campo eléctrico vertical de 100 V/m cerca de la superficie de la Tierra. En el mismo lugar, el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de 0.500×10^{-4} T. Calcule las densidades de energía de ambos campos.

26. Complete el cálculo del ejemplo 32.3 probando que

$$\int_0^\infty e^{-2Rt/L}\, dt = \frac{L}{2R}$$

27. ● Una bobina plana de alambre tiene una inductancia de 40.0 mH y una resistencia de 5.00 Ω. Está conectada a una batería de 22.0 V en el instante $t = 0$. Considere el momento cuando la corriente es de 3.00 A. a) ¿Con qué rapidez entrega energía la batería? b) ¿Cuál es la potencia entregada al resistor? c) ¿Con qué rapidez se almacena energía en el campo magnético de la bobina? d) ¿Cuál es la correspondencia entre estos tres valores de potencia? ¿Esta correspondencia también es verdadera en otros instantes? Explique la correspondencia en el momento inmediatamente después de $t = 0$ y en un momento muchos segundos más tarde.

28. Una batería de 10.0 V, un resistor de 5.00 Ω y un inductor de 10.0 H están conectados en serie. Después de que la corriente en el circuito alcance su valor máximo, calcule a) la potencia que suministra la batería, b) la potencia que se entrega al resistor, c) la potencia que se entrega al inductor y d) la energía almacenada en el campo magnético del inductor.

29. Suponga que la magnitud del campo magnético en el exterior de una esfera de radio R es $B = B_0(R/r)^2$, donde B_0 es una constante. Determine la energía total almacenada en el campo magnético en el exterior de la esfera y evalúe el resultado con $B_0 = 5.00 \times 10^{-5}$ T y $R = 6.00 \times 10^6$ m, valores apropiados para el campo magnético de la Tierra.

Sección 32.4 Inductancia mutua

30. Dos bobinas están muy cerca una de la otra. La primera tiene una corriente que varía con el tiempo, conocida por $I(t) = (5.00\text{ A})\,e^{-0.0250t}\text{ sen }(377t)$. En $t = 0.800$ s, la fem medida en la segunda bobina es -3.20 V. ¿Cuál es la inductancia mutua en ambas bobinas?

31. Dos bobinas sujetas en posiciones fijas tienen una inductancia mutua de 100 μH. ¿Cuál es la fem máxima que se registra en una de ellas cuando una corriente sinusoidal conocida por $I(t) = (10.0\text{ A})\text{ sen }(1000t)$ en la otra bobina?

32. En un tablero de circuito impreso, un conductor recto relativamente largo y una espira rectangular conductora yacen en el mismo plano, como se muestra en la figura P31.8 capítulo 31. Si $h = 0.400$ mm, $w = 1.30$ mm y $L = 2.70$ mm, determine la inductancia mutua.

33. Dos solenoides A y B, colocados uno cerca del otro y compartiendo el mismo eje cilíndrico, tienen 400 y 700 vueltas, respectivamente. En la bobina A una corriente de 3.50 A produce un flujo promedio de 300 μWb por cada vuelta de A y un flujo de 90.0 μWb por cada vuelta de B. a) Calcule la inductancia mutua de los dos solenoides. b) ¿Cuál es la inductancia de A? c) ¿Cuál es la fem inducida en B cuando la corriente en A aumenta con una rapidez de 0.500 A/s?

34. ● Un solenoide tiene N_1 vueltas, radio R_1 y longitud ℓ. Es tan largo que su campo magnético es uniforme casi en todas partes dentro de él y casi cero afuera. Un segundo solenoide tiene N_2 vueltas, radio $R_2 < R_1$ y la misma longitud. Se encuentra dentro del primer solenoide, con sus ejes paralelos. a) Suponga que el solenoide 1 conduce corriente variable I. Calcule la inductancia mutua que caracteriza la fem inducida en el solenoide 2. b) Ahora suponga que el solenoide 2 conduce corriente I. Calcule la inductancia mutua a la que es proporcional la fem en el solenoide 1. c) Establezca cómo se comparan mutuamente los resultados de los incisos a) y b).

35. Una bobina grande de radio R_1 y con N_1 vueltas está colocada coaxialmente con una bobina pequeña de radio R_2 y con N_2 vueltas. Los centros de las bobinas están separados una distancia x mucho mayor que R_2. ¿Cuál es la inductancia mutua de las bobinas? *Sugerencia:* John von Neumann demostró que la misma respuesta se obtiene si se considera el flujo a través de la primera bobina del campo magnético como si se hubiera producido por la segunda bobina, o si se considera el flujo a través de la segunda bobina del campo magnético como si la hubiera producido la primera. En este problema es fácil calcular el flujo a través de la bobina más pequeña, pero es difícil calcular el flujo a través de la otra, porque para ello tendría que conocerse el campo magnético en algún lugar lejos del eje.

36. Dos inductores con inductancias L_1 y L_2 están conectados en paralelo, como se muestra en la figura P32.36a. La

inductancia mutua entre los inductores es M. Determine la inductancia equivalente L_{eq} para el sistema (figura P32.36b).

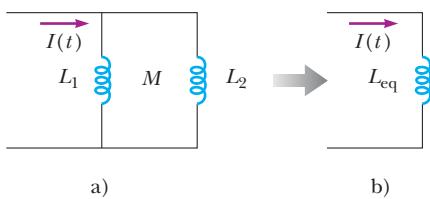



Figura P32.36

Sección 32.5 Oscilaciones en un circuito *LC*

37. Un capacitor de 1.00 μF es cargado por una fuente de energía de 40.0 V. Después se descarga a través de un inductor de 10.0 mH. Determine la corriente máxima en las oscilaciones resultantes.

38. Un circuito LC está constituido por un inductor de 20.0 mH y un capacitor de 0.500 μF, Si la corriente máxima instantánea es de 0.100 A, ¿cuál es la mayor diferencia de potencial en los extremos del capacitor?

39. En el circuito de la figura P32.39, la fem de la batería es de 50.0 V, la resistencia de 250 Ω y la capacitancia de 0.500 μF. El interruptor S se cierra durante un largo periodo a través del capacitor y mide una diferencia de potencial de cero. Después de que se abre el interruptor, la diferencia de potencial en las terminales del capacitor alcanza un valor máximo de 150 V. ¿Cuál es el valor de la inductancia?

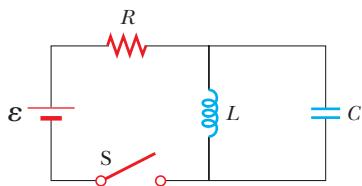



Figura 32.39

40. Un circuito LC como el que se muestra en la figura 32.10 contiene un inductor de 82.0 mH y un capacitor de 17.0 μF, inicialmente con una carga de 180 μC. En $t < 0$ se abre el interruptor y después se cierra en $t = 0$. a) Determine la frecuencia (en hertz) de las oscilaciones resultantes. En $t =$ 1.00 ms, determine b) la carga en el capacitor y c) la corriente en el circuito.

41. Para la sintonización de un radioteléfono en un barco se utiliza una inductancia fija $L = 1.05$ μH en serie con un capacitor variable. ¿Qué capacitancia sintoniza el circuito a la señal proveniente de un transmisor que emite señales a 6.30 MHz?

42. El interruptor de la figura 32.42 está conectado al punto a durante mucho tiempo. Después de que el interruptor se pasa al punto b, ¿cuál es a) la frecuencia de oscilación del circuito LC, b) la carga máxima que aparece en el capacitor, c) la corriente máxima en el inductor y d) la energía total que posee el circuito en $t = 3.00$ s?

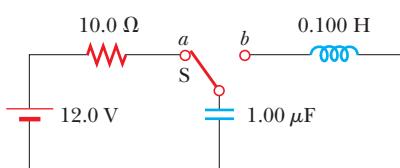



Figura 32.42

43. Un circuito LC como el de la figura 32.10 está constituido por un inductor de 3.30 H y un capacitor de 840 pF, inicialmente con una carga de 105 μC. El interruptor se abre en $t < 0$ y después se cierra en $t = 0$. Calcule las siguientes cantidades en $t =$ 2.00 ms: a) la energía almacenada en el capacitor, b) la energía almacenada en el inductor y c) la energía total del circuito.

Sección 32.6 Circuito *RLC*

44. En la figura 32.15, supongamos que $R = 7.60$ Ω, $L = 2.20$ mH y $C = 1.80$ μF. a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada del circuito. b) ¿Cuál es la resistencia crítica?

45. Considere un circuito LC en el que $L = 500$ mH y $C =$ 0.100 μF. a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia ω_0? b) Si en el circuito se introduce una resistencia de 1.00 kΩ, ¿cuál será la frecuencia de las oscilaciones (amortiguadas)?, y c) ¿cuál es el porcentaje de diferencia entre ambas frecuencias?

46. Demuestre que la ecuación 32.28 se trata de la regla de las espiras de Kirchhoff aplicada al circuito de la figura 32.15.

47. Se inician oscilaciones eléctricas en un circuito en serie que contiene una capacitancia C, una inductancia L y una resistencia R. a) Si $R \ll \sqrt{4L/C}$ (amortiguación débil), ¿cuánto tiempo pasará antes de que la amplitud de la oscilación de la corriente disminuya a 50.0% de su valor inicial? b) ¿Cuánto tiempo tarda en disminuir la energía a 50.0% de su valor inicial?

Problemas adicionales

48. **Problema de repaso.** Este problema extiende el razonamiento de la sección 26.4, el problema 26.29, el problema 33.30 y la sección 32.3. a) Considere un capacitor con vacío entre sus placas grandes, cercanas, paralelas y con cargas opuestas. Demuestre que la fuerza en una placa se explica al considerar que el campo eléctrico entre placas ejerce una "presión negativa" igual a la densidad de energía del campo eléctrico. b) Considere dos hojas planas infinitas que llevan corrientes eléctricas en direcciones opuestas con densidades lineales J_s de corriente iguales. Calcule la fuerza por cada área que actúa sobre una hoja debida al campo magnético, de magnitud $\mu_o J_s/2$ producido por la otra hoja. c) Calcule el campo magnético neto entre las hojas y el campo exterior al volumen entre ellas. d) Calcule la densidad de energía en el campo magnético entre las hojas. e) Demuestre que la fuerza sobre una hoja se explica si se considera que el campo magnético entre las hojas ejerce una presión positiva igual a su densidad de energía. Este resultado de la presión magnética es aplicable a todas las configuraciones de corriente, no sólo a hojas de corriente.

49. Un inductor de 1.00 mH y un capacitor de 1.00 μF están conectados en serie. La corriente en el circuito está expresada por $I = 20.0\,t$, donde t está en segundos e I en amperes. Inicialmente, el capacitor no tiene carga. Determine a) el voltaje a través del inductor como una función del tiempo, b) el voltaje a través del capacitor como una función del tiempo y c) el instante en que la energía almacenada en el capacitor excede por vez primera la del inductor.

50. Un inductor que tiene una inductancia L y un capacitor con una capacitancia C están conectados en serie. La corriente en el circuito aumenta linealmente con el tiempo, como se describe en $I = Kt$, siendo K una constante. El capacitor está

inicialmente descargado. Determine a) el voltaje a través del inductor como una función del tiempo, b) el voltaje a través del capacitor como una función del tiempo y c) el instante en que la energía almacenada en el capacitor excede por vez primera la del inductor.

51. Un capacitor en un circuito *LC* en serie tiene una carga inicial *Q* y está descargándose. Determine, en función de *L* y *C*, el flujo a través de cada una de las *N* vueltas de la bobina, cuando la carga sobre el capacitor es igual a $Q/2$.

52. ● En el circuito diagramado en la figura P32.18, suponga que el interruptor se cerró durante un largo intervalo de tiempo y se abrió en $t = 0$. a) Antes de que el interruptor se abra, ¿el inductor se comporta como un circuito abierto, como un cortocircuito, un resistor de alguna resistencia particular o ninguna de estas opciones? ¿Qué corriente porta el inductor? b) ¿Cuánta energía se almacena en el inductor para $t < 0$? c) Después de que el interruptor se abre, ¿qué ocurre con la energía previamente almacenada en el inductor? d) Bosqueje una gráfica de la corriente en el inductor para $t \geq 0$. Etiquete los valores inicial y final y la constante de tiempo.

53. ● En el momento $t = 0$, una batería de 24.0 V se conecta a una bobina de 5.00 mH y un resistor de 6.00 Ω. a) Según esto inmediatamente, ¿cómo se compara la diferencia de potencial a través del resistor, con la fem a través de la bobina? b) Responda la misma pregunta acerca del circuito muchos segundos después. c) ¿Hay un instante en el que estos dos voltajes son iguales en magnitud? Si es así, ¿cuándo? ¿Hay más de uno de tales instantes? d) Después de que una corriente de 4.00 A se establece en el resistor y la bobina, la batería súbitamente se sustituye por un cortocircuito. Responda de nuevo las preguntas a), b) y c), con referencia a este nuevo circuito.

54. Cuando la corriente en la porción del circuito que se muestra en la figura P32.54 es de 2.00 A y aumenta a una proporción de 0.500 A/s, la diferencia de potencial observada es $\Delta V_{ab} = 9.00$ V. Cuando la corriente es de 2.00 A y disminuye a la relación de 0.500 A/s, la diferencia de potencial medida es $\Delta V_{ab} = 5.00$ V. Calcule los valores de *L* y *R*.

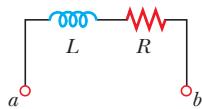



Figura P32.54

55. Una corriente variable en el tiempo *I* viaja a través de un inductor de 50.0 mH, como se muestra en la figura P32.55. Elabore una gráfica del potencial en el punto *b* en relación con el potencial en el punto *a*.

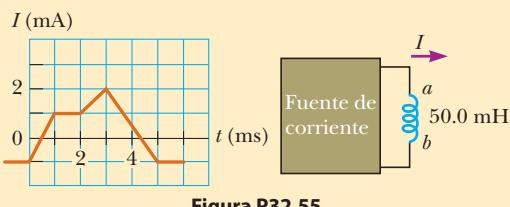



Figura P32.55

56. ● Considere un circuito en serie que consiste en un capacitor de 500 μF, un inductor de 32.0 mH y un resistor *R*. Explique qué puede decir acerca de la frecuencia angular de oscilaciones para a) $R = 0$, b) $R = 4.00$ Ω, c) $R = 15.0$ Ω y d) $R = 17.0$ Ω. Relacione la descripción matemática de la frecuencia angular con la frecuencia angular experimentalmente mensurable.

57. ● El toroide de la figura P32.57 está constituido por *N* vueltas y tiene una sección transversal rectangular. Sus radios interno y externo son *a* y *b*, respectivamente. a) Demuestre que la inductancia del toroide es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

b) Con este resultado, calcule la inductancia de un toroide de 500 vueltas para el cual $a = 10.0$ cm, $b = 12.0$ cm y $h = 1.00$ cm. c) **¿Qué pasaría si?** En el problema 8 se dedujo una expresión aproximada para la inductancia de un toroide de $R \gg r$. Para tener una idea de la precisión de ese resultado, utilice la expresión del problema 8 para calcular la inductancia aproximada del toroide descrito en el inciso b). Compare este resultado con el del inciso b).

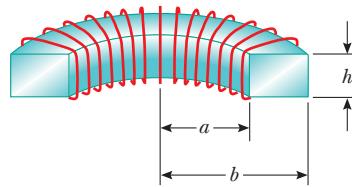



Figura P32.57

58. a) Una bobina circular y plana realmente no produce un campo magnético uniforme en el área que encierra. No obstante, estime la inductancia de una bobina plana, circular y compacta, con un radio *R* y *N* vueltas, al suponer que el campo en su centro es uniforme en toda el área. b) Un circuito de una mesa de laboratorio está constituido por una batería de 1.5 V, un resistor de 270 Ω, un interruptor y tres cables de unión de 30 cm de largo que los conectan. Suponga que el circuito se arregla de forma circular. Piense en él como si fuera una bobina plana de una sola vuelta. Calcule el orden de magnitud de su inductancia y c) de la constante de tiempo describiendo la rapidez con que aumenta la corriente cuando se cierra el interruptor.

59. En $t = 0$, se cierra el interruptor abierto de la figura P32.59. Utilizando las reglas de Kirchhoff para las corrientes y voltajes instantáneos en este circuito de dos espiras, demuestre que la corriente en el inductor en el tiempo $t > 0$ es igual a

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}\left[1 - e^{-(R'/L)t}\right]$$

donde $R' = R_1R_2/(R_1 + R_2)$.

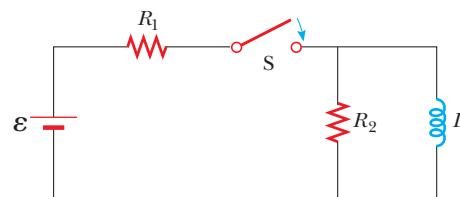



Figura P32.59

60. Un alambre hecho de un material no magnético, de radio *R*, lleva una corriente uniformemente distribuida en su sección transversal. La corriente total que conduce el alambre es *I*. Demuestre que la energía magnética por cada unidad de longitud en el interior del alambre es $\mu_0 I^2/16\pi$.

61. En la figura P32.61, el interruptor está cerrado durante $t < 0$, y se establecen condiciones de estado estable. Luego se abre en $t = 0$. a) Determine la fem inicial $\mathcal{E}_0$ a través de L justo después de $t = 0$. ¿Qué extremo de la bobina a o bien b está a un mayor potencial? b) Grafique a mano las corrientes en R_1 y en R_2 como una función del tiempo, tome las direcciones del estado estable como positivas. Muestre valores antes y después de $t = 0$. c) ¿Cuánto tiempo después de $t = 0$ la corriente en R_2 llega a tener el valor de 2.00 mA?

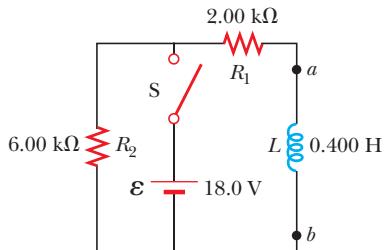



Figura P32.61

62. ● Los alambres de entrada de una antena de televisión a menudo se fabrican en forma de dos alambres paralelos (figura P32.62). Los dos alambres conducen corrientes de igual magnitud en direcciones opuestas. Considere que los alambres conducen la corriente distribuida de manera uniforme en sus superficies y no existe campo magnético dentro del alambre. a) ¿Por qué esta configuración de conductores tiene inductancia? b) ¿Qué constituye la espira de flujo en esta configuración? c) Demuestre que la inductancia de un tramo x de este tipo de cable de entrada es

$$L = \frac{\mu_0 x}{\pi} \ln\left(\frac{w - a}{a}\right)$$

donde a es el radio de los alambres y w la separación entre los centros.

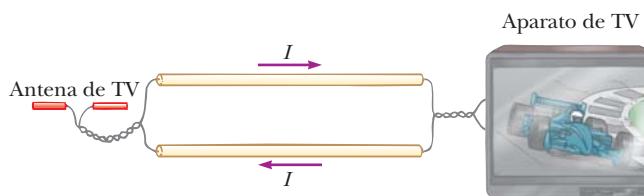



Figura P32.62

63. Para impedir daños por arco eléctrico en un motor eléctrico, a veces se coloca un resistor de descarga en paralelo con la armadura. Si el motor se desconecta de manera repentina mientras está en operación, este resistor limita el voltaje que se presenta en las terminales de la armadura de la bobina. Considere un motor CD de 12.0 V con una armadura que tiene una resistencia de 7.50 Ω y una inductancia de 450 mH. Suponga que la magnitud de la fem autoinducida en las bobinas de la armadura es de 10.0 V cuando el motor funciona a una rapidez normal. (El circuito equivalente de la armadura se muestra en la figura P32.63.) Calcule la resistencia máxima R que limita a 80.0 V el voltaje en las terminales de la armadura cuando el motor se desconecta.

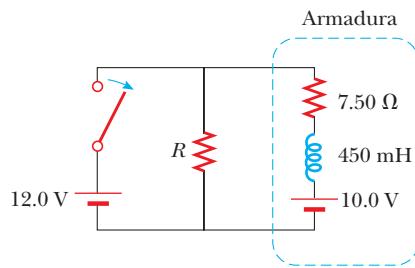



Figura P32.63

Problemas de repaso. Los problemas 64 al 67 aplican ideas de este y capítulos previos para algunas propiedades de los superconductores, que fueron introducidos en la sección 27.5.

64. *La resistencia de un superconductor.* En un experimento llevado a cabo por S. C. Collins entre 1955 y 1958, se mantuvo una corriente en un anillo de plomo superconductor durante 2.50 años sin observar pérdidas. Si la inductancia en el anillo era de 3.14×10^{-8} H y la sensibilidad del experimento era de una parte en 10^9, ¿cuál era la máxima resistencia del anillo? (*Sugerencia:* Trate al anillo como un circuito RL, con decaimiento de la corriente y recuerde que $e^{-x} \approx 1 - x$ cuando x es pequeña.)

65. Se ha propuesto un nuevo método para almacenar energía. Se fabrica una enorme bobina subterránea superconductora de 1.00 km de diámetro que conduciría una corriente máxima de 50.0 kA en cada embobinado de un solenoide de Nb_3Sn de 150 vueltas. a) Si la inductancia de esta enorme bobina fuera de 50.0 H, ¿cuál sería la energía total almacenada?, y b) ¿cuál sería la fuerza de compresión por cada metro que actúa entre dos embobinados adyacentes a 0.250 m de distancia?

66. *Transmisión superconductora de energía.* Se ha propuesto el uso de los superconductores para las líneas de transmisión de energía. Un solo cable coaxial (figura P32.66) podría conducir 1.00×10^3 MW (la salida de una gran planta eléctrica) a 200 kV, CD, a lo largo de una distancia de 1000 km sin pérdidas. Un alambre interno con un radio de 2.00 cm, hecho del superconductor Nb_3Sn, lleva la corriente I en una dirección. Un cilindro superconductor le rodea, con un radio de 5.00 cm, y lleva la corriente de retorno I. En dicho sistema, ¿cuál es el campo magnético a) en la superficie del conductor interno o b) en la superficie interna del conductor externo? c) ¿Cuánta energía se almacenaría en el espacio entre los conductores en una línea de transmisión superconductora de 1000 km? d) ¿Cuál sería la presión ejercida sobre el conductor externo?

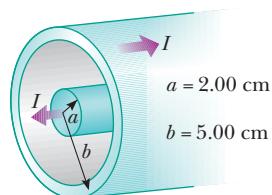



Figura P32.66

67. ● *El efecto Meissner.* Compare este problema con el problema 57 del capítulo 26, respecto a la fuerza que atrae un dieléctrico perfecto en un campo eléctrico intenso. Una propiedad fundamental de un material superconductor del tipo 1 es el *diamagnetismo perfecto*, es decir, la demostración del *efecto Meis-*

sner, que se ilustra en la figura 30.27 en la sección 30.6 y que se describe como sigue. El material superconductor tiene $\vec{\mathbf{B}} = 0$ en cualquier sitio en el interior. Si se coloca una muestra del material en un campo magnético producido externamente, o si se enfría para hacer de él un superconductor mientras está en un campo magnético, aparecen corrientes eléctricas en la superficie de la muestra. Las corrientes tienen justo la intensidad y la dirección necesarias para que el campo magnético sea igual a cero en todo su interior de la muestra. Este problema ayudará a comprender la fuerza magnética que puede actuar sobre la muestra superconductora.

Un solenoide vertical con una longitud de 120 cm y un diámetro de 2.50 cm está constituido por 1400 vueltas de alambre de cobre que lleva una corriente contraria al sentido de las manecillas del reloj de 2.00 A, como se observa en la figura P32.67a. a) Determine el campo magnético en el vacío en el interior del solenoide. b) Determine la densidad de energía del campo magnético y observe que las unidades J/m^3 de densidad de energía son las mismas que las unidades N/m^2 de la presión. c) Ahora se inserta parcialmente en el solenoide una barra superconductora de 2.20 cm de diámetro. Su extremo superior está muy lejos del solenoide, donde el campo magnético es despreciable. El extremo inferior de la barra está profundamente incrustado en el solenoide. Explique cómo identificar la dirección que requiere la corriente en la superficie curva de la barra, para que el campo magnético total en el interior de la barra sea igual a cero. En la figura P32.67b se dibuja el campo producido por las supercorrientes, y en la figura P32.67c se encuentra el campo total. d) El campo del solenoide ejerce una fuerza sobre la corriente en el superconductor. Explique cómo determinar la dirección de la fuerza sobre la barra. e) Calcule la magnitud de la fuerza multiplicando la densidad de energía del campo del solenoide por el área del extremo inferior de la barra superconductora.

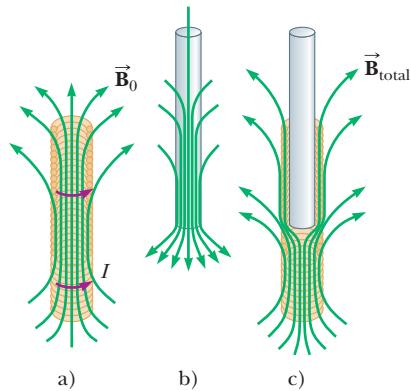



Figura P32.67

Respuestas a las preguntas rápidas

32.1 c), f) Para la corriente constante en a) y b) no hay diferencia de potencial en las terminales del inductor sin resistencia. En c), si aumenta la corriente, la fem inducida en el inductor tendrá una dirección opuesta, de b a a, lo que hace más grande en potencial a a que a b. De manera similar, en f) la corriente que disminuye induce una fem en la misma dirección que la corriente, de b a a, lo que de nuevo provoca que el potencial de a sea más alto que el de b.

32.2 **i**) b) Como el interruptor está cerrado, no hay corriente, por lo que no hay voltaje a través del resistor. **ii**), a) Después de mucho tiempo, la corriente llega a su valor final, y el inductor ya no afecta al circuito.

32.3 a), d) Porque la densidad de energía depende de la magnitud del campo magnético, para aumentar la densidad de energía debemos aumentar el campo magnético. En el caso de un solenoide, $B = \mu_0 nI$, donde n es el número de vueltas por cada unidad de longitud. En a), incrementa n para aumentar el campo magnético. En b), el cambio en el área de sección transversal no tiene efecto sobre el campo magnético. En c) si aumenta la longitud y mantiene fija a n, no hay ningún efecto sobre el campo magnético. Aumentando la corriente en d) aumenta el campo magnético en el solenoide.

32.4 a) M aumenta debido a que el flujo magnético aumenta a través de la bobina 2.

32.5 **i**) b) Si la corriente está en su valor máximo, la carga del capacitor es igual a cero. **ii**) c) Si la corriente es igual a cero, es el instante en el cual el capacitor se encuentra completamente cargado y la corriente está a punto de cambiar de dirección.

Estos grandes transformadores se utilizan para aumentar el voltaje en una planta generadora de energía eléctrica para distribuir la energía por transmisión eléctrica a la red. Es posible cambiar los voltajes con relativa facilidad porque la potencia se distribuye por corriente alterna en lugar de corriente directa. (Lester Lefkowitz/Getty Images)

33 Circuitos de corriente alterna

En este capítulo se describen los circuitos de corriente alterna (CA). Cada vez que enciende un televisor, un estéreo o cualquier otro aparato eléctrico en casa, utiliza corriente alterna para obtener la potencia que necesitan. Dicho estudio inicia con la investigación de las características de circuitos en serie simples que contienen resistores, inductores y capacitores, y que se activan mediante voltaje senoidal. La primera finalidad de este capítulo, en resumen, es: si una fuente de CA aplica un voltaje alterno a un circuito en serie que contiene resistores, inductores y condensadores, lo que se desea conocer son las características de amplitud y tiempo de la corriente alterna. Concluye el capítulo con dos secciones que analizan los transformadores, la transmisión de energía y los filtros eléctricos.

33.1 Fuentes de CA

Un circuito de CA está conformado por elementos de circuito y una fuente de energía que proporciona un voltaje alterno Δv. Este voltaje, que varía con el tiempo de acuerdo con la fuente, está descrito por

$$\Delta v = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$$

donde $\Delta V_{\text{máx}}$ es el máximo voltaje de salida de la fuente de CA, o la **amplitud de voltaje.** Hay varias posibilidades para fuentes de CA, incluyendo generadores, como se explicó

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 33.1

Valores que varían con el tiempo

Los símbolos en minúscula Δv e i indican los valores instantáneos de voltajes y corrientes que varían con el tiempo. Las mayúsculas representan valores fijos de voltaje y corriente, como $\Delta V_{\text{máx}}$ e $I_{\text{máx}}$.

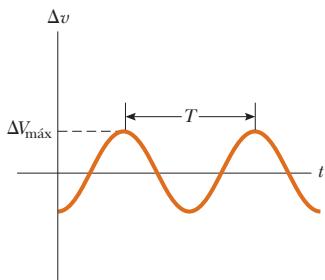



Figura 33.1 El voltaje suministrado por una fuente de CA es senoidal con un periodo T.

en la sección 31.5, y osciladores eléctricos. En una casa, cada toma de corriente es una fuente de CA. Ya que el voltaje de salida de una fuente CA varía de manera sinusoidal con el tiempo, el voltjae es positivo durante una mitad del ciclo y negativo durante la otra mitad como en la figura 33.1. De la misma manera, la corriente en cualquier circuito conductor para una fuente de CA es una corriente alternante que también varía senoidalmente con el tiempo.

Por la ecuación 15.12 la frecuencia angular del voltaje de CA es

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

donde f es la frecuencia de la fuente y T el periodo. La fuente determina la frecuencia de la corriente en cualquier circuito conectado a ella. En Estados Unidos, las plantas para la generación de energía eléctrica usan una frecuencia de 60 Hz, que corresponde a una frecuencia angular de 377 rad/s.

33.2 Resistores en un circuito de CA

Considere un circuito CA simple formado por un resistor y una fuente de CA —(~)—, como se ilustra en la figura 33.2. En cualquier instante, la suma algebraica de los voltajes alrededor de una espira cerrada en un circuito debe ser cero (regla de la espira de Kirchhoff). Por lo tanto, $\Delta v + \Delta v_R = 0$, o con la ecuación 27.7 para el voltaje a través del resistor,

$$\Delta v - i_R R = 0$$

Al reagrupar esta expresión y sustituir $\Delta V_{máx}$ sen ωt por Δv la corriente instantánea en el resistor es

$$i_R = \frac{\Delta v}{R} = \frac{\Delta V_{máx}}{R} \text{ sen } \omega t = I_{máx} \text{ sen } \omega t \quad \textbf{(33.1)}$$

donde $I_{máx}$ es la corriente máxima:

Corriente máxima en un resistor ▶

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{R} \quad \textbf{(33.2)}$$

Por la ecuación 33.1 el voltaje instantáneo a través del resistor es

Voltaje en las terminales de un resistor ▶

$$\Delta v_R = i_R R = I_{máx} R \text{ sen } \omega t \quad \textbf{(33.3)}$$

En la figura 33.3a se muestra una gráfica del voltaje y la corriente en función del tiempo para este circuito. En el punto a, la corriente tiene un valor máximo en una di-

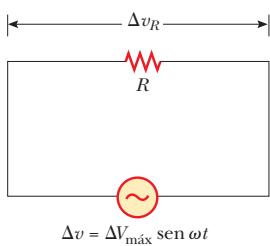



Figura 33.2

Un circuito formado por un resistor de resistencia R conectado a una fuente de CA, designada por el símbolo —(~)—.

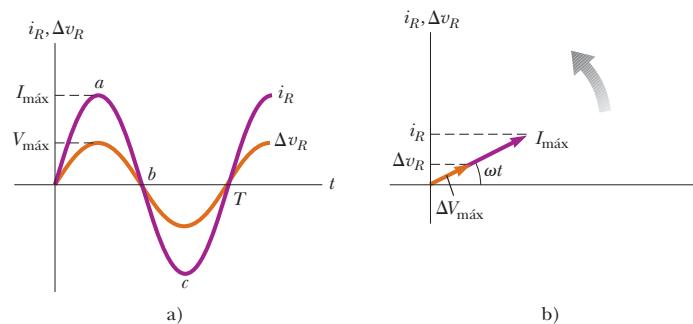



Figura 33.3

a) Gráficas de la corriente instantánea i_R y el voltaje instantáneo Δv_R en las terminales de un resistor como funciones del tiempo. La corriente está en fase con el voltaje, lo cual significa que la corriente es cero cuando el voltaje es cero, máxima cuando el voltaje es máximo, y mínima cuando el voltaje es mínimo. En el tiempo $t = T$, se ha completado un ciclo del voltaje y la corriente que varían con el tiempo. b) Diagrama de fasores para el circuito resistivo que muestra cómo la corriente está en fase con el voltaje.

rección, denominada de manera arbitraria dirección positiva. Entre los puntos *a* y *b*, la corriente decrece en magnitud, pero aún está en la dirección positiva. En *b*, la corriente es por el momento cero; por lo tanto empieza a aumentar en la dirección negativa entre los puntos *b* y *c*. En *c*, la corriente ha llegado a su valor máximo en la dirección negativa.

La corriente y el voltaje están sincronizados entre sí porque varían de manera idéntica con el tiempo. Porque i_R y Δv_R varían ambos como sen ωt y alcanzan sus valores máximos al mismo tiempo, como se muestra en la figura 33.3a, se dice que están **en fase,** igual a la forma en que dos ondas pueden estar en fase, como se explicó cuando estudió el movimiento de ondas en el capítulo 18. Por lo tanto, **para un voltaje senoidal aplicado, la corriente en un resistor siempre está en fase con el voltaje en las terminales del resistor.** Para resistores en circuitos de CA, no existen conceptos nuevos que aprender. Los resistores se comportan esencialmente en la misma forma en circuitos de CD y de CA. No obstante, que no es el caso para capacitores e inductores.

Para simplificar el análisis de circuitos que contienen dos o más elementos, se usa una representación gráfica denominada *diagramas de fasores.* Un **fasor** es un vector cuya longitud es proporcional al valor máximo de la variable que representa ($\Delta V_{\text{máx}}$ para voltaje e $I_{\text{máx}}$ para corriente en el presente análisis) y que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez angular igual a la frecuencia angular asociada con la variable. La proyección del fasor sobre el eje vertical representa el valor instantáneo de la cantidad que representa.

La figura 33.3b muestra fasores de voltaje y corriente para el circuito de la figura 33.2 en algún instante. Las proyecciones de las flechas del fasor sobre el eje vertical están determinadas por una función de seno del ángulo del fasor respecto al eje horizontal. Por ejemplo, la proyección del fasor de corriente de la figura 33.3b es $I_{\text{máx}}$ sen ωt. Observe que se trata de la misma expresión que la ecuación 33.1. Por lo tanto, use las proyecciones de fasores para representar valores de corriente que varían senoidalmente con el tiempo. Es posible hacer lo mismo con voltajes que varían con el tiempo. La ventaja de este planteamiento es que las correspondencias de fase entre corrientes y voltajes se representan como sumas vectoriales de fasores, con las técnicas para suma de vectores analizadas en el capítulo 3.

En el caso del circuito resistivo de una sola espira de la figura 33.2, los fasores de corriente y voltaje se encuentran a lo largo de la misma línea, como en la figura 33.3b, debido a que i_R y Δv_R están en fase. La corriente y el voltaje en circuitos que contienen capacitores e inductores tienen diferentes correspondencias de fase.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 33.2

Un fasor es como una gráfica

Un voltaje alterno se puede presentar en diferentes representaciones. La figura 33.1 es una representación gráfica en la que el voltaje se dibuja en coordenadas rectangulares, con el voltaje en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. La figura 33.3b muestra otra representación gráfica. El espacio fase en el que se dibuja el fasor es similar al papel gráfico de coordenadas polares. La coordenada radial representa la amplitud del voltaje. La coordenada angular es el ángulo de fase. La coordenada del eje vertical de la punta del fasor representa el valor instantáneo del voltaje. La coordenada horizontal no representa nada en absoluto. Como se muestra en la figura 33.3b, las corrientes alternas también se pueden representar mediante fasores.

Para auxiliarse con esta explicación de los fasores, revise la sección 15.4, donde se representó el movimiento armónico simple de un objeto real mediante la proyección del movimiento circular uniforme de un objeto imaginario en un eje coordenado. Un fasor es una analogía directa a esta representación.

Pregunta rápida 33.1 Considere el fasor de voltaje de la figura 33.4, que se ilustra en tres instantes. **i)** Seleccione la parte de la figura a), b) o c), que representa el momento en que el valor instantáneo del voltaje tiene la magnitud máxima. **ii)** Seleccione la parte de la figura que representa el momento en que el valor instantáneo del voltaje tiene la magnitud mínima.

Figura 33.4 (Pregunta rápida 33.1) Fasor de voltaje en tres instantes de tiempo, a), b) y c).

Para el circuito resistivo sencillo de la figura 33.2, observe que **el valor promedio de la corriente en todo un ciclo es cero.** Es decir, se mantiene la corriente en la dirección positiva durante el mismo tiempo y a la misma magnitud que en la dirección negativa. No obstante, la dirección de la corriente no afecta el comportamiento del resistor. Comprenderá esto si observa que las colisiones entre electrones y los átomos fijos del resistor generan un aumento en la temperatura del resistor. Aun cuando este aumento de temperatura depende de la magnitud de la corriente, es independiente de la dirección de ésta.

Puede hacer esta explicación cuantitativa a este análisis si recuerda que la rapidez con la que se entrega energía a un resistor es la potencia $\mathcal{P} = i^2 R$, donde i es la corriente instantánea en el resistor. Ya que esta rapidez es proporcional al cuadrado de la corriente, no hay diferencia si la corriente es directa o alterna, es decir, si el signo asociado con la corriente es positivo o negativo. No obstante, el aumento de temperatura producido por una corriente alterna que tiene un valor máximo $I_{\text{máx}}$ no es igual que el que produce una corriente directa igual a $I_{\text{máx}}$, porque la corriente alterna tiene este valor máximo sólo un instante durante cada ciclo (figura 33.5a). Lo que es de importancia en un circuito de CA es el valor promedio de corriente, que se conoce

Figura 33.5 a) Gráfica de la corriente en un resistor como función del tiempo. b) Gráfica del cuadrado de la corriente en un resistor como función del tiempo. Observe que las regiones grises sombreadas *bajo* la curva y *arriba* de la línea discontinua para $\frac{1}{2}I^2_{máx}/2$ tienen igual área que las regiones grises sombreadas *por encima* de la curva y *por debajo* de la línea discontinua para $\frac{1}{2}I^2_{máx}/2$. Debido a eso, el valor promedio de sen^2 ωt o cos^2 ωt en un ciclo es $\frac{1}{2}$.

como **corriente rms.** La notación *rms* quiere decir *media cuadrática*, que en este caso se trata de la raíz cuadrada del valor medio (promedio) del cuadrado de la corriente $I_{prom} = \sqrt{(i^2)_{prom}}$. Porque i^2 varía con sen^2 ωt porque el valor promedio de i^2 es $\frac{1}{2}I^2_{máx}$ (vea la figura 33.5b), la corriente rms es

Corriente rms ►

$$I_{prom} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{máx} \quad \textbf{(33.4)}$$

Esta ecuación expresa que una corriente alterna cuyo valor máximo es 2.00 A entrega a un resistor la misma potencia que una corriente directa que tiene un valor de (0.707)(2.00 A) = 1.41 A. Así, la potencia promedio entregada a un resistor que lleva una corriente alterna es

Potencia promedio entregada a un resistor ►

$$\mathcal{P}_{prom} = I^2_{prom} R$$

El voltaje alterno también se explica mejor en términos del voltaje rms, y la correspondencia es idéntica a la de la corriente:

Voltaje rms ►

$$\Delta V_{prom} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{2}} = 0.707\, \Delta V_{máx} \quad \textbf{(33.5)}$$

Cuando mide un voltaje alterno de 120 V de una toma de corriente eléctrica, se trata de un voltaje rms de 120 V. Un cálculo con la ecuación 33.5 muestra que ese voltaje alterno tiene un valor máximo de 170 V. Con frecuencia un argumento para utilizar valores rms cuando se analiza corrientes alternas es que los amperímetros y los voltímetros de CA están diseñados para leer valores rms. Además, con valores rms, muchas de las ecuaciones tienen la misma forma que las de corriente directa.

EJEMPLO 33.1 ¿Cuál es la corriente rms?

El voltaje de salida de una fuente CA se conoce por la expresión $\Delta v - (200 \text{ V})$ sen ωt. Encuentre la corriente rms en el circuito cuando esta fuente se conecta a un resistor de 100 Ω.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 33.2 muestra la situación física para este problema.

Categorizar La corriente se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Al comparar esta expresión para un voltaje de salida con la forma general $\Delta v = \Delta V_{\text{máx}}$ sen ωt se demuestra que $\Delta V_{\text{máx}} = 200$ V. Calcule el voltaje rms a partir de la ecuación 33.5:

$$\Delta V_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{200 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 141 \text{ V}$$

Encuentre la corriente rms:

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{R} = \frac{141 \text{ V}}{100 \ \Omega} = 1.41 \text{ A}$$

33.3 Inductores en un circuito de CA

Ahora considere un circuito de CA formado por un solo inductor conectado a las terminales de una fuente de CA, como se muestra en la figura 33.6. Si $\Delta v_L = \boldsymbol{\varepsilon}_L = -L(di/dt)$ es el voltaje instantáneo autoinducido en las terminales del inductor (véase la ecuación 32.1), aplicando la regla de la espira de Kirchhoff a este circuito da $\Delta v + \Delta v_L = 0$, esto es

Figura 33.6 Circuito formado por un inductor de inductancia L conectado a una fuente de CA.

$$\Delta v - L\frac{di_L}{dt} = 0$$

Cuando sustituye $\Delta V_{\text{máx}}$ sen ωt en Δv y reordenando, proporciona

$$\Delta v = L\frac{di_L}{dt} = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t \qquad \textbf{(33.6)}$$

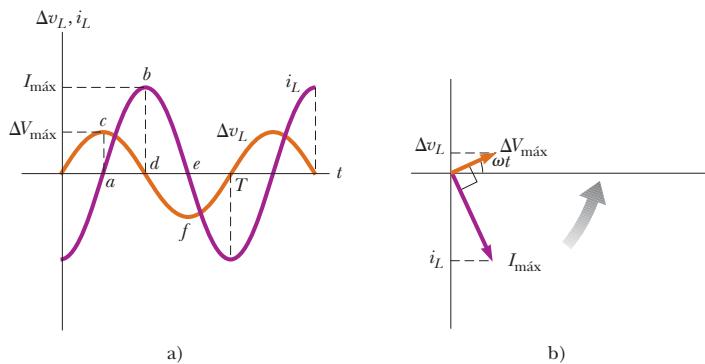
Al resolver esta ecuación para di_L

$$di_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{L} \text{ sen } \omega t \, dt$$

La integración de esta expresión[1] da la corriente instantánea i_L del inductor como función del tiempo:

$$i_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{L}\int \text{sen } \omega t \, dt = -\frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L} \cos \omega t \qquad \textbf{(33.7)}$$

Cuando usa la identidad trigonométrica $\cos \omega t = -\text{sen}(\omega t - \pi/2)$, expresa la ecuación 33.7 como

$$i_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L} \text{ sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \textbf{(33.8)}$$

◄ Corriente en un inductor

Al comparar este resultado con la ecuación 33.6, se muestra que la corriente instantánea i_L en el inductor y el voltaje instantáneo Δv_L en las terminales del inductor están *fuera* de fase en $\pi/2$ rad $= 90°$.

En la figura 33.7a se muestra la gráfica del voltaje y la corriente en función del tiempo. Cuando la corriente i_L en el inductor es máxima (punto *b* en la figura 33.7a), permanece por el momento sin cambio, de modo que el voltaje en las terminales del inductor es cero (punto *d*). En los puntos como *a* y *e*, la corriente es cero y la rapidez de cambio de corriente está al máximo. Por lo tanto, el voltaje en las terminales del inductor también está al máximo (puntos *c* y *f*). Observe que el voltaje alcanza su valor máximo un cuarto de periodo antes de que la corriente alcance el suyo. Debido a eso, **para un voltaje aplicado senoidal, la corriente en un inductor siempre se atrasa 90° respecto al voltaje en las terminales del inductor (un cuarto de ciclo en tiempo).**

Igual que la correspondencia entre corriente y voltaje para un resistor, represente la correspondencia para un inductor con un diagrama de fasores, como en la figura 33.7b. Observe que los fasores están a 90° uno del otro, lo cual representa una diferencia de fase de 90° entre la corriente y el voltaje.

[1] La constante de integración es despreciable aquí porque depende de las condiciones iniciales, que no son importantes en este caso.

Figura 33.7
a) Gráficas de la corriente instantánea i_L y voltaje instantáneo Δv_L a través de un inductor como funciones del tiempo. La corriente se atrasa al voltaje 90°. b) Diagrama de fasores para el circuito inductivo que muestra que la corriente se atrasa al voltaje 90°.

Por la ecuación 33.7 la corriente en un circuito inductivo alcanza su valor máximo cuando cos $\omega t = \pm 1$:

Corriente máxima en un inductor ▶

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{\omega L} \tag{33.9}$$

Esta expresión es semejante a la correspondencia entre corriente, voltaje y resistencia en un circuito de CD, $I = \Delta V/R$ (ecuación 27.7). Porque $I_{máx}$ está en amperes y $\Delta V_{máx}$ en volts, ωL debe medirse en ohms. Por lo tanto, ωL tiene las mismas unidades que la resistencia y está relacionada con la corriente y el voltaje en la misma forma que la resistencia. Debe comportarse de una manera semejante a una resistencia, en el sentido de que representa oposición al paso de carga. Ya que ωL depende de la frecuencia aplicada ω, el inductor *reacciona* de modo diferente, ofreciendo oposición a la corriente, para diferentes frecuencias. Por esta razón, ωL es la **reactancia inductiva** X_L:

Reactancia inductiva ▶

$$X_L \equiv \omega L \tag{33.10}$$

En consecuencia, escriba la ecuación 33.9 como

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{X_L} \tag{33.11}$$

La expresión para la corriente rms en un inductor es semejante a la ecuación 33.9, sustituyendo $I_{máx}$ por I_{rms} y $\Delta V_{máx}$ por ΔV_{rms}.

La ecuación 33.10 indica que, para cierto voltaje aplicado, la reactancia inductiva aumenta cuando la frecuencia aumenta. Esta conclusión es consistente con la ley de Faraday: cuanto mayor es la rapidez de cambio de la corriente en el inductor, mayor es la fuerza contraelectromotriz. La mayor fuerza contraelectromotriz se traduce en un aumento en la reactancia y una disminución en la corriente.

Con las ecuaciones 33.6 y 33.11, el voltaje instantáneo en los extremos del inductor es

Voltaje en las terminales de un inductor ▶

$$\Delta v_L = -L\frac{di_L}{dt} = -\Delta V_{máx} \operatorname{sen} \omega t = -I_{máx} X_L \operatorname{sen} \omega t \tag{33.12}$$

Pregunta rápida 33.2 Considere el circuito de CA de la figura 33.8. La frecuencia de la fuente de CA se ajusta mientras su amplitud de voltaje se mantiene constante. La lámpara brillará con más intensidad a) a altas frecuencias, b) a bajas frecuencias, o c) el brillo será igual en todas las frecuencias.

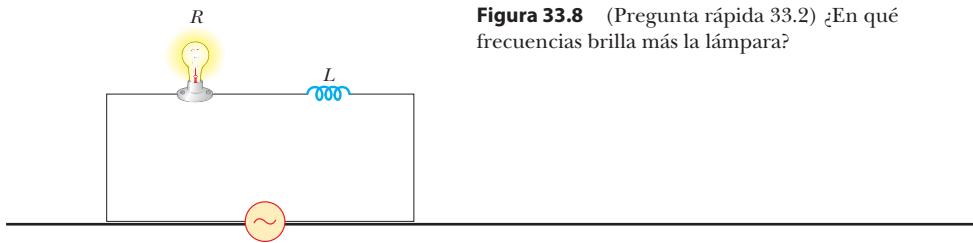



Figura 33.8 (Pregunta rápida 33.2) ¿En qué frecuencias brilla más la lámpara?

EJEMPLO 33.2 Un circuito CA completamente inductivo

En un circuito CA simplemente inductivo, $L = 25.0$ mH y el voltaje rms es de 150 V. Calcule la reactancia inductiva y la corriente rms en el circuito, si la frecuencia es de 60.0 Hz.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura activa 33.6 muestra la situación física para este problema.

Categorizar La reactancia y la corriente se evalúan a partir de ecuaciones desarrolladas en esta sección, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 33.10 para encontrar la reactancia inductiva:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi(60.0 \text{ Hz})(25.0 \times 10^{-3} \text{ H}) = 9.42\ \Omega$$

Use una versión rms de la ecuación 33.11 para encontrar la corriente rms:

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{X_L} = \frac{150 \text{ V}}{9.42\ \Omega} = 15.9 \text{ A}$$

¿Qué pasaría si? Si la frecuencia aumenta a 6.00 kHz, ¿qué sucede con la corriente rms en el circuito?

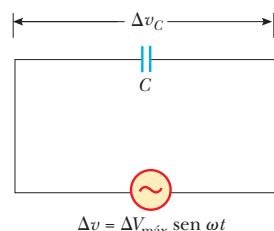
Respuesta Si la frecuencia aumenta, la reactancia inductiva también aumenta porque la corriente cambia con una mayor rapidez. El aumento en reactancia inductiva resulta en una menor corriente.

Calcule la nueva reactancia inductiva y la nueva corriente rms:

$$X_L = 2\pi(6.00 \times 10^3 \text{ Hz})(25.0 \times 10^{-3} \text{ H}) = 942\ \Omega$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{150 \text{ V}}{942\ \Omega} = 0.159 \text{ A}$$

33.4 Capacitores en un circuito de CA

La figura 33.9 muestra un circuito de CA formado por un capacitor conectado a las terminales de una fuente de CA. La regla de la espira de Kirchhoff aplicada a este circuito da $\Delta v + \Delta v_C = 0$, o:

$$\Delta v - \frac{q}{C} = 0 \tag{33.13}$$

al sustituir $\Delta V_{\text{máx}}$ sen ωt para Δv y reordenar

$$q = C\,\Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t \tag{33.14}$$

donde q es la carga instantánea en el condensador. Al derivar la ecuación 33.14 respecto al tiempo se obtiene la corriente instantánea del circuito:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \omega C\,\Delta V_{\text{máx}} \cos \omega t \tag{33.15}$$

Figura 33.9 Circuito formado por un condensador de capacitancia C conectado a una fuente de CA.

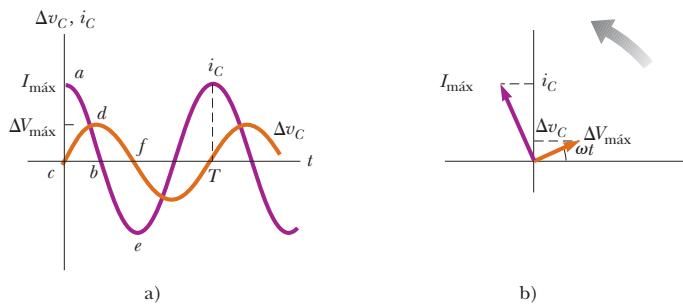



Figura 33.10

a) Gráficas de la corriente instantánea i_C y voltaje instantáneo Δv_C en las terminales de un capacitor como funciones del tiempo. El voltaje se atrasa 90° a la corriente. b) Diagrama de fasores para el circuito capacitivo, en donde se observa que la corriente se adelante al voltaje 90°.

Si usa la identidad trigonométrica

$$\cos \omega\tau = \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

exprese la ecuación 33.15 en la siguiente forma alterna

Corriente en un capacitor ▶

$$i_C = \omega C\,\Delta V_{\text{máx}}\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{33.16}$$

Al comparar esta expresión con $\Delta v = \Delta V_{\text{máx}}$ sen ωt, se observa que la corriente está $\pi/2$ rad $= 90°$ fuera de fase con el voltaje en las terminales del capacitor. Una gráfica de la corriente y el voltaje en función del tiempo (figura 33.10a) muestra que la corriente alcanza su valor máximo un cuarto de ciclo antes de que el voltaje alcance su valor máximo.

Considere el punto *b*, donde la corriente es cero. Esto se presenta cuando el capacitor logra su carga máxima, de modo que el voltaje en las terminales del capacitor es máximo (punto *d*). En puntos como el *a* y el *e*, la corriente es máxima, lo cual se presenta cuando la carga en el capacitor se vuelve cero y empieza a cargarse con la polaridad opuesta. Cuando la carga es cero, el voltaje en las terminales del capacitor es cero (puntos *c* y *f*). Por lo tanto, la corriente y el voltaje están fuera de fase.

Al igual que con los inductores, la corriente y el voltaje para un capacitor se representan en un diagrama de fasores. El diagrama de fasores de la figura 33.10b muestra que **para un voltaje aplicado senoidalmente, la corriente siempre se adelanta 90° al voltaje presente en las terminales del capacitor.**

La ecuación 33.15 muestra que la corriente en el circuito alcanza su valor máximo cuando cos $\omega t = \pm 1$:

$$I_{\text{máx}} = \omega C\,\Delta V_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{(1/\omega C)} \tag{33.17}$$

Como con los inductores, esto se asemeja a la ecuación 27.7, por lo que el denominador debe desempeñar el papel de resistencia, con unidades en ohms. La combinación $1/\omega C$ se representa con el símbolo X_C, y puesto que esta función varía con la frecuencia, se define como la **reactancia capacitiva:**

Reactancia capacitiva ▶

$$X_C \equiv \frac{1}{\omega C} \tag{33.18}$$

Podemos escribir la ecuación 33.17 como

Corriente máxima en un condensador ▶

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{X_C} \tag{33.19}$$

La corriente rms se representa de manera semejante a la ecuación 33.19, sustituyendo $I_{máx}$ por I_{rms} y $\Delta V_{máx}$ por $\Delta V_{rms.}$

Con la ecuación 33.19 se expresa el voltaje instantáneo en las terminales del condensador como

$$\Delta v_C = \Delta V_{máx} \text{ sen } \omega t = I_{máx} X_C \text{ sen } \omega t \qquad (33.20)$$

◀ Voltaje en las terminales de un capacitor

Las ecuaciones 33.18 y 33.19 indican que cuando aumenta la frecuencia de la fuente de voltaje, disminuye la reactancia capacitiva y, por lo tanto, aumenta la corriente máxima. De nuevo, la frecuencia de la corriente está determinada por la frecuencia de la fuente de voltaje que activa al circuito. Cuando la frecuencia se aproxima a cero, la reactancia capacitiva se aproxima al infinito y, por ende, la corriente se aproxima a cero. Esta conclusión tiene sentido porque el circuito se aproxima a condiciones de corriente directa cuando ω se aproxima a cero y el capacitor representa un circuito abierto.

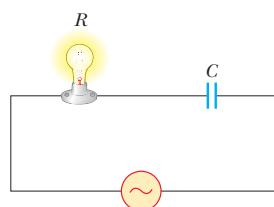



Figura 33.11 (Pregunta rápida 33.3)

Pregunta rápida 33.3 Considere el circuito de CA de la figura 33.11. La frecuencia de la fuente de CA se ajusta en tanto la amplitud de su voltaje se mantiene constante. La lámpara tendrá un brillo máximo a) a altas frecuencias, b) a bajas frecuencias, o c) el brillo será igual a cualquier frecuencia.

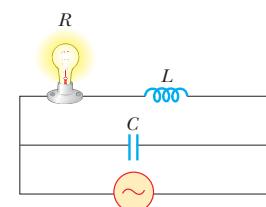



Figura 33.12 (Pregunta rápida 33.4)

Pregunta rápida 33.4 Considere el circuito de CA de la figura 33.12. La frecuencia de la fuente de CA está ajustada en tanto la amplitud de su voltaje se mantiene constante. La lámpara tendrá un brillo máximo a) a altas frecuencias, b) a bajas frecuencias, o c) el brillo será igual a cualquier frecuencia.

EJEMPLO 33.3 Un circuito de CA solamente capacitivo

Un capacitor de 8.00 μF es conectado a las terminales de una fuente CA de 60.0 Hz, cuyo voltaje rms es 150 V. Encuentre la reactancia capacitiva y la corriente rms en el circuito.

SOLUCIÓN

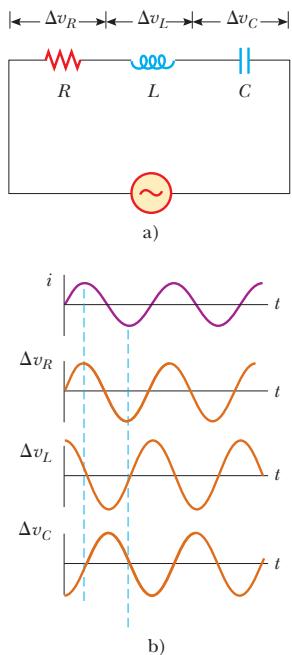
Conceptualizar La figura 33.9 muestra la situación física para este problema.

Categorizar La reactancia y la corriente se evalúan a partir de ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 33.18 para encontrar la reactancia capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(60 \text{ Hz})(8.00 \times 10^{-6} \text{ F})} = 332 \ \Omega$$

Use una versión rms de la ecuación 33.19 para encontrar la corriente rms:

$$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{X_C} = \frac{150 \text{ V}}{332 \ \Omega} = 0.452 \text{ A}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si la frecuencia se duplica? ¿Qué sucede con la corriente rms en el circuito?

Respuesta Si la frecuencia aumenta, la reactancia capacitiva disminuye, que es justo lo opuesto del caso de un inductor. La disminución en reactancia capacitiva resulta en un aumento en la corriente.

Calcule la nueva reactancia capacitiva y la nueva corriente rms:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi(120 \text{ Hz})(8.00 \times 10^{-6} \text{ F})} = 166 \ \Omega$$

$$I_{rms} = \frac{150 \text{ V}}{166 \ \Omega} = 0.904 \text{ A}$$

a)

b)

Figura 33.13
a) Circuito en serie formado por un resistor, un inductor y un capacitor conectados a una fuente de CA. b) La correspondencia de fase para voltajes instantáneos del circuito *RLC* en serie.

33.5 Circuito *RLC* en serie

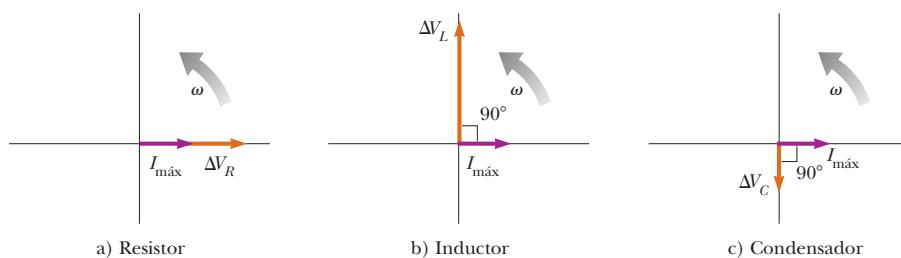
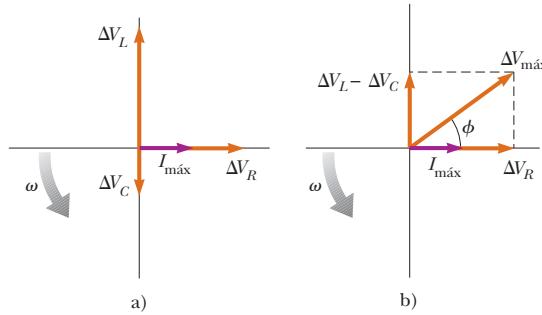
La figura 33.13a muestra un circuito que contiene un resistor, un inductor y un condensador conectados en serie a las terminales de una fuente de voltaje alterno. Si el voltaje aplicado tiene una variación senoidal con el tiempo, el voltaje instantáneo aplicado es

$$\Delta v = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$$

mientras que la corriente varía como

$$i = I_{\text{máx}} \text{ sen}(\omega t - \phi)$$

donde ϕ es cierto **ángulo de fase** entre la corriente y el voltaje aplicados. De acuerdo con la explicación de fase de las secciones 33.3 y 33.4, es de esperar que la corriente generalmente no esté en fase con el voltaje en un circuito *RLC*. La meta es determinar ϕ e $I_{\text{máx}}$. La figura 33.13b muestra el voltaje en función del tiempo en las terminales de cada elemento del circuito y su correspondencia de fase.

Primero, porque los elementos están en serie, la corriente en cualquier parte del circuito debe ser la misma en cualquier instante. Es decir, **la corriente de un circuito en serie de CA tiene la misma amplitud y fase en cualquier punto.** En términos de las secciones anteriores, se sabe que el voltaje en las terminales de cada elemento tiene amplitud y fase diferentes. En particular, el voltaje en las terminales del resistor está en fase con la corriente, el voltaje en las terminales del inductor se adelanta 90° a la corriente y el voltaje en las terminales del capacitor se atrasa 90° a la corriente. Con el uso de esta correspondencia de fase, se expresan los voltajes instantáneos en las terminales de los tres elementos de circuito como

$$\Delta v_R = I_{\text{máx}} R \text{ sen } \omega t = \Delta V_R \text{ sen } \omega t \quad \textbf{(33.21)}$$

$$\Delta v_L = I_{\text{máx}} X_L \text{ sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \Delta V_L \cos \omega t \quad \textbf{(33.22)}$$

$$\Delta v_C = I_{\text{máx}} X_C \text{ sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\Delta V_C \cos \omega t \quad \textbf{(33.23)}$$

La suma de los tres voltajes debe ser igual al voltaje de la fuente de CA, pero es importante reconocer que como los tres voltajes tienen diferente correspondencia de fase con la corriente no se pueden sumar directamente. La figura 33.14 representa los fasores en un instante en el que la corriente de los tres elementos es, momentáneamente, cero. La corriente cero la representa el fasor de corriente a lo largo del eje horizontal en cada parte de la figura. Enseguida los fasores de voltaje se dibujan con el ángulo de fase adecuado a la corriente para cada elemento.

Puesto que los fasores son vectores que giran, combine los fasores de voltaje en la figura 33.14 mediante una suma vectorial como en la figura 33.15. En la figura 33.15a los fasores de voltaje de la figura 33.14 se combinan en las mismas coordenadas de los ejes. La figura 33.15b muestra la suma vectorial de los fasores de voltaje. Los fasores de voltaje ΔV_L y ΔV_C están en direcciones *opuestas* a lo largo de la misma línea, de modo que se puede construir el fasor diferencia $\Delta V_L - \Delta V_C$, que es perpendicular al fasor ΔV_R. Este diagrama muestra que la suma vectorial de las amplitudes de voltaje ΔV_R, ΔV_L y ΔV_C es igual a un fasor cuya

Figura 33.14 Correspondencia de fase entre los fasores de voltaje y corriente para a) un resistor, b) un inductor y c) un capacitor, conectados en serie.

Figura 33.15
a) Diagrama de fasores para el circuito *RLC* en serie que se muestra en la figura 33.13a. El fasor ΔV_R está en fase con el fasor de corriente $I_{\text{máx}}$, el fasor ΔV_L está adelantado 90° a $I_{\text{máx}}$, y el fasor ΔV_C está atrasado 90° respecto a $I_{\text{máx}}$. b) Los fasores de inductancia y capacitancia se suman juntos y luego se suman en forma vectorial al fasor de resistencia. El voltaje total $AV_{\text{máx}}$ forma un ángulo ϕ con $I_{\text{máx}}$.

longitud es el máximo voltaje aplicado, $\Delta V_{\text{máx}}$, y que forma un ángulo ϕ con el fasor de corriente $I_{\text{máx}}$. Del triángulo rectángulo de la figura 33.15b

$$\Delta V_{\text{máx}} = \sqrt{\Delta V_R^2 + (\Delta V_L - \Delta V_C)^2} = \sqrt{(I_{\text{máx}}R)^2 + (I_{\text{máx}}X_L - I_{\text{máx}}X_C)^2}$$

$$\Delta V_{\text{máx}} = I_{\text{máx}}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Debido a eso, se expresa la corriente máxima como

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad \textbf{(33.24)}$$

◄ Corriente máxima en un circuito *RLC*

Una vez más, es la misma forma matemática de la ecuación 27.7. El denominador de la fracción desempeña el papel de resistencia y se llama **impedancia** *Z* del circuito:

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \textbf{(33.25)}$$

◄ Impedancia

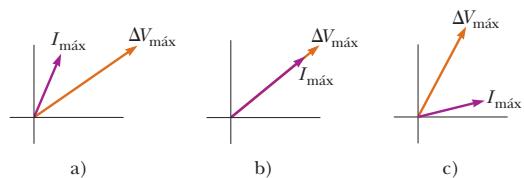
donde la impedancia también está en ohms. Por lo tanto, escriba la ecuación 33.24 en la forma

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{Z} \qquad \textbf{(33.26)}$$

Considere la ecuación 33.26 como el equivalente en CA de la ecuación 27.7. Observe que la impedancia y, por lo tanto, la corriente de un circuito de CA dependen de la resistencia, la inductancia, la capacitancia y la frecuencia (porque las reactancias son dependientes de la frecuencia).

Por el triángulo rectángulo en el diagrama del fasor en la figura 33.15b, el ángulo de fase ϕ entre la corriente y el voltaje es

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta V_L - \Delta V_C}{\Delta V_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{I_{\text{máx}}X_L - I_{\text{máx}}X_C}{I_{\text{máx}}R}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \qquad \textbf{(33.27)}$$

◄ Ángulo de fase

Cuando $X_L > X_C$ (lo cual se presenta en altas frecuencias), el ángulo de fase es positivo; esto significa que la corriente se atrasa al voltaje aplicado, como se ve en la figura 33.15b. Describa esta situación al decir que el circuito es *más inductivo que capacitivo.* Cuando $X_L < X_C$, el ángulo de fase es negativo, lo cual significa que la corriente se adelanta al voltaje aplicado, y el circuito es *más capacitivo que inductivo.* Cuando $X_L = X_C$, el ángulo de fase es cero y el circuito es *completamente resistivo.*

Pregunta rápida 33.5 Aplique una leyenda a cada parte de la figura 33.16 a), b), c) como $X_L > X_C$, $X_L = X_C$, o $X_L < X_C$.

Figura 33.16 (Respuesta rápida 33.5) Vincule los diagramas de los fasores con las correspondencias entre las reactancias.

EJEMPLO 33.4 Análisis de un circuito *RLC* en serie

Un circuito *RLC* en serie tiene $R = 425\ \Omega$, $L = 1.25$ H, $C = 3.50\ \mu$F. Está conectado a una fuente CA con $f = 60.0$ Hz y $\Delta V_{máx} - 150$ V.

A) Determine la reactancia inductiva, la reactancia capacitiva y la impedancia del circuito.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El circuito de interés en este ejemplo se muestra en la figura 33.13a. La corriente en la combinación del resistor, inductor y capacitor oscila en un ángulo de fase particular respecto al voltaje aplicado.

Categorizar El circuito es un circuito *RLC* en serie simple, así que se puede usar el planteamiento explicado en esta sección.

Analizar Encuentre la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0\ \text{Hz}) = 377\ \text{s}^{-1}$$

Use la ecuación 33.10 para encontrar la reactancia inductiva:

$$X_L = \omega L = (377\ \text{s}^{-1})(1.25\ \text{H}) = \boxed{471\ \Omega}$$

Use la ecuación 33.18 para encontrar la reactancia capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377\ \text{s}^{-1})(3.50 \times 10^{-6}\ \text{F})} = \boxed{758\ \Omega}$$

Use la ecuación 33.25 para encontrar la impedancia:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{(425\ \Omega)^2 + (471\ \Omega - 758\ \Omega)^2} = \boxed{513\ \Omega}$$

B) Encuentre la corriente máxima en el circuito.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 33.26 para encontrar la corriente máxima:

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{Z} = \frac{150\ \text{V}}{513\ \Omega} = \boxed{0.292\ \text{A}}$$

C) Encuentre el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 33.27 para calcular el ángulo de fase:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{471\ \Omega - 758\ \Omega}{425\ \Omega}\right) = \boxed{-34.0°}$$

D) Encuentre el voltaje máximo a través de cada elemento.

SOLUCIÓN

Use las ecuaciones 33.2, 33.11 y 33.19 para calcular los voltajes máximos:

$$\Delta V_R = I_{máx} R = (0.292\ \text{A})(425\ \Omega) = \boxed{124\ \text{V}}$$

$$\Delta V_L = I_{máx} X_L = (0.292\ \text{A})(471\ \Omega) = \boxed{138\ \text{V}}$$

$$\Delta V_C = I_{máx} X_C = (0.292\ \text{A})(758\ \Omega) = \boxed{221\ \text{V}}$$

E) ¿Qué valor de reemplazo de L debe elegir un ingeniero que analice el circuito tal que la corriente se adelante al voltaje aplicado en 30.0°? Todos los otros valores en el circuito permanecen iguales.

SOLUCIÓN

Resuelva la ecuación 33.27 para la reactancia inductiva:

$$X_L = X_C + R \tan \phi$$

Sustituya las ecuaciones 33.10 y 33.18 en esta expresión:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} + R \tan \phi$$

Resuelva para L:

$$L = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega C} + R \tan \phi\right)$$

Sustituya los valores conocidos:

$$L = \frac{1}{(377 \text{ s}^{-1})}\left[\frac{1}{(377 \text{ s}^{-1})(3.50 \times 10^{-6} \text{ F})} + (425\ \Omega) \tan(-30.0°)\right]$$

$$L = 1.36 \text{ H}$$

Finalizar Ya que la reactancia capacitiva es mayor que la reactancia inductiva, el circuito es más capacitivo que inductivo. En este caso, el ángulo de fase ϕ es negativo, así que la corriente adelanta al voltaje aplicado.

Al usar las ecuaciones 33.21, 33.22 y 33.23, los voltajes instantáneos a través de los tres elementos son

$$\Delta v_R = (124 \text{ V}) \text{ sen } 377t$$

$$\Delta v_L = (138 \text{ V}) \cos 377t$$

$$\Delta v_C = (-221 \text{ V}) \cos 377t$$

¿Qué pasaría si? ¿Si sumara los voltajes máximos a través de los tres elementos del circuito? ¿Es esta una cantidad físicamente significativa?

Respuesta La suma de los voltajes máximos a través de los elementos es $\Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C = 483$ V; esta suma es mucho mayor que el voltaje máximo de la fuente, 150 V. La suma de los voltajes máximos es una cantidad sin significado porque, cuando se suman cantidades que varían senoidalmente, *tanto sus amplitudes como sus fases* deben tomarse en cuenta. Los voltajes máximos a través de los diversos elementos se presentan en diferentes tiempos. Por lo tanto, los voltajes se deben sumar en una forma que tome en consideración las diferentes fases, como se muestra en la figura 33.15.

33.6 Potencia en un circuito de CA

Ahora considere un planteamiento de energía para analizar circuitos de CA y que considere la transferencia de energía de la fuente de CA al circuito. La potencia entregada por una batería a un circuito externo de CD es igual al producto de la corriente y al voltaje terminal de la batería. De igual modo, la potencia instantánea entregada por una fuente de CA a un circuito es el producto de la corriente de la fuente y el voltaje aplicado. Para el circuito RLC que se ilustra en la figura 33.13a, exprese la potencia instantánea $\mathcal{P}$ como

$$\mathcal{P} = i\,\Delta v = I_{\text{máx}} \text{ sen}(\omega t - \phi)\Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$$

$$\mathcal{P} = I_{\text{máx}}\,\Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t \text{ sen}(\omega t - \phi) \qquad \textbf{(33.28)}$$

Este resultado es una función complicada del tiempo y, debido a eso, no es muy útil desde un punto de vista práctico. Lo que sí interesa es la potencia promedio en uno o más ciclos. Este promedio se puede calcular al usar primero la identidad trigonométrica $\text{sen}(\omega t - \phi) = \text{sen } \omega t \cos \phi - \cos \omega t \text{ sen } \phi$. La sustitución en la ecuación 33.28 da

$$\mathcal{P} = I_{\text{máx}}\,\Delta V_{\text{máx}} \text{ sen}^2 \omega t \cos \phi - I_{\text{máx}}\,\Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t \cos \omega t \text{ sen } \phi \qquad \textbf{(33.29)}$$

Ahora considere el tiempo promedio de $\mathcal{P}$ en uno o más ciclos, observe que $I_{\text{máx}}$, $\Delta V_{\text{máx}}$, ϕ y ω todos son constantes. El tiempo promedio del primer término de la derecha en la ecuación 33.29 comprende el valor promedio de $\text{sen}^2\, \omega t$, que es $\frac{1}{2}$. El tiempo promedio del segundo término de la derecha del mismo signo es de igual forma cero porque $\text{sen}\, \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \text{sen}\, 2\omega t$, y el valor promedio de $\text{sen}\, 2\omega t$ es cero. Por lo tanto, se expresa la **potencia promedio** $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ como

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2} I_{\text{máx}}\, \Delta V_{\text{máx}} \cos \phi \qquad \textbf{(33.30)}$$

Es conveniente expresar la potencia promedio en términos de la corriente rms y el voltaje rms definidos por las ecuaciones 33.4 y 33.5:

Potencia promedio entregada a un circuito RLC ▶

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}\, \Delta V_{\text{rms}} \cos \phi \qquad \textbf{(33.31)}$$

donde la cantidad $\cos \phi$ se denomina **factor de potencia.** En la figura 33.15b, el voltaje máximo en las terminales del resistor se conoce por $\Delta V_R = \Delta V_{\text{máx}} \cos \phi = I_{\text{máx}} R$. Con el uso de la ecuación 33.5 y el hecho de que $\cos \phi = I_{\text{máx}} R/\Delta V_{\text{máx}}$, exprese $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ como

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}} \Delta V_{\text{rms}} \cos \phi = I_{\text{rms}} \left(\frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \right) \frac{I_{\text{máx}} R}{\Delta V_{\text{máx}}} = I_{\text{rms}} \frac{I_{\text{máx}} R}{\sqrt{2}}$$

Después de sustituir $I_{\text{máx}} = \sqrt{2} I_{\text{rms}}$ de la ecuación 33.4

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}^2 R \qquad \textbf{(33.32)}$$

En otras palabras, **la potencia promedio entregada por la fuente se convierte en energía interna en el resistor,** al igual que en el caso de un circuito de CD. Cuando la carga es completamente resistiva, $\phi = 0$, $\cos \phi = 1$, y por la ecuación 33.31

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}\, \Delta V_{\text{rms}}$$

Observe que **no existen pérdidas de potencia asociadas con capacitores puros e inductores puros en un circuito de CA.** Para ver por qué esto es verdadero, analice primero la potencia en un circuito de CA que contenga sólo una fuente y un capacitor. Cuando la corriente empieza a aumentar en una dirección en un círculo de CA empieza a acumularse carga en el capacitor y aparece un voltaje en sus terminales. Cuando este voltaje alcanza su valor máximo, la energía almacenada en el capacitor como energía potencial eléctrica es $\frac{1}{2} C(\Delta V_{\text{máx}})^2$. No obstante, este almacenamiento de energía sólo es momentáneo. El capacitor se carga y descarga dos veces durante cada ciclo: se entrega carga al capacitor durante dos cuartos de ciclo y se regresa a la fuente de voltaje durante los restantes dos cuartos. Por lo tanto, **la potencia promedio suministrada por la fuente es cero.** En otras palabras, **no se presentan pérdidas de potencia en un capacitor en un circuito de CA.**

Considere ahora el caso de un inductor: cuando la corriente en un inductor alcanza su valor máximo, la energía almacenada en el inductor es máxima y se conoce por $\frac{1}{2} L I^2_{\text{máx}}$. Cuando la corriente empieza a decrecer en el circuito, esta energía almacenada se regresa a la fuente cuando el inductor intenta mantener la corriente en el circuito.

La ecuación 33.31 muestra que la potencia entregada por una fuente de CA a cualquier circuito depende de la fase, un resultado que tiene numerosas e interesantes aplicaciones. Por ejemplo, una fábrica que utilice motores grandes en máquinas, generadores o transformadores, tiene una carga inductiva grande (debida a todos los devanados). Para entregar mayor potencia a estos equipos en la fábrica sin usar voltajes excesivamente altos, los técnicos introducen capacitancia en los circuitos para cambiar la fase.

Pregunta rápida 33.6 Una fuente de CA alimenta un circuito *RLC* con una amplitud fija de voltaje. Si la frecuencia impulsora es ω_1, el circuito es más capacitivo que inductivo y el ángulo de fase es $-10°$. Si la frecuencia impulsora es ω_2, el circuito es más inductivo que capacitivo y el ángulo de fase es $+10°$. ¿En qué frecuencia la cantidad máxima de potencia es entregada al circuito? a) ω_1, b) ω_2 o c) la misma cantidad de potencia es entregada en ambas frecuencias.

EJEMPLO 33.5 **Potencia promedio en un circuito *RLC* en serie**

Calcule la potencia promedio entregada al circuito *RLC* en serie descrito en el ejemplo 33.4.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere el circuito de la figura 33.13a e imagine que la energía se entrega al circuito mediante la fuente de CA. Revise el ejemplo 33.4 para otros detalles acerca de este circuito.

Categorizar El resultado se encuentra al usar ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 33.5 y el voltaje máximo del ejemplo 33.4 para encontrar el voltaje rms de la fuente:

$$\Delta V_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{150 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 106 \text{ V}$$

De igual modo, encuentre la corriente rms en el circuito:

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{0.292 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 0.206 \text{ A}$$

Use la ecuación 33.31 para encontrar la potencia entregada por la fuente:

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}} \cos \phi = (0.206 \text{ A})(106 \text{ V}) \cos(-34.0°)$$

$$= 18.1 \text{ W}$$

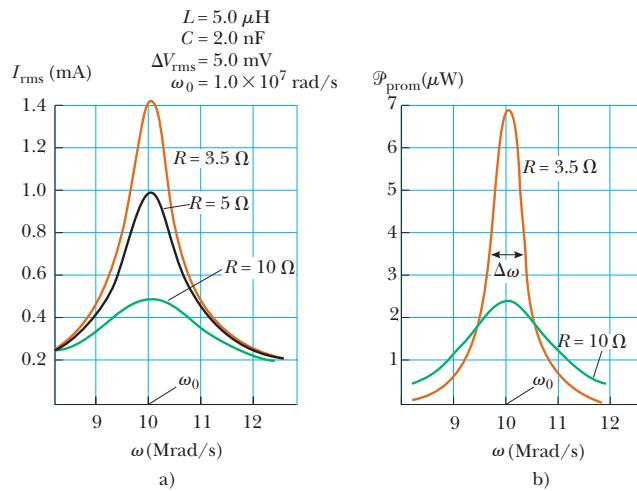
33.7 Resonancia en un circuito *RLC* en serie

Se dice que un circuito *RLC* en serie está **en resonancia** cuando la frecuencia impulsora es tal que la corriente rms tiene su valor máximo. En general, la corriente rms se puede escribir como

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{Z} \qquad \textbf{(33.33)}$$

donde Z es la impedancia. La sustitución de la expresión de Z de la ecuación 33.25 en la 33.33 da

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad \textbf{(33.34)}$$

Puesto que la impedancia depende de la frecuencia de la fuente, la corriente del circuito *RLC* también depende de la frecuencia. La frecuencia ω_0 a la que $X_L - X_C = 0$ se denomina **frecuencia de resonancia** del circuito. Para hallar ω_0, use la condición $X_L = X_C$, por la cual obtiene $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$, o sea

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \textbf{(33.35)}$$

◀ Frecuencia de resonancia

Esta frecuencia también corresponde a la frecuencia natural de oscilación de un circuito *LC* (véase la sección 32.5). Por lo tanto, la corriente rms en un circuito *RLC* en serie alcanza su valor máximo cuando la frecuencia del voltaje aplicado es igual a la frecuencia natural del oscilador, que depende sólo de L y C. Además, a esta frecuencia la corriente está en fase con el voltaje aplicado.

Pregunta rápida 33.7 ¿Cuál es la impedancia de un circuito *RLC* en serie en resonancia? a) mayor que R, b) menor que R o c) imposible de determinar.

En la figura 33.17a se ilustra una gráfica de corriente rms en función de la frecuencia para un circuito *RLC* en serie. Los datos suponen un constante $\Delta V_{\text{rms}} = 5.0$ mV, que $L = 5.0\ \mu$H y que $C = 2.0$ nF. Las tres curvas corresponden a tres valores de R. En cada caso,

Figura 33.17
a) Corriente rms en función de la frecuencia para un circuito *RLC* en serie, para tres valores de R. La corriente alcanza su valor máximo a la frecuencia de resonancia ω_0. b) Potencia promedio entregada al circuito en función de la frecuencia para el circuito *RLC* en serie, para dos valores de R.

la corriente rms alcanza su valor máximo a la frecuencia resonante ω_0. Además, las curvas se hacen más angostas y más altas a medida que la resistencia se reduce.

Al inspeccionar la ecuación 33.34, debe concluir que, cuando $R = 0$, la corriente se hace infinita a la resonancia. No obstante, los circuitos reales siempre tienen alguna resistencia que limita el valor de la corriente en algún valor finito.

También se puede calcular la potencia promedio como función de la frecuencia para un circuito *RLC* en serie. Con las ecuaciones 33.32, 33.33 y 33.25

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}^2 R = \frac{(\Delta V_{\text{rms}})^2}{Z^2} R = \frac{(\Delta V_{\text{rms}})^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \textbf{(33.36)}$$

Como $X_L = \omega L$, $X_C = 1/\omega C$, y $\omega_0{}^2 = 1/LC$, exprese el término $(X_L - X_C)^2$ como

$$(X_L - X_C)^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2$$

Con este resultado en la ecuación 33.36

Potencia promedio como función de la frecuencia en un circuito *RLC* ►

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{(\Delta V_{\text{rms}})^2 R \omega^2}{R^2\omega^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2} \qquad \textbf{(33.37)}$$

Esta expresión muestra que **con resonancia, cuando $\omega = \omega_0$, la potencia promedio es máxima** y tiene el valor $(\Delta V_{\text{rms}})^2/R$. La figura 33.17b es una gráfica de la potencia promedio en función de la frecuencia para dos valores de R en un circuito *RLC* en serie. Cuando se reduce la resistencia, la curva se hace más aplicada cerca de la frecuencia de resonancia. Esta nitidez de la curva suele describirse por medio de un parámetro sin dimensiones conocido como **factor de calidad,**[2] denotada por Q:

Factor de calidad ►

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

donde $\Delta\omega$ es el ancho de la curva medido entre los dos valores de ω para los cuales $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ tiene la mitad de su valor máximo, llamado *puntos de potencia mitad* (véase la fi-

[2] El factor de calidad también se define como la rotación $2\pi E/\Delta E$, donde E es la energía almacenada en el sistema oscilante y ΔE es la reducción de energía por ciclo de oscilación debida a la resistencia.

gura 33.17b). Se deja como problema (problema 68) para demostrar que el ancho de los puntos de potencia mitad tienen el valor $\Delta\omega = R/L$, de modo que

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \tag{33.38}$$

El circuito receptor de un radio es una aplicación importante de un circuito resonante, usted puede sintonizar el radio a una estación particular (que transmite una onda electromagnética o señal de una frecuencia específica) al hacer variar un capacitor, que cambia la frecuencia de resonancia del circuito receptor. Cuando el circuito es conducido por las osilaciones electromagnéticas una señal de radio se produce en una antena, el circuito del sintonizador responde con una gran amplitud de osilación eléctrica sólo para la frecuencia de estación que iguala la frecuencia de resonancia. Por lo tanto sólo la señal de una estación de radio pasa por un amplificador y un altavoz, incluso a través de *señales* de todos las estaciones que conducen circuitos al mismo tiempo. Ya que es frecuente que muchas señales estén presentes en una amplia banda de frecuencias, es importante diseñar un circuito con Q elevada para eliminar las señales indeseables. De esta forma, las estaciones cuyas frecuencias son cercanas pero no iguales a la frecuencia resonante dan señales al receptor de que son insignificantes respecto a la señal que es igual a la frecuencia resonante.

EJEMPLO 33.6 Circuito *RLC* en serie resonante

Considere un circuito RLC en serie para el que $R = 150\ \Omega$, $L = 20.0$ mH, $\Delta V_{rms} = 20.0$ V y $\omega = 5000\ s^{-1}$. Determine el valor de la capacitancia para que la corriente sea un máximo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere el circuito en la figura 33.13a e imagine variar la frecuencia de la fuente de CA. La corriente en el circuito tiene su valor máximo con la frecuencia de resonancia ω_0.

Categorizar El resultado se encuentra usando ecuaciones desarrolladas en esta sección, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 33.35 para resolver para la capacitancia requerida en términos de la frecuencia de resonancia:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow C = \frac{1}{\omega_0{}^2 L}$$

Sustituya valores numéricos:

$$C = \frac{1}{(5.00 \times 10^3\ s^{-1})^2(20.0 \times 10^{-3}\ H)} = 2.00\ \mu F$$

33.8 El transformador y la transmisión de energía

Como se explicó en la sección 27.6, es económico usar un voltaje alto y una corriente baja para minimizar la pérdida I^2R en las líneas de transmisión cuando la energía eléctrica se transmite a grandes distancias. En consecuencia, son comunes líneas de 350 kV y, en muchas áreas, incluso se usan líneas con voltajes más altos (765 kV). En el extremo receptor de tales líneas, el consumidor requiere potencia a bajo voltaje (por seguridad y para eficiencia en diseño). En la práctica, el voltaje reduce a aproximadamente 20 000 V en una estación distribuidora, luego a 4000 V para entrega a áreas residenciales y finalmente a 120 V y 240 V en el sitio del consumidor. Por lo tanto, se necesita un dispositivo que pueda cambiar el voltaje y la corriente alternos sin causar cambios apreciables en la potencia entregada. El transformador CA es tal dispositivo.

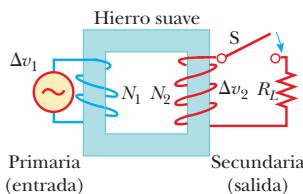



Figura 33.18 Un transformador ideal está formado por dos bobinas enrolladas en el mismo núcleo de hierro. Un voltaje alterno Δv_1 se aplica a la bobina primaria, y el voltaje de salida ΔV_2 a las terminales del resistor de resistencia R.

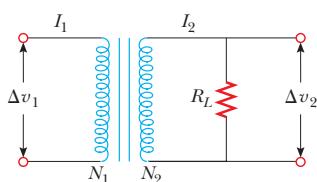



Figura 33.19 Diagrama de circuito para un transformador.

En su forma más sencilla, el **transformador de CA** consta de dos bobinas de alambre enrolladas alrededor de un núcleo de hierro, como se ilustra en la figura 33.18. (Compárelo con el experimento de Faraday de la figura 31.2.) La bobina de la izquierda, que está conectada a la fuente de entrada de voltaje alterno y tiene N_1 vueltas, se denomina *devanado primario* (o *primaria*). A la bobina de la derecha, formada por N_2 vueltas y conectada a un resistor de carga R, se le llama *devanado secundario* (o *secundaria*). El propósito del núcleo de hierro es aumentar el flujo magnético a través de la bobina y proporcionar un medio en el que casi todas las líneas de campo magnético que pasan a través de una bobina lo hagan por la otra. Las pérdidas por corrientes de eddy se reducen con el uso de un núcleo laminado. La transformación de energía en energía interna en la resistencia finita de los alambres de la bobina suele ser muy pequeña. Los transformadores representativos tienen eficiencias de potencia de 90 a 99%. En la explicación que sigue se supone un *transformador ideal,* en el que las pérdidas de energía en los devanados y el núcleo son igual a cero.

La ley de Faraday expresa que el voltaje ΔV_1 en las terminales del circuito primario es

$$\Delta v_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} \tag{33.39}$$

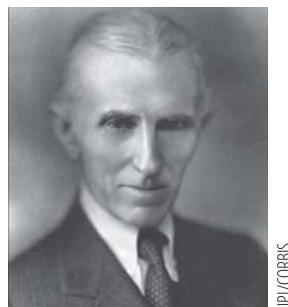
donde Φ_B es el flujo magnético que pasa por cada vuelta. Si supone que todas las líneas de campo magnético permanecen dentro del núcleo de hierro, el flujo que pasa por cada vuelta del primario es igual al flujo que pasa por cada vuelta del secundario. Por esto, el voltaje en las terminales del secundario es

$$\Delta v_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \tag{33.40}$$

Resolviendo la ecuación 33.39 para $d\Phi_B/dt$ y si sustituimos el resultado en la ecuación 33.40, encontramos que

$$\Delta v_2 = \frac{N_2}{N_1}\Delta v_1 \tag{33.41}$$

Cuando $N_2 > N_1$, el voltaje de salida ΔV_2 es mayor que el voltaje de entrada ΔV_1. Esta configuración se conoce como *transformador elevador*. Cuando $N_2 < N_1$, el voltaje de salida es menor que el voltaje de entrada, y se tiene un *transformador reductor*.

Cuando se cierra el interruptor del circuito secundario, se induce una corriente I_2 en el secundario. (En esta explicación las mayúsculas 1 y ΔV se refieren a los valores rms.) Si la carga del circuito secundario es una resistencia pura, la corriente inducida está en fase con el voltaje inducido. La potencia alimentada al circuito secundario la proporciona la fuente de CA conectada al circuito primario, como se observa en la figura 33.19. En un transformador ideal, sin pérdidas, la potencia $I_1\,\Delta V_1$ suministrada por la fuente es igual a la potencia $I_2\,\Delta V_2$ en el circuito secundario. Es decir,

$$I_1\,\Delta V_1 = I_2\,\Delta V_2 \tag{33.42}$$

El valor de la resistencia de carga R_L determina el valor de la corriente del secundario porque $I_2 = \Delta V_2/R_L$. Además, la corriente del primario es $I_1 = \Delta V_1/R_{\text{eq}}$, donde

$$R_{\text{eq}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L \tag{33.43}$$

es la resistencia equivalente de la resistencia de carga cuando se ve desde el lado del primario. Este análisis permite inferir que un transformador se puede usar para acoplar resistencias entre el circuito primario y la carga. De esta forma se logra una máxima transferencia de potencia entre una fuente de potencia y la resistencia de carga. Por ejemplo, un transformador conectado entre la salida de 1 kΩ de un amplificador de audio y un altavoz de 8 Ω asegura la transmisión de tanta señal de audio como sea posible al altavoz. En terminología de equipos estéreo, esto se llama *acoplamiento de impedancias.*

Muchos aparatos electrónicos comunes para uso doméstico requieren voltajes bajos para funcionar de manera apropiada. Un transformador pequeño que se conecta directamente a la toma de la pared, como el que se ilustra en la figura 33.20, puede proporcionar el voltaje adecuado. La fotografía muestra los dos devanados enrollados

UPI/CORBIS.

NIKOLA TESLA
Físico estadounidense (1856-1943)
Tesla nació en Croacia pero pasó casi toda su vida profesional como inventor en Estados Unidos. Fue una figura clave en el perfeccionamiento de la electricidad de corriente alterna, transformadores de alta tensión y transporte de energía eléctrica mediante líneas de transmisión de CA. El punto de vista de Tesla estuvo en desacuerdo con las ideas de Thomas Edison, quien se dedicó al uso de corriente directa para transmitir energía eléctrica. El método de CA de Tesla ganó.

©Thomson Learning/George Semple.

Figura 33.20 El devanado primario de este transformador está acoplado directamente a las puntas de la clavija. El devanado secundario se conecta al cable de línea que se ve a la derecha, que va a un aparato electrónico. Muchos de estos transformadores de fuente de alimentación también convierten corriente alterna en corriente directa.

©Thomson Learning/George Semple.

Este transformador es más pequeño que el de la fotografía con que se inicia este capítulo. Además, es un transformador reductor. Baja el voltaje de 4000 a 240 V al momento de entregar energía a un grupo de residencias.

alrededor de un núcleo común de hierro que se encuentra dentro de estas pequeñas "cajas negras". Este transformador convierte los 120 V de CA del tomacorriente a 12.5 V de CA. (¿Puede usted determinar la relación de los números de vueltas de las dos bobinas?) Algunas cajas negras también utilizan diodos para convertir la corriente alterna en corriente directa (véase la sección 33.9).

EJEMPLO 33.7 La economía de la potencia de CA

Una estación de generación de electricidad necesita entregar energía a una capacidad de 20 MW a una ciudad a 1.0 km de distancia. Un voltaje común para los generadores de potencia comerciales es de 22 kV, pero se usa un transformador de subida para impulsar el voltaje a 230 kV antes de la transmisión.

A) Si la resistencia de los alambres de de 2.0 Ω y la energía cuesta aproximadamente 10¢/kWh, estime cuánto le cuesta a la compañía convertir la energía a energía interna en los alambres durante un día.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La resistencia de los alambres están en serie con la resistencia que representa la carga (hogares y negocios). Por lo tanto hay una caída de voltaje en los alambres, esto es, parte de la energía transmitida se convierte en energía interna en los alambres y nunca alcanza la carga.

Categorizar Este problema trata de encontrar la potencia entregada a una carga resistiva en un circuito CA. Ignore cualquier característica capacitiva o inductiva de la carga e iguale el factor potencia a 1.

Analizar Calcule I_{rms} en los alambres a partir de la ecuación 33.31:

$$I_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{\Delta V_{\text{rms}}} = \frac{20 \times 10^6 \text{ W}}{230 \times 10^3 \text{ V}} = 87 \text{ A}$$

Determine la proporción a la que se entrega la energía a la resistencia en los alambres a partir de la ecuación 33.32:

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}^2 R = (87 \text{ A})^2 (2.0 \ \Omega) = 15 \text{ kW}$$

Calcule la energía T_{ET} entregada a los alambres durante el curso de un día:

$$T_{\text{ET}} = \mathcal{P}_{\text{prom}} \Delta t = (15 \text{ kW})(24 \text{ h}) = 360 \text{ kWh}$$

Encuentre el costo de esta energía con una proporción de 10¢/kWh:

$$\text{Costo} = (360 \text{ kWh})(\$0.10/\text{kWh}) = \$36$$

B) Repita el cálculo para una situación en la cual la planta eléctrica entrega la energía con un voltaje original de 22 kV.

SOLUCIÓN

Calcule I_{rms} en los alambres a partir de la ecuación 33.31:

$$I_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{\Delta V_{\text{rms}}} = \frac{20 \times 10^6 \text{ W}}{22 \times 10^3 \text{ V}} = 910 \text{ A}$$

A partir de la ecuación 33.32, determine la cantidad de entrega de energía a la resistencia en los alambres:

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}^2 R = (910 \text{ A})^2 (2.0 \ \Omega) = 1.7 \times 10^3 \text{ kW}$$

Calcule la energía entregada a los alambres durante el curso de un día:

$$T_{\text{ET}} = \mathcal{P}_{\text{prom}} \Delta t = (1.7 \times 10^3 \text{ kW})(24 \text{ h}) = 4.1 \times 10^4 \text{ kWh}$$

Encuentre el costo de esta energía con una proporción de 10¢/kWh:

$$\text{Costo} = (4.1 \times 10^4 \text{ kWh})(\$0.10/\text{kWh}) = \$4.1 \times 10^3$$

Finalizar Note el tremendo ahorro que es posible a través del uso de transformadores y líneas de transmisión de voltaje alto. Tales ahorros, en combinación con la eficiencia de usar corriente alterna para operar motores, conduce a la adopción universal de la corriente alterna en lugar de la corriente directa para redes eléctricas comerciales.

33.9 Rectificadores y filtros

Es frecuente que los aparatos electrónicos portátiles, como radios y reproductores de discos compactos, se alimenten con corriente directa suministrada por baterías. Muchos dispositivos ya están equipados con convertidores de CA-CD, como el que se ilustra en la figura 33.20. Este convertidor contiene un transformador que reduce el voltaje de 120 V a generalmente 9 V y un circuito que convierte corriente alterna en corriente directa. El proceso de convertir corriente alterna en corriente directa se denomina **rectificación** y el aparato convertidor se llama **rectificador.**

El elemento más importante de un circuito rectificador es el **diodo,** elemento que conduce corriente en una dirección pero no en la otra. La mayor parte de los diodos que se emplean en aparatos electrónicos modernos son semiconductores. El símbolo de circuito para un diodo es —▶|—, donde la flecha indica la dirección de la corriente en el diodo. Éste tiene baja resistencia a la corriente en una dirección (la dirección de la flecha) y alta resistencia a la corriente en la dirección opuesta. Para comprender la forma en que un diodo rectifica una corriente considere la figura 33.21a, que muestra un diodo y un resistor conectados al secundario de un transformador. El transformador reduce el voltaje de 120 V de CA al menor voltaje necesario para que el dispositivo tenga una resistencia R (la resistencia de carga). Ya que el diodo conduce corriente sólo en una dirección, la corriente alterna en el resistor de carga se reduce a la forma que ilustra la curva continua de la figura 33.21b. El diodo conduce corriente sólo cuando el lado del símbolo que contiene la punta de la flecha tiene potencial positivo respecto al otro lado. En esta situación, el diodo actúa como *rectificador de media onda* porque la corriente está presente en el circuito sólo durante la mitad de cada ciclo.

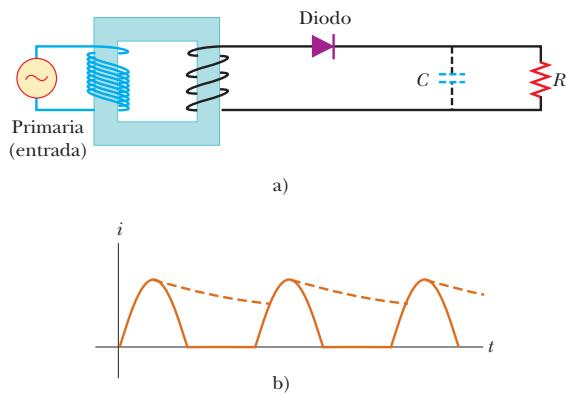
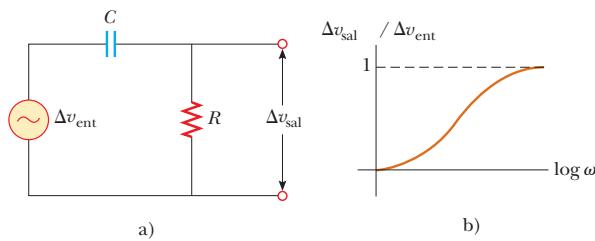
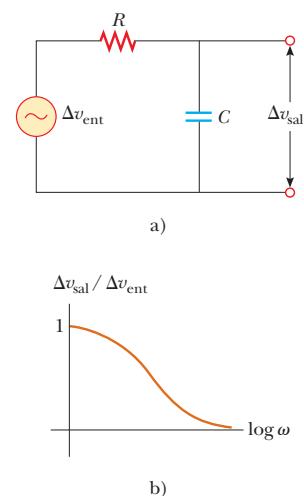



Figura 33.21 a) Rectificador de media onda con un capacitor de filtro opcional. b) Corriente en función del tiempo en el resistor. La curva continua representa la corriente sin capacitor de filtro, y la curva discontinua es la corriente cuando el circuito incluye el capacitor.

Figura 33.22
a) Filtro sencillo *RC* de paso alto. b) Relación entre el voltaje de salida y el de entrada para un filtro *RC* de paso alto como función de la frecuencia angular de la fuente de CA.

Cuando se agrega un condensador al circuito, como se ve con las líneas discontinuas y el símbolo del capacitor de la figura 33.21a, el circuito es una fuente simple de alimentación de CD. La variación en el tiempo de la corriente en el resistor de carga (la curva discontinua de la figura 33.24b) es cercana a cero, como lo determina la constante de tiempo *RC* del circuito. Cuando la corriente del circuito empieza a subir en $t = 0$ en la figura 33.21b, el capacitor se carga; pero cuando la corriente cae, el capacitor se descarga por el resistor, de modo que la corriente en éste no cae tan rápido como la corriente del transformador.

El circuito *RC* de la figura 33.21a es un ejemplo de un **circuito filtro** que se usa para suavizar o eliminar la señal que varía en tiempo. Por ejemplo, los radios suelen ser alimentados por un voltaje alterno de 60 Hz. Después de la rectificación, el voltaje todavía contiene un pequeño componente de CA de 60 Hz (a veces conocido como *fluctuación periodica*), que debe ser filtrado. Por "filtrado" debe entender que la fluctuación periódica de 60 Hz debe ser reducido a un valor mucho menor que el de la señal de audio que se vaya a amplificar porque, sin filtrar, la señal resultante de audio contiene un molesto zumbido a 60 Hz.

Tambien puede diseñar filtros que respondan de manera diferente a frecuencias distintas. Considere el sencillo circuito *RC* en serie de la figura 33.22a. El voltaje de entrada se da en las terminales de la combinación en serie de los dos elementos. La salida es el voltaje en las terminales del resistor. Una gráfica de la relación entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada, como función del logaritmo de la frecuencia angular (véase la figura 33.22b), muestra que a frecuencias bajas ΔV_{sal} es mucho menor que ΔV_{ent}, mientras que a frecuencias altas los dos voltajes son iguales. Porque el circuito preferentemente pasa señales de frecuencia más alta y bloquea señales de baja frecuencia, el circuito se llama filtro *RC* de paso alto. (Véase el problema 45 para un análisis de este filtro.)

Físicamente, un filtro de paso alto funciona porque un capacitor "bloquea" la corriente directa y la corriente alterna a bajas frecuencias, porque a estas frecuencias, la reactancia capacitiva es alta y gran parte del voltaje aplicado aparece en las terminales del capacitor, en lugar de las terminales del resistor de salida. Cuando la frecuencia aumenta, la reactancia capacitiva cae, y más voltaje aplicado aparece en las terminales del resistor.

Ahora considere el circuito de la figura 33.23a, donde se han intercambiado el resistor y el capacitor, y donde el voltaje de salida se toma en las terminales del capacitor. A bajas frecuencias, la reactancia en éste y el voltaje en sus terminales es alta. Cuando la frecuencia aumenta, el voltaje cae en las terminales. Por lo tanto, se trata de un filtro *RC* de paso bajo. La relación entre el voltaje de salida y el de entrada (véase el problema 46), graficado como función del logaritmo de ω en la figura 33.23b, muestra este comportamiento.

Es posible estar familiarizado con redes de cruce, que son parte importante de los sistemas de altavoces para sistemas de audio de alta fidelidad. Estas redes usan filtros de paso bajo para dirigir frecuencias bajas a un tipo especial de altavoz, el de sonidos graves, que está diseñado para reproducir con gran precisión las notas bajas. Las altas frecuencias son enviadas al altavoz de sonidos agudos.

Figura 33.23
a) Filtro simple *RC* de paso bajo. b) Relación entre el voltaje de salida y el de entrada para un filtro *RC* de paso bajo como función de la frecuencia angular de la fuente de CA.

Resumen

DEFINICIONES

En los circuitos de CA que contienen inductores y capacitores, es útil definir la **reactancia inductiva** X_L y la **reactancia capacitiva** X_C como

$$X_L \equiv \omega L \quad \textbf{(33.10)}$$

$$X_C \equiv \frac{1}{\omega C} \quad \textbf{(33.18)}$$

donde ω es la frecuencia angular de la fuente de CA. La unidad del SI para reactancia es el ohm.

La **impedancia** Z de un circuito de CA RLC en serie es

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \textbf{(33.25)}$$

Esta expresión ilustra que no es posible sumar simplemente la resistencia y las reactancias en un circuito. Se debe explicar el voltaje aplicado y la corriente que están fuera de fase, con el **ángulo de fase** ϕ entre la corriente y el voltaje como

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \quad \textbf{(33.27)}$$

El signo de ϕ puede ser positivo o negativo, dependiendo de si X_L es mayor o menor que X_C. El ángulo de fase es cero cuando $X_L - X_C$.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **corriente rms** y el **voltaje rms** en un circuito de CA en el que los voltajes y la corriente varían senoidalmente se conocen por

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{\text{máx}} \quad \textbf{(33.4)}$$

$$\Delta V_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = 0.707\, \Delta V_{\text{máx}} \quad \textbf{(33.5)}$$

donde $I_{\text{máx}}$ y $\Delta V_{\text{máx}}$ son los valores máximos.

Si un circuito de CA consiste en una fuente y un resistor, la corriente está en fase con el voltaje. Es decir, la corriente y el voltaje alcanzan sus valores máximos al mismo tiempo.

Si un circuito de CA consiste en una fuente y un inductor, la corriente se atrasa al voltaje por 90°. Es decir, el voltaje llega a su valor máximo un cuarto de periodo antes que la corriente alcance su valor máximo.

Si un circuito de CA consiste en una fuente y un capacitor, la corriente se adelante al voltaje por 90°. Es decir, la corriente alcanza su valor máximo un cuarto de periodo antes que el voltaje alcance su valor máximo.

La **potencia promedio** entregada por la fuente en un circuito RLC es

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}\, \Delta V_{\text{rms}} \cos \phi \quad \textbf{(33.31)}$$

Una expresión equivalente para la potencia promedio es

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}^2 R \quad \textbf{(33.32)}$$

La potencia promedio entregada por la fuente resulta en una energía interna creciente en el resistor. En un inductor o capacitor ideal no se presenta pérdida de potencia.

La corriente rms en un circuito RLC en serie es

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad \textbf{(33.34)}$$

Un circuito RLC en serie está en resonancia cuando la reactancia inductiva es igual a la reactancia capacitiva. Cuando se satisface esta condición, la corriente rms conocida por la ecuación 33.34 tiene su valor máximo. La **frecuencia de resonancia** ω_0 del circuito es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \textbf{(33.35)}$$

La corriente rms en un circuito RLC en serie tiene su valor máximo cuando la frecuencia de la fuente es igual a ω_0, es decir, cuando la frecuencia "impulsora" iguala la frecuencia de resonancia.

Los **transformadores de CA** permiten cambios fáciles en voltaje alterno de acuerdo con

$$\Delta v_2 = \frac{N_2}{N_1} \Delta v_1 \quad \textbf{(33.41)}$$

donde N_1 y N_2 son los números de devanados en las bobinas primaria y secundaria, respectivamente, y Δv_1 y Δv_2 son los voltajes en estas bobinas.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O i)** ¿Cuál es el tiempo promedio del potencial de "onda cuadrada" que se muestra en la figura P33.1? a) $\sqrt{2}\ \Delta V_{máx}$, b) $\Delta V_{máx}$, c) $\Delta V_{máx}/\sqrt{2}$, d) $\Delta V_{máx}/2$, e) $\Delta V_{máx}/4$. **ii)** ¿Cuál es el voltaje rms? Escoja entre las mismas posibilidades.

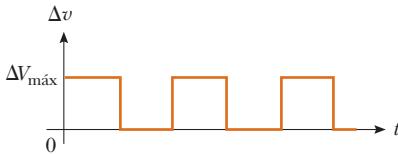



Figura P33.1

2. Los amperímetros y voltímetros de CA ¿indican a) picos y valles, b) valores máximos, c) rms o d) valores promedio?

3. **O** Una diferencia de potencial que varía sinusoidalmente tiene amplitud de 170 V. **i)** ¿Cuál es su valor instantáneo mínimo? a) 240 V, b) 170 V, c) 120 V, d) 0, e) −120 V, f) −170 V, g) −240 V. **ii)** ¿Cuál es su valor promedio? **iii)** ¿Cuál es su valor rms? Escoja entre las mismas posibilidades en cada caso.

4. ¿Por qué un condensador actúa como circuito en corto a altas frecuencias? ¿Por qué actúa como circuito abierto a bajas frecuencias?

5. Explique la forma en que el mnemónico "ELI el hombre de HIELO" se puede usar para recordar si la corriente se adelanta al voltaje o el voltaje se adelanta a la corriente en circuitos *RLC*. Observe que E representa la fem $\mathcal{E}$.

6. ¿Por qué la suma de los voltajes máximos en las terminales de cada uno de los elementos de un circuito *RLC* en serie es generalmente mayor que el máximo voltaje aplicado? ¿No viola esto la regla de la espira de Kirchhoff?

7. ¿El ángulo de fase depende de la frecuencia? ¿Cuál es el ángulo de fase cuando la reactancia inductiva es igual a la reactancia capacitiva?

8. **O i)** Cuando un inductor particular se conecta a una fuente fem que varía sinusoidalmente, con amplitud constante y frecuencia de 60 Hz, la corriente rms es 3 A. ¿Cuál la se corriente rms si la frecuencia de la fuente se duplica? a) 12 A, b) 6 A, c) 4.24 A, d) 3 A, e) 2.12 A, f) 1.5 A, g) 0.75 A. **ii)** Repita la parte i) pero suponga que la carga es un capacitor en lugar de un inductor. **iii)** Repita la parte i) pero suponga que la carga es un resistor en lugar de un inductor.

9. **O** ¿Cuál es la impedancia de un circuito *RLC* en serie en resonancia? a) X_L, b) X_C, c) R, d) $X_L - X_C$, e) $2X_L$, f) $\sqrt{2}R$, g) 0.

10. **O** ¿Cuál es el ángulo de fase en un circuito *RLC* en serie en resonancia? a) 180°, b) 90°, c) 0, d) −90°. e) Ninguna de estas respuestas es necesariamente correcta.

11. Cierto suministro de energía se puede modelar como una fuente de fem en serie con una resistencia de 10 Ω y una reactancia inductiva de 5 Ω. Para obtener máxima entrega de energía a la carga, se encuentra que la carga debe tener una resistencia $R_L = 10\ \Omega$, una reactancia inductiva de cero y una reactancia capacitiva de 5 Ω. a) Con esta carga, ¿el circuito está en resonancia? b) Con esta carga, ¿qué fracción del promedio de la energía de entrada puesta por la fuente de fem se entrega a la carga? c) Para aumentar la fracción de la energía entregada a la carga, ¿cómo se podría cambiar la carga? Puede revisar el ejemplo 28.2 y el problema 4 del capítulo 28 acerca de máxima transferencia de energía en circuitos CD.

12. Como se ve en la figura 7.5, una persona desplaza una aspiradora a una rapidez v en un piso horizontal, ejerciendo sobre ella una fuerza de magnitud F dirigida hacia arriba con un ángulo θ con la horizontal. ¿Con qué rapidez la persona realiza trabajo sobre la aspiradora? Diga cuál es la analogía entre potencia en esta situación y en un circuito eléctrico.

13. **O** Un circuito que contiene un generador, un capacitor, un inductor y un resistor tiene una resonancia de alta Q a 1000 Hz. De mayor a menor, clasifique las siguientes aportaciones a la impedancia del circuito en dicha frecuencia y a menor y mayor frecuencias, y note cualquier caso de igualdad en su clasificación. a) X_C a 500 Hz, b) X_C a 1000 Hz, c) X_C a 1500 Hz, d) X_L a 500 Hz, e) X_L a 1000 Hz, f) X_L a 1500 Hz, g) R a 500 Hz, h) R a 1000 Hz, i) R a 1500 Hz.

14. Investigue para responder estas preguntas: ¿quién inventó el detector de metales? ¿Por qué? ¿Funcionó?

15. ¿Un transformador funciona si se usa una batería como voltaje de entrada en el primario? Explique.

16. Explique la forma en que el factor de calidad se relaciona con las características de respuesta de un radio receptor. ¿Qué variable influye con más intensidad en el factor de calidad?

17. Una tormenta de hielo rompe una línea de transmisión e interrumpe la energía eléctrica a una ciudad. Una persona arranca un generador de gasolina de 120 V y engancha sus terminales a las terminales "caliente" y "tierra" del panel eléctrico para su casa. En un poste sobre la calle hay un transformador diseñado para bajar el voltaje para uso doméstico, tiene una relación de vueltas N_1/N_2 de 100 a 1. Un reparador sube al poste. ¿Qué voltaje encontrará en el lado de entrada del transformador? Como implica esta pregunta, se deben tomar medidas de seguridad en el uso de generadores domésticos y durante fallas de potencia en general.

Problemas

Sección 33.1 Fuentes de CA

Sección 33.2 Resistores en un circuito de CA

1. El voltaje rms de salida de una fuente de CA es de 200 V y la frecuencia de operación de 100 Hz. Escriba la ecuación que proporcione el voltaje de salida como función del tiempo.

2. a) ¿Cuál es la resistencia de una lámpara que usa una potencia promedio de 75.0 W cuando está conectada a una fuente de 60.0 Hz que tiene un voltaje máximo de 170 V? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la resistencia de una lámpara de 100 W?

3. Una fuente de alimentación de CA produce un voltaje máximo $\Delta V_{\text{máx}}$ = 100 V. Esta fuente de alimentación está conectada a un resistor de 24.0 Ω, y la corriente y voltaje del resistor se miden con un amperímetro y voltímetro de CA ideal, como se ve en la figura P33.3. ¿Qué indica cada uno de los medidores? Observe que un amperímetro ideal tiene cero resistencia y que un voltímetro ideal tiene resistencia infinita.

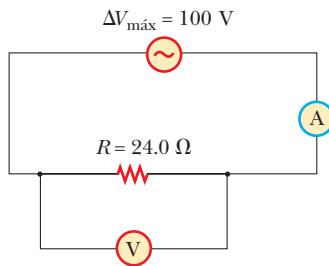



Figura P33.3

4. En el simple circuito de CA que se muestra en la figura 33.2, R = 70.0 Ω y $\Delta v = \Delta V_{\text{máx}}$ sen ωt. a) Si $\Delta v_R = 0.250\ \Delta V_{\text{máx}}$ por primera vez en t = 0.010 0 s, ¿cuál es la frecuencia angular de la fuente? b) ¿Cuál es el valor siguiente de t para el cual Δv_R = 0.250 $\Delta V_{\text{máx}}$?

5. La corriente en el circuito que se observa en la figura 33.2 es igual a 60.0% del pico de corriente en t = 7.00 ms. ¿Cuál es la frecuencia mínima de la fuente que da esta corriente?

6. Un amplificador de audio, representado por una fuente de CA y un resistor en la figura P33.6, entrega un voltaje alterno al altavoz a frecuencias de audio. Si el voltaje de la fuente tiene una amplitud de 15.0 V, R = 8.20 Ω, y el altavoz es equivalente a una resistencia de 10.4 Ω, ¿cuál es la potencia promedio en el tiempo transferida a ésta?

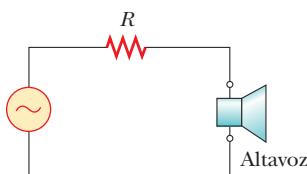



Figura P33.6

Sección 33.3 Inductores en un circuito de CA

7. En un circuito de CA completamente inductivo, como se observa en la figura 33.6, $\Delta V_{\text{máx}}$ = 100 V. a) La corriente máxima es 7.50 A a 50.0 Hz. Calcule la inductancia L. b) **¿Qué pasaría si?** ¿A qué frecuencia angular ω es 2.50 A la corriente máxima?

8. Un inductor tiene una reactancia de 54.0 Ω a 60.0 Hz. ¿Cuál es la corriente máxima si el inductor se conecta a una fuente de 50.0 Hz que produce un voltaje de 100 V rms?

9. Para el circuito que se ilustra en la figura 33.6, $\Delta V_{\text{máx}}$ = 80.0 V, ω = 65.0 π rad/s, y L = 70.0 mH. Calcule la corriente en el inductor a t = 15.5 ms.

10. Un inductor de 20.0 mH se conecta a una salida eléctrica estándar (ΔV_{rms} = 120 V; f = 60.0 Hz). Determine la energía almacenada en el inductor a t = (1/180) s, suponiendo que esta energía es cero a t = 0.

11. **Problema de repaso.** Determine el flujo magnético máximo que pasa por un inductor conectado a una toma de corriente estándar (ΔV_{rms} = 120 V, f = 60.0 Hz).

Sección 33.4 Capacitores en un circuito de CA

12. a) ¿Con qué frecuencias un capacitor de 22.0 μF registra una reactancia por debajo de 175 Ω? b) **¿Qué pasaría si?** Con esta misma gama de frecuencia, ¿cuál es la reactancia de un condensador de 44.0 μF?

13. ¿Cuál es la corriente máxima en un capacitor de 2.20 μF cuando está conectado a) a una salida eléctrica estándar estadounidense que tiene ΔV_{rms} = 120 V, f = 60.0 Hz, y b) Una salida eléctrica estándar europea que tiene ΔV_{rms} = 240 V, f = 50.0 Hz?

14. Un capacitor C se conecta a una fuente de alimentación que funciona con una frecuencia f y produce un voltaje rms ΔV. ¿Cuál es la carga máxima que aparece en cualquiera de las placas del capacitor?

15. ¿Qué máxima corriente entrega una fuente de CA con $\Delta V_{\text{máx}}$ = 48.0 V y f = 90.0 Hz cuando se conecta a un capacitor de 3.70 μF?

16. Un capacitor de 1.00 mF se conecta a una toma de corriente estándar (ΔV_{rms} = 120 V; f = 60.0 Hz). Determine la corriente en los alambres a t = (1/180) s, suponiendo que cuando t = 0 la energía almacenada en el condensador es cero.

Sección 33.5 Circuito *RLC* en serie

17. Un inductor (L = 400 mH), un capacitor (C = 4.43 μF) y un resistor (R = 500 Ω) están conectados en serie. Una fuente de CA de 50.0 Hz produce un pico de corriente de 250 mA en el circuito. a) Calcule el pico de voltaje necesario $\Delta V_{\text{máx}}$. b) Determine el ángulo de fase en el cual la corriente se adelanta o atrasa al voltaje aplicado.

18. ¿A qué frecuencia la reactancia inductiva de un inductor de 57.0 μH es igual a la reactancia capacitiva de un capacitor de 57.0 μF?

19. Un circuito de CA en serie contiene los siguientes componentes: un resistor 150 Ω, un inductor 250 mH, un capacitor de 2.00 μF y una fuente con $\Delta V_{máx}$ = 210 V que funciona a 50.0 Hz. Calcule a) la reactancia inductiva, b) la reactancia capacitiva, c) la impedancia, d) la corriente máxima y e) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de fuente.

20. Un voltaje senoidal $\Delta v(t)$ = (40.0 V) sen (100*t*) se aplica a un circuito *RLC* en serie con *L* = 160 mH, *C* = 99.0 μF, y *R* = 68.0 Ω. a) ¿Cuál es la impedancia del circuito? b) ¿Cuál es la corriente máxima? c) Determine los valores numéricos para $I_{máx}$, ω y ϕ en la ecuación $i(t) = I_{máx}\,\text{sen}(\omega t - \phi)$.

21. Un circuito *RLC* consta de un resistor de 150 Ω, un capacitor de 21.0 μF y un inductor de 460 mH conectados en serie con una fuente de alimentación de 120 V, 60.0 Hz. a) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado? b) ¿Cuál alcanza su valor máximo primero, la corriente o el voltaje?

22. Cuatro elementos de circuito, un capacitor, un inductor, un resistor y una fuente de CA, se conectan de distintas formas. Primero el capacitor se conecta a la fuente y se encuentra que la corriente rms es de 25.1 mA. El capacitor se desconecta y descarga, y luego se conecta en serie con el resistor y la fuente, formando una corriente rms de 15.7 mA. El circuito se desconecta y el capacitor se descarga. Luego el condensador se conecta en serie con el inductor y la fuente, formando una corriente rms de 68.2 mA. Después de que el circuito se desconecta y el capacitor se descarga, los cuatro elementos de circuito se conectan en un circuito cerrado en serie. ¿Cuál es la corriente rms del circuito?

23. Una persona trabaja cerca del secundario de un transformador, como se observa en la figura P33.23. El voltaje del primario es de 120 V a 60.0 Hz. La capacitancia C_s, que es la capacitancia parásita entre la mano y el devanado secundario, es de 20.0 pF. Suponiendo que la persona tiene una resistencia corporal a tierra R_b = 50.0 kΩ, determine el voltaje rms en el cuerpo. (*Sugerencia:* Modele el circuito con el secundario del transformador como una fuente de CA simple.)

Figura P33.23

24. Una fuente de CA con $\Delta V_{máx}$ = 150 V y *f* = 50.0 Hz se conecta entre los puntos *a* y *d* de la figura P33.24. Calcule los voltajes máximos entre a) los puntos *a* y *b*, b) los puntos *b* y *c*, c) los puntos *c* y *d*, d) los puntos *b* y *d*.

Figura P33.24 Problemas 24 y 6 4.

25. Dibuje a escala un diagrama de fasores que muestre *Z*, X_L, X_C y ϕ para un circuito en serie de CA para el cual *R* = 300 Ω, *C* = 11.0 μF, *L* = 0.200 H y *f* = (500/π) Hz.

26. ● En un circuito *RLC* en serie que incluye una fuente de corriente alterna que opera con frecuencia y voltaje fijos, la resistencia *R* es igual a la reactancia inductiva. Si la separación entre placas del capacitor se reduce a la mitad de su valor original, la corriente del circuito se duplica. Encuentre la reactancia capacitiva inicial en términos de *R*. Explique cada etapa de su solución.

Sección 33.6 Potencia en un circuito de CA

27. Un voltaje de CA de la forma Δv = (100 V) sen(1000*t*) se aplica a un circuito *RLC* en serie. Suponga que la resistencia es de 400 Ω, la capacitancia de 5.00 μF y la inductancia de 0.500 H. Encuentre la potencia promedio que se entrega al circuito.

28. Un circuito *RLC* en serie tiene una resistencia de 45.0 Ω y una impedancia de 75.0 Ω. ¿Qué potencia promedio es entregada a este circuito cuando ΔV_{rms} = 210 V?

29. En cierto circuito *RLC* en serie, I_{rms} = 9.00 A, ΔV_{rms} = 180 V, y la corriente se adelanta en 37.0° al voltaje. a) ¿Cuál es la resistencia total del circuito? b) Calcule la reactancia del circuito $(X_L - X_C)$.

30. Suponga que es el administrador de una fábrica que utiliza muchos motores eléctricos; éstos generan una gran carga inductiva en la línea de energía eléctrica, así como carga resistiva. La compañía de luz construye una línea de distribución extrafuerte para alimentar energía con un componente de corriente que está 90° fuera de fase con el voltaje, así como con corriente en fase. La compañía de luz le cobra una cuota extra por "volt-amperes reactivos", además de la cantidad que usted paga por la energía que usa. Usted puede evitar la cuota extra si instala un capacitor entre la línea de energía y su fábrica. El siguiente problema ilustra esta situación.

En un circuito *RL*, una fuente de 120 V (rms) y 60.0 Hz, está en serie con un inductor de 25.0 mH y un resistor de 20.0 Ω. ¿Cuáles son a) la corriente rms y b) el factor de potencia? c) ¿Qué capacitor debe conectarse en serie para hacer el factor de potencia 1? d) ¿A qué valor puede reducirse el voltaje de la fuente, si la potencia alimentada debe ser la misma que antes de instalar el capacitor?

31. Se transmite energía a la cantidad de 20.0 kW con sólo 1.00% de pérdida a través de una distancia de 18.0 km, a una diferencia de potencial ΔV. a) ¿Cuál es el diámetro requerido para cada uno de los dos alambres de cobre en la línea de transmisión? Suponga que la densidad de corriente es uniforme en los conductores. b) Establezca cómo el diámetro depende de ΔV. c) Evalúe el diámetro para ΔV = 1500 V. d) Si elige un diámetro de 3.00 mm, ¿qué diferencia de potencial se requiere?

32. ● Un circuito en serie consiste en un generador CA con un voltaje rms de 120 V a una frecuencia de 60.0 Hz y un zumbador magnético con una resistencia de 100 Ω y una inductancia de 100 mH. a) Encuentre el factor de potencia del circuito. b) Suponga que desea un factor de potencia más alto. ¿Puede lograr un factor de potencia de 1.00 al cambiar la inductancia o algún otro parámetro del circuito? c) Demuestre que se puede lograr un factor de potencia de 1.00 al insertar un capacitor en el circuito original y encuentre el valor de su capasitancia.

33. Un diodo es un dispositivo que permite que la corriente sea conducida en una sola dirección indicada por la punta de fle-

cha en el circuito). Encuentre en términos de ΔV y R la potencia promedio entregada al circuito de diodos de la figura P33.33.

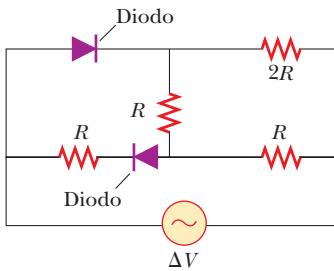



Figura P33.33

Sección 33.7 Resonancia en un circuito *RLC* en serie

34. Un transmisor de radar contiene un circuito *LC* que oscila a 1.00×10^{10} Hz. a) ¿Qué capacitancia resonará con una espira de una vuelta que tiene una inductancia de 400 pH a esta frecuencia? b) Si el capacitor tiene placas paralelas cuadradas que están separadas por 1.00 mm de aire, ¿cuál debe ser la longitud por lado de las placas? c) ¿Cuál es la reactancia común de la espira y del capacitor en resonancia?

35. Un circuito *RLC* se usa en un radio para sintonizar una estación de FM que transmite a 99.7 MHz. La resistencia del circuito es de 12.0 Ω, y la inductancia es 1.40 μH. ¿Qué capacitancia debe usarse?

36. Un circuito *RLC* en serie tiene los siguientes componentes con valores de: $L = 20.0$ mH, $C = 100$ nF, $R = 20.0\ \Omega$ y $\Delta V_{\text{máx}} = 100$ V, con $\Delta v = \Delta V_{\text{máx}}$ sen ωt. Encuentre a) la frecuencia resonante, b) la amplitud de la corriente a la frecuencia resonante, c) el valor Q del circuito y d) la amplitud del voltaje en las terminales del inductor con resonancia.

37. Un resistor de 10.0 Ω, un inductor de 10.0 mH y un capacitor de 100 μF se conectan en serie a una fuente de 50.0 V (rms) que tiene una frecuencia variable. Encuentre la energía que es entregada al circuito durante cierto periodo si la frecuencia de operación es del doble que la frecuencia de resonancia.

38. Un resistor R, un inductor L y un capacitor C se conectan en serie a una fuente de CA de voltaje rms ΔV y frecuencia variable. Encuentre la energía que es entregada al circuito durante cierto periodo si la frecuencia de operación es del doble que la frecuencia de resonancia.

39. Calcule el factor de calidad para los circuitos descritos en los problemas 20 y 21. ¿Cuál circuito tiene la resonancia aguda?

Sección 33.8 El transformador y la transmisión de energía

40. Un transformador reductor se emplea para recargar las baterías de aparatos portátiles, como los tocacintas. La relación de vueltas dentro del transformador es 13:1 y se usa con 120 V (rms) del servicio doméstico. Si un transformador ideal en particular toma 0.350 A del tomacorriente en casa, ¿cuáles son a) el voltaje y b) la corriente suministrada al tocacintas desde el transformador? c) ¿Cuánta potencia se entrega?

41. Un transformador tiene $N_1 = 350$ vueltas y $N_2 = 2000$ vueltas. Si el voltaje de entrada es $\Delta v(t) = (170\text{ V})\cos \omega t$, ¿qué voltaje rms se genera en la bobina del secundario?

42. Un transformador elevador está diseñado para tener un voltaje de salida de 2200 V (rms) cuando el primario se conecta a una fuente de 110 V (rms). a) Si el devanado primario tiene 80 vueltas, ¿cuántas vueltas se necesitan en el secundario? b) Si un resistor de carga en las terminales del secundario toma una corriente de 1.50 A, ¿cuál es la corriente del primario, suponiendo condiciones ideales? c) **¿Qué pasaría si?** Si el transformador en realidad tiene una eficiencia de 95.0%, ¿cuál es la corriente en el primario cuando la corriente del secundario es 1.20 A?

43. ● Una línea de transmisión que tiene una resistencia por cada unidad de longitud de $4.50 \times 10^{-4}\ \Omega/\text{m}$ será utilizada para transmitir 5.00 MW a 400 millas (6.44×10^5 m). El voltaje de salida del generador es de 4.50 kV. a) ¿Cuál es la pérdida en la línea si se usa un transformador para elevar el voltaje a 500 kV? b) ¿Qué porcentaje de la potencia de entrada se pierde en la línea bajo estas circunstancias? c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué dificultades se encuentran al tratar de transmitir los 5.00 MW al voltaje de 4.50 kV del generador?

Sección 33.9 Rectificadores y filtros

44. Una fuente particular del enchufe de una radio semejante a la que ilustra la figura 33.20 y está marcada con la siguiente información: entrada 120 V CA 8 W salida 9 V CD 300 mA. Suponga que estos valores son precisos en dos dígitos. a) Encuentre la eficiencia de energía del aparato cuando la radio está funcionando. b) ¿Con qué rapidez el aparato desperdicia energía cuando la radio está funcionando? c) Suponga que la potencia de entrada al transformador es de 8.00 W cuando la radio se desconecta y que la energía cuesta $0.135/kWh. Encuentre el costo que representan seis de estos transformadores en la casa, enchufados durante 31 días.

45. Considere el circuito de filtro que se ilustra en la figura 33.22a. a) Muestre que la relación entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada es

$$\frac{\Delta v_{\text{out}}}{\Delta v_{\text{in}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

b) ¿A qué valor se aproxima esta relación cuando la frecuencia disminuye a cero? ¿A qué valor se aproxima esta relación cuando la frecuencia aumenta sin límite? c) ¿A qué frecuencia esta relación es igual a la mitad?

46. Considere el circuito de filtro que se muestra en la figura 33.23a. a) Demuestre que la razón entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada es

$$\frac{\Delta v_{\text{out}}}{\Delta v_{\text{in}}} = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

b) ¿A qué valor se aproxima esta relación cuando la frecuencia disminuye a cero? ¿A qué valor se aproxima esta relación cuando la frecuencia aumenta sin límite? c) ¿A qué frecuencia esta relación es igual a la mitad?

47. El filtro *RC* de paso alto que se ilustra en la figura 33.22a tiene una resistencia $R = 0.500\ \Omega$. a) ¿Qué capacitancia produce una señal de salida que tiene la mitad de amplitud de una señal de 300 Hz de entrada? b) ¿Cuál es la proporción $(\Delta V_{\text{sal}}/\Delta V_{\text{ent}})$ para una señal de 600 Hz? Puede usar el resultado del problema 45.

48. El filtro *RC* de paso bajo que se ilustra en la figura 33.23a tiene una resistencia $R = 90.0\ \Omega$ y una capacitancia $C = 8.00$ nF. Calcule la relación $(\Delta V_{\text{sal}}/\Delta V_{\text{ent}})$ para una frecuencia de entrada de a) 600 Hz y b) 600 kHz. Puede usar el resultado del problema 46.

49. El resistor de la figura P33.49 representa el altavoz intermedio de un sistema de tres altavoces. Suponga que su resistencia es constante a 8.00 Ω. La fuente representa un amplificador de audio que produce señales de amplitud uniforme $\Delta V_{máx} = 10.0$ V a todas las frecuencias de audio. El inductor y el capacitor deben funcionar como filtro de paso de banda con $\Delta v_{sal}/\Delta v_{ent} = 1/2$ a 200 Hz y a 4000 Hz. a) Determine los valores necesarios de L y C. b) Encuentre el valor máximo de la relación $\Delta v_{sal}/\Delta v_{ent}$ c) Encuentre la frecuencia f_0 en la que tiene su valor máximo la relación. d) Encuentre el desfasamiento entre Δv_{ent} y Δv_{sal} a 200 Hz, a f_0 y a 4000 Hz. e) Encuentre la potencia promedio transferida al altavoz a 200 Hz, a f_0 y a 4000 Hz. f) Tratando el filtro como circuito resonante, encuentre su factor de calidad.

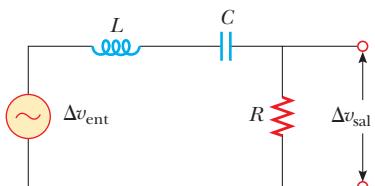



Figura P33.49

Problemas adicionales

50. Demuestre que el valor rms para el voltaje de diente de sierra que se ilustra en la figura P33.50 es $\Delta v_{máx}/\sqrt{3}$.

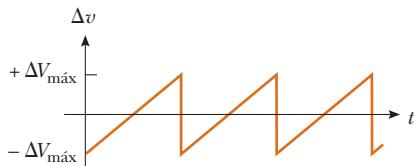



Figura P33.50

51. ● Un resistor de 400 Ω, un inductor y un capacitor están en serie con un generador. La reactancia del inductor es de 700 Ω y la impedancia del circuito es de 760 Ω. a) Explique qué puede y qué no puede determinar acerca de la reactancia del capacitor. b) Si encuentra que la fuente de energía disminuye conforme eleva la frecuencia, ¿qué sabe acerca de la reactancia capacitiva en el circuito original? c) Repita el inciso a) si supone que la resistencia es de 200 Ω en lugar de 400 Ω.

52. ● Un capacitor, una bobina y dos resistores de igual resistencia están conectados en un circuito de CA, como se muestra en la figura P33.52. Un generador de CA produce una fem de 20.0 V (rms) a una frecuencia de 60.0 Hz. Cuando el interruptor S de doble paso se abre, como se ve en la figura, la corriente rms es de 183 mA. Cuando el interruptor se cierra en la posición 1, la corriente rms es de 298 mA. Cuando el interruptor se cierra en la posición 2, la corriente rms es de 137 mA. Determine los valores de R, C y L. ¿Es posible más de un conjunto de valores? Explique.

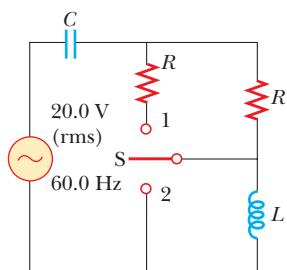



Figura P33.52

53. Un circuito RLC en serie consta de un resistor de 8.00 Ω, un capacitor de 5.00 μF y un inductor de 50.0 mH. Una fuente de frecuencia variable aplica una fem de 400 V (rms) a la combinación. Determine la potencia entregada al circuito cuando la frecuencia es igual a la mitad de la frecuencia de resonancia.

54. ● Un circuito RLC en serie tiene frecuencia angular de resonancia de 2000 rad/s. Cuando opera a cierta frecuencia, X_L = 12.0 Ω y X_C = 8.00 Ω. a) ¿Esta cierta frecuencia es mayor, menor o igual que la frecuencia de resonancia? Explique cómo puede decirlo. b) Explique si es posible determinar los valores de L y C. c) Si es posible, encuentre L y C. Si esta determinación no es posible, proporcione una expresión compacta para la condición que deben satisfacer L y C.

55. ● **Problema de repaso.** Un conductor aislado de una extensión casera tiene una masa por longitud de 19.0 g/m. Una sección de este conductor se mantiene bajo tensión entre dos abrazaderas. Una subsección se ubica en un campo magnético de 15.3 mT de magnitud dirigido perpendicular a la longitud del cordón. Cuando el cordón conduce una corriente CA de 9.00 A a una frecuencia de 60.0 Hz, vibra en resonancia en su estado de vibración de onda estacionaria más simple. Determine la correspondencia que se debe satisfacer entre la separación d de las abrazaderas y la tensión T en el cordón. Determine una posible combinación de valores para estas variables.

56. Bosqueje una gráfica del ángulo de fase para un circuito RLC en serie como función de la frecuencia angular, desde cero hasta una frecuencia mucho mayor que la frecuencia de resonancia. Identifique el valor de ϕ a la frecuencia angular de resonancia ω_0. Pruebe que la pendiente de la gráfica de ϕ con ω en el punto de resonancia es $2Q/\omega_0$.

57. En la figura P33.57, encuentre la corriente rms entregada por la fuente de alimentación de 45.0 V (rms) cuando a) la frecuencia es muy grande y b) la frecuencia es muy pequeña.

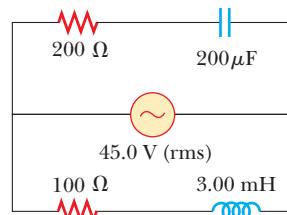



Figura P33.57

58. En el circuito que se ilustra en la figura P33.58, suponga que se dan todos los parámetros excepto C. a) Encuentre la corriente como función del tiempo. b) Encuentre la potencia entregada al circuito. c) Encuentre la corriente como función del tiempo después de abrir *sólo* el interruptor 1. d) Después de abrir *también* el interruptor 2, la corriente y voltaje están en fase. Encuentre la capacitancia C. e) Encuentre la impedancia del circuito cuando ambos interruptores están abiertos. f) Encuentre la máxima energía almacenada en el capacitor durante las oscilaciones. g) Encuentre la máxima energía almacenada en el inductor durante las oscilaciones. h) Ahora la frecuencia

de la fuente de voltaje se duplica. Encuentre la diferencia de fase entre la corriente y el voltaje. i) Encuentre la frecuencia que provoca que la reactancia inductiva sea igual a la mitad de la reactancia capacitiva.

$\Delta v(t) = \Delta V_{máx} \cos \omega t$

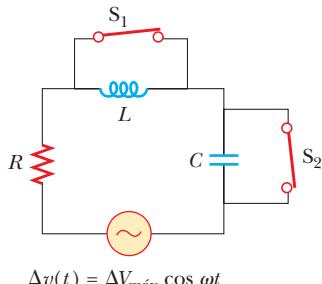



Figura P33.58

59. Un resistor de 80.0 Ω y un inductor de 200 mH se conectan en *paralelo* en las terminales de una fuente de 100 V (rms), 60.0 Hz. a) ¿Cuál es la corriente rms del resistor? b) ¿Con qué ángulo la corriente total se adelanta o se atrasa al voltaje?

60. Haga una estimación del orden de magnitud de la corriente eléctrica que la compañía de luz entrega a una población (figura P33.60) desde una planta generadora remota. Exprese los datos que mida o estime. Si usted lo desea, puede considerar una comunidad suburbana de 20 000 personas.

Eddie Hironaka/Getty Images.

Figura P33.60

61. Considere un circuito *RLC* en serie que tiene los siguientes parámetros: $R = 200\ \Omega$, $L = 663$ mH y $C = 26.5\ \mu$F. El voltaje aplicado tiene una amplitud de 50.0 V y una frecuencia de 60.0 Hz. Encuentre las siguientes amplitudes: a) la corriente $I_{máx}$, incluyendo su fase relativa al voltaje aplicado Δv, b) el voltaje máximo ΔV_R en las terminales del resistor y su fase respecto a la corriente, c) el voltaje máximo ΔV_C en el capacitor y su fase respecto a la corriente y d) el voltaje máximo ΔV_L en el inductor y su fase respecto a la corriente.

62. Un voltaje $\Delta v = (100 \text{ V}) \operatorname{sen} \omega t$ se aplica a una combinación en serie de un inductor de 2.00 H, un capacitor de 10.0 μF y un resistor de 10.0 Ω. a) Determine la frecuencia angular ω_0 a la cual la potencia entregada al resistor es máxima. b) Calcule la potencia entregada a esa frecuencia. c) Determine las dos frecuencias angulares ω_1 y ω_2 a las que la potencia es la mitad del valor máximo. *Nota*: La Q del circuito es $\omega_0/(\omega_2 - \omega_1)$.

63. *Acoplamiento de impedancias.* El ejemplo 28.2 mostró que, cuando la resistencia interna de una fuente de CD es igual a la resistencia de la carga, transfiere la máxima potencia. Se puede usar un transformador para proveer una transferencia máxima de potencia entre dos circuitos de CA que tienen diferentes impedancias Z1 y Z2. a) Muestre que la relación de vueltas N_1/N_2 necesaria para satisfacer esta condición es

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

b) Suponga que desea usar un transformador como dispositivo de acoplamiento de impedancias entre un amplificador de audio que tiene una impedancia de salida de 8.00 kΩ y un altavoz con una impedancia de entrada de 8.00 Ω. ¿Cuál debe ser la relación N_1/N_2?

64. ● Una fuente de alimentación con $\Delta V_{rms} = 120$ V se conecta entre los puntos *a* y *d* de la figura P33.24. ¿A qué frecuencia entregará una potencia de 250 W? Explique su respuesta.

65. La figura P33.65a muestra un circuito *RLC* en paralelo, y el correspondiente diagrama de fasores se da en la figura P33.65b. Los voltajes instantáneos (y voltajes rms) en las terminales de cada uno de los tres elementos de circuito son iguales, y cada uno está en fase con la corriente que pasa por el resistor. Las corrientes en C y L se adelantan o se atrasan a la corriente del resistor, como se muestra en la figura P33.65b. a) Demuestre que la corriente rms entregada por la fuente es

$$I_{rms} = \Delta V_{rms}\left[\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right]^{1/2}$$

b) Demuestre que el ángulo de fase ϕ entre ΔV_{rms} e I_{rms} es

$$\tan \phi = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$

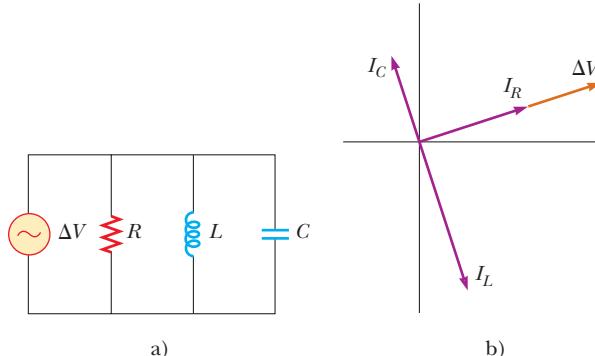



Figura P33.65

66. Cierto circuito eléctrico se describe mediante las ecuaciones

$$\frac{200 \text{ V}}{4.00 \text{ A}} = \sqrt{(35.0\ \Omega)^2 + \left[\omega(205 \text{ mH}) - \frac{1}{\omega C}\right]^2}$$

$$\omega = 2\pi\,(100 \text{ Hz})$$

Establezca un problema para el que estas ecuaciones aparecerían en la solución, dando los datos e identificando la incógnita. Evalúe la cantidad incógnita.

67. Un circuito *RLC* en serie funciona a 2000 Hz. A esta frecuencia, $X_L = X_C = 1884\ \Omega$. La resistencia del circuito es de 40.0 Ω. a) Elabore una tabla que muestre los valores de X_L, X_C y Z para f = 300, 600, 800, 1000, 1500, 2000, 3000, 4000, 6000 y 10 000 Hz. b) Grafique en el mismo conjunto de ejes X_L, X_C y Z como función de ln f.

68. Un circuito *RLC* en serie en el que $R = 1.00\ \Omega$, $L = 1.00$ mH y $C = 1.00$ nF se conecta a una fuente de CA que entrega 1.00 V (rms). Elabore una gráfica precisa de la potencia entregada al circuito como función de la frecuencia y verifique que todo el ancho del pico de resonancia a la mitad del valor máximo sea $R/2\pi L$.

69. ● Marie Cornu, una física en el Instituto Politécnico de París, inventó los fasores aproximadamente en 1880. Este problema le ayuda a ver su utilidad general para representar oscilaciones. Dos vibraciones mecánicas se representan mediante las expresiones

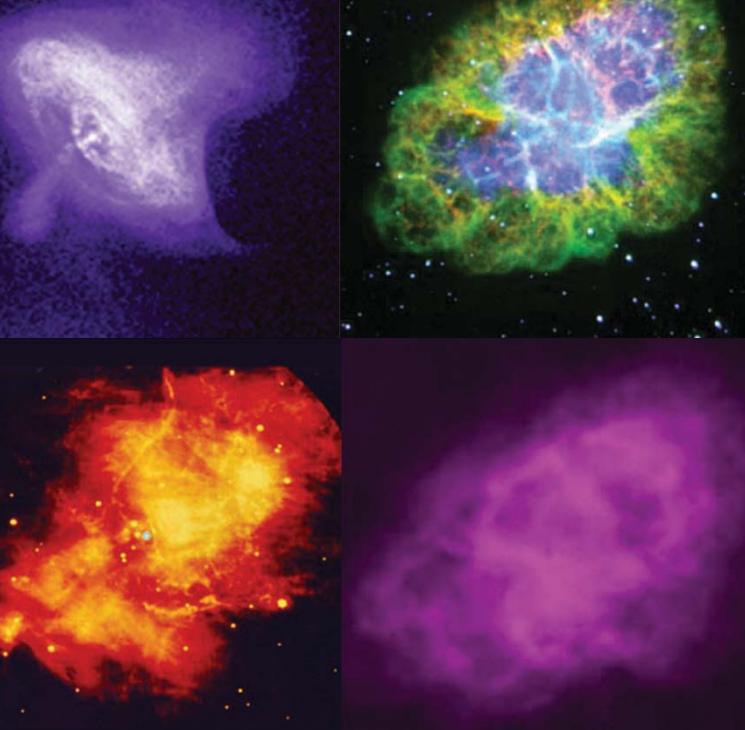
$$y_1 = (12.0 \text{ cm}) \text{ sen } (4.5t)$$

y

$$y_2 = (12.0 \text{ cm}) \text{ sen } (4.5t + 70°)$$

Encuentre la amplitud y constante de fase de la suma de estas funciones a) usando una identidad trigonométrica (como las del apéndice B) y b) al representar las oscilaciones como fasores. Establezca el resultado de comparar las respuestas para a) y b). c) Los fasores hacen igualmente sencillo sumar ondas viajeras. Encuentre la amplitud y constante de fase de la suma de las tres ondas representadas por

$$y_1 = (12.0 \text{ cm}) \text{ sen } (15x - 4.5t + 70°)$$

$$y_2 = (15.5 \text{ cm}) \text{ sen } (15x - 4.5t - 80°)$$

$$y_3 = (17.0 \text{ cm}) \text{ sen } (15x - 4.5t + 160°)$$

Respuestas a las preguntas rápidas

33.1 **i)**, c) El fasor del inciso c) tiene la mayor proyección sobre el eje vertical. **ii)**, b) El fasor del inciso b) tiene la proyección de magnitud más pequeña sobre el eje vertical.

33.2 b) Para frecuencias bajas, la reactancia del inductor es pequeña, de manera que la corriente es grande. La mayor parte del voltaje de la fuente es a través de la lámpara y por esta razón la potencia entregada a ella es grande.

33.3 a) Para altas frecuencias, la reactancia del capacitor es pequeña, de manera que la corriente es grande. La mayor parte del voltaje de la fuente es a través de la lámpara y por esta razón la potencia entregada a ella es grande.

33.4 b) Para bajas frecuencias, la reactancia del capacitor es grande y existe muy poca corriente en la rama del capacitor. La reactancia del inductor es pequeña, de modo que existe corriente en la rama del inductor y la lámpara se ilumina. Cuando aumenta la frecuencia, la reactancia inductiva aumenta y la reactancia capacitiva disminuye. A altas frecuencias, existe más corriente en la rama del capacitor que en la rama del inductor y la lámpara se ilumina con menos brillo.

33.5 a) $X_L < X_C$, b) $X_L = X_C$, c) $X_L > X_C$.

33.6 c) El coseno de $-\phi$ es el mismo que el de $+\phi$, por lo cual el factor $\cos \phi$ de la ecuación 33.31 es igual para ambas frecuencias. El factor ΔV_{rms} es el mismo porque el voltaje de la fuente es fijo. De acuerdo con la ecuación 33.27, cambiar $+\phi$ a $-\phi$ simplemente intercambia los valores de X_L y X_C. La ecuación 33.25 muestra que este intercambio no afecta la impedancia, de modo que la corriente I_{rms} de la ecuación 33.31 es la misma para ambas frecuencias.

33.7 c) A resonancia, $X_L = X_C$. De acuerdo con la ecuación 33.25, esto da $Z = R$.

Ondas electromagnéticas abarcando un espectro amplio de longitudes de onda, y ondas en diferentes intervalos de longitud con propiedades distintas. Estas imágenes de la Nebulosa Cangrejo muestran estructuras diferentes en observaciones efectuadas con ondas de diferentes longitudes. Las imágenes (empezando de arriba a la izquierda, en el sentido de las manecillas del reloj) fueron tomadas con rayos X, luz visible, ondas de radio y ondas infrarrojas. (Arriba izquierda, NASA/CXC/SAO; arriba derecha, Palomar Observatory; abajo derecha, VLA/NRAO; abajo izquierda, WM Keck Observatory.)

34 Ondas electromagnéticas

Las ondas descritas en los capítulos 16, 17 y 18 son ondas mecánicas. Por definición, la propagación de perturbaciones mecánicas —como ondas de sonido, ondas en el agua y ondas sobre una cuerda— requieren la presencia de un medio. Este capítulo está interesado con las propiedades de las ondas electromagnéticas, las cuales (a diferencia de las ondas mecánicas) pueden propagarse a través de un espacio vacío.

Primero se consideran las aportaciones de Maxwell al modificar la ley de Ampère, que se estudió en el capítulo 30. Después se explican las ecuaciones de Maxwell, que forman la base teórica de todos los fenómenos electromagnéticos. Estas ecuaciones predicen la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan en el espacio con la rapidez de la luz c. Heinrich Hertz confirmó la predicción de Maxwell cuando generó y detectó ondas electromagnéticas en 1887. Este descubrimiento condujo a muchos sistemas de comunicación prácticos, incluidos radio, televisión, radar y optoelectrónica.

Aprenderá cómo las cargas eléctricas oscilantes generan ondas electromagnéticas. Las ondas radiadas por cargas oscilantes pueden detectarse a grandes distancias. Además, porque las ondas electromagnéticas transportan energía y cantidad de movimiento, pueden ejercer presión sobre una superficie. Este capítulo concluye con un vistazo a la amplia gama de frecuencias cubiertas por las ondas electromagnéticas.

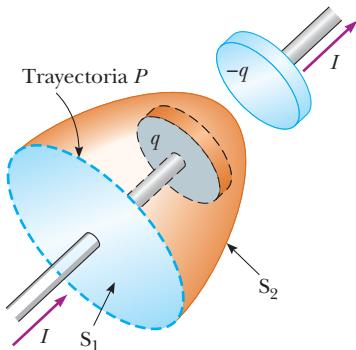



Figura 34.1 Dos superficies S_1 y S_2 cerca de la placa de un capacitor están limitadas por la misma trayectoria *P*. La corriente de conducción en el alambre pasa solamente a través de S_1, lo que conduce a una contradicción en la ley de Ampère que sólo se resuelve si uno postula una corriente de desplazamiento a través de S_2.

North Wind Picture Archives.

JAMES CLERK MAXWELL

Físico teórico escocés (1831–1879)

Maxwell desarrolló la teoría electromagnética de la luz y la teoría cinética de los gases, y explicó la naturaleza de los anillos de Saturno y la visión en color. La exitosa interpretación de Maxwell del campo electromagnético resultó en las ecuaciones de campo que llevan su nombre. Formidable habilidad matemática combinada con gran comprensión le permitieron guiar el camino en el estudio del electromagnetismo y la teoría cinética. Murió de cáncer antes de cumplir 50 años de edad.

34.1 Corriente de desplazamiento y la forma general de la ley de Ampère

En el capítulo 30 conoció el uso de la ley de Ampère (ecuación 30.13) para explicar los campos magnéticos producidos por corrientes:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I$$

En esta ecuación la integral de línea es sobre cualquier trayectoria cerrada a través de la cual pasan corrientes de conducción, donde la corriente de conducción se define por la expresión $I = dq/dt$. (En esta sección se usa el término *corriente de conducción* para hacer referencia a la corriente que llevan los portadores de carga en el alambre, para distinguirla de un nuevo tipo de corriente que se introducirá en breve.) Ahora se mostrará que **la ley de Ampère en esta forma es válida sólo si algunos campos eléctricos presentes son constantes en el tiempo.** James Clerk Maxwell reconoció esta limitación y modificó la ley de Ampère para incluir campos eléctricos variables en el tiempo.

Considere un capacitor que se carga, como se ilustra en la figura 34.1. Cuando una corriente de conducción está presente, la carga sobre la placa positiva cambia pero *no existe corriente de conducción en el espacio entre las placas.* Ahora considere las dos superficies S_1 y S_2 en la figura 34.1, limitadas por la misma trayectoria *P*. La ley de Ampère establece que $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ alrededor de esta trayectoria debe ser igual a $\mu_0 I$, donde *I* es la corriente total a través de *cualquier* superficie limitada por la trayectoria *P*.

Cuando la trayectoria *P* se considera como la frontera de S_1, $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I$ porque la corriente de conducción *I* pasa a través de S_1. Sin embargo, cuando la trayectoria se considera la frontera de S_2, $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$ porque no pasa corriente de conducción a través de S_2. Por lo tanto, ¡se tiene una situación contradictoria que surge de la discontinuidad de la corriente! Maxwell resolvió este problema al postular un término adicional en el lado derecho de la ley de Ampère, que incluye un factor llamado **corriente de desplazamiento** I_d que se define como[1]

$$I_d \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{34.1}$$

◄ Corriente de desplazamiento

donde ϵ_0 es la permitividad del espacio libre (véase la sección 23.3) y $\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ es el flujo eléctrico (véase la ecuación 24.3) a través de la superficie limitada por la trayectoria de integración.

Conforme el capacitor se carga (o descarga), el campo eléctrico cambiante entre las placas puede considerarse equivalente a una corriente que actúa como una continuación de la corriente de conducción en el alambre. Cuando la expresión para la corriente de desplazamiento conocida por la ecuación 34.1 se agrega a la corriente de conducción en el lado derecho de la ley de Ampère, se resuelve la dificultad representada en la figura 34.1. No importa cuál superficie limitada por la trayectoria *P* se elija, o una corriente

[1]En este contexto *desplazamiento* no tiene el mismo significado que en el capítulo 2. A pesar de las implicaciones equívocas, la palabra está históricamente entrelazada en el lenguaje de la física, así que se continuará su uso.

de conducción o una corriente de desplazamiento pasa a través de ella. Con este nuevo término I_d se expresa la forma general de la ley de Ampère (a veces llamada **ley Ampère-Maxwell**) como

Ley de Ampère-Maxwell ▶

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (34.2)$$

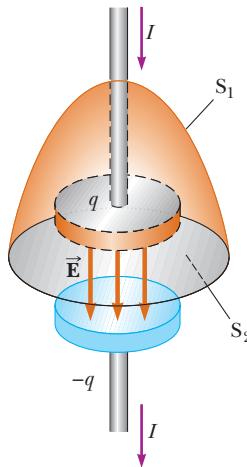



Figura 34.2 Porque sólo existe en los alambres unidos a las placas del capacitor, la corriente de conducción $I = dq/dt$ pasa a través de S_1 pero no a través de S_2. Sólo la corriente de desplazamiento $I_d = \epsilon_0 d\Phi_E/dt$ pasa a través de S_2. Las dos corrientes deben ser iguales por continuidad.

Puede entender el significado de esta expresión al referirse a la figura 34.2. El flujo eléctrico a través de la superficie S_2 es $\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = EA$, donde A es el área de las placas del capacitor y E es la magnitud del campo eléctrico uniforme entre las placas. Si q es la carga sobre las placas en cualquier instante, entonces $E = q/(\epsilon_0 A)$ (véase la sección 26.2). En consecuencia, el flujo eléctrico a través de S_2 es

$$\Phi_E = EA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Por esto, la corriente de desplazamiento a través de S_2 es

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt} \qquad (34.3)$$

Es decir, la corriente de desplazamiento I_d a través de S_2, ¡es precisamente igual a la corriente de conducción I a través de S_1!

Al considerar la superficie S_2, se identifica la corriente de desplazamiento como la fuente del campo eléctrico en la superficie límite. La corriente de desplazamiento tiene su origen físico en el campo eléctrico variable en el tiempo. El punto central de este formalismo es que **los campos magnéticos se producen tanto por corrientes de conducción como por campos eléctricos variables en el tiempo.** Este resultado fue un ejemplo notable del trabajo teórico de Maxwell y contribuyó a mayores avances en la comprensión del electromagnetismo.

Pregunta rápida 34.1 En un circuito *RC*, el capacitor comienza a descargarse. **i)** Durante la descarga en la región de espacio entre las placas del capacitor, ¿hay a) corriente de conducción pero no corriente de desplazamiento, b) corriente de desplazamiento pero no corriente de conducción, c) corriente de conducción y de desplazamiento o d) ningún tipo de corriente? **ii)** En la misma región del espacio, ¿hay a) un campo eléctrico pero no un campo magnético, b) un campo magnético pero no un campo eléctrico, c) campos eléctrico y magnético o d) ningún campo?

EJEMPLO 34.1 Corriente de desplazamiento en un capacitor

Un voltaje que varía sinusoidalmente se aplica a través de un capacitor de 8.00 μF. La frecuencia del voltaje aplicado es de 3.00 kHz y la amplitud del voltaje es de 30.0 V. Encuentre la corriente de desplazamiento en el capacitor.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 33.9 representa el diagrama de circuito para esta situación. La figura 34.2 muestra un acercamiento del capacitor y el campo eléctrico entre las placas.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones discutidas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la frecuencia angular de la fuente a partir de la ecuación 15.12:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(3.00 \times 10^3 \text{ Hz}) = 1.88 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$$

Use la ecuación 33.20 para expresar el voltaje a través del capacitor como función del tiempo:

$$\Delta v_C = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t = (30.0 \text{ V}) \text{ sen}(1.88 \times 10^4\ t)$$

Use la ecuación 34.3 para encontrar la corriente de desplazamiento como función del tiempo. Note que la carga en el capacitor es $q = C\,\Delta v_C$:

$$I_d = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C\,\Delta v_C) = C\frac{d}{dt}(\Delta v_C)$$

$$= (8.00 \times 10^{-6}\text{ F})\frac{d}{dt}[(30.0\text{ V})\,\text{sen}(1.88 \times 10^4\,t)]$$

$$= (4.52\text{ A})\cos(1.88 \times 10^4\,t)$$

34.2 Ecuaciones de Maxwell y los descubrimientos de Hertz

Ahora se presentan cuatro ecuaciones que se consideran la base de todos los fenómenos eléctricos y magnéticos. Estas ecuaciones, desarrolladas por Maxwell, son tan fundamentales para los fenómenos electromagnéticos como las leyes de Newton lo son para los fenómenos mecánicos. De hecho, la teoría que Maxwell desarrolló fue más allá incluso de lo que él pensó, porque resultó estar de acuerdo con la teoría especial de la relatividad, que Einstein demostró en 1905.

Las ecuaciones de Maxwell representan las leyes de la electricidad y el magnetismo que ya se han explicado, pero tienen importantes consecuencias adicionales. Por simplicidad, se presentan las **ecuaciones de Maxwell** como se aplican al espacio libre, es decir, en ausencia de cualquier material dieléctrico o magnético. Las cuatro ecuaciones son

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (34.4)$$

◀ Ley de Gauss

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad (34.5)$$

◀ Ley de Gauss del magnetismo

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (34.6)$$

◀ Ley de Faraday

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (34.7)$$

◀ Ley de Ampère-Maxwell

La ecuación 34.4 es la ley de Gauss: **el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta dentro de dicha superficie dividida por ϵ_0.** Esta ley relaciona un campo eléctrico con la distribución de carga que lo produce.

La ecuación 34.5 es la ley de Gauss del magnetismo y afirma que **el flujo magnético neto a través de una superficie cerrada es cero.** Es decir, el número de líneas de campo magnético que entra a un volumen cerrado debe ser igual al número que sale de dicho volumen, esto implica que las líneas de campo magnético no pueden comenzar o terminar en cualquier punto. Si lo hicieran, significaría que en dichos puntos existen monopolos magnéticos aislados; el hecho de que monopolos magnéticos aislados no se hayan observado en la naturaleza se considera una confirmación de la ecuación 34.5.

La ecuación 34.6 es la ley de Faraday de la inducción, que describe la creación de un campo eléctrico por un flujo magnético cambiante. Esta ley afirma que **la fem, que es la integral de línea del campo eléctrico alrededor de cualquier trayectoria cerrada, es igual a la relación de cambio del flujo magnético a través de cualquier superficie limitada por dicha trayectoria.** Una consecuencia de la ley de Faraday es la corriente inducida en una espira conductora colocada en un campo magnético variable en el tiempo.

La ecuación 34.7 es la ley Ampère-Maxwell, y describe la creación de un campo magnético por un campo eléctrico cambiante y por corriente eléctrica: **la integral de línea del campo magnético alrededor de cualquier trayectoria cerrada es la suma de μ_0 veces la corriente neta a través de dicha trayectoria y $\epsilon_0\mu_0$ veces la rapidez de cambio del flujo eléctrico a través de cualquier superficie limitada por dicha trayectoria.**

Ley de fuerza de Lorenz ►

Una vez que se conocen los campos eléctrico y magnético en un punto en el espacio, la fuerza que actúa sobre una partícula de carga q se calcula a partir de la expresión

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{34.8}$$

Esta correspondencia se llama **ley de fuerza de Lorenz**. (Esta correspondencia se vio anteriormente como ecuación 29.6.) Las ecuaciones de Maxwell, junto con esta ley de fuerza, describen por completo todas las interacciones electromagnéticas clásicas en un vacío.

Observe la simetría de las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones 34.4 y 34.5 son simétricas, aparte de la ausencia del término para monopolos magnéticos en la ecuación 34.5. Además, las ecuaciones 34.6 y 34.7 son simétricas en que las integrales de línea de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ alrededor de una trayectoria cerrada se relacionan con la relación de cambio del flujo magnético y el flujo eléctrico, respectivamente. Las ecuaciones de Maxwell son de importancia fundamental no sólo para el electromagnetismo, sino para toda la ciencia. Hertz escribió una vez: "Uno no puede escapar al sentimiento de que estas fórmulas matemáticas tienen una existencia independiente y una inteligencia propia, que son más sabias que nosotros, más sabias incluso que sus descubridores; obtenemos más de ellas de lo que ponemos en ellas."

Figura 34.3 Diagrama del aparato de Hertz para generar y detectar ondas electromagnéticas. El transmisor está constituido por dos electrodos esféricos conectados a una bobina de inducción, la cual proporciona sobrevoltaje breve a las esferas, estableciendo oscilaciones en la descarga entre electrodos. El receptor es una espira cercana de alambre que contiene un segundo descargador de chispa.

En la siguiente sección se demuestra cómo las ecuaciones 34.6 y 34.7 se combinan para obtener una ecuación de onda tanto para el campo eléctrico como para el magnético. En el espacio vacío, donde $q = 0$ e $I = 0$, la solución a estas dos ecuaciones muestra que la rapidez a la cual se desplazan las ondas electromagnéticas es igual a la rapidez observada de la luz. Este resultado permitió a Maxwell predecir que las ondas de luz son una forma de radiación electromagnética.

Hertz realizó experimentos para verificar la predicción de Maxwell. En la figura 34.3 aparece un diagrama del aparato experimental utilizado por Hertz para generar y detectar ondas electromagnéticas. Una bobina de inducción está conectada a un transmisor constituido por dos electrodos esféricos separados por un pequeño espacio. La bobina genera sobrevoltaje breve en los electrodos, haciendo que uno sea positivo y el otro negativo. Cuando el campo eléctrico cercano a cualquiera de los electrodos sobrepasa la resistencia dieléctrica del aire (3×10^6 V/m; véase la tabla 26.1), se genera una chispa entre las esferas. En un campo eléctrico intenso, la aceleración de los electrones libres proporciona energía suficiente para ionizar cualquier molécula que impacten. Esta ionización genera más electrones que se pueden acelerar y que causan ionizaciones adicionales. Conforme el espacio del aire se ioniza, se convierte en un mejor conductor, y la descarga entre electrodos exhibe un comportamiento oscilatorio a una muy alta frecuencia. Desde el punto de vista de un circuito eléctrico, este aparato experimental es equivalente a un circuito LC, en el cual la inductancia corresponde a la bobina y la capacitancia a los electrodos esféricos.

Hulton-Deutsch Collection/CORBIS.

HEINRICH RUDOLF HERTZ
Físico alemán (1857-1894)
Hertz hizo su más importante descubrimiento de las ondas electromagnéticas en 1887. Después de encontrar que la rapidez de una onda electromagnética era la misma que la de la luz, Hertz demostró que las ondas electromagnéticas, al igual que las ondas de luz, se podían reflejar, refractar y difractar. Hertz murió de envenenamiento sanguíneo a la edad de 36 años. Durante su corta vida hizo muchas aportaciones a la ciencia. El hertz, igual a una vibración completa o ciclo por segundo, lleva su nombre.

Debido a que en el aparato de Hertz L y C son pequeñas, la frecuencia de oscilación es elevada, del orden de 100 MHz. (Recuerde de la ecuación 32.22 que $\omega = 1/\sqrt{LC}$ en el caso de un circuito LC). Las ondas electromagnéticas se radian con esta frecuencia como resultado de la oscilación (y en consecuencia de la aceleración) de las cargas libres en el circuito transmisor. Hertz pudo detectar estas ondas utilizando una espira sencilla de alambre con su propio descargador de chispa (el receptor). Esta espira receptora, alejada varios metros del transmisor, tiene sus propias inductancia efectiva, capacitancia y frecuencia natural de oscilación. En el experimento de Hertz se inducían las chispas en la apertura entre los electrodos receptores cuando la frecuencia del receptor se ajustaba para coincidir con la del transmisor. De esta manera, Hertz demostró que la corriente oscilante inducida en el receptor era producida por ondas electromagnéticas radiadas por el transmisor. Su experimento es análogo al fenómeno mecánico en el cual un diapasón responde a las vibraciones acústicas provenientes de otro diapasón idéntico en oscilación.

Además, Hertz demostró en una serie de experimentos que la radiación generada por su dispositivo con un descargador de chispa ponía de manifiesto propiedades de las ondas como interferencia, difracción, reflexión, refracción y polarización, que son propiedades que también exhibe la luz, como se verá en la parte 5. Por lo tanto, resultó evidente que las ondas de radiofrecuencia que Hertz estaba generando tenían propiedades similares a las de las ondas de luz, difiriendo únicamente en frecuencia y longitud de onda. Quizá su experimento más convincente fue la medición de la rapidez de esta radiación: reflejó ondas de frecuencia

conocida sobre una hoja de metal, lo que crea un patrón de interferencia por ondas estacionarias cuyos puntos nodales pudieron ser detectados. La distancia medida entre los puntos nodales permitió determinar la longitud de onda λ. Utilizando la correspondencia $v = \lambda f$ (ecuación 16.12), Hertz encontró que v es muy cercana a 3×10^8 m/s, la rapidez conocida c de luz visible.

34.3 Ondas electromagnéticas planas

Las propiedades de las ondas electromagnéticas se pueden deducir a partir de las ecuaciones de Maxwell. Un planteamiento para obtener estas propiedades es resolver la ecuación diferencial de segundo orden obtenida a partir de la tercera y cuarta ecuaciones de Maxwell. Un tratamiento matemático riguroso de esta especie está más allá del ámbito de este texto. Para superar este problema, suponga que los vectores para el campo eléctrico y el campo magnético en una onda electromagnética tienen un comportamiento espacio-tiempo específico que es simple, pero consistente con las ecuaciones de Maxwell.

Para comprender la predicción de las ondas electromagnéticas más ampliamente, enfoque su atención en una onda electromagnética que viaja en la dirección x (la *dirección de propagación*). Para esta onda, el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ está en la dirección y y el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ está en la dirección z, como se muestra en la figura 34.4a. Tales ondas, en que los campos eléctrico y magnético se restringen a ser paralelos a un par de ejes perpendiculares, se dice que son **ondas linealmente polarizadas**. Además, suponga que las magnitudes de campo E y B dependen únicamente de x y t, no de las coordenadas y o z. La figura 34.4b muestra una onda electromagnética sinusoidal, que se explica a continuación.

Imagine también que la fuente de las ondas electromagnéticas es tal que una onda radiada desde *cualquier* posición en el plano yz (no sólo desde el origen, como puede sugerir la figura 34.4a) se propaga en la dirección x y todas las ondas semejantes se emiten en fase. Si se define un **rayo** como la línea a lo largo de la cual viaja la onda, todos los rayos para estas onda son paralelos. A esta colección completa de ondas con frecuencia se les llama **onda plana**. Una superficie que conecta los puntos de igual fase en todas las ondas es un plano geométrico denominado **frente de onda**, como se introdujo en el capítulo 17. En comparación, una fuente puntual de radiación envía ondas radialmente en todas direcciones. Una superficie que conecta puntos de igual fase para esta situación es una esfera, así que esta onda se llama **onda esférica**.

Para generar la predicción de ondas electromagnéticas, se parte de la ley de Faraday, ecuación 34.6:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.1
¿Qué es "una" onda?

¿Qué se entiende por una onda *sola*? La palabra *onda* representa tanto la emisión de una sola punta ("onda radiada desde *cualquier* posición en el plano *yz*" en el texto) y la colección de ondas desde *todos los puntos* en la fuente ("**onda plana**" en el texto). Usted debe ser capaz de usar este término en ambas formas y entender su significado a partir del contexto.

Figura 34.4 a) Una onda electromagnética que viaja con velocidad $\vec{\mathbf{c}}$ en la dirección x positiva. La onda se muestra en un instante de tiempo cuando el campo eléctrico está a lo largo de la dirección y y tiene su máxima magnitud y el campo magnético está a lo largo de la dirección z, también con su máxima magnitud. Estos campos sólo dependen de x y t. b) Representación de una onda electromagnética sinusoidal que se mueve en la dirección x positiva con una rapidez c.

Figura 34.5 En un instante cuando una onda plana que se mueve en la dirección x positiva pasa a través de una trayectoria rectangular de ancho dx que se encuentra en el plano xy, el campo eléctrico en la dirección y varía de $\vec{\mathbf{E}}$ a $\vec{\mathbf{E}} + d\vec{\mathbf{E}}$. Esta variación espacial en $\vec{\mathbf{E}}$ da origen a un campo magnético variable en el tiempo a lo largo de la dirección z, de acuerdo con la ecuación 34.11.

Suponga de nuevo que la onda electromagnética viaja en la dirección x, con el campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ en la dirección y positiva y el campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ en la dirección z positiva.

Considere un rectángulo de ancho dx y altura ℓ que yace en el plano xy, como se muestra en la figura 34.5. Para aplicar la ecuación 34.6, primero evalúe la integral de línea de $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ alrededor de este rectángulo. Las aportaciones de lo alto y bajo del rectángulo son cero porque $\vec{\mathbf{E}}$ es perpendicular a $d\vec{\mathbf{s}}$ para estas trayectorias. El campo eléctrico en el lado derecho del rectángulo se expresa como

$$E(x + dx, t) \approx E(x, t) + \left.\frac{dE}{dx}\right|_{t \text{ constante}} dx = E(x, t) + \frac{\partial E}{\partial x}\, dx$$

donde $E(x, t)$ es el campo en el lado izquierdo.[2] Por lo tanto, la integral de línea en todo este rectángulo es aproximadamente

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = [E(x + dx, t)]\ell - [E(x, t)]\ell \approx \ell\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right) dx \qquad \textbf{(34.9)}$$

Ya que el campo magnético está en la dirección z, el flujo magnético a través del rectángulo de área $\ell\ dx$ es aproximadamente $\Phi_B = B\ell\ dx$ (si supone que dx es muy pequeño en comparación con la longitud de onda). Al tomar la derivada en el tiempo del flujo magnético se obtiene

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \ell\, dx \left.\frac{dB}{dt}\right|_{x \text{ constante}} = \ell\, dx \frac{\partial B}{\partial t} \qquad \textbf{(34.10)}$$

Al sustituir las ecuaciones 34.9 y 34.10 en la ecuación 34.6 se obtiene

$$\ell\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right) dx = -\ell\, dx \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \textbf{(34.11)}$$

En forma similar, se deduce una segunda ecuación al comenzar con la cuarta ecuación de Maxwell en el espacio vacío (ecuación 34.7). En este caso, la integral de línea de $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ se evalúa en torno a un rectángulo que yace en el plano xz y tiene ancho dx y longitud ℓ, como en la figura 34.6. Al notar que la magnitud del campo magnético cambia de $B(x, t)$ a $B(x + dx, t)$ en todo el ancho dx y que la dirección para tomar la integral de línea es como se muestra en la figura 34.6, la integral de línea sobre este rectángulo se encuentra que es aproximadamente

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = [B(x, t)]\ell - [B(x + dx, t)]\ell \approx -\ell\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) dx \qquad \textbf{(34.12)}$$

Figura 34.6 En un instante cuando una onda plana pasa a través de una trayectoria rectangular de ancho dx que se encuentra en el plano xz, el campo magnético en la dirección z varía de $\vec{\mathbf{B}}$ a $\vec{\mathbf{B}} + d\vec{\mathbf{B}}$. Esta variación espacial en $\vec{\mathbf{B}}$ da origen a un campo eléctrico variable en el tiempo a lo largo de la dirección y, de acuerdo con la ecuación 34.14.

El flujo eléctrico a través del rectángulo es $\Phi_E = E\ell\ dx$, que, cuando es derivada respecto al tiempo, produce

$$\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \ell\, dx \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \textbf{(34.13)}$$

Al sustituir las ecuaciones 34.12 y 34.13 en la ecuación 34.7 se obtiene

$$-\ell\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) dx = \mu_0\epsilon_0 \ell\, dx \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \textbf{(34.14)}$$

[2] Porque dE/dx en esta ecuación se expresa como el cambio en E con x en un instante dado t, dE/dx es equivalente a la derivada parcial $\partial E/\partial x$. Del mismo modo, dB/dt significa el cambio en B con el tiempo en una posición particular x; por lo tanto, en la ecuación 34.10, se puede sustituir dB/dt con $\partial B/\partial t$.

Al tomar la derivada de la ecuación 34.11 respecto a x y combinar el resultado con la ecuación 34.14 produce

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \textbf{(34.15)}$$

En la misma forma, al tomar la derivada de la ecuación 34.14 respecto a x y combinarla con la ecuación 34.11 obtiene

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad \textbf{(34.16)}$$

Las ecuaciones 34.15 y 34.16 tienen la forma de la ecuación de onda general[3] con la rapidez de onda v sustituida por c, donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad \textbf{(34.17)}$$

◀ Rapidez de ondas electromagnéticas

Evalúe numéricamente esta rapidez:

$$c = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(8.854\,19 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})}}$$
$$= 2.997\,92 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

Porque esta rapidez es precisamente la misma que la rapidez de la luz en el espacio vacío, uno puede creer (correctamente) que la luz es una onda electromagnética.

La solución más simple a las ecuaciones 34.15 y 34.16 es una onda sinusoidal para la cual las magnitudes de campo E y B varían con x y t de acuerdo con las expresiones

$$E = E_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t) \quad \textbf{(34.18)}$$

$$B = B_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t) \quad \textbf{(34.19)}$$

◀ Campos eléctrico y magnético sinusoidales

donde $E_{\text{máx}}$ y $B_{\text{máx}}$ son los valores máximos de los campos. El número de onda angular es $k = 2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda. La frecuencia angular es $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de onda. La relación ω/k es igual a la rapidez de una onda electromagnética, c:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = c$$

donde se usó la ecuación 16.12, $v = c = \lambda f$ que relaciona rapidez, frecuencia y longitud de onda de cualquier onda continua. Por lo tanto, para ondas electromagnéticas, la longitud y la frecuencia de estas ondas se relacionan mediante

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}}{f} \quad \textbf{(34.20)}$$

La figura 34.4b es una representación gráfica, en un instante, de una onda plana sinusoidal linealmente polarizada que se mueve en la dirección x positiva.

Al tomar derivadas parciales de las ecuaciones 34.18 (respecto a x) y 34.19 (respecto a t) se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_{\text{máx}} \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{\text{máx}} \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

[3] La ecuación de onda general es de la forma $(\partial^2 y/\partial x^2) = (1/v^2)(\partial^2 y/\partial t^2)$, donde v es la rapidez de la onda y y es la función de onda. La ecuación de onda general se introdujo como ecuación 16.27 y se sugiere repasar la sección 16.6.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.2
$\vec{E}$ más intenso que $\vec{B}$

Porque el valor de c es tan grande, algunos estudiantes interpretan de manera incorrecta la ecuación 34.21 y creen que significa que el campo eléctrico es mucho más intenso que el campo magnético. Sin embargo, los campos eléctrico y magnético se miden en diferentes unidades, así que no se pueden comparar directamente. En la sección 34.4 se encontrará que los campos eléctrico y magnético contribuyen igualmente a la energía de la onda.

Al sustituir estos resultados en la ecuación 34.11, se demuestra que, en cualquier instante,

$$kE_{\text{máx}} = \omega B_{\text{máx}}$$

$$\frac{E_{\text{máx}}}{B_{\text{máx}}} = \frac{\omega}{k} = c$$

Al usar estos resultados junto con las ecuaciones 34.18 y 34.19 se obtiene

$$\frac{E_{\text{máx}}}{B_{\text{máx}}} = \frac{E}{B} = c \tag{34.21}$$

Es decir: **en todo instante, la relación de la magnitud del campo eléctrico con la magnitud del campo magnético en una onda electromagnética es igual a la rapidez de la luz.**

Por último, observe que las ondas electromagnéticas obedecen el principio de sobreposición (que se explicó en la sección 18.1 respecto a ondas mecánicas), porque las ecuaciones diferenciales que involucran E y B son ecuaciones lineales. Por ejemplo, se pueden sumar dos ondas con la misma frecuencia y polarización simplemente al sumar de manera algebraica las magnitudes de los dos campos eléctricos.

Pregunta rápida 34.2 ¿Cuál es la diferencia de fase entre las oscilaciones sinusoidales de los campos eléctrico y magnético en la figura 34.4b? a) 180°, b) 90°, c) 0, d) imposible de determinar.

EJEMPLO 34.2 Una onda electromagnética

Una onda electromagnética sinusoidal de 40.0 MHz de frecuencia viaja en el espacio libre en la dirección x, como en la figura 34.7.

Figura 34.7 (Ejemplo 34.2) En algún instante, una onda electromagnética plana que se mueve en la dirección x tiene un campo eléctrico máximo de 750 N/C en la dirección y positiva. El correspondiente campo magnético en dicho punto tiene una magnitud E/c y está en la dirección z.

A) Determine la longitud de onda y el periodo de la onda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que la onda de la figura 34.7 se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x, con los campos eléctrico y magnético que oscilan en fase.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 34.20 para encontrar la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{40.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = \boxed{7.50 \text{ m}}$$

Encuentre el periodo T de la onda como el inverso de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{40.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = \boxed{2.50 \times 10^{-8} \text{ s}}$$

B) En algún punto y en algún instante, el campo eléctrico tiene su valor máximo de 750 N/C y se dirige a lo largo del eje y. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en esta posición y tiempo.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 34.21 para encontrar la magnitud del campo magnético:

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = \frac{750 \text{ N/C}}{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}} = \boxed{2.50 \times 10^{-6} \text{ T}}$$

Porque $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ deben ser mutuamente perpendiculares y a su vez perpendiculares a la dirección de propagación de la onda (x en este caso), se concluye que $\vec{\mathbf{B}}$ está en la dirección z.

34.4 Energía transportada por ondas electromagnéticas

En la explicación sobre el modelo de un sitema no aislado en la sección 8.1, identificó la radiación electromagnética como un método de transferencia de enrgía a través de la frontera de un sistema. La cantidad de energía transferida mediante ondas electromagnéticas se representa como T_{ER} en la ecuación 8.2. La rapidez de flujo de la energía en una onda electromagnética se representa mediante un vector $\vec{\mathbf{S}}$, llamado **vector de Poynting,** que se define por la expresión

$$\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} \quad (34.22)$$

◀ Vector de Poynting

La magnitud del vector de Poynting representa la rapidez a la cual fluye la energía a través de una superficie unitaria perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por lo tanto, la magnitud $\vec{\mathbf{S}}$ representa *energía por unidad de área.* El vector está dirigido en la dirección de propagación de la onda (figura 34.8). Las unidades del SI para $\vec{\mathbf{S}}$ son $\text{J/s}\cdot\text{m}^2 = \text{W/m}^2$.

Como un ejemplo, evalúe la magnitud de **S** para una onda electromagnética plana donde $|\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}| = EB$. En este caso,

$$S = \frac{EB}{\mu_0} \quad (34.23)$$

Porque $B = E/c$, también exprese lo anterior como

$$S = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{cB^2}{\mu_0}$$

Estas ecuaciones para S son aplicables para cualquier instante en el tiempo y representan la rapidez *instantánea* a la cual pasa energía por unidad de área.

Lo que es de mayor interés en el caso de una onda electromagnética sinusoidal plana es el promedio en el tiempo de S en uno o más ciclos, que se llama *intensidad de onda I.* (La intensidad de las ondas de sonido se explican en el capítulo 17.) Cuando obtiene este promedio, llega a una expresión que involucra el promedio en el tiempo $\cos^2(kx - \omega t)$, que tiene un valor de $\frac{1}{2}$. En consecuencia, el valor promedio de S (en otras palabras, la intensidad de la onda) es igual a

$$I = S_{\text{prom}} = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E^2_{\text{máx}}}{2\mu_0 c} = \frac{cB^2_{\text{máx}}}{2\mu_0} \quad (34.24)$$

◀ Intensidad de la onda

Recuerde que la energía por unidad de volumen, que es la densidad de energía instantánea u_E asociada con un campo eléctrico, se conoce por la ecuación 26.13.

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Además la densidad de energía instantánea u_B asociada con un campo magnético se conoce por la ecuación 32.14:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Ya que en el caso de una onda electromagnética E y B varían con el tiempo, lo mismo ocurre con las densidades de energía. Cuando utilice las correspondencias $B = E/c$ y $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, la expresión para u_B se convierte

$$u_B = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0\mu_0}{2\mu_0}E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Al comparar este resultado con la expresión para u_E,

$$u_B = u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.3
Un valor instantáneo

El vector de Poynting dado por la ecuación 34.22 depende del tiempo. Su magnitud varía con el tiempo y alcanza un valor máximo en el mismo momento en que lo hacen las magnitudes de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. La rapidez *promedio* de transferencia de energía se conoce por la ecuación 34.24.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.4
Radiación

En esta explicación la intensidad se define de la misma manera que en el capítulo 17 (como energía por unidad de área). Sin embargo, en la industria óptica, a la energía por unidad de área se le llama *radiación* y la intensidad radiante se define como la energía en watts por cada unidad de ángulo sólido (medido en esterradianes).

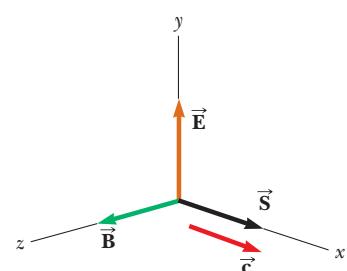



Figura 34.8 Vector de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$ para una onda electromagnética plana orientado a lo largo de la dirección de la propagación de la onda.

Es decir, **la densidad de energía instantánea asociada con el campo magnético de una onda electromagnética es igual a la densidad de energía instantánea asociada con el campo eléctrico.** En consecuencia, en un volumen determinado la energía es compartida igualmente entre los dos campos.

La **densidad de energía instantánea total** u es igual a la suma de las densidades de energía asociadas con los campos eléctrico y magnético:

Densidad de energía instantánea total de una onda electromagnética ▶

$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Cuando promedie esta densidad de energía instantánea total en uno o más ciclos de una onda electromagnética, una vez más se obtiene un factor de $\frac{1}{2}$. En consecuencia, para cualquier onda electromagnética, la energía promedio total por unidad de volumen es

Densidad de energía promedio de una onda electromagnética ▶

$$u_{\text{prom}} = \epsilon_0 (E^2)_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E_{\text{máx}}^2 = \frac{B_{\text{max}}^2}{2\mu_0} \quad \textbf{(34.25)}$$

Al comparar este resultado con la ecuación 34.24 para el valor promedio de S,

$$I = S_{\text{prom}} = c u_{\text{prom}} \quad \textbf{(34.26)}$$

En otras palabras, **la intensidad de una onda electromagnética es igual a la densidad de energía promedio multiplicada por la rapidez de la luz.**

El Sol entrega aproximadamente 10^3 W/m^2 de energía a la superficie de la Tierra vía radiación electromagnética. Calcule la energía total que incide sobre el techo de una casa. Las dimensiones del techo son 8.00 m × 20.0 m. Se supone que la magnitud promedio del vector de Poynting para radiación solar en la superficie de la Tierra es $S_{\text{prom}} = 1000$ W/m^2. Este valor promedio representa la potencia por unidad de área, o la intensidad luminosa. Si supone que la radiación incide de manera normal sobre el techo, obtiene

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = S_{\text{prom}} A = (1000\ \text{W/m}^2)(8.00\ \text{m} \times 20.0\ \text{m}) = 1.60 \times 10^5\ \text{W}$$

Esta potencia es grande comparada con los requerimientos de energía de una casa típica. Si esta potencia se mantuviese durante 24 horas por día y la energía se pudiera absorber y hacer disponible para aparatos electrodomésticos, proporcionaría más que suficiente energía para la casa promedio. Sin embargo, la energía solar no se aprovecha tan fácilmente, y las perspectivas de conversión a gran escala no son tan inteligentes como parecen a partir de estos cálculos. Por ejemplo, la eficiencia de conversión de energía solar es por lo general de 10% para celdas fotovoltaicas, lo que reduce la energía disponible en un orden de magnitud. Otras consideraciones reducen la potencia aún más. Depende de la ubicación, pero es muy probable que la radiación no incida de manera normal sobre el techo e, incluso si es así (en localidades cercanas al ecuador), esta situación existe sólo durante un tiempo breve cerca del mediodía. Ninguna energía está disponible durante aproximadamente la mitad de cada día durante las horas nocturnas, y los días nublados reducen todavía más la energía disponible. Por último, aunque la energía llegue en gran proporción durante la mitad del día, parte de ella se debe almacenar para uso posterior, lo que requiere baterías u otros dispositivos de almacenamiento. Con todo, completa la operación solar de las casas actualmente no es efectiva en costo para la mayoría de los hogares.

Pregunta rápida 34.3 Una onda electromagnética se propaga en la dirección negativa de las y. El campo eléctrico en un punto en el espacio está, en ese momento, orientado en la dirección positiva de las x. ¿En qué dirección, en ese momento, está orientado el campo magnético? a) negativa de las x, b) dirección positiva de las y, c) dirección positiva de las z, y d) dirección negativa de las z.

EJEMPLO 34.3 Campos en la página

Estime las magnitudes máximas de los campos eléctrico y magnético de la luz que incide sobre esta página debido a la luz visible proveniente de la lámpara de su escritorio. Trate la lámpara como una fuente puntual de radiación electromagnética que es 5% eficiente para transformar la energía entrante mediante transmisión eléctrica, a energía que sale mediante luz visible.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El filamento en su lámpara emite radiación electromagnética. Mientras más brillante la luz, mayores son las magnitudes de los campos eléctrico y magnético.

Categorizar Puesto que la lámpara se tratará como una fuente puntual, emite igual en todas direcciones, así que la radiación electromagnética saliente se modela como una onda esférica.

Analizar Recuerde de la ecuación 17.7 que la intensidad de onda I a una distancia r desde una fuente puntual es $I = \mathcal{P}_{\text{prom}}/4\pi r^2$, donde $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ es la potencia de salida promedio de la fuente y $4\pi r^2$ es el área de una esfera de radio r con centro en la fuente.

Iguale esta expresión para I con la intensidad de una onda electromagnética conocida por la ecuación 34.24:

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2} = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c}$$

Resuelva para la magnitud del campo eléctrico:

$$E_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{\mu_0 c \mathcal{P}_{\text{prom}}}{2\pi r^2}}$$

Haga algunas suposiciones acerca de los números que entran en esta ecuación. La salida de luz visible de una lámpara de 60 W que opera a 5% de eficiencia es aproximadamente 3.0 W por luz visible. (La energía restante se transfiere fuera de la lámpara por conducción y radiación invisible.) Una distancia razonable desde la lámpara a la página puede ser de 0.30 m.

Sustituya estos valores:

$$E_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})(3.0\ \text{W})}{2\pi(0.30\ \text{m})^2}}$$

$$= \boxed{45\ \text{V/m}}$$

Use la ecuación 34.21 para encontrar la magnitud del campo magnético:

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = \frac{45\ \text{V/m}}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}} = \boxed{1.5 \times 10^{-7}\ \text{T}}$$

Finalizar Este valor de la magnitud del campo magnético es dos órdenes de magnitud menor que el campo magnético de la Tierra.

34.5 Cantidad de movimiento y presión de radiación

Las ondas electromagnéticas transportan cantidad de movimiento lineal, así como energía. Cuando esta cantidad de movimiento es absorbida por alguna superficie, sobre ella se ejerce presión. En esta explicación el supuesto es que la onda electromagnética impacta en la superficie con una incidencia normal perpendicular y transporta a la superficie una energía total T_{ER} en un intervalo de tiempo Δt. Maxwell demostró que, si la superficie absorbe toda la energía incidente T_{ER} en este intervalo de tiempo (como lo haría un cuerpo negro, lo cual se explica en la sección 20.7), la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}$ transportada a la superficie tiene una magnitud

$$p = \frac{T_{\text{ER}}}{c} \quad \text{(absorción completa)} \qquad \textbf{(34.27)}$$

◀ Cantidad de movimiento transportado a una superficie perfectamente absorbente

La presión ejercida sobre la superficie se define como fuerza por unidad de área F/A, que combinada con la segunda ley de Newton da:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt}$$

Al sustituir la ecuación 34.27 dentro de esta expresión para P da:

$$P = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{T_{\text{ER}}}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{(dT_{\text{ER}}/dt)}{A}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.5

Tantas p

Tiene p para la cantidad de movimiento y P para la presión, ¡y ambas se relacionan con $\mathcal{P}$ para la potencia! Asegúrese de tener estos conceptos claros.

Reconocer $(dT_{ER}/dt)/A$ como la rapidez a la cual llega la energía a la superficie por cada unidad de área, que es la magnitud del vector de Poynting. Por lo tanto, la presión de radiación P ejercida sobre la superficie perfectamente absorbente es igual a

Presión de radiación ejercida sobre una superficie perfectamente absorbente ▶

$$P = \frac{S}{c} \tag{34.28}$$

Si la superficie es un reflector perfecto (como un espejo) y la incidencia es normal a la superficie, entonces la cantidad de movimiento transportada a la superficie en un intervalo de tiempo Δt es dos veces la que se obtiene mediante la ecuación 34.27. Es decir, la cantidad de movimiento transferida a la superficie por la luz incidente es $p = T_{ER}/c$, y la cantidad de movimiento transferida por la luz reflejada también es $p = T_{ER}/c$. Debido a eso,

$$p = \frac{2T_{ER}}{c} \quad \text{(reflección completa)} \tag{34.29}$$

La presión de radiación ejercida sobre una superficie perfectamente reflejante para una incidencia normal de la onda es

Presión de radiación ejercida en una superficie perfectamente reflejante ▶

$$P = \frac{2S}{c} \tag{34.30}$$

La presión sobre una superficie que tiene una reflectividad en alguna parte entre estos dos extremos tiene un valor entre S/c y $2S/c$, dependiendo de las propiedades de la superficie.

A pesar de que las presiones de radiación son muy pequeñas (aproximadamente 5×10^{-6} N/m^2 para la luz solar directa), la NASA explora la posibilidad de *la navegación solar* como un medio económico para enviar naves espaciales a los planetas. Extensas láminas experimentarían presión de radiación proveniente de la luz solar y se utilizarían de manera similar al velamen (las velas) de las embarcaciones. En 1973 los ingenieros de la NASA aprovecharon la cantidad de movimiento de la luz solar que incide sobre las celdas solares del *Mariner 10* para efectuar pequeñas correcciones en el trayecto cuando el suministro de combustible de la nave espacial disminuyó. (Esta maniobra fue llevada a cabo cuando la nave espacial estaba en las cercanías del planeta Mercurio. ¿Funcionaría de la misma manera en las cercanías de Neptuno?)

Pregunta rápida 34.4 Para maximizar la presión de radiación sobre las velas de una nave espacial que utiliza navegación solar, ¿deberían ser éstas a) de color muy negro para absorber toda la luz posible o b) muy brillantes, para reflejar tanta luz solar como sea posible?

EJEMPLO CONCEPTUAL 34.4 Barrido del sistema solar

En el espacio interplanetario existe una gran cantidad de polvo. Aunque en teoría estas partículas de polvo varían en tamaño, desde el molecular hasta uno mucho más grande, muy poco del polvo en el sistema solar es menor que aproximadamente 0.2 μm. ¿Por qué?

SOLUCIÓN

Las partículas de polvo están sometidas a dos fuerzas significativas: la fuerza gravitacional que las lleva hacia el Sol y la fuerza de presión de radiación que las empuja alejándolas del Sol. La fuerza gravitacional es proporcional al cubo del radio de una partícula de polvo esférica porque es proporcional a la masa y por ende al volumen $4\pi r^3/3$ de la partícula. La presión de radiación es proporcional al cuadrado del radio porque depende de la sección transversal plana de la partícula. En partículas grandes, la fuerza gravitacional es mayor que la fuerza de la presión de radiación; para partículas que tienen radios menores que 0.2 μm, la fuerza de presión de radiación es mayor que la fuerza gravitacional. Como resultado, la luz del Sol barre estas partículas hacia afuera del sistema solar.

EJEMPLO 34.5 Presión de un apuntador láser

En las presentaciones muchas personas usan un apuntador láser para dirigir la atención de la audiencia a la información en la pantalla. Si un apuntador de 3.0 mW crea una mancha sobre la pantalla que tiene 2.0 mm de diámetro, determine la presión de radiación sobre la pantalla que refleja 70% de la luz que la golpea. La potencia de 3.0 mW es un valor promediado en el tiempo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La presión no debe ser muy grande.

Categorizar Este problema involucra un cálculo de presión de radiación con el uso de un planteamiento similar al que condujo a la ecuación 34.28 o la ecuación 34.30, pero se complica por la reflexión de 70 por ciento.

Analizar Comience por determinar la magnitud del vector de Poynting del haz.

Divida la potencia promediada en el tiempo entregada mediante la onda electromagnética por el área de sección transversal del haz:

$$S_{\text{prom}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{A} = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{\pi r^2} = \frac{3.0 \times 10^{-3}\ \text{W}}{\pi\left(\dfrac{2.0 \times 10^{-3}\ \text{m}}{2}\right)^2} = 955\ \text{W/m}^2$$

Ahora determine la presión de radiación del haz láser. La ecuación 34.30 indica que un haz completamente reflejado aplicaría una presión promedio de $P_{\text{prom}} = 2S_{\text{prom}}/c$. La reflexión real se modela del modo siguiente: imagine que la superficie absorbe el haz, lo que resulta en presión $P_{\text{prom}} = S_{\text{prom}}/c$; después la superficie emite el haz, lo que resulta en presión adicional $P_{\text{prom}} = S_{\text{prom}}/c$. Si la superficie emite sólo una fracción f del haz (de modo que f es la cantidad del haz incidente reflejado), la presión debida al haz emitido es $P_{\text{prom}} = fS_{\text{prom}}/c$.

Use este modelo para encontrar la presión total sobre la superficie debida a absorción y reemisión (reflexión):

$$P_{\text{prom}} = \frac{S_{\text{prom}}}{c} + f\frac{S_{\text{prom}}}{c} = (1 + f)\frac{S_{\text{prom}}}{c}$$

Evalúe esta presión para un haz que se refleja 70 por ciento:

$$P_{\text{prom}} = (1 + 0.70)\frac{955\ \text{W/m}^2}{3.0 \times 10^8\ \text{m/s}} = \boxed{5.4 \times 10^{-6}\ \text{N/m}^2}$$

Finalizar Considere la magnitud del vector de Poynting, $S_{\text{prom}} = 955\ \text{W/m}^2$. Es aproximadamente la misma intensidad de la luz solar en la superficie de la Tierra. Por esta razón, no es seguro dirigir el haz de un apuntador láser a los ojos de una persona, pues puede ser más peligroso que mirar directamente al Sol. La presión tiene un valor extremadamente pequeño, como se esperaba. (Recuerde de la sección 14.2 que la presión atmosférica es aproximadamente $10^5\ \text{N/m}^2$.)

¿Qué pasaría si? ¿Y si el apuntador láser se mueve el doble de lejos de la pantalla? ¿Esto afecta la presión de radiación sobre la pantalla?

Respuesta Ya que la representación convencional de un haz láser es un haz de luz con sección transversal constante, considere que la intensidad de la radiación y, por lo tanto, la presión de radiación, es independiente de la distancia desde la pantalla. No obstante, un haz láser no tiene una sección transversal constante en todas las distancias desde la fuente; en su lugar, existe una pequeña pero mensurable divergencia del haz. Si el láser se aleja más de la pantalla, el área de iluminación sobre la pantalla aumenta, lo que reduce la intensidad. A su vez, la presión de radiación se reduce.

Además, la distancia duplicada desde la pantalla resulta en más pérdida de energía del haz debido a dispersión de moléculas de aire y partículas de polvo conforme la luz viaja desde el láser a la pantalla. Esta pérdida de energía reduce aún más la presión de radiación sobre la pantalla.

34.6 Producción de ondas electromagnéticas por una antena

Ni las cargas inmóviles ni las corrientes estables pueden producir ondas electromagnéticas. No obstante, cada vez que la corriente en un alambre cambia con el tiempo, el alambre emite radiación electromagnética. **El mecanismo fundamental responsable de esta radiación es la aceleración de una partícula con carga. Cada vez que una partícula con carga se acelera, emite energía.**

Considere las ondas electromagnéticas producidas por una *antena de media onda*. En esta configuración, dos varillas conductoras están conectadas a una fuente de voltaje alterno (como un oscilador LC), como se muestra en la figura 34.9. La longitud de cada

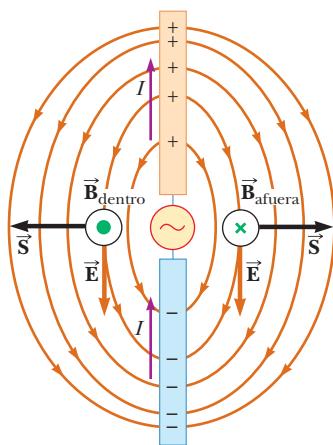
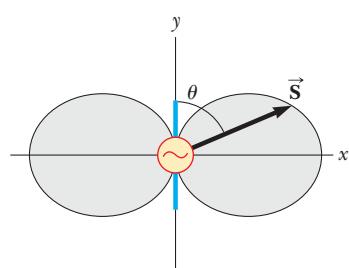



Figura 34.9 Una antena de media onda está constituida por dos varillas metálicas conectadas a una fuente de voltaje alterno. Este diagrama muestra $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en un instante arbitrario cuando la corriente está hacia arriba. Observe que las líneas de campo eléctrico se parecen a las de un dipolo (como se muestra en la figura 23.20)

varilla es igual a un cuarto de la longitud de onda de la radiación emitida cuando el oscilador funciona con frecuencia f. El oscilador obliga a las cargas a acelerarse de ida y vuelta entre las dos varillas. La figura 34.9 muestra la configuración de los campos eléctrico y magnético en algún instante cuando la corriente está hacia arriba. Las líneas de campo eléctrico debidas a la separación de las cargas en las porciones superior e inferior de la antena, se parecen a un dipolo eléctrico. (Como resultado, a este tipo de antena se le conoce a veces como *antena dipolo.*) Ya que estas cargas oscilan en forma continua entre las dos varillas, la antena puede representarse aproximadamente por un dipolo eléctrico oscilante. Las líneas de campo magnético, causadas por la corriente que representa el movimiento de las cargas entre los extremos de la antena, forman círculos concéntricos alrededor de la antena y perpendiculares a las líneas del campo eléctrico en todos sus puntos. El campo magnético es igual a cero en todos los puntos a lo largo del eje de la antena. Además, $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están 90° fuera de fase en el tiempo; por ejemplo, la corriente es cero cuando las cargas en los extremos exteriores de las varillas están al máximo.

En la figura 34.9, en los dos puntos donde se muestra el campo magnético, el vector de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$ se dirige radialmente hacia afuera, esto indica que en ese instante la energía está fluyendo de la antena alejándose. Después, la dirección de los campos y el vector de Poynting se invierten, conforme la corriente se alterna. Porque en los puntos cercanos al dipolo $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están 90° fuera de fase, el flujo de energía neta es igual a cero. De aquí que se concluya (de manera incorrecta) que el dipolo no emite energía.

No obstante, en efecto se emite energía. Debido a que los campos del dipolo disminuyen en función de $1/r^3$ (como se muestra en el ejemplo 23.5 para el campo eléctrico de un dipolo estático), son despreciables a grandes distancias de la antena. A estas grandes distancias, hay algo más que genera un tipo de radiación diferente de la que está cerca de la antena. La fuente de esta radiación es la inducción continua de un campo eléctrico causado por la variación en el tiempo de un campo magnético y a la inducción de un campo magnético por la variación en el tiempo de un campo eléctrico, pronosticado en las ecuaciones 34.6 y 34.7. Los campos eléctrico y magnético producidos de esta manera están en fase entre sí y varían en función de $1/r$. El resultado es un flujo de energía hacia afuera en todo momento.

Figura 34.10 Dependencia angular de la intensidad de radiación producida por un dipolo eléctrico en oscilación. La distancia desde el origen a un punto en el borde de la forma gris es proporcional a la intensidad de radiación.

La dependencia angular de la intensidad de radiación producida por una antena dipolo es como se muestra en la figura 34.10. Advierta que la intensidad y la energía radiada pasan por un máximo en un plano que es perpendicular a la antena y que pasa por su punto medio. Además, la energía radiada es igual a cero a lo largo del eje de la antena. Una solución matemática a las ecuaciones de Maxwell para una antena dipolo muestra que la intensidad de la radiación varía en función de $(\text{sen}^2\,\theta)/r^2$, donde θ se mide a partir del eje de la antena.

Las ondas electromagnéticas también pueden inducir corrientes en una antena receptora. La respuesta de un dipolo receptor en una posición conocida es máxima cuando el eje de la antena es paralelo al campo en ese punto, y es igual a cero cuando el eje es perpendicular al campo eléctrico.

Pregunta rápida 34.5 Si la antena de la figura 34.9 representa la fuente de una estación de radio lejana, ¿cuál sería la mejor orientación para la antena de un radio portátil localizada a la derecha de la figura: a) arriba-abajo a lo largo de la página, b) izquierda-derecha a lo largo de la página o c) perpendicular a la página?

34.7 El espectro de las ondas electromagnéticas

En la figura 34.11 se listan los diversos tipos de ondas electromagnéticas que muestra el **espectro electromagnético.** Observe los extensos intervalos de frecuencias y longitudes de onda. No existe una división clara entre un tipo de onda y la siguiente. Recuerde que **todas las formas de los diversos tipos de radiación son producidos por el mismo fenómeno: cargas en aceleración.** Los nombres que se han dado a cada tipo de onda son simplemente una forma conveniente en la descripción de la región del espectro en el que están.

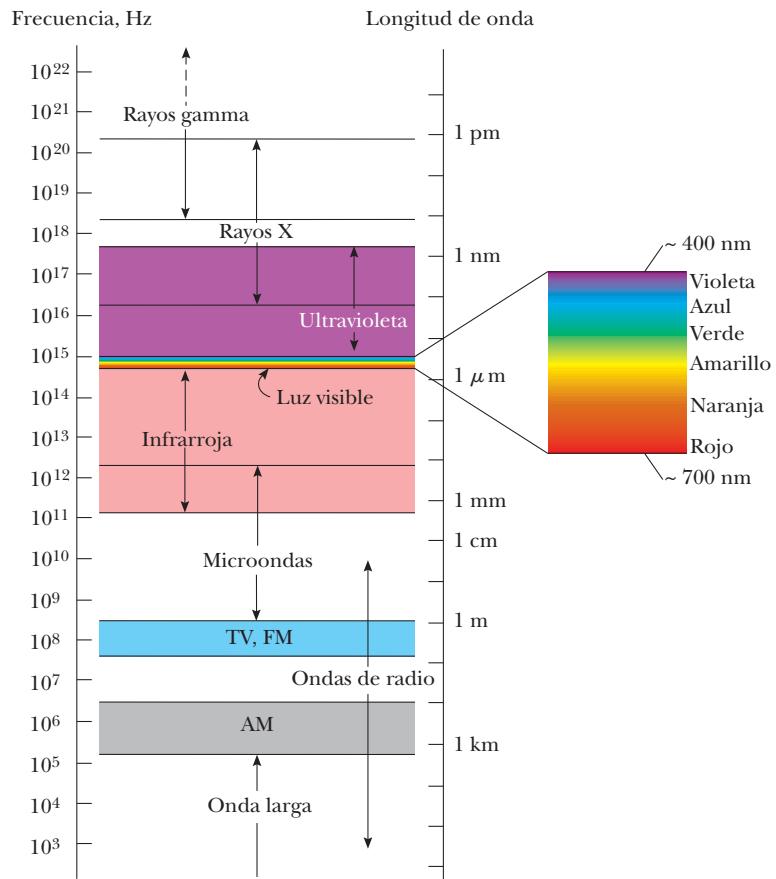



Figura 34.11 El espectro electromagnético. Observe el traslape entre tipos de ondas adyacentes. La vista ampliada a la derecha muestra detalles del espectro visible.

Las **ondas de radio,** cuyos intervalos de longitud de onda llegan más allá de 10^4 m a casi 0.1 m, son el resultado de cargas que se aceleran en alambres conductores. Estas ondas son generadas por dispositivos electrónicos, como osciladores *LC,* y se utilizan en los sistemas de radio y televisión.

Las **microondas** tienen longitudes de onda clasificadas desde 0.3 m hasta 10^{-4} m y también son generadas por dispositivos electrónicos. Debido a sus longitudes de onda cortas, son muy adecuadas para sistemas de radar y para el estudio de las propiedades atómicas y moleculares de la materia. Los hornos de microondas son una aplicación doméstica interesante de estas ondas. Se ha sugerido que la energía solar podría aprovecharse enviando microondas a la Tierra desde un colector solar en el espacio.

Las **ondas infrarrojas** tienen longitudes de onda clasificadas desde 10^{-3} hasta 7×10^{-7} m, longitud de onda más larga de la luz visible. Estas ondas, producidas por moléculas y objetos a la temperatura ambiente, son fácilmente absorbidas por la mayor parte de los materiales. La energía infrarroja (IR, *infrared*), absorbida por una sustancia, aparece como energía interna, ya que la energía agita los átomos del objeto, lo que incrementa su movimiento vibratorio o de traslación, y da como resultado un incremento en la temperatura. La radiación infrarroja tiene aplicaciones prácticas y científicas en muchas áreas, incluyendo la fisioterapia, la fotografía infrarroja y la espectroscopia vibratoria.

La **luz visible,** que es la forma más familiar de las ondas electromagnéticas, es aquella parte del espectro electromagnético que el ojo humano puede detectar. Se produce mediante la reorganización de los electrones en los átomos y moléculas. Sus diversas longitudes de onda, que corresponden a los diferentes colores, van desde el rojo ($\lambda \approx 7 \times 10^{-7}$ m) hasta el violeta ($\lambda \approx 4 \times 10^{-7}$ m). La sensibilidad del ojo humano es una función de la longitud de onda, siendo máxima a una longitud de onda de alrededor de 5.5×10^{-7} m. Con esto en mente, ¿por qué cree usted que las pelotas de tenis tienen a menudo un color verde

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.6

"Rayos de calor"

Los rayos infrarrojos se conocen a menudo con el nombre de "rayos de calor", pero este término es incorrecto. Aunque la radiación infrarroja se utiliza para incrementar o mantener la temperatura, así como para mantener la comida caliente con "lámparas de calor" en un restaurante de comida rápida, todas las longitudes de onda de la radiación electromagnética contienen energía que puede causar el incremento de la temperatura de un sistema. Como ejemplo, imagine una papa horneándose en un horno de microondas.

TABLA 34.1

Correspondencia aproximada entre longitudes de onda de luz visible y color

Intervalo de longitud (nm)	Descripción de color
400–430	Violeta
430–485	Azul
485–560	Verde
560–590	Amarillo
590–625	Naranja
625–700	Rojo

Nota: Aquí los intervalos de longitud de onda son aproximados. Distintas personas describirán los colores de manera diferente.

Ron Chapple/Getty Images.

El uso de lentes de sol que carecen de bloqueador de luz ultravioleta (UV) es más dañino para sus ojos que no utilizar. Los lentes de cualquier anteojo para el sol absorben una porción de la luz visible, causando por tanto la dilatación de las pupilas. Si los lentes tampoco bloquean la luz UV, es posible que se produzca más daño en los ojos debido a las pupilas dilatadas. Si no se utilizan lentes de sol, las pupilas se contraen, los ojos se entrecierran, lo que hace que penetre mucha menos luz UV. Los lentes de sol de alta calidad bloquean prácticamente toda la luz UV dañina para el ojo.

amarillento? La tabla 34.1 proporciona correspondencias aproximadas entre las longitudes de onda de la luz visible y el color asignado a ella por los humanos. La luz es la base de la ciencia de la óptica y de los instrumentos ópticos, a explicarse en los capítulos 35 al 38.

Las **ondas ultravioleta** cubren longitudes de onda que van desde aproximadamente 4×10^{-7} m hasta 6×10^{-10} m. El Sol es una fuente importante de luz ultravioleta (UV), la cual es la causa principal de las quemaduras de sol o eritema solar. Las lociones bloqueadoras son transparentes a la luz visible pero absorben la mayor parte de la luz UV. Cuanto mayor sea el factor de protección solar del bloqueador, o SPF, mayor será el porcentaje de luz UV absorbida. A los rayos ultravioleta se les atribuye en parte la formación de cataratas y nubosidad en el lente interno del ojo.

La mayor parte de la luz UV del Sol es absorbida por las moléculas de ozono (O_3) en la atmósfera superior de la Tierra, en una capa llamada estratosfera. Este escudo de ozono convierte la radiación UV letal de alta energía a radiación infrarroja, lo que a su vez calienta la estratosfera.

Los **rayos X** tienen longitudes de onda que van de aproximadamente 10^{-8} m a 10^{-12} m. La fuente más común de rayos X es el frenado de electrones de alta energía que impactan un objetivo metálico. Los rayos X se utilizan como una herramienta de diagnóstico en la medicina y como tratamiento para ciertos tipos de cáncer. Porque los rayos X dañan o destruyen los tejidos y los organismos vivos, se debe tener cuidado para evitar una exposición o sobreexposición innecesaria. Los rayos X también se utilizan en el estudio de la estructura de los cristales ya que las longitudes de onda de los rayos X son comparables con las distancias de separación de los átomos en los sólidos (alrededor de 0.1 nm).

Los **rayos gamma** son ondas electromagnéticas emitidas por núcleos radioactivos (como ^{60}Co y ^{137}Cs) y durante ciertas reacciones nucleares. Los rayos gamma de alta energía son un componente de los rayos cósmicos que entran en la atmósfera de la Tierra desde el espacio. Tienen longitudes de onda que van desde aproximadamente 10^{-10} m hasta menos de 10^{-14} m. Son rayos muy penetrantes y producen daños serios si son absorbidos por tejidos vivos. En consecuencia, quienes trabajan cerca de este tipo de radiación peligrosa, deben estar protegidos con materiales de gran absorción, como gruesas capas de plomo.

Pregunta rápida 34.6 En muchas cocinas se utilizan hornos de microondas para preparar los alimentos. La frecuencia de las microondas es del orden de 10^{10} Hz. ¿La longitud de onda de estas microondas son del orden de a) kilómetros, b) metros, c) centímetros o d) micras?

Pregunta rápida 34.7 Una onda de radio de frecuencia del orden de 10^5 Hz se utiliza para transportar una onda sonora con una frecuencia del orden de 10^3 Hz. ¿La longitud de la onda de radio es del orden de magnitud de a) kilómetros, b) metros, c) centímetros, o d) micras.

Resumen

DEFINICIONES

En una región del espacio donde hay un campo eléctrico cambiante, hay una **corriente de desplazamiento** que se define como

$$I_d \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \textbf{(34.1)}$$

donde ϵ_0 es la permitividad del espacio libre (véase la sección 23.3) y $\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ es el flujo eléctrico.

La rapidez de flujo de energía que cruza un área unitaria mediante radiación electromagnética se describe mediante el **vector de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$**, donde

$$\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad \textbf{(34.22)}$$

(*continúa*)

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cuando se usan con la **ley de fuerza de Lorenz**, $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, **las ecuaciones de Maxwell** describen todos los fenómenos electromagnéticos:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \textbf{(34.4)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \quad \textbf{(34.5)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \textbf{(34.6)}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I + \epsilon_0\mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \textbf{(34.7)}$$

Las **ondas electromagnéticas**, predichas por las ecuaciones de Maxwell, tienen las siguientes propiedades:

- El campo eléctrico y el campo magnético satisfacen cada uno una ecuación de onda. Estas dos ecuaciones de onda, que se pueden obtener a partir de la tercera y cuarta ecuaciones de Maxwell, son

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \textbf{(34.15)}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad \textbf{(34.16)}$$

- Las ondas viajan a través de un vacío con la rapidez de la luz c, donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad \textbf{(34.17)}$$

- Numéricamente, la rapidez de las ondas electromagnéticas en un vacío es 3.00×10^8 m/s.
- Los campos eléctrico y magnético son mutuamente perpendiculares y a su vez, perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.
- Las magnitudes instantáneas de $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en una onda electromagnética se relacionan mediante la expresión

$$\frac{E}{B} = c \quad \textbf{(34.21)}$$

- Las ondas electromagnéticas portan energía.
- Las ondas electromagnéticas portan cantidad de movimiento.

Porque las ondas electromagnéticas portan cantidad de movimiento, ejercen presión sobre las superficies. Si una onda electromagnética cuyo vector de Poynting es $\vec{\mathbf{S}}$ es absorbida completamente por una superficie sobre la cual incide de manera normal, la presión de radiación sobre dicha superficie es

$$P = \frac{S}{c} \quad \text{(absorción completa)} \quad \textbf{(34.28)}$$

Si la superficie refleja totalmente una onda que incide de manera normal, la presión se duplica.

Los campos eléctricos y magnético de una onda electromagnética sinusoidal plana que se propaga en la dirección x positiva se puede escribir como

$$E = E_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t) \quad \textbf{(34.18)}$$

$$B = B_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t) \quad \textbf{(34.19)}$$

donde ω es la frecuencia angular de la onda y k es el número de onda angular. Estas ecuaciones representan soluciones especiales a las ecuaciones de onda para E y B. La longitud y frecuencia de las ondas electromagnéticas se relaciona mediante

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{f} \quad \textbf{(34.20)}$$

El valor promedio del vector de Poynting para una onda electromagnética plana tiene una magnitud

$$S_{\text{prom}} = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c} = \frac{cB_{\text{máx}}^2}{2\mu_0} \quad \textbf{(34.24)}$$

La intensidad de una onda electromagnética sinusoidal plana es igual al valor promedio del vector de Poynting tomado sobre uno o más ciclos.

El espectro electromagnético incluye ondas que cubren un amplio intervalo de longitudes de onda, desde las largas ondas de radio a más de 10^4 m, hasta los rayos gamma a menos de 10^{-14} m.

Preguntas

O indica pregunta complementaria

1. ¿Qué nuevo concepto incluyó la forma generalizada de Maxwell de la ley de Ampère?
2. ¿Las ecuaciones de Maxwell permiten la existencia de monopolos magnéticos? Explique.
3. Las estaciones de radio anuncian a menudo "noticias al instante". Si quisieran decir que las noticias se pueden escuchar en el instante justo en que son emitidas, ¿esto sería cierto? ¿Qué intervalo de tiempo aproximado se requiere para que un mensaje viaje desde Maine a California por ondas de radio, si las ondas pudieran ser detectadas en este inetrvalo?
4. Cuando la luz (u otra radiación electromagnética) se desplaza a través de una región determinada, ¿qué es lo que oscila y qué es lo que se transporta?
5. Si una corriente de alta frecuencia pasa a través de un solenoide que contiene un núcleo metálico, éste se calienta debido a la inducción. Explique por qué en este caso el material aumenta de temperatura.
6. **O** Un estudiante que trabaja con aparatos transmisores similares a los de Heinrich Hertz quiere ajustar los electrodos para generar ondas electromagnéticas con una frecuencia a la mitad de la anterior. **i)** ¿Qué tan grande debe ser la capacitancia efectiva del par de electrodos? a) 4 veces mayor que la anterior, b) 2 veces mayor que la anterior, c) ½ de la anterior, d) ¼ la anterior, e) ninguna de estas respuestas tendría el efecto deseado. **ii)** Después de hacer el ajuste requerido, ¿cuál será la longitud de la onda transmitida? a) 4 veces mayor que la anterior, b) 2 veces mayor que la anterior, c) la misma que la anterior, d) ½ que la anterior, e) ¼ que la anterior, f) ninguna de estas respuestas es necesariamente correcta.
7. **O** Suponga que usted carga un peine al pasarlo por su cabello y luego mantiene el peine junto a un imán de barra. ¿Los campos eléctrico y magnético producidos constituyen una onda electromagnética? a) Sí, necesariamente. b) Sí, porque dentro del imán de barra se mueven partículas cargadas. c) Pueden, pero sólo si el campo eléctrico del peine y el campo magnético del imán son perpendiculares. d) Pueden, pero sólo si tanto el peine como el imán se mueven. e) Pueden, si el peine o el imán, o ambos aceleran.
8. **O** Una pequeña fuente emite una onda electromagnética con una sola frecuencia en el vacío, igualmente en todas direcciones. **i)** Conforme la onda se mueve, ¿ su frecuencia a) aumenta, b) disminuye o c) permanece constante? Responda la misma pregunta acerca de **ii)** su longitud de onda, **iii)** su rapidez, **iv)** su intensidad y **v)** la amplitud de su campo eléctrico.
9. **O** Una onda electromagnética plana con una sola frecuencia se mueve en el vacío en la dirección $+x$. Su amplitud es uniforme sobre el plano yz. **i)** Conforme la onda se mueve, ¿su frecuencia a) aumenta, b) disminuye o c) permanece constante? Responda la misma pregunta acerca de **ii)** su longitud de onda, **iii)** su rapidez, **iv)** su intensidad y **v)** la amplitud de su campo magnético.
10. Enumere todas las similitudes y diferencias que pueda entre las ondas de sonido y las de luz.
11. Describa el significado físico del vector de Poynting.
12. **O** Suponga que la amplitud del campo eléctrico en una onda electromagnética plana es E_1 y la amplitud del campo magnético es B_1. Luego la fuente de la onda se ajusta de modo que la amplitud del campo eléctrico se duplica para convertirse en $2E_1$. **i)** ¿Qué ocurre con la amplitud del campo magnético en este proceso? a) Se vuelve 4 veces mayor. b) Se vuelve 2 veces mayor. c) Puede permanecer constante. d) Se reduce a ½. e) Se reduce a ¼. f) Ninguna de estas respuestas es necesariamente verdadera. **ii)** ¿Qué ocurre con la intensidad de la onda? Elija entre las mismas posibilidades.
13. **O** Un grano de polvo interplanetario esférico, de 0.2 μm de radio, está a una distancia r_1 del Sol. La fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre el grano apenas equilibra la fuerza debida a la presión de radiación de la luz solar. **i)** Suponga que el grano se mueve a una distancia $2r_1$ del Sol y se libera. En esta posición, ¿cuál es la fuerza neta ejercida sobre el grano? a) Hacia el Sol, b) alejándose del Sol, c) cero, d) imposible de determinar sin conocer la masa del grano. **ii)** Ahora suponga que el grano se mueve de regreso a su posición original en r_1, se comprime de modo que se cristaliza en una esfera con densidad significativamente mayor y se libera. En esta situación, ¿cuál es la fuerza neta ejercida sobre el grano? a) Hacia el Sol, b) alejándose del Sol. c) cero d) imposible de determinar sin conocer la masa del grano.
14. Para una energía incidente conocida de una onda electromagnética, ¿por qué la presión de radiación es el doble sobre una superficie perfectamente reflejante que sobre una superficie perfectamente absorbente?
15. Antes del advenimiento de la televisión por cable y de las antenas parabólicas, la gente utilizaba a menudo "antenas de conejo" sobre sus aparatos de televisión (figura P34.15). Ciertas orientaciones de la antena receptora sobre una televisión dan una mejor recepción que otras. Además, la mejor orientación varía de canal a canal. Explique por qué.

© Thomson Learning/George Semple.

Figura P34.15 pregunta 15 y problema 63.

16. ¿Qué provoca una onda de radio sobre las cargas en la antena receptora para obtener una señal para el radio de su automóvil?
17. **O i)** Clasifique los siguientes tipos de ondas de acuerdo con sus intervalos de longitud de onda, desde aquellos con la longitud de onda más pequeña típica o promedio, hasta la mayor, y señale cualquier caso de igualdad: a) rayos gamma, b) luz infrarroja, c) microndas, d) ondas de radio, e) luz ultravioleta, f) luz visible, g) rayos X. **ii)** Clasifique los tipos de ondas de acuerdo con sus frecuencias, de menor a mayor. **iii)** Clasifique los tipos de onda de acuerdo con sus magnitudes de velocidad en un vacío, de la más lenta a la más rápida.

18. Un plato de plástico o de vidrio vacío está frío al contacto cuando se retira de un horno de microondas, incluso cuando contenga alimento caliente. ¿Cómo es posible esto? (Suponga que ha pagado la cuenta de electricidad.)

19. ¿Por qué debe verse diferente la fotografía infrarroja de una persona que una tomada con luz visible?

20. Suponga que un ser de otro planeta tiene ojos sensibles a la radiación infrarroja. Describa lo que vería el extraterrestre si mirara en el cuarto en el que se encuentra usted ahora. En particular, ¿qué sería para él brillante y qué sería oscuro?

21. Un horno de microondas casero utiliza ondas electromagnéticas con una longitud de onda de alrededor de 12.2 cm. Algunos teléfonos inalámbricos de 2.4 GHz sufren interferencia por ruido cuando se utilizan cerca de hornos de microondas. Localice las ondas utilizadas por ambos aparatos sobre el espectro electromagnético. ¿Es de esperar que interfieran entre sí?

Problemas

Sección 34.1 Corriente de desplazamiento y la forma general de la ley de Ampère

1. Una corriente de 0.100 A carga un capacitor que tiene placas cuadradas de 5.00 cm por lado. La separación entre placas es de 4.00 mm. Encuentre a) la relación de cambio en el tiempo del flujo eléctrico entre las placas y b) la corriente de desplazamiento entre las placas.

2. Una corriente de 0.200 A carga un capacitor que tiene placas circulares de 10.0 cm de radio. Si la separación entre placas es de 4.00 mm, a) ¿cuál es la rapidez de aumento en el tiempo del campo eléctrico entre las placas? b) ¿Cuál es el campo magnético entre las placas a 5.00 cm del centro?

3. Considere la situación que se muestra en la figura P34.3. Un campo eléctrico de 300 V/m se confina a un área circular de 10.0 cm de diámetro y se dirige hacia afuera, perpendicular al plano de la figura. Si el campo aumenta en una proporción de 20.0 V/m · s, ¿cuáles son la dirección y la magnitud del campo magnético en el punto P, a 15.0 cm del centro del círculo?

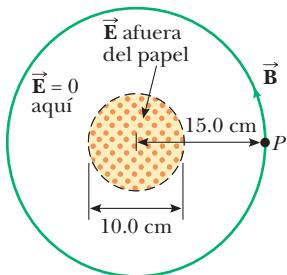



Figura P34.3

Sección 34.2 Ecuaciones de Maxwell y los descubrimientos de Hertz

4. Una barra delgada muy larga porta carga eléctrica con densidad lineal de 35.0 nC/m. Se encuentra a lo largo del eje x y se mueve en la dirección x con una rapidez de 15.0 Mm/s. a) Encuentre el campo eléctrico que la barra crea en el punto $(x = 0, y = 20.0 \text{ cm}, z = 0)$. b) Encuentre el campo magnético que produce en el mismo punto. c) Encuentre la fuerza que ejerce sobre un electrón en este punto, que se mueve con una velocidad de $(240\hat{\mathbf{i}})$ Mm/s.

5. Un protón se mueve a través de un campo eléctrico uniforme conocido por $\vec{\mathbf{E}} = 50.0\hat{\mathbf{j}}$ V/m y un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}} = (0.200\hat{\mathbf{i}} + 0.300\hat{\mathbf{j}} + 0.400\hat{\mathbf{k}})$. Determine la aceleración del protón cuando tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}} = 200\hat{\mathbf{i}}$ m/s.

6. Un electrón se mueve a través de un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}} = (2.50\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ V/m y un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}} = (0.400\hat{\mathbf{k}})$ T. Determine la aceleración del electrón cuando tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}} = 10.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s.

Sección 34.3 Ondas electromagnéticas planas

Nota: Suponga que el medio es el vacío, salvo que se especifique lo contrario.

7. a) La distancia a la estrella polar, Polaris, es aproximadamente de 6.44×10^{18} m. Si Polaris se apagara hoy, ¿en qué año la veríamos desaparecer? b) ¿Cuánto tarda la luz solar en llegar a la Tierra? c) ¿Cuánto tarda una señal de radar de microondas en desplazarse de la Tierra a la Luna y de regreso? d) ¿Cuánto tarda una onda de radio en desplazarse una vez alrededor de la Tierra en un gran círculo, cerca de la superficie del planeta? e) ¿Cuánto tarda en llegar la luz de un relámpago a 10 km de distancia?

8. La rapidez de una onda electromagnética que se desplaza en una sustancia no magnética transparente es $v = 1/\sqrt{\kappa\mu_0\epsilon_0}$, donde κ es la constante dieléctrica de la sustancia. Determine la rapidez de la luz en el agua, que tiene una constante dieléctrica a frecuencias ópticas de 1.78.

9. La figura 34.4b muestra una onda electromagnética sinusoidal plana que se propaga en la dirección de las x. Suponga que la longitud de onda es de 50.0 m, y que el campo eléctrico vibra en el plano xy con una amplitud de 22.0 V/m. Calcule a) la frecuencia de la onda y b) la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ cuando el campo eléctrico tiene su valor máximo en la dirección negativa de las y. c) Escriba una expresión para $\vec{\mathbf{B}}$ utilizando el vector unitario correcto, con valores numéricos para $B_{\text{máx}}$, k y ω, y con su magnitud de la forma

$$B = B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$

10. Una onda electromagnética en el vacío tiene una amplitud de campo eléctrico de 220 V/m. Calcule la amplitud del campo magnético correspondiente.

11. En unidades del SI, el campo eléctrico de una onda electromagnética se describe por

$$E_y = 100 \text{ sen}(1.00 \times 10^7 x - \omega t)$$

Determine a) la amplitud de las oscilaciones del campo magnético correspondiente, b) la longitud de onda λ y c) la frecuencia f.

12. Verifique por sustitución que las siguientes ecuaciones son soluciones a las ecuaciones 34.15 y 34.16, respectivamente:

$$E = E_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t)$$

$$B = B_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t)$$

13. **Problema de repaso.** Las ondas de radio entre dos láminas de metal separadas 2.00 m establecen un patrón de interferencia de ondas estacionarias. Esta es la distancia más corta entre placas que producen un patrón de onda estacionaria. ¿Cuál es la frecuencia a las ondas de radio?

14. Un horno de microondas funciona mediante un tubo electrónico llamado magnetrón, que genera ondas electromagnéticas de 2.45 GHz de frecuencia. Las microondas entran en el horno y se reflejan en las paredes. El patrón de ondas estacionarias producido en el horno puede cocinar la comida de forma desigual, con puntos calientes en la comida en los antinodos y partes frías en los nodos, por lo que es frecuente utilizar un plato giratorio para hacer girar la comida y distribuir la energía. Si un horno de microondas hecho para utilizarse con una platina se usa con un plato en una posición fija, los antinodos pueden aparecer en forma de quemadura en la comida, como en tiras de zanahoria o de queso. La distancia medida de separación entre las quemaduras es de 6 cm ± 5%. A partir de estos datos, calcule la rapidez de las microondas.

Sección 34.4 Energía transportada por ondas electromagnéticas

15. ¿Cuánta energía electromagnética por metro cúbico contiene la luz solar, si la intensidad de ésta en la superficie de la Tierra en un día despejado es de 1000 W/m^2?

16. Una estación de radio AM difunde isotrópicamente (de manera uniforme en todas direcciones) con una potencia promedio de 4.00 kW. Un dipolo receptor de 65.0 cm de largo está a 4.00 millas del transmisor. Calcule la amplitud de la fem inducida por esta señal de un extremo a otro de la antena receptora.

17. ¿Cuál es la magnitud promedio del vector de Poynting a 5.00 millas de un transmisor de radio que difunde de manera uniforme en todas las direcciones con una potencia promedio de 250 kW?

18. ● La potencia de la luz solar que llega a cada metro cuadrado de la superficie de la Tierra en un día claro en los trópicos es cercana a 1000 W. En un día de invierno en Manitoba, la concentración de potencia de la luz solar puede ser de 100 W/m^2. Muchas actividades humanas se describen mediante una potencia por huella de área en el orden de 10^2 W/m^2 o menos. a) Considere, por ejemplo, una familia de cuatro que paga $80 a la compañía eléctrica cada 30 días por 600 kWh de energía transportada por las líneas de transmisión hasta su casa, que tiene dimensiones de planta de 13.0 m por 9.50 m. Calcule la potencia por área medida de este uso de energía. b) Considere un automóvil de 2.10 m de ancho y 4.90 m de largo que viaja a 55.0 mi/h usando gasolina que tiene 44.0 MJ/kg de "calor de combustión", con economía de gasolina de 25.0 mi/gal. Un galón de gasolina tiene una masa de 2.54 kg. Encuentre la potencia por área medida del uso de energía del automóvil. Puede ser similar a la de un molino de acero en el que las rocas se funden en altos hornos. c) Explique por qué el uso directo de la energía solar no es práctico para un automóvil convencional. ¿Cuáles son algunos usos más prácticos de la energía solar?

19. Una comunidad planea construir una instalación para convertir la radiación solar en energía eléctrica; necesitan 1.00 MW de potencia, y el sistema que se va a instalar tiene una eficiencia de 30% (esto es, 30.0% de la energía solar incidente sobre la superficie es convertida en energía útil para alimentar eléctricamente a la comunidad). ¿Cuál debe ser el área efectiva de una superficie perfectamente absorbente utilizada en una instalación así, suponiendo que la luz solar tiene una intensidad constante de 1000 W/m^2?

20. ● Si la antena de una estación de radio de 10.0 kW emite ondas electromagnéticas esféricas, calcule el valor máximo del campo magnético a 5.00 km de la antena, y compare este valor con el campo magnético superficial de la Tierra.

21. El filamento de una lámpara incandescente tiene una resistencia de 150 Ω y lleva una corriente directa de 1.00 A. El filamento tiene 8.00 cm de largo y 0.900 mm de radio. a) Calcule el vector de Poynting en la superficie del filamento, asociado con el campo eléctrico estático que produce la corriente y el campo magnético estático de la corriente. b) Determine la magnitud de los campos eléctrico estático y magnético en la superficie del filamento.

22. Una de las armas consideradas para un sistema antimisiles de *La guerra de las galaxias* es un láser que puede destruir misiles balísticos. Cuando se utiliza un láser de alto poder en la atmósfera de la Tierra, el campo eléctrico puede ionizar el aire, convirtiéndolo en un plasma conductor que refleja la luz del láser. En aire seco a 0°C y 1 atm, se presenta un rompimiento eléctrico para campos con amplitudes superiores a aproximadamente 3.00 MV/m. a) ¿Qué intensidad del rayo láser producirá un campo de esta magnitud? b) A esta máxima intensidad, ¿qué energía puede suministrarse en un rayo cilíndrico de 5.00 mm de diámetro?

23. En una región del espacio libre el campo eléctrico en un instante determinado de tiempo es $\vec{\mathbf{E}} = (80.0\hat{\mathbf{i}} + 32.0\hat{\mathbf{j}} - 64.0\hat{\mathbf{k}})$ N/C y el campo magnético es $\vec{\mathbf{B}} = (0.200\hat{\mathbf{i}} + 0.080\,0\hat{\mathbf{j}} + 0.290\hat{\mathbf{k}})\ \mu$T. a) Demuestre que los dos campos son perpendiculares entre sí. b) Determine el vector de Poynting para estos campos.

24. Represente la onda electromagnética en un horno de microondas como una onda progresiva plana que se desplaza hacia la izquierda, con una intensidad de 25.0 kW/m^2. Un horno contiene dos recipientes cúbicos de masa pequeña, cada uno lleno de agua. Uno tiene una longitud de arista de 6.00 cm y el otro de 12.0 cm. La energía incide perpendicularmente sobre la cara de cada contenedor. El agua en el contenedor más pequeño absorbe 70.0% de la energía que incide sobre él. El agua del contenedor más grande absorbe 91.0%. Esto es, una fracción de 0.3 de la energía de microondas de entrada pasa a través de un cuerpo de agua con un espesor de 6 cm y la fracción (0.3)(0.3) = 0.09 pasa a través de un espesor de 12 cm. Determine el cambio en la temperatura del agua de cada contenedor durante un intervalo de tiempo de 480 s. Suponga que la cantidad de energía que abandona cada recipiente debido al calor es despreciable.

25. En las fábricas se utiliza láser de alta potencia para cortar tela y metal (figura P34.25). Un láser de ese tipo tiene un diámetro de haz de 1.00 mm y genera un campo eléctrico que tiene una amplitud de 0.700 MV/m en el objetivo. Determine a) la amplitud del campo magnético producido, b) la intensidad del láser y c) la potencia entregada por el láser.

26. En alguna ubicación de la Tierra, el valor rms del campo magnético causado por la radiación solar es de 1.80 μT. A partir de este valor, calcule a) el campo eléctrico rms debido a radiación solar, b) la densidad de energía promedio del componente solar de la radiación electromagnética en esta ubicación y c) la magnitud promedio del vector de Poynting para la radiación del Sol.

Philippe Plailly/Photo Researchers, Inc.

Figura P34.25

27. Considere una estrella brillante en un cielo nocturno. Suponga que su distancia desde la Tierra es de 20.0 años luz y su potencia de salida es de 4.00×10^{28} W, aproximadamente 100 veces la del Sol. a) Encuentre la intensidad de la luz estelar en la Tierra. b) Encuentre la potencia de la luz estelar que la Tierra intercepta.

Sección 34.5 Cantidad de movimiento y presión de radiación

28. Un medio posible para el vuelo espacial es colocar una hoja aluminizada perfectamente reflejante en órbita alrededor de la Tierra y después utilizar la luz solar para empujar esta "vela solar". Suponga que una vela con un área de 6.00×10^5 m^2 y una masa de 6000 kg se coloca en órbita de cara al Sol. a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre la vela? b) ¿Cuál es la aceleración de la misma? c) ¿Cuánto tiempo tarda la vela en llegar a la Luna, a 3.84×10^8 m de distancia? Ignore todos los efectos gravitacionales, suponga que la aceleración calculada en el inciso b) permanece constante y a una intensidad solar de 1340 W/m^2.

29. Una onda de radio transmite 25.0 W/m^2 de potencia por unidad de área. Una superficie plana de área A es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Calcule la presión de radiación sobre la superficie, suponiendo que ésta es perfectamente absorbente.

30. ● Una onda electromagnética plana, de 6.00 W/m^2 de intensidad, que se mueve en la dirección x, golpea un pequeño espejo de bolsillo, de 40.0 cm^2 de área, que se mantiene en el plano yz. a) ¿Qué cantidad de movimiento transfiere la onda al espejo cada segundo? b) Encuentre la fuerza que la onda ejerce sobre el espejo. c) Explique la correspondencia entre las respuestas a los incisos a) y b).

31. Un láser neón-helio de 15.0 mW (λ = 632.8 nm) emite un haz de sección transversal circular con un diámetro de 2.00 mm. a) Determine el campo eléctrico máximo en el haz. b) ¿Cuál es la energía total contenida en una longitud de 1.00 m del haz? c) Determine la cantidad de movimiento que tiene un tramo de 1.00 m de longitud del haz.

32. ● La intensidad de la luz solar a la distancia de la Tierra desde el Sol es de 1370 W/m^2. a) Suponga que la Tierra absorbe toda la luz solar incidente sobre ella. Encuentre la fuerza total que el Sol ejerce sobre la Tierra debido a presión de radiación. b) Explique cómo se compara esta fuerza con la atracción gravitacional del Sol.

33. ● Suponga que la intensidad de la radiación solar incidente sobre la atmósfera superior de la Tierra es de 1370 W/m^2 y use los datos de la tabla 13.2 que sean necesarios. Determine a) la intensidad de la radiación solar incidente sobre Marte, b) la potencia total incidente sobre Marte y c) la fuerza de radiación que actúa sobre dicho planeta si absorbe casi toda la luz. d) Establezca cómo se compara esta fuerza con la atracción gravitacional ejercida por el Sol sobre Marte. e) Compare la relación de la fuerza gravitacional con la fuerza de presión luminosa ejercida sobre la Tierra, encontrada en el problema 32, y la relación de estas fuerzas ejercida sobre Marte, encontrada en el inciso d).

34. Un disco circular uniforme de 24.0 g de masa y radio de 40.0 cm cuelga verticalmente de un gozne horizontal, libre de fricción y fijo en un punto de su circunferencia. Un haz horizontal de radiación electromagnética con una intensidad de 10.0 MW/m^2 incide sobre el disco en una dirección perpendicular a su superficie. El disco es perfectamente absorbente, y la presión de radiación resultante hace que el disco gire. Determine el ángulo de giro del disco después de haber alcanzado su nueva posición de equilibrio. Suponga que la radiación *siempre* es perpendicular a la superficie del disco.

Sección 34.6 Producción de ondas electromagnéticas por una antena

35. La figura 34.9 muestra una antena Hertz (también conocida como una antena de media onda, ya que su longitud es $\lambda/2$). La antena está colocada lo suficientemente lejos del suelo para que las reflexiones no afecten de manera significativa su patrón de radiación. No obstante, la mayoría de las estaciones de radio de AM, utilizan una antena de Marconi, que está constituida por la mitad superior de una antena de Hertz. El extremo inferior de esta antena (de un cuarto de onda) está conectada a tierra, y la tierra misma funciona como la mitad faltante de la antena. ¿Cuáles son las alturas de las antenas de Marconi para las estaciones de radio que difunden a a) 560 kHz y b) 1600 kHz? En los Estados Unidos, estas estaciones están en 560 y 1600 en el cuadrante de AM.

36. Dos transceptores o transmisores receptores portátiles con antenas de dipolo están separados por una gran distancia fija. Si la antena transmisora es vertical, ¿qué fracción de la energía máxima recibida aparecerá en la antena receptora cuando esté inclinada de la vertical a) 15.0°, b) 45.0°, o c) 90.0°?

37. Dos antenas de radio transmisoras están separadas media longitud de onda de difusión y son operadas en fase entre sí. ¿En qué direcciones se emiten a) la señal más intensa y b) la más débil?

38. **Problema de repaso.** Las cargas en aceleración emiten ondas electromagnéticas. Calcule la longitud de onda de la radiación producida por un protón que se mueve en un círculo de radio R perpendicular a un campo magnético de magnitud B.

39. Una hoja o lámina plana muy grande conduce una corriente eléctrica uniformemente distribuida con un ancho unitario de corriente J_s. El problema 33 en el capítulo 30 demostró que la corriente genera un campo magnético en ambos lados de la hoja, paralelo a la misma y perpendicular a la corriente, con una magnitud $B = \frac{1}{2}\mu_0 J_s$. Si la corriente está en la dirección y y oscila con el transcurso del tiempo en función de

$$J_{\text{máx}}(\cos \omega t)\,\hat{\mathbf{j}} = J_{\text{máx}}[\cos(-\omega t)]\,\hat{\mathbf{j}}$$

la hoja emite una onda electromagnética, como se muestra en la figura P34.39. El campo magnético de la onda queda expresado por la función de onda $\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}\mu_0 J_{\text{máx}}[\cos(kx - \omega t)]\hat{\mathbf{k}}$. a) Determine la función de onda para el campo eléctrico de la onda. b) Determine el vector de Poynting como una

función de x y de t. c) Determine la intensidad de la onda. d) **¿Qué pasaría si?** Si la hoja emite radiación en ambas direcciones (normales al plano de la hoja) con una intensidad de 570 W/m^2, ¿cuál es el valor máximo de la densidad de corriente sinusoidal requerida?

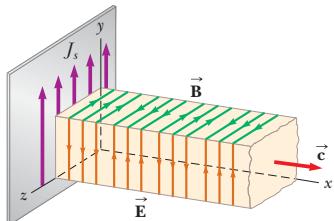



Figura P34.39

Sección 34.7 El espectro de las ondas electromagnéticas

40. Clasifique las ondas con frecuencias de 2 Hz, 2 kHz, 2 MHz, 2 GHz, 2 THz, 2 PHz, 2 EHz, 2 ZHz y 2 YHz sobre el espectro electromagnético. Clasifique las ondas con longitudes de onda de 2 km, 2 m, 2 mm, 2 μm, 2 nm, 2 pm, 2 fm y 2 am.

41. ¿Cuáles son las longitudes de las ondas electromagnéticas en el espacio libre que tienen frecuencias de a) 5.00×10^{19} Hz y b) 4.00×10^{9} Hz?

42. Calcule una estimación del orden de magnitud para la frecuencia de una onda electromagnética con una longitud de onda igual a a) su estatura, o b) el espesor de esta hoja de papel. ¿Cómo se clasifica cada una de las ondas sobre el espectro electromagnético?

43. Doce canales de televisión VHF (canales 2 al 13) se encuentran en el intervalo de frecuencias entre 54.0 MHz y 216 MHz. A cada canal se le asigna un ancho de 6.0 MHz, y los dos intervalos 72.0-76.0 MHz y 88.0-174 MHz se reservan para propósitos no televisivos. (El canal 2, por ejemplo, se encuentra entre 54.0 y 60.0 MHz.) Calcule el intervalo de longitud de onda de transmisión para a) el canal 4, b) el canal 6 y c) el canal 8.

44. ● *¡Esto acaba de llegar!* El anuncio de una noticia importante se transmite por ondas de radio a un auditorio de personas sentadas junto a sus aparatos de radio a 100 km de la estación, y por ondas sonoras a las personas que están sentadas en la sala de noticias, a 3.00 m del locutor. ¿Quién recibe la noticia primero? Explique. Suponga que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

45. ● Desde hace tiempo la marina de Estados Unidos ha propuesto el desarrollo de sistemas de comunicación de extrema baja frecuencia (ELF, *extremely low frequency*). Este tipo de ondas penetra en los océanos para llegar a submarinos a profundidad. Calcule la longitud de una antena de un cuarto de onda para un transmisor que genera ondas ELF de frecuencia de 75.0 Hz. ¿Qué tan práctico es esto?

Problemas adicionales

46. Escriba expresiones para los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana sinusoidal que tiene una frecuencia de 3.00 GHz y que viaja en la dirección x positiva. La amplitud del campo eléctrico es 300 V/m.

47. Suponga que la intensidad de la radiación solar incidente sobre la parte superior de las nubes de la Tierra es de 1340 W/m^2. a) Calcule la energía total radiada por el Sol, considere la distancia promedio entre la Tierra y el Sol como 1.496×10^{11} m. b) Determine los valores máximos de los campos eléctricos y magnéticos de la luz solar en la ubicación de la Tierra.

48. La intensidad de la radiación solar en la parte superior de la atmósfera terrestre es de 1340 W/m^2. Suponga que 60% de la energía solar incidente llega a la superficie de la Tierra, y que las personas absorben 50% de la energía incidente, haga una estimación del orden de magnitud de la cantidad de energía solar absorbida si toma un baño de sol durante 60 minutos.

49. ● Es posible que tenga que repasar las secciones 16.5 y 17.3 acerca del transporte de energía por ondas en cuerdas y sonido. La figura 34.4b es una representación gráfica de una onda electromagnética que se mueve en la dirección x. Una representación matemática está dada por las dos ecuaciones $E = E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$ y $B = B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$, donde $E_{\text{máx}}$ es la amplitud del campo eléctrico y $B_{\text{máx}}$ es la amplitud del campo magnético. a) Bosqueje una gráfica del campo eléctrico en esta onda en el instante $t = 0$, y sea su papel plano la representación del plano xy. b) Calcule la densidad de energía u_E en el campo eléctrico como función de x en el instante $t = 0$. Calcule c) la densidad de energía en el campo magnético u_B y d) la densidad de energía total u como función de x. Agregue una curva a su gráfica que represente $u = u_E + u_B$. La energía en una caja rectangular de longitud dx a lo largo de la dirección x y área A paralela al plano yz es $uA\,dx$. La energía en una "caja de zapatos" de longitud λ y área frontal A es $E_\lambda = \int_0^\lambda uA\,dx$. (El símbolo E_λ para la energía en una longitud de onda imita la notación de las secciones 16.5 y 17.3.) e) Realice la integración para calcular la cantidad de esta energía en términos de A, λ, $E_{\text{máx}}$ y constantes universales. Se puede considerar al transporte de energía por toda la onda como una serie de estas cajas de zapatos que pasan como si se llevaran sobre una banda transportadora. Cada ciclo pasa en un intervalo de tiempo definido como el periodo $T = 1/f$ de la onda. La potencia que la onda porta a través del área A es entonces $\mathcal{P} = T_{\text{ER}}/\Delta t = E_\lambda/T$. La intensidad de la onda es $\mathcal{P}/A = E_\lambda/AT$. f) Calcule esta intensidad en términos de $E_{\text{máx}}$ y constantes universales. Explique cómo se compara su resultado con el dado en la ecuación 34.24.

50. Considere una partícula esférica pequeña, de radio r, localizada en el espacio, a una distancia R del Sol. a) Demuestre que la relación $F_{\text{rad}}/F_{\text{grav}}$ es proporcional a $1/r$, donde F_{rad} es la fuerza ejercida por la radiación solar y F_{grav} la fuerza ejercida por la atracción gravitacional. b) El resultado del inciso a) significa que, para un valor lo suficientemente pequeño de r, la fuerza ejercida sobre la partícula debida a la radiación solar excede la fuerza gravitacional. Calcule el valor de r con el cual la partícula se encuentra en equilibrio entre las dos fuerzas. Suponga que la partícula tiene una superficie perfectamente absorbente y una densidad de masa de 1.50 g/cm^3, y que la partícula se encuentra a 3.75×10^{11} m del Sol, y utilice 214 W/m^2 como el valor de la intensidad solar en dicho punto.

51. Una antena parabólica de 20.0 m de diámetro recibe (en incidencia perpendicular o normal) una señal de radio de una fuente distante, como se muestra en la figura P34.51. La señal de radio es una onda sinusoidal continua con una amplitud de $E_{\text{máx}} = 0.200\ \mu$V/m. Suponga que la antena absorbe toda la radiación que incide sobre el disco. a) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético de esta onda? b) ¿Cuál es la intensidad de la radiación recibida por esta antena? c) ¿Cuál es la potencia recibida por la antena? d) ¿Cuál es la fuerza ejercida por las ondas de radio sobre la antena?

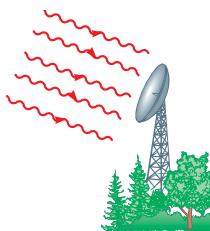



Figura P34.51

52. ● a) Una partícula con carga inmóvil en el origen produce un flujo eléctrico de $487 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Encuentre el campo eléctrico que se crea en el espacio vacío alrededor suyo como una función de la distancia radial r alejándose de la partícula. b) Una pequeña fuente en el origen emite una onda electromagnética con una sola frecuencia en el vacío, igual en todas direcciones, con potencia de 25.0 W. Encuentre la amplitud del campo eléctrico como función de la distancia radial alejándose de la fuente. Demuestre explícitamente cómo funcionan las unidades en su expresión. c) ¿A qué distancia la amplitud del campo eléctrico en la onda es igual a 3.00 MV/m, lo que representa la resistencia dieléctrica del aire? d) Conforme la distancia se duplica, ¿qué ocurre con la amplitud del campo? Establezca una comparación entre este comportamiento y del campo en el inciso a).

53. En 1965, Arno Penzias y Robert Wilson descubrieron la radición de microondas cósmicas, residuo de la expansión del Big Bang del Universo. Suponga que la densidad de energía de esta radiación de fondo es de $4.00 \times 10^{-14} \text{ J/m}^3$. Determine la amplitud del campo eléctrico correspondiente.

54. ● Un teléfono celular de mano funciona en la banda de 860 a 900 MHz y tiene una salida de 0.600 W con una antena de 10.0 cm de largo (figura P34.54). a) Encuentre la magnitud promedio del vector de Poynting a 4.00 cm de la antena, que es la ubicación representativa de la cabeza de una persona. Suponga que la antena emite energía con una frente de onda cilíndrica. (La radiación real de las antenas sigue un patrón más complicado.) b) La norma de exposición máxima C-95.1-1991 de la ANSI/IEEE es de 0.57 mW/cm^2 para personas que viven cerca de estaciones base para teléfonos celulares y que estarían continuamente expuestos a la radiación. Compare la respuesta del inciso a) con esta norma.

Figura P34.54

55. Una microonda polarizada linealmente de 1.50 cm de longitud de onda está dirigida a lo largo del eje positivo de las x. El vector del campo eléctrico tiene un valor máximo de 175 V/m y vibra en el plano xy. a) Suponga que el componente del campo magnético de la onda puede expresarse de la forma $B = B_{\text{máx}} \text{ sen } (kx - \omega t)$ y proporciona valores para $B_{\text{máx}}$, k y ω. Además, determine en cuál de los planos vibra el vector del campo magnético. b) Calcule el valor promedio del vector de Poynting para esta onda. c) ¿Qué presión de radiación podría ejercer esta onda si estuviera dirigida en forma perpendicular, sobre una hoja perfectamente reflejante? d) ¿Cuál sería la aceleración impartida a una hoja de 500 g (perfectamente reflejante y con una incidencia normal), de dimensiones de $1.00 \text{ m} \times 0.750 \text{ m}$?

56. ● La Tierra refleja aproximadamente 38.0% de la luz solar incidente debido a las nubes y la corteza terrestre. a) Dado que la intensidad de la radiación solar es de 1340 W/m^2, ¿cuál es la presión de radiación sobre la Tierra, expresada en pascales, en el punto donde el Sol está directamente en el cenit? b) Compare este resultado con la presión atmosférica normal o perpendicular a la superficie de la Tierra, que es de 101 kPa.

57. Un astronauta, varado en el espacio a 10.0 m de su nave e inmóvil respecto a ésta, tiene una masa (incluyendo el equipo) de 110 kg. Puesto que cuenta con una fuente de luz de 100 W que forma un haz dirigido, el astronauta piensa utilizarlo como un propulsor de fotones para impulsarse continuamente hacia la nave. a) Calcule cuánto tiempo le tomará alcanzar la nave mediante este método. b) **¿Qué pasaría si?** Alternativamente, decide lanzar la fuente de luz en dirección opuesta a la nave. Si la masa de la fuente de luz es de 3.00 kg y, después de haber sido lanzada, se desplaza a 12.0 m/s respecto al astronauta, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar la nave?

58. **Problema de repaso.** Un espejo de 1.00 m de diámetro enfoca los rayos solares sobre una placa absorbente de 2.00 cm de radio, la cual sostiene una lata que contiene 1.00 L de agua a 20.0°C. a) Si la intensidad solar es de 1.00 kW/m^2, ¿cuál es la intensidad sobre la placa absorbente? b) ¿Cuáles son las magnitudes máximas de los campos $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$? c) Si se absorbe 40.0% de la energía, ¿cuánto tardará el agua en alcanzar el punto de ebullición?

59. Se ha utilizado láser para suspender esferitas de vidrio en el campo gravitacional de la Tierra. a) Una esferita negra tiene una masa de $1.00 \, \mu\text{g}$ y una densidad de 0.200 g/cm^3. Determine la intensidad de radiación necesaria para sostener esta esferita. b) Si la esferita tiene un radio de 0.200 cm, ¿cuál es la potencia que el láser necesita?

60. Se ha utilizado láser para suspender cuentas de vidrio esféricas en el campo gravitacional de la Tierra. a) Una cuenta negra tiene una masa m y una densidad ρ. Determine la intensidad de radiación necesaria para sostener esta cuenta. b) Si la esferita tiene un radio r, ¿cuál es la potencia que el láser necesita?

61. La energía electromagnética emitida por una carga puntual q en movimiento no relativista con una aceleración a es igual a

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

donde ϵ_0 es la permitividad del espacio libre (también llamado permitividad del vacío) y c es la rapidez de la luz en el vacío. a) Demuestre que el lado derecho de esta ecuación está expresado en watts. b) Un electrón se coloca en un campo eléctrico constante de magnitud 100 N/C. Determine la aceleración del electrón y la energía electromagnética emitida por el mismo. c) **¿Qué pasaría si?** Se coloca un protón en un ciclotrón de 0.500 m de diámetro con un campo magnético de 0.350 T de magnitud, ¿cuál es la energía electromagnética emitida por este protón?

62. Una onda electromagnética plana varía de manera sinusoidal en 90.0 MHz conforme se desplaza en la dirección positiva de las x. El valor pico del campo eléctrico es de 2.00 mV/m, y está dirigido a lo largo de la dirección de $\pm\, y$. a) Determine la longitud de onda, el periodo y el valor máximo del campo magnético. b) Escriba expresiones en unidades del SI para las variaciones en el espacio y en el tiempo tanto del campo eléctrico como del magnético. Incluya ambos valores numéricos y subíndices para indicar coordenadas de dirección. c) Determine la potencia promedio por unidad de área que transporta esta onda a través del espacio. d) Determine la densidad de energía promedio de la radiación (en Joules por metro cúbico) e) ¿Cuál sería la presión de radiación que esta onda ejercería sobre una superficie perfectamente reflejante, con incidencia normal?

63. **Problema de repaso.** En ausencia de cable de entrada o un plato satelital, un televisor puede usar una antena receptora de dipolo para canales VHF y una antena de espira para canales UHF. En la figura P34.15, las "orejas de conejo" forman la antena VHF y la espira de alambre más pequeño es la antena UHF. La antena UHF produce una fem a partir del flujo mag-

nético cambiante a través de la espira. La estación de televisión transmite una señal con una frecuencia f y la señal tiene una amplitud de campo eléctrico $E_{máx}$ y una amplitud de campo magnético $B_{máx}$ en la posición de la antena receptora. a) Con la ley de Faraday, deducir una expresión para la amplitud de la fem que aparece en una antena de espira circular de una sola vuelta, con un radio r, que es pequeña comparada con la longitud de onda de la onda. b) Si el campo eléctrico en la señal apunta verticalmente, ¿qué orientación de la espira da la mejor recepción?

Nota: La sección 8.1 introdujo la radiación electromagnética como una forma de transferencia de energía, que se explicó con detalle en la sección 20.7. Los tres problemas siguientes utilizan ideas presentadas tanto en dicha sección como en este capítulo.

64. ● **Problema de repaso.** Eliza es una gata negra con cuatro gatitos negros: Penélope, Rosalita, Sasha y Timothy. La masa de Eliza es de 5.50 kg y cada gatito tiene una masa de 0.800 kg. Una noche fresca los cinco se acurrucan juntos sobre un tapete, formando con sus cuerpos un hemisferio. a) Si el grupo de gatos ronroneando tiene una densidad uniforme de 990 kg/m^3, encuentre el radio del hemisferio. b) Determine el área de su superficie curva. c) Suponga que la temperatura superficial es uniforme y de 31.0°C y que la emisividad es de 0.970. Encuentre la intensidad de la radiación emitida por los gatos en su superficie curva y d) la energía radiada por esta superficie. e) Es posible pensar que la onda electromagnética emitida tiene una frecuencia predominante única (de 31.2 THz). Determine la amplitud del campo eléctrico justo en el exterior del acogedor montoncito y f) la amplitud del campo magnético. g) ¿Están cargados los gatos dormidos? ¿Conducen corriente? ¿Son magnéticos? ¿Son una fuente de radiación? ¿Resplandecen en la oscuridad? Explique sus respuestas, para que no exista contradicción alguna. h) **¿Qué pasaría si?** La noche siguiente los gatitos duermen separados, enroscándose en hemisferios individuales, como su madre. Determine la energía total radiada por la familia. (Por simplicidad, ignore por completo la absorción de radiación del entorno por parte de los gatos.)

65. **Problema de repaso.** a) Una pareja de la tercera edad tiene un calentador de agua solar instalado en el techo de su domicilio (figura P34.65). El calentador está constituido por una caja cerrada plana con un aislamiento térmico extraordinariamente bueno. Su interior está pintado de negro y su parte delantera está hecha de vidrio aislante. Suponga que su emisividad para la luz visible es de 0.900 y que su emisividad para la luz infrarroja es de 0.700. Suponga que la luz del Sol del mediodía incide perpendicularmente sobre el vidrio con una intensidad de 1000 W/m^2 y que en la caja no entra ni sale agua. Determine la temperatura en estado estable en el interior de la caja. b) **¿Qué pasaría si?** La pareja construye una caja idéntica sin tuberías de agua, que yace plana sobre la tierra frente a la casa, y la utilizan como un semillero, para sembrar a principios de la primavera. Si el mismo Sol de mediodía tiene un ángulo de elevación de 50.0°, determine la temperatura de estado estable en el interior de esta caja cuando su rejilla de ventilación está herméticamente cerrada.

© Bill Banaszewski/Visuals Unlimited.

Figura P34.65

66. ● **Problema de repaso.** El estudio de la Creación sugiere un Creador con una preocupación fuera de lo común para los escarabajos y para las pequeñas estrellas rojas. Una pequeña estrella roja emite ondas electromagnéticas con una potencia de 6.00×10^{23} W, lo que representa sólo 0.159% de la luminosidad del Sol. Considere un planeta esférico en una órbita circular alrededor de dicha estrella. Suponga que la emisividad del planeta es igual para la luz infrarroja y para la visible. Suponga que el planeta tiene una temperatura superficial uniforme. Identifique el área proyectada sobre la cual el planeta absorbe luz de la estrella, así como la superficie de radiación del mismo. Si los escarabajos prosperan a una temperatura de 310 K, ¿cuál debe ser el radio de la órbita del planeta?

Respuestas a las preguntas rápidas

34.1 **i**), b) Puede no haber conducción de corriente porque no hay un conductor entre las placas. Hay un campo eléctrico variable en el tiempo debido a la carga decreciente sobre las placas, y el flujo eléctrico variable en el tiempo representa una corriente de desplazamiento. **ii**), c). Hay un campo eléctrico variable en el tiempo debido a la carga decreciente sobre las placas. Este campo eléctrico variable en el tiempo produce un campo magnético.

34.2 c) La figura 34.4b muestra que los vectores $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$ alcanzan sus valores máximo y positivo de manera simultánea.

34.3 c) El campo $\vec{\mathbf{B}}$ debe estar en la dirección $+z$, a fin de que el vector de Poynting quede dirigido a lo largo de la dirección $-y$.

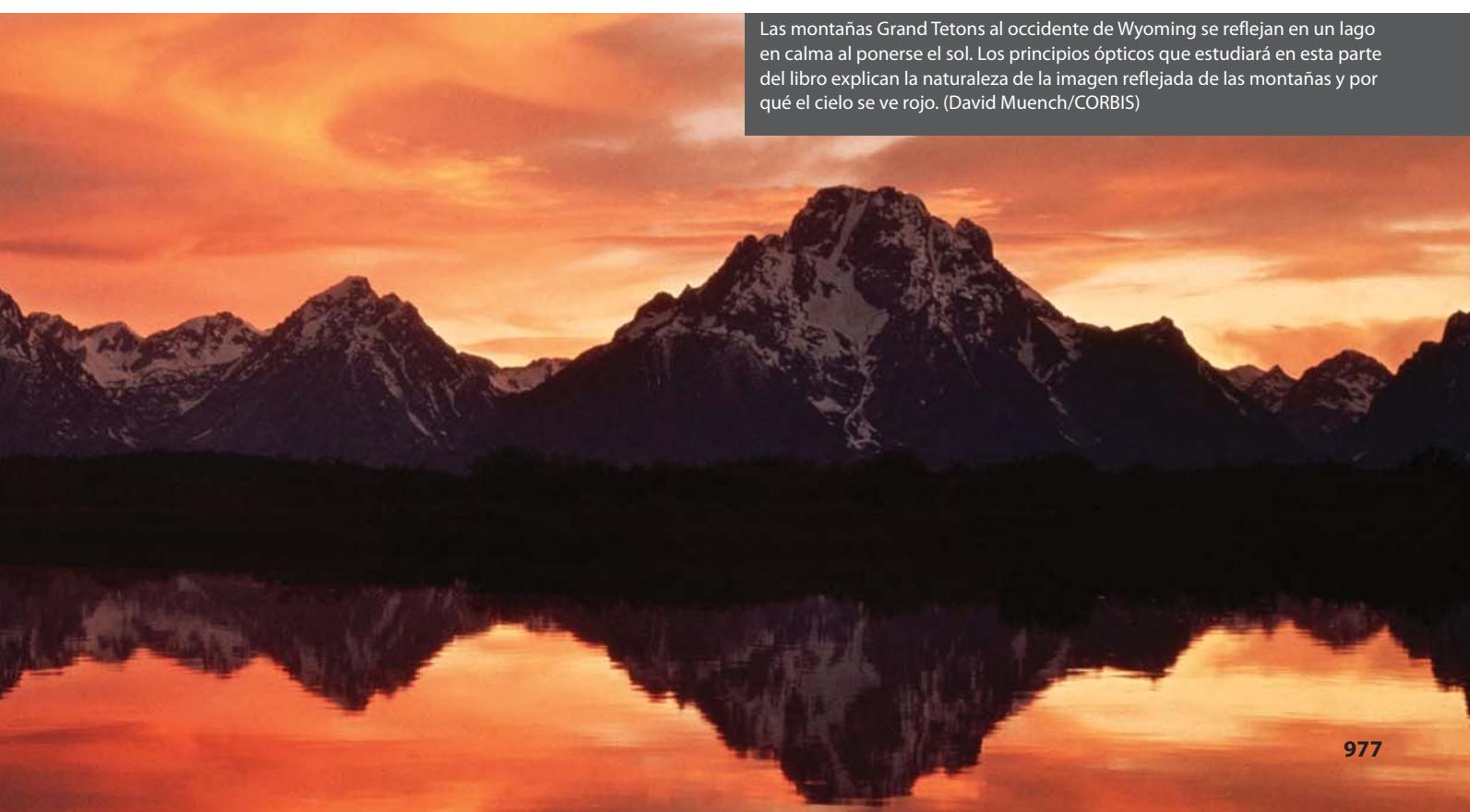
34.4 b) Para maximizar la presión sobre las velas, éstas deben ser perfectamente reflejantes, de modo que la presión quede establecida por la ecuación 34.30.

34.5 a) La mejor orientación es la paralela a la antena transmisora, ya que se trata de la orientación del campo eléctrico. El campo eléctrico mueve electrones de la antena receptora, induciendo así una corriente que se detecta y se amplifica.

34.6 c) Tanto la ecuación 34.20 como la figura 34.11 son utilizadas para determinar el orden de magnitud de las longitudes de onda.

34.7 a) Tanto la ecuación 34.20 como la figura 34.11 sirven para determinar el orden de magnitud de la longitud de onda.

PARTE 5

Luz y óptica

La luz es esencial para casi todo en la vida en la Tierra. Por ejemplo, las plantas convierten la energía transferida por la luz solar en energía química. Además, la luz es el principal medio por el cual es posible transmitir y recibir información hacia y desde objetos situados en el entorno inmediatio y en todo el Universo. La luz es una forma de radiación electromagnética y representa transferencia de energía desde la fuente al observador.

Muchos fenómenos de la vida diaria dependen de las propiedades de la luz. Cuando usted observa una televisión a color o ve fotografías en el monitor de una computadora, usted ve millones de colores formados a partir de combinaciones de sólo tres colores que están físicamente en la pantalla: rojo, azul y verde. El color azul del cielo diurno es resultado del fenómeno óptico de la *dispersión* de la luz por las moléculas del aire, como lo son los colores rojo y anaranjado de los amaneceres y atardeceres. Usted ve su imagen en el espejo de su baño en la mañana o las imágenes de los otros vehículos en el espejo retrovisor de su automóvil cuando conduce. Estas imágenes resultan de la *reflexión* de la luz. Si usa anteojos o lentes de contacto, depende de la *refracción* de la luz para una visión clara. Los colores del arco iris resultan de la *dispersión* de la luz conforme pasa a través de las gotas de lluvia que flotan en el cielo después de una tormenta. Si alguna vez ha visto los coloridos círculos de la gloria que rodean la sombra de su avión sobre las nubes conforme vuela sobre ellas, usted ve un efecto que resulta de la *interferencia* de la luz. Los fenómenos aquí mencionados han sido estudiados y comprendidos por los científicos.

En la introducción al capítulo 35 se analiza la naturaleza dual de la luz. En algunos casos, es mejor modelar la luz como una corriente de partículas; en otros, un modelo ondulatorio funciona mejor. Los capítulos del 35 al 38 se concentran en aquellos aspectos de la luz que son mejor comprendidos a través del modelo ondulatorio de la luz. En la parte 6 se investigará la naturaleza de partícula de la luz.

Las montañas Grand Tetons al occidente de Wyoming se reflejan en un lago en calma al ponerse el sol. Los principios ópticos que estudiará en esta parte del libro explican la naturaleza de la imagen reflejada de las montañas y por qué el cielo se ve rojo. (David Muench/CORBIS)

Esta fotografía muestra un arco iris secundario con los colores invertidos. La aparición del arco iris depende de tres fenómenos ópticos que se estudian en este capítulo: reflexión, refracción y dispersión. (©Jim Parkin/Shutterstock)

35 Naturaleza de la luz y leyes de óptica geométrica

© koopmanrob on Flickr

CHRISTIAN HUYGENS
Físico y astrónomo holandés (1629-1695)
Huygens es mejor conocido por sus aportaciones a los campos de la óptica y la dinámica. Para Huygens, la luz consistía en un tipo de movimiento vibratorio que se dispersa y produce la sensación de luz cuando incide en los ojos. Con base en esta teoría, dedujo las leyes de la reflexión y la refracción y explicó el fenómeno de doble refracción.

En este primer capítulo sobre óptica, se presentan dos modelos históricos y se estudian métodos anteriores para medir la rapidez de la luz. A continuación estudiará los fenómenos fundamentales de la óptica geométrica: reflexión desde una superficie y refracción cuando cruza la frontera entre dos medios. También estudiará la dispersión de luz cuando se refracta en materiales, lo que resulta en un despliegue visible como el arco iris. Por último, investigará el fenómeno de la reflexión interna total, que es la base para la operación y el desarrollo de tecnología de fibras ópticas.

35.1 Naturaleza de la luz

Antes de iniciar el siglo XIX, la luz era considerada un flujo de partículas que eran emitidas por un objeto observado o emanaban de los ojos del observador. Newton, principal arquitecto del modelo de las partículas de la luz, afirmaba que éstas eran emitidas por una fuente luminosa y que estimulaban el sentido de la vista al entrar en los ojos del observador. Con esta idea pudo explicar la reflexión y la refracción.

La mayoría de los científicos aceptó esta teoría. De cualquier modo, durante su vida, Newton se propuso otra idea que sostenía que la luz podría ser una clase de movimiento ondulatorio. En 1678, el físico y astrónomo holandés Christian Huygens demostró que una teoría de ondas de luz podría también explicar la reflexión y la refracción.

En 1801, Thomas Young (1773-1829) dio la primera demostración clara de la naturaleza ondulatoria de la luz. Demostró que, bajo condiciones apropiadas, los rayos de luz se interfieren unos con otros. Tal comportamiento no podía ser explicado en aquel tiempo por una teoría de partículas porque no había forma imaginable en que dos o más partículas pudieran unirse y cancelarse entre sí. Desarrollos adicionales durante el siglo XIX condujeron a la aceptación general del modelo de onda de la luz, el resultado más importante de la obra de Maxwell, quien en 1873 afirmó que la luz era una forma de onda electromagnética de alta frecuencia. Como se explico en el capítulo 34, Hertz proporcionó información experimental de la teoría de Maxwell en 1887 al producir y detectar ondas electromagnéticas.

Aun cuando el modelo ondulatorio y la teoría clásica de electricidad y magnetismo podían explicar la mayoría de las propiedades de la luz, no pueden explicar ciertos experimentos consecutivos. El más notable de éstos es el efecto fotoeléctrico, también descubierto por Hertz: cuando incide luz sobre una superficie metálica, a veces se expulsan electrones de la superficie. Como ejemplo de las dificultades que surgieron, algunos experimentos demostraron que la energía cinética de un electrón expulsado es independiente de la intensidad de la luz. Este hallazgo contradijo el modelo de onda, que sostenía que un haz luminoso más intenso adiciona más energía al electrón. Einstein propuso una explicación del efecto fotoeléctrico en 1905 aplicando un modelo de acuerdo con el concepto de cuantización desarrollado por Max Planck (1858-1947) en 1900. El modelo de cuantización supone que la energía de una onda luminosa está presente en partículas llamadas *fotones;* por tanto, se dice que la energía está cuantizada. Según la teoría de Einstein, la energía de un fotón es proporcional a la frecuencia de la onda electromagnética:

$$E = hf \tag{35.1}$$

◀ Energía de un fotón

donde la constante de proporcionalidad $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J · s es la *constante de Planck*. Esta teoría se estudia en el capítulo 40.

En vista de estos desarrollos, debe considerar que la luz tiene doble naturaleza: **en algunos casos exhibe características de una onda y en otras de una partícula**. La luz es luz, esto es seguro. De cualquier modo, la pregunta "¿se trata de una onda o de una partícula?" es inapropiada. A veces la luz actúa como onda y otras veces como partícula. En los siguientes capítulos se investiga la naturaleza ondulatoria de la luz.

35.2 Mediciones de la rapidez de la luz

La luz se desplaza con una rapidez tan alta (a tres dígitos $c = 3.00 \times 10^8$ m/s) que los primeros intentos por medirla fracasaron. Galileo intentó medirla colocando dos observadores en torres separadas aproximadamente 10 km. Cada observador llevaba una linterna de persianas. Un observador la abriría primero y luego lo haría el otro al momento de ver la luz. Galileo explicó que, si conocía el tiempo de tránsito de los rayos de luz de una linterna a la otra y la distancia entre las dos linternas, podría obtener la rapidez. Sus resultados no fueron concluyentes. En la actualidad (como concluyó Galileo) se sabe que es imposible medir la rapidez de la luz de esta manera porque el tiempo de tránsito es mucho menor que el tiempo de reacción de los observadores.

Método de Roemer

En 1675, el astrónomo danés Ole Roemer (1644-1710) hizo la primera estimación exitosa de la rapidez de la luz. En la técnica de Roemer intervinieron observaciones astronómicas de una de las lunas de Júpiter, Io, que tiene un periodo de revolución alrededor del planeta de aproximadamente 42.5 h. El periodo de revolución de Júpiter alrededor del Sol es de aproximadamente 12 años; por lo tanto, cuando la tierra se mueve 90° alrededor del Sol, Júpiter gira sólo $(\frac{1}{12})90° = 7.5°$ (figura 35.1).

Figura 35.1 Método de Roemer para medir la rapidez de la luz. En el intervalo de tiempo durante el cual la Tierra se desplaza 90° alrededor del Sol (tres meses), Júpiter se desplaza sólo 7.5° (dibujo sin escala).

Un observador que utilice el movimiento orbital de Io como reloj esperaría que la órbita tuviera un periodo constante. No obstante, Roemer, después de reunir datos durante

más de un año, observó una variación sistemática en el periodo de Io. Encontró que los periodos eran más largos que el promedio cuando la Tierra se alejaba de Júpiter y más cortos que el promedio cuando se aproximaba. Roemer atribuyó esta variación al hecho de que la distancia entre la Tierra y Júpiter cambiaba de una observación a otra.

Con el uso de los datos de Roemer, Huygens estimó que el límite inferior de la rapidez de la luz era aproximadamente 2.3×10^8 m/s. Este experimento es importante históricamente porque demostró que la luz tiene una rapidez finita y proporcionó una estimación de esta rapidez.

Método de Fizeau

El primer método exitoso para medir la rapidez de la luz por medio de técnicas puramente terrestres fue perfeccionado en 1849 por el físico francés Armand H. L. Fizeau (1819-1896). La figura 35.2 representa un diagrama simplificado del aparato de Fizeau. El procedimiento básico es medir el intervalo de tiempo total durante el cual la luz viaja desde cierto punto hacia a un espejo distante y de regreso. Si d es la distancia entre la fuente de luz (considerada en la posición de la rueda) y el espejo, y si el intervalo de tiempo para un viaje redondo es Δt, la rapidez de la luz es $c = 2d/\Delta t$.

Figura 35.2 Método de Fizeau para medir la rapidez de la luz mediante una rueda dentada giratoria. Se considera que la fuente de luz está en la posición de la rueda; por lo tanto, la distancia d es conocida.

Para medir el tiempo de tránsito, Fizeau utilizó una rueda dentada giratoria, que convierte un haz continuo de luz en una serie de pulsos luminosos. La rotación de esta rueda controla lo que ve un observador en la fuente de luz. Por ejemplo, si el pulso que viaja hacia el espejo y pasa por la abertura en el punto A de la figura 35.2 regresa a la rueda en el instante en que el diente B ha girado a su posición para cubrir la trayectoria de retorno, el pulso no llegaría al observador. Con mayor rapidez de rotación, la abertura en el punto C podría moverse a su posición para permitir que el pulso reflejado llegue al observador. Al conocer la distancia d, el número de dientes de la rueda y la rapidez angular de ésta, Fizeau llegó a un valor de 3.1×10^8 m/s. Mediciones similares hechas por otros investigadores dieron valores más precisos para c, que llevó al valor actualmente aceptado de $2.997\,9 \times 10^8$ m/s.

EJEMPLO 35.1 **Medición de la rapidez de la luz con la rueda de Fizeau**

Suponga que la rueda de Fizeau tiene 360 dientes y da vueltas a 27.5 rev/s cuando un pulso de luz que pasa a través de la abertura A en la figura 35.2 es bloqueado por el diente B a su regreso. Si la distancia al espejo es de 7500 m, ¿cuál es la rapidez de la luz?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un pulso de luz que pasa a través de la abertura A en la figura 35.2 y se refleja desde el espejo. Para cuando el pulso llega de regreso a la rueda, el diente B ha girado a la posición anteriormente ocupada por la abertura A.

Categorizar Modele la rueda como un objeto rígido bajo rapidez angular constante y al pulso de luz como una partícula bajo rapidez constante.

Analizar La rueda tiene 360 dientes, así que debe tener 360 aberturas. Por lo tanto, porque la luz pasa a través de la abertura A pero es bloqueada por el diente inmediatamente adyacente a A, la rueda debe dar vuelta a través de una desplazamiento angular de $\frac{1}{720}$ rev en el intervalo de tiempo durante el cual el pulso de luz hace su viaje redondo.

Use el modelo de objeto rígido bajo rapidez angular constante para encontrar el intervalo de tiempo para el viaje redondo del pulso:

$$\Delta t = \frac{\Delta \theta}{\omega} = \frac{\frac{1}{720}\text{ rev}}{27.5\text{ rev/s}} = 5.05 \times 10^{-5}\text{ s}$$

A partir del modelo de partícula bajo rapidez constante, encuentre la rapidez del pulso de luz:

$$c = \frac{2d}{\Delta t} = \frac{2(7500\text{ m})}{5.05 \times 10^{-5}\text{ s}} = \boxed{2.97 \times 10^8\text{ m/s}}$$

Finalizar Este resultado está muy cerca del valor real de la rapidez de la luz.

35.3 Aproximación de un rayo en óptica geométrica

Figura 35.3 Onda plana que se propaga a la derecha. Observe que los rayos, que siempre apuntan en la dirección de propagación de la onda, son rectas perpendiculares a los frentes de onda.

El campo de la **óptica geométrica** abarca el estudio de la propagación de la luz, a partir del supuesto de que la luz se desplaza en una dirección fija y en línea recta cuando pasa por un medio uniforme, y cambia su dirección en el momento en que se encuentra con la superficie de un medio diferente o si las propiedades ópticas del medio no son uniformes ya sea en espacio o en tiempo. A medida que estudie la óptica geométrica aquí y en el capítulo 36, utilizará la **aproximación de un rayo**. Para comprender esta aproximación, primero observe que los rayos de una onda determinada son líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda, como se ilustra en la figura 35.3 para una onda plana. En la aproximación de un rayo, una onda que se mueve en un medio se desplaza en línea recta en la dirección de sus rayos.

Si la onda se encuentra con una barrera en la que hay una abertura circular cuyo diámetro es mucho mayor que la longitud de onda, como se ve en la figura 35.4a, la onda que emerge de la abertura continúa moviéndose en línea recta (además de algunos pequeños efectos de borde); por tanto, la aproximación de rayo es válida. Si el diámetro de la abertura es del orden de una longitud de onda, como en la figura 35.4b, las ondas se extienden desde la abertura en todas direcciones. Este efecto se llama *difracción* y se estudiará en el capítulo 37. Por último, si la abertura es mucho menor que la longitud de onda, la abertura se aproxima como una fuente puntual de ondas como muestra la figura 35.4c.

Efectos similares se observan cuando las ondas se encuentran con un objeto opaco de dimensión d. En este caso, cuando $\lambda \ll d$, el cuerpo arroja una sombra nítida.

La aproximación de un rayo y la suposición de que $\lambda \ll d$ se usan en este capítulo y en el capítulo 36, que tratan la óptica geométrica. Esta aproximación es muy buena para el estudio de espejos, lentes, prismas e instrumentos ópticos asociados, por ejemplo telescopios, cámaras y anteojos.

35.4 La onda bajo reflexión

El concepto de reflexión de ondas se introdujo en el análisis de las ondas sobre cuerdas en la sección 16.4. Como con las ondas sobre cuerdas, cuando un rayo de luz que se desplaza en un medio encuentra una frontera con otro medio, parte de la luz incidente se refleja: para ondas sobre una cuerda unidimensional, la onda reflejada necesariamente debe restringirse a una dirección a lo largo de la cuerda; para ondas de luz que viajan en el espacio tridimensional, no se aplican tales restricciones y las ondas de luz reflejadas pueden estar

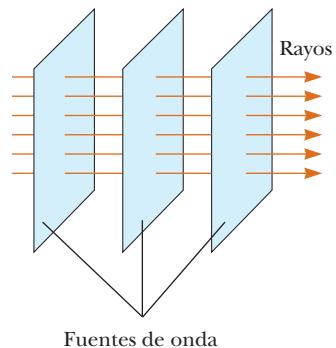
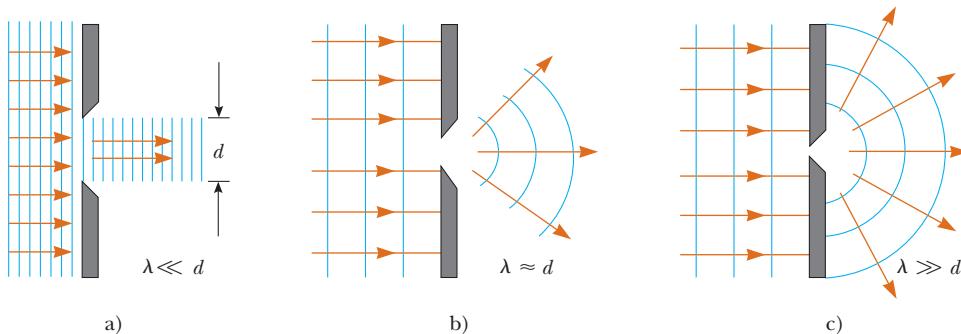



Figura 35.4

Una onda plana con longitud λ incide sobre una barrera en la que hay una abertura de diámetro d. a) Cuando $\lambda \ll d$, los rayos siguen en una trayectoria en línea recta, y la aproximación de rayo continúa siendo válida. b) Cuando $\lambda \approx d$, los rayos se extienden después de pasar por la abertura. c) Cuando $\lambda \gg d$, la abertura se comporta como fuente puntual que emite ondas esféricas.

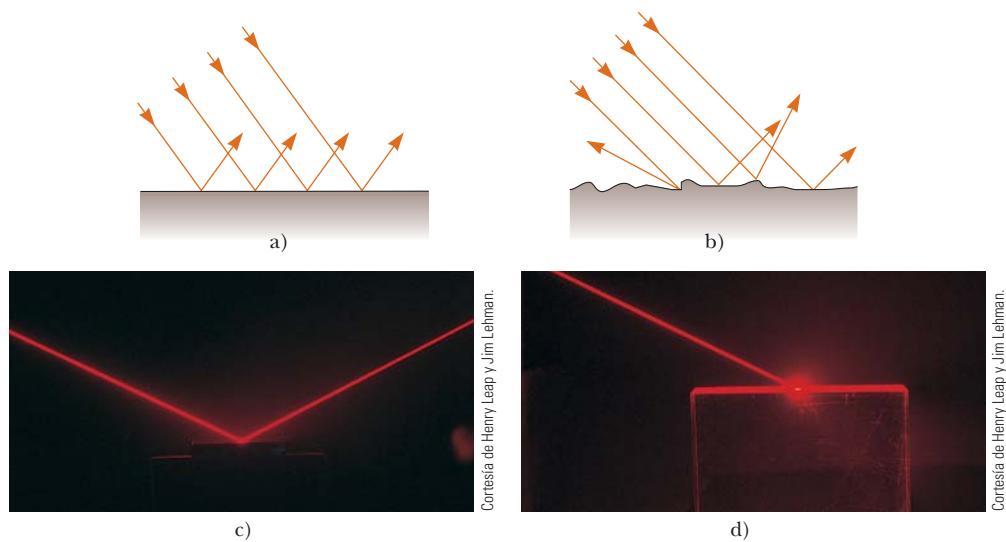



Figura 35.5 Representación esquemática de a) reflexión especular, donde todos los rayos reflejados son paralelos entre sí, y b) reflexión difusa, donde los rayos reflejados viajan en direcciones aleatorias. c) y d) Fotografías de reflexión especular y difusa con luz láser.

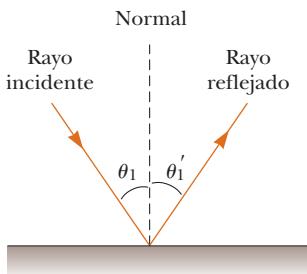



Figura 35.6

Según la onda bajo reflexión, $\theta_1' = \theta_1$. El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal todos están en el mismo plano.

en direcciones distintas de la dirección de las ondas incidentes. La figura 35.5a muestra varios rayos de un haz de luz incidente en una superficie reflectora lisa, semejante a espejo. Los rayos reflejados son paralelos entre sí, como se indica en la figura. La dirección de un rayo reflejado está en el plano perpendicular a la superficie reflectora que contiene al rayo incidente. La reflexión de luz desde esta superficie lisa se denomina **reflexión especular**. Si la superficie reflectora es rugosa, como se ve en la figura 35.5b, la superficie refleja los rayos no como un conjunto paralelo sino en varias direcciones. La reflexión desde cualquier superficie rugosa se conoce como **reflexión difusa**. Una superficie se comporta como superficie lisa mientras las variaciones de superficie son mucho menores que la longitud de onda de la luz incidente.

La diferencia entre estas dos clases de reflexión explica por qué le es más difícil ver cuando circula en auto durante una noche lluviosa. Si el pavimento está mojado, la superficie lisa del agua refleja en forma especular casi toda la luz de los faros del auto y los aleja de éste (quizá hacia los ojos de conductores que circulan en sentido contrario). Cuando el pavimento está seco, su superficie rugosa refleja en forma difusa parte de los rayos de luz de los faros, hacia el conductor, lo cual permite ver con más claridad la carretera. En este libro sólo se analiza la reflexión especular y se usa el término *reflexión*, para dar a entender reflexión especular.

Considere un rayo de luz que viaja en el aire y que incide a un ángulo en una superficie plana y lisa, como se ve en la figura 35.6. Los rayos incidente y reflejado forman ángulos θ_1 y θ_1', respectivamente, donde los ángulos se observan entre la normal y los rayos. (La normal es una línea con trazo perpendicular a la superficie en el punto donde el rayo incidente cae en la superficie.) Experimentos y teoría muestran que **el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia:**

Ley de reflexión ►

$$\theta_1' = \theta_1 \tag{35.2}$$

La correspondencia se denomina **ley de reflexión**. Porque la reflexión de ondas desde una interfaz entre dos medios es un fenómeno común, se identifica un modelo de análisis para esta situación: la **onda bajo reflexión**. La ecuación 35.2 es la representación matemática de este modelo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.1

Notación de subíndices

El subíndice 1 se utiliza para indicar los parámetros para la luz en el medio inicial. Cuando la luz pasa de un medio a otro, se usa el subíndice 2 para los parámetros asociados con la luz en el nuevo medio. En el presente análisis, la luz permanece en el mismo medio, de modo que sólo se usa el subíndice 1.

Pregunta rápida 35.1 En un cine, a veces un espectador ve a un actor que se mira en un espejo y ve la cara de él en el espejo. Durante la filmación de esta escena, ¿qué ve el actor en el espejo? a) Su propia cara, b) la cara de usted, c) la cara del director, d) la cámara de cine, o e) imposible de determinar.

EJEMPLO 35.2 **El rayo de luz doblemente reflejado**

Dos espejos forman un ángulo de 120° entre sí, como se ilustra en la figura 35.7a. Un rayo incide sobre el espejo M_1 con un ángulo de 65° con la normal. Encuentre la dirección del rayo después de que se refleja del espejo M_2.

Figura 35.7 (Ejemplo 35.2) a) Los espejos M_1 y M_2 forman un ángulo de 120° uno con otro. b) Geometría para un ángulo de espejo arbitrario.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 35.7a ayuda a conceptualizar esta situación. El rayo entrante se refleja del primer espejo, y el rayo reflejado se dirige hacia el segundo espejo. Por lo tanto, hay una segunda reflexión desde el segundo espejo.

Categorizar Ya que las interacciones con ambos espejos son simples reflexiones, se aplica el modelo de onda bajo reflexión y algo de geometría.

Analizar A partir de la ley de reflexión, el primer rayo reflejado forma un ángulo de 65° con la normal.

Encuentre el ángulo que forma el primer rayo reflejado con la horizontal:

$$\delta = 90° - 65° = 25°$$

A partir del triángulo formado por el primer rayo reflejado y los dos espejos, encuentre el ángulo que el rayo reflejado forma con M_2:

$$\gamma = 180° - 25° - 120° = 35°$$

Encuentre el ángulo que el primer rayo reflejado forma con la normal a M_2:

$$\theta_{M_2} = 90° - 35° = 55°$$

A partir de la ley de reflexión, encuentre el ángulo que el segundo rayo reflejado forma con la normal a M_2:

$$\theta'_{M_2} = \theta_{M_2} = 55°$$

Finalizar Explore las variaciones en el ángulo entre los espejos como sigue.

¿Qué pasaría si? Los rayos entrante y saliente en la figura 35.7a se extienden más allá del espejo, se cruzan en un ángulo de 60° y el cambio global en dirección del rayo de luz es de 120°. Este ángulo es el mismo que el existente entre los espejos. ¿Y si el ángulo entre los espejos cambia? ¿El cambio global en la dirección del rayo de luz siempre es igual al ángulo entre los espejos?

Respuesta ¡Hacer una afirmación general en términos de un dato puntual o una observación, siempre es una práctica peligrosa! Investigue el cambio en dirección para una situación general. La figura 35.7b muestra los espejos a un ángulo arbitrario ϕ y el rayo de luz entrante que golpea al espejo en un ángulo arbitrario θ respecto a la normal a la superficie del espejo. De acuerdo con la ley de reflexión y la suma de los ángulos interiores de un triángulo, el ángulo γ se conoce por $180° - (90° - \theta) - \phi = 90° + \theta - \phi$.

Considere el triángulo resaltado en azul en la figura 35.7b y determine α:

$$\alpha + 2\gamma + 2(90° - \theta) = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha = 2(\theta - \gamma)$$

Observe de la figura 35.7b que el cambio de dirección del rayo de luz es el ángulo β. Use la geometría de la figura para resolver para β:

$$\beta = 180° - \alpha = 180° - 2(\theta - \gamma)$$
$$= 180° - 2[\theta - (90° + \theta - \phi)] = 360° - 2\phi$$

Observe que β no es igual a ϕ. Para $\phi = 120°$, obtiene $\beta = 120°$, que resulta ser el mismo que el ángulo de los espejos; sin embargo, esto es cierto sólo para este ángulo especial entre los espejos. Por ejemplo, si $\phi = 90°$, obtiene $\beta = 180°$. En este caso, la luz tiene una reflexión recta cuando va de regreso a su origen.

Figura 35.8 Aplicaciones de la retrorreflexión. a) Este panel en la Luna refleja un rayo láser directamente hacia su fuente en la Tierra. b) La luz trasera de un automóvil tiene pequeños retrorreflectores que aseguran que las luces delanteras sean reflejadas directamente hacia el auto que las envía. c) Un rayo de luz que incide en una esfera transparente en la posición apropiada es retrorreflectado. d) El señalamiento *stop* (alto) parece brillar por las luces delanteras de los vehículos porque su superficie está cubierta con una capa de muchas esferas pequeñísimas retrorreflectoras. ¿Cómo se vería si el señalamiento tuviera una superficie semejante a un espejo?

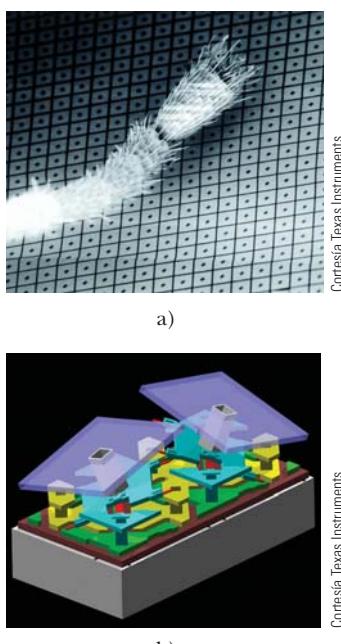



Figura 35.9 a) Conjunto de espejos sobre la superficie de un dispositivo digital de microespejo. Cada espejo tiene un área de alrededor de 16 μm^2. Para dar la sensación de escala, en la fotografía aparece la pata de una hormiga. b) Acercamiento de dos microespejos. El espejo de la izquierda está en la posición "on" (encendido) y el de la derecha está en "off" (apagado).

Como se explicó en la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo precedente, si el ángulo entre dos espejos es igual a 90°, el haz reflejado regresa a la fuente paralelo a su trayectoria original. Este fenómeno, llamado *retrorreflexión,* tiene muchas aplicaciones prácticas. Si se coloca un tercer espejo perpendicular a los dos primeros, de modo que los tres formen la esquina de un cubo, la retrorreflexión funciona en tres dimensiones. En 1969, un panel de numerosos reflectores pequeños fue colocado en la Luna por los astronautas del *Apollo 11* (figura 35.8a). Un rayo láser proveniente de la Tierra se refleja directamente de regreso hacia la Tierra y se mide el tiempo que tarda en hacer el recorrido. Esta información se emplea para determinar la distancia a la Luna con una incertidumbre de 15 cm. (Imagine lo difícil que sería alinear un espejo plano regular para que el rayo láser reflejado incida en un lugar particular en la Tierra.) Una aplicación más común se encuentra en las luces traseras o calaveras de los vehículos. Parte del plástico de las calaveras está formado por numerosas y diminutas esquinas de cubo (figura 35.8b), para que las luces de los faros delanteros de los vehículos que se aproximen por atrás sean reflejadas a los conductores. En lugar de esquinas de cubos, a veces se usan pequeñas salientes esféricas (figura 35.8c). Diminutas esferas transparentes se utilizan en los materiales de recubrimiento que se encuentran en muchos señalamientos de tránsito en los caminos. Debido a la retrorreflexión de estas esferas, la señal de *stop* (alto) de la figura 35.8d parece mucho más brillante de lo que sería si fuera simplemente una superficie plana brillosa. Los retrorreflectores también se usan para paneles reflectores o zapatos y ropa de corredores que permiten a sus usuarios ser vistos de noche.

Otra aplicación práctica de la ley de reflexión es la proyección digital en cines, programas de televisión y presentaciones de computadora. Un proyector digital utiliza un chip semiconductor óptico llamado *dispositivo digital microespejo.* Este dispositivo contiene un conjunto de pequeños espejos (figura 35.9a) que se inclinan individualmente por medio de señales a un electrodo de dirección situado bajo el borde del espejo. Cada espejo corresponde a un pixel en la imagen proyectada. Cuando el pixel correspondiente a un espejo dado debe ser brillante, el espejo está en la posición "on" (encendido); es decir, orientado para reflejar a la pantalla la luz proveniente de una fuente que ilumine el conjunto (figura 35.9b). Cuando es necesario que el pixel sea oscuro para este espejo, éste estará en "off" (apagado), inclinado para que la luz se refleje alejándose de la pantalla. Esta brillantez del pixel está determinada por el intervalo total en el que el espejo está en la posición "on" durante el despliegue de una imagen.

Los proyectores digitales de cine usan tres dispositivos de microespejos, uno por cada uno de los colores primarios: rojo, azul y verde, lo cual permite ver el cine hasta con 35 billones de colores. Puesto que la información se guarda como datos binarios, una película digital no se degrada con el tiempo, como sucede con las películas de cinta. Además, como la película está totalmente en forma de software computarizado, se proyecta en los cines mediante satélites, discos ópticos o redes de fibras ópticas.

Varias películas se han proyectado digitalmente y las encuestas muestran que 85 por ciento de los espectadores describen la calidad de las imágenes como “excelente”. La primera proyección totalmente digital de cinematografía a posproducción y de ahí a proyección, fue *Star Wars Episode II: Attack of the Clones* (*La guerra de las galaxias, Episodio 2: El ataque de los clones*), en 2002.

35.5 La onda bajo refracción

Además del fenómeno de la reflexión explicado para las ondas sobre cuerdas en la sección 16.4, también se encontró que parte de la energía de la onda incidente se transmite en el nuevo medio. De igual modo, cuando un rayo de luz que se mueve por un medio transparente encuentra una frontera que lleva a otro medio de igual característica, como se ve en la figura 35.10, parte de la energía se refleja y parte penetra al segundo medio. Como con la reflexión, la dirección de la onda transmitida muestra un comportamiento interesante debido a la naturaleza tridimensional de las ondas de luz. El rayo que penetra al segundo medio se dobla en la frontera y se dice que se **refracta**. El rayo incidente, el rayo reflejado y el rayo refractado todos se encuentran en el mismo plano. El **ángulo de refracción**, θ_2 de la figura 35.10a, depende de las propiedades de los dos medios y del ángulo de incidencia por medio de la correspondencia

$$\frac{\text{sen } \theta_2}{\text{sen } \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \qquad \textbf{(35.3)}$$

donde v_1 es la rapidez de la luz en el primer medio y v_2 es la rapidez de la luz en el segundo.

La trayectoria de un rayo de luz que pasa por una superficie refractaria es reversible. Por ejemplo, el rayo que se ilustra en la figura 35.10a pasa del punto *A* al punto *B*. Si el rayo se originó en *B*, viajaría a lo largo de la recta *BA* hasta llegar al punto *A*, y la parte reflejada apuntaría hacia abajo y a la izquierda del vidrio.

Pregunta rápida 35.2 Si el rayo ① es el haz entrante en la figura 35.10b, de las otras cuatro líneas rojas, ¿cuáles son rayos reflejados y cuáles refractados?

---

a)

b)

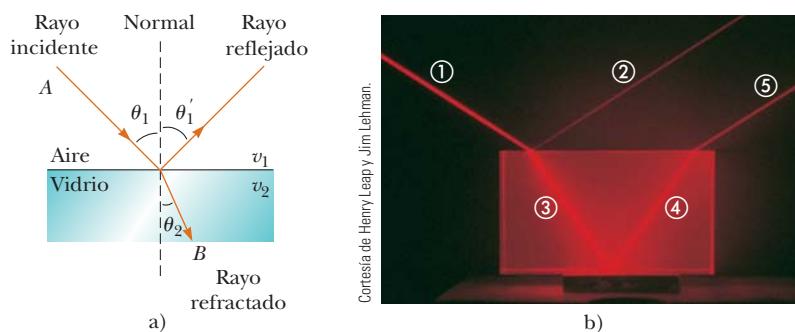



Figura 35.10

a) Rayo de luz que incide en forma oblicua en una interfase de aire-vidrio que se comporta de acuerdo con el modelo de onda bajo refracción. El rayo refractado se dobla hacia la normal porque $v_2 < v_1$. Todos los rayos y la normal se encuentran en el mismo plano. b) La luz que incide sobre el bloque de lucite se dobla cuando entra y cuando sale de éste.

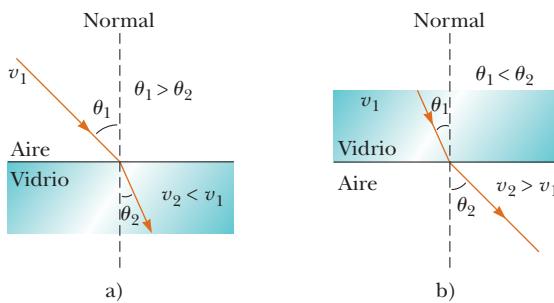



Figura 35.11

a) Cuando un haz de luz pasa del aire al vidrio, la luz disminuye su velocidad al entrar a éste y su trayectoria se dobla hacia la normal. b) Cuando el haz se mueve del vidrio al aire, la luz aumenta su velocidad al entrar al aire y su trayectoria se dobla alejándose de la normal.

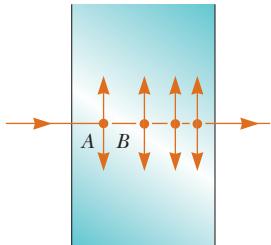



Figura 35.12 Luz que pasa de un átomo a otro en un medio. Los puntos son electrones y las flechas verticales representan sus oscilaciones.

Por la ecuación 35.3 es posible inferir que cuando la luz se mueve de un material en el que su rapidez es alta a un material en el que su rapidez es menor, como se observa en la figura 35.11a, el ángulo de refracción θ_2 es menor que el ángulo de incidencia θ_1, y el rayo se dobla *hacia* la normal. Si el rayo se mueve de un material en el que la luz se mueve con más lentitud hacia un material en el que se mueve con más rapidez, como se ve en la figura 35.11b, θ_2 es mayor que θ_1 y el rayo se dobla alejándose de la normal.

El comportamiento de la luz cuando pasa del aire hacia otra sustancia y luego regresa al aire es un tema de confusión frecuente para estudiantes. Cuando la luz se mueve en el aire, su rapidez es de 3.00×10^8 m/s, pero esta rapidez se reduce a casi 2×10^8 m/s si la luz entra a un bloque de vidrio. Cuando la luz emerge de nuevo hacia el aire, su rapidez aumenta en forma instantánea a su valor original de 3.00×10^8 m/s. Esto es muy diferente de lo que sucede, por ejemplo, cuando se dispara un arma de fuego y la bala atraviesa un bloque de madera. En este caso, la rapidez de la bala se reduce cuando se mueve a través de la madera porque parte de su energía original se emplea para separar las fibras de madera. En el momento en que la bala sale de nuevo al aire, lo hace con una rapidez menor de la que tenía cuando entró al bloque de madera.

Para ver por qué la luz se comporta como lo hace, considere la figura 35.12, que representa un haz de luz entrando en un trozo de vidrio desde la izquierda. Una vez dentro del vidrio, la luz puede encontrar un electrón ligado a un átomo, indicado como punto *A*. Suponga que la luz es absorbida por el átomo; esto hace que el electrón oscile (detalle representado por las flechas verticales de doble punta). El electrón oscilante en tal caso actúa como una antena y emite el haz de luz hacia un átomo en *B*, donde la luz es absorbida de nuevo. Los detalles de estas absorciones y radiaciones se explican mejor en términos de mecánica cuántica (capítulo 42). Por ahora, es suficiente pensar que la luz pasa de un átomo a otro a través del vidrio. Aun cuando la luz se mueve de un átomo a otro a 3.00×10^8 m/s, la absorción y la radiación que tienen lugar hacen que el *promedio* de la rapidez de la luz que pasa por el material disminuya a unos 2×10^8 m/s. Una vez que la luz emerge hacia el aire, la absorción y la radiación cesan y la luz viaja con una rapidez constante de 3.00×10^8 m/s.

Figura 35.13 Vista superior de un barril que rueda de concreto a pasto.

En la figura 35.13 se ilustra un caso análogo de mecánica de refracción. Cuando el extremo izquierdo del barril que rueda llega al pasto, dismunuye su velocidad, mientras que el extremo derecho continúa en el concreto y se mueve con su rapidez original. Esta diferencia provoca que el barril gire sobre un eje, lo que cambia la dirección del movimiento.

Índice de refracción

En general, la rapidez de la luz en cualquier material es *menor* que en el vacío. De hecho, *la luz se desplaza a su máxima rapidez en el vacío.* Es conveniente definir el **índice de refracción** n de un medio como la relación

Índice de refracción ►

$$n \equiv \frac{\text{rapidez de la luz en el vacío}}{\text{rapidez de la luz en un medio}} \equiv \frac{c}{v} \qquad \textbf{(35.4)}$$

TABLA 35.1

Índices de refracción

Sustancia	Índice de refracción	Sustancia	Índice de refracción
Sólidos a 20°C		*Líquidos a 20°C*	
Circonio cúbico	2.20	Benceno	1.501
Diamante (C)	2.419	Disulfuro de carbono	1.628
Fluorita (CaF_2)	1.434	Tetracloruro de carbono	1.461
Cuarzo fundido (SiO_2)	1.458	Alcohol etílico	1.361
Fosfato de galio	3.50	Glicerina	1.473
Vidrio, sin plomo	1.52	Agua	1.333
Vidrio, con plomo	1.66		
Hielo (H_2O)	1.309	*Gases a 0°C, 1 atm*	
Poliestireno	1.49	Aire	1.000 293
Cloruro de sodio (NaCl)	1.544	Dióxido de carbono	1.000 45

Nota: Todos los valores son para luz cuya longitud de onda sea de 589 nm en el vacío.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.2

Aquí, *n* no es un entero

El símbolo n ha sido empleado varias veces como entero, por ejemplo en el capítulo 18, para indicar el modo de onda estacionaria en una cuerda o en una columna de aire. El índice de refracción n aquí *no es* un entero.

Por esta definición, queda claro que el índice de refracción es un número sin dimensiones mayor que la unidad porque v siempre es menor que c. Además, n es igual a la unidad para el vacío. Los índices de refracción para diferentes sustancias aparecen en la tabla 35.1.

Cuando la luz pasa de un medio a otro, su frecuencia no cambia, pero sí lo hace su longitud de onda. Para ver por qué ocurre esto, considere la figura 35.14. Las ondas pasan junto a un observador situado en el punto A en el medio 1 con cierta frecuencia e inciden en la frontera entre el medio 1 y el medio 2. La frecuencia a la que pasan las ondas junto a un observador situado en el punto B en el medio 2 debe ser igual a la frecuencia a la que pasan en el punto A. Si este no fuera el caso, la energía se acumularía o desaparecería en la frontera. Como no hay mecanismo para que esto se presente, la frecuencia debe ser una constante cuando un rayo de luz pasa de un medio a otro. Por lo tanto, como la correspondencia $v = \lambda f$ (ecuación 16.12) debe ser válida en ambos medios, y como $f_1 = f_2 = f$, se ve que

$$v_1 = \lambda_1 f \quad \text{y} \quad v_2 = \lambda_2 f \tag{35.5}$$

Figura 35.14 Cuando una onda se mueve del medio 1 al medio 2, cambia su longitud de onda, pero su frecuencia permanece constante.

Como $v_1 \neq v_2$, se deduce que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ como se muestra en la figura 35.14.

Al dividir la primera ecuación 35.5 entre la segunda y luego usar la ecuación 35.4 se obtiene una correpondencia entre el índice de refracción y la longitud de onda:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{35.6}$$

Esta expresión da

$$\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2$$

Si el medio 1 es el vacío, o aire para fines prácticos, entonces $n_1 = 1$. Por esto, se deduce por la ecuación 35.6 que el índice de refracción de cualquier medio se expresa como la relación

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \tag{35.7}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz en el vacío y λ_n es la longitud de onda de la luz en el medio cuyo índice de refracción es n. Por la ecuación 35.7, se ve que, como $n > 1$, $\lambda_n < \lambda$.

Ahora está en posición de expresar la ecuación 35.3 de una manera alterna. Si sustituye el término v_2/v_1 de la ecuación 35.3 con n_1/n_2 de la ecuación 35.6, obtiene

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2 \tag{35.8}$$

◀ Ley de refracción de Snell

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.3

Una relación inversa

El índice de refracción es *inversamente* proporcional a la rapidez de la onda. Cuando la rapidez v de la onda disminuye, el índice de refracción de n aumenta. Por lo tanto, cuanto más alto sea el índice de refracción de un material, más se *reduce su velocidad* de la luz respecto de su rapidez en el vacío. Cuanto más se reduce la rapidez de la luz, más difiere θ_2 de θ_1 en la ecuación 35.8.

El descubrimiento experimental de esta correspondencia suele acreditarse a Willebrord Snell (1591-1627), y por ello se conoce como **ley de refracción de Snell**. Esta ecuación se expone con más detalle en la sección 35.6. La refracción de las ondas en una interfaz entre dos medios, es un fenómeno común y se puede identificar un modelo de análisis para esta situación: la **onda bajo refracción**. La ecuación 35.8 es la representación matemática de este modelo para la radiación electromagnéctica. Otras ondas, como las sísmicas o las del sonido también muestran una refracción acorde a este modelo; la representación matemática para estas ondas es la ecuación 35.3.

Pregunta rápida 35.3 En un material con índice de refracción 1.3 pasa luz hacia otro con índice de refracción 1.2. En comparación con el rayo incidente, ¿que le sucede al rayo refractado? a) se desvía hacia la normal, b) no se desvía, o c) se desvía alejándose de la normal.

EJEMPLO 35.3 Ángulo de refracción para vidrio

Un rayo de luz, de 589 nm de longitud de onda, que viaja a través de aire, incide sobre una lámina plana y uniforme de vidrio sin plomo con un ángulo de 30.0° con la normal.

A) Encuentre el ángulo de refracción.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 35.11a, que ilustra el proceso de refracción que se presenta en este problema.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Reordene la ley de refracción de Snell para encontrar sen θ_2:

$$\text{sen}\ \theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\ \text{sen}\ \theta_1$$

Sustituya el ángulo incidente y, a partir de la tabla 35.1, $n_1 = 1.00$ para aire y $n_2 = 1.52$ para vidrio sin plomo:

$$\text{sen}\ \theta_2 = \left(\frac{1.00}{1.52}\right) \text{sen}\ 30.0° = 0.329$$

Resuelva para θ_2:

$$\theta_2 = \text{sen}^{-1}\ (0.329)$$

$$= \boxed{19.2°}$$

B) Encuentre la rapidez de esta luz una vez que entra al vidrio.

SOLUCIÓN

Resuelva la ecuación 35.4 para la rapidez de la luz en el vidrio:

$$v = \frac{c}{n}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v = \frac{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}{1.52} = \boxed{1.97 \times 10^8\ \text{m/s}}$$

C) ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz en el vidrio?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 35.7 para encontrar la longitud de onda en el vidrio:

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{589\ \text{nm}}{1.52} = \boxed{388\ \text{nm}}$$

EJEMPLO 35.4 **Luz a través de una lámina**

Un haz de luz pasa desde el medio 1 al medio 2, siendo este último una gruesa lámina de material cuyo índice de refracción es n_2 (figura 35.15). Demuestre que el haz que emerge en el medio 1 desde el otro lado es paralelo al haz incidente.

Figura 35.15 (Ejemplo 35.4) Cuando hay luz que pasa a través de una losa plana de material, el haz emergente es paralelo al haz incidente; por tanto, $\theta_1 = \theta_3$. La línea punteada dibujada paralela al rayo saliente del fondo de la losa representa la trayectoria que la luz tomaría si la losa no estuviera ahí.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Siga la trayectoria del haz de luz conforme entra y sale de la lámina de material en la figura 35.15. El rayo se desvía hacia la normal al entrar y se aleja de la normal al salir.

Categorizar Los resultados se evalúan mediante ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique la ley de refracción de Snell a la superficie superior:

$$1)\quad \text{sen } \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \text{ sen } \theta_1$$

Aplique la ley de Snell a la superficie inferior:

$$2)\quad \text{sen } \theta_3 = \frac{n_2}{n_1} \text{ sen } \theta_2$$

Sustituya la ecuación 1) en la ecuación 2):

$$\text{sen } \theta_3 = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{n_1}{n_2} \text{ sen } \theta_1\right) = \text{sen } \theta_1$$

Por lo tanto, $\theta_3 = \theta_1$ y la lámina no altera la dirección del haz. Sin embargo, el haz sobresale paralelo a sí mismo por la distancia d que se muestra en la figura 35.15.

¿Qué pasaría si? ¿Y si el grosor t de la lámina se duplica? ¿La distancia d que sobresale también se duplica?

Respuesta Considere la región de la trayectoria de luz dentro de la lámina en la figura 35.15. La distancia a es la hipotenusa de dos triángulos rectángulos.

Encuentre una expresión para a a partir del triángulo dorado:

$$a = \frac{t}{\cos \theta_2}$$

Encuentre una expresión para d a partir del triángulo azul:

$$d = a \text{ sen } \gamma = a \text{ sen } (\theta_1 - \theta_2)$$

Combine estas ecuaciones:

$$d = \frac{t}{\cos \theta_2} \text{ sen } (\theta_1 - \theta_2)$$

Para un ángulo incidente determinado θ_1, el ángulo refractado θ_2 se determina exclusivamente por el índice de refracción, así que la distancia que sobresale d es proporcional a t. Si el grosor se duplica, lo mismo ocurre con la distancia que sobresale.

En el ejemplo 35.4, la luz pasa a través de una lámina de material con lados paralelos. ¿Qué ocurre cuando la luz golpea un prisma con lados no paralelos, como se muestra en la figura 35.16? En este caso, el rayo saliente no se propaga en la misma dirección que el rayo entrante. Un rayo de luz de longitud de onda simple, incidente en el prisma desde la izquierda, emerge a un ángulo δ de su dirección de viaje original. Este ángulo δ se llama **ángulo de desviación**. El **ángulo de punta** Φ del prisma, que se muestra en la figura, se define como el ángulo entre la superficie a la que entra la luz en el prisma y la segunda superficie que encuentra la luz.

Figura 35.16 Un prisma refracta un rayo de luz de longitud de onda simple a través de un ángulo de desviación δ.

EJEMPLO 35.5 Medición de *n* con un prisma

Aunque no se prueba en este caso, el ángulo de desviación mínimo $\delta_{\text{mín}}$ para un prisma se presenta cuando el ángulo de incidencia θ_1 es tal que el rayo refractado dentro del prisma forma el mismo ángulo con la normal en las dos caras del prisma,[1] como se muestra en la figura 35.17. Obtenga una expresión para el índice de refracción del material del prisma en términos del ángulo de desviación mínimo y el ángulo de punta Φ.

Figura 35.17 (Ejemplo 35.5) Rayo de luz que pasa a través de un prisma con el ángulo de desviación mínimo $\delta_{\text{mín}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie cuidadosamente la figura 35.17 y asegúrese de comprender por qué el rayo de luz que sale del prisma viaja en una dirección diferente.

Categorizar En este ejemplo entra luz a un material a través de una superficie y sale del material en otra superficie. Aplique el modelo de onda bajo refracción a cada superficie.

Analizar Considere la geometría en la figura 35.17. La reproducción del ángulo $\Phi/2$ en la posición del rayo de luz entrante muestra que $\theta_2 = \Phi/2$. El teorema de que un ángulo exterior de cualquier triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos muestra que $\delta_{\min} = 2\alpha$. La geometría también muestra que $\theta_1 = \theta_2 + \alpha$.

Combine estos tres resultados geométricos:

$$\theta_1 = \theta_2 + \alpha = \frac{\Phi}{2} + \frac{\delta_{\text{mín}}}{2} = \frac{\Phi + \delta_{\text{mín}}}{2}$$

Aplique el modelo de onda bajo refracción a la superficie izquierda y resuelva para n:

$$(1.00)\text{ sen }\theta_1 = n \text{ sen }\theta_2 \quad \rightarrow \quad n = \frac{\text{sen }\theta_1}{\text{sen }\theta_2}$$

Sustituya para los ángulos incidente y refractado:

$$n = \frac{\text{sen}\left(\dfrac{\Phi + \delta_{\text{mín}}}{2}\right)}{\text{sen}(\Phi/2)} \qquad \textbf{(35.9)}$$

Finalizar Al conocer el ángulo ápice Φ del prisma y medir $\delta_{\text{mín}}$, es posible calcular el índice de refracción del material del prisma. Además, se puede usar un prisma hueco para determinar los valores de n para diferentes líquidos que llenen el prisma.

35.6 Principio de Huygens

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.4
¿Para qué sirve el principio de Huygens?
En este punto, no es posible resaltar la importancia del principio de Huygens. Pronosticar la posición de un frente de onda más allá no parece posible, es muy arriesgado de cualquier modo, se aplicará el principio de Huygens en capítulos posteriores para explicar fenómenos de onda adicionales de la luz.

En esta sección se desarrollan las leyes de la reflexión y de la refracción mediante el uso de un método geométrico propuesto por Huygens en 1678. El **principio de Huygens** es una construcción geométrica para usar el conocimiento de un frente de onda anterior, para determinar la posición de un frente de onda nuevo en algún instante. En la construcción de Huygens **todos los puntos en un frente de onda determinado se toman como fuentes puntuales para la producción de ondas esféricas secundarias, llamadas trenes de ondas, que se propagan hacia afuera por un medio con magnitudes de velocidad características de ondas en ese medio. Después de algún intervalo de tiempo transcurrido la nueva posición del frente de onda es la superficie tangente a los trenes de ondas.**

Primero considere una onda plana que se mueve en el espacio libre, como se muestra en la figura 35.18a. En $t = 0$, el frente de onda está indicado por el plano marcado como AA'. En una construcción de Huygens, cada punto de este frente de onda es considerado fuente puntual. Para hacerlo más claro, sólo se muestran tres puntos en AA'. Con estos puntos como fuentes para los trenes de ondas, trace círculos, cada uno con un radio $c\,\Delta t$, donde c es la rapidez de la luz en el vacío y Δt es cierto intervalo de tiempo durante el cual se propaga la onda. La superficie trazada tangente a estos trenes de onda es el plano

[1] Los detalles de esta prueba están disponible en textos acerca de óptica.

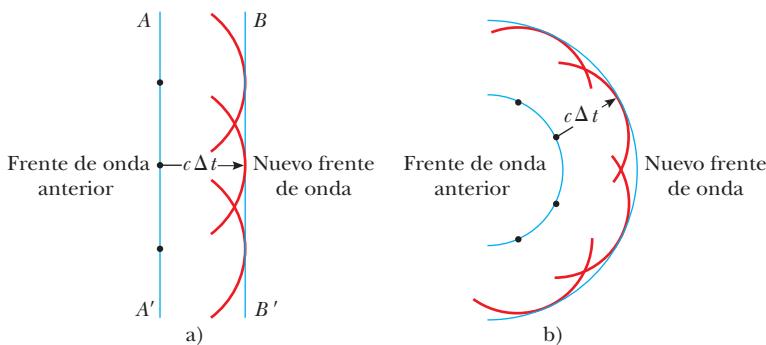



Figura 35.18 Construcción de Huygens para a) una onda plana que se propaga a la derecha y b) una onda esférica que se propaga a la derecha.

Figura 35.19 Construcción de Huygens para demostrar la ley de reflexión. En el instante en que el rayo 1 incide en la superficie, envía un tren de ondas de Huygens desde A, y el rayo 2 envía un tren de ondas de Huygens desde B. Sea $c\,\Delta t$ un radio del tren de ondas, donde Δt es el intervalo de tiempo para que el rayo 2 se desplace de B a C. El triángulo ADC es congruente con el triángulo ABC.

BB', que es el frente de onda en un tiempo posterior, y es paralelo a AA'. De un modo semejante, la figura 35.18b muestra la construcción de Huygens para una onda esférica.

Principio de Huygens aplicado a la reflexión y la refracción

Las leyes de reflexión y refracción ya se enunciaron, sin comprobación, en este capítulo. A continuación se deducen con el uso del principio de Huygens.

Para la ley de la reflexión, consulte la figura 35.19a. La recta AB representa un frente de onda plana de la luz incidente precisamente cuando el rayo 1 incide en la superficie. En este instante, la onda en A envía un tren de ondas de Huygens (el arco circular en rojo con centro en A). La luz reflejada se propaga hacia D. Al mismo tiempo, la onda en B emite un tren de ondas de Huygens (el arco circular en rojo con centro en B) con la propagación de luz hacia C. La figura 35.19a muestra estos trenes de ondas después de un intervalo Δt, después del cual el rayo 2 incide en la superficie. Como los rayos 1 y 2 se mueven a la misma rapidez, debe obtener $AD = BC = c\Delta t$.

Para realizar el resto del análisis conviene hacerlo mediante la geometría. Observe que los dos triángulos, ABC y ADC, son congruentes porque tienen la misma hipotenusa AC y porque $AD = BC$. A partir de la figura 35.19b, se tiene

$$\cos\gamma = \frac{BC}{AC} \quad \text{y} \quad \cos\gamma' = \frac{AD}{AC}$$

donde $\gamma = 90° - \theta_1$ y $\gamma' = 90° - \theta_1'$. Como $AD = BC$, tenemos

$$\cos\gamma = \cos\gamma'$$

Por lo tanto,

$$\gamma = \gamma'$$

$$90° - \theta_1 = 90° - \theta_1'$$

y

$$\theta_1 = \theta_1'$$

que es la ley de la reflexión.

Ahora use el principio de Huygens y la figura 35.20 para deducir la ley de la refracción de Snell. Concentre su atención en el instante en que el rayo 1 incide sobre la superficie y el intervalo de tiempo consecutivo hasta que el rayo 2 hace lo mismo. Durante este intervalo de tiempo, la onda en A envía un tren de ondas de Huygens (el arco en rojo con centro en A) y la luz refracta hacia D. En el mismo intervalo de tiempo, la onda en B envía un tren de ondas de Huygens (el arco rojo con centro en B) y la luz continúa su propagación hacia C. Ya que estos dos trenes de onda se desplazan en medios diferentes, los radios de los trenes de ondas son diferentes. El radio del tren de ondas desde A es $AD = v_2\,\Delta t$, donde v_2 es la rapidez de la onda en el segundo medio. El radio del tren de ondas desde B es $BC = v_1\,\Delta t$, donde v_1 es la rapidez de la onda en el medio original.

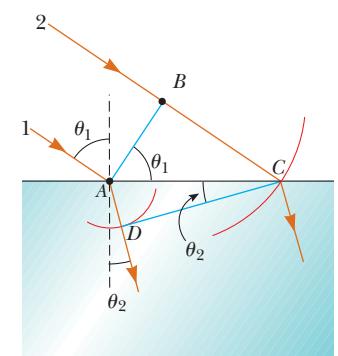



Figura 35.20 Construcción de Huygens para demostrar la ley de la refracción de Snell. En el instante en que el rayo 1 incide en la superficie, envía un tren de ondas de Huygens desde A y el rayo 2 envía un tren de ondas de Huygens desde B. Los dos trenes de onda tienen radios diferentes porque se desplazan en medios diferentes.

A partir de los triángulos *ABC* y *ADC*, encuentre que

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{v_1 \,\Delta t}{AC} \quad \text{y} \quad \text{sen } \theta_2 = \frac{AD}{AC} = \frac{v_2 \,\Delta t}{AC}$$

Si divide la primera ecuación entre la segunda, obtiene

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Pero por la ecuación 35.4 sabemos que $v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$. Por lo tanto,

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

y

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

que es la ley de la refracción de Snell.

35.7 Dispersión

Una propiedad importante del índice de refracción *n* es que, para un material determinado, el índice varía con la longitud de onda de la luz que pase por el material, como muestra la figura 35.21. Este comportamiento se denomina **dispersión**. Como *n* es una función de la longitud de onda, la ley de la refracción de Snell indica que luces de diferentes longitudes de onda se retractan a diferentes ángulos cuando inciden sobre un material.

Como se aprecia la figura 35.21, el índice de refracción generalmente disminuye con una longitud de onda creciente. Por ejemplo esto significa que la luz violeta se retracta más que la luz roja cuando transita dentro de un material.

Ahora suponga que un haz de *luz blanca* (combinación de todas las longitudes de onda visibles) incide en un prisma, como se ilustra en la figura 35.22. Claramente, el ángulo de desviación δ depende de la longitud de onda. Los rayos que emergen se dispersan en una serie de colores conocida como **espectro visible**. Estos colores, en orden de longitud de onda decreciente son rojo, naranja, amarillo, verde, azul y violeta. Newton demostró que cada color tiene un ángulo particular de desviación y que los colores se pueden recombinar para formar la luz blanca original.

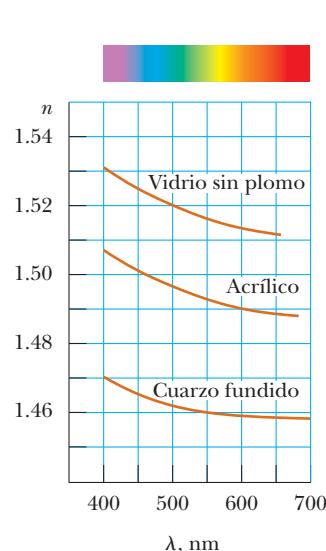



Figura 35.21 Variación del índice de refracción con la longitud de onda en el vacío para tres materiales.

David Parker/Sience Photo Library/Photo Researchers, Inc.

Figura 35.22 Luz blanca que entra en un prisma de vidrio arriba a la izquierda. Un haz reflejado de luz sale del prisma precisamente por debajo del haz entrante. El haz que se mueve hacia abajo a la derecha muestra colores distintos. Colores distintos se refractan a diferentes ángulos porque el índice de refracción del vidrio depende de la longitud de onda. La luz violeta es la que más se desvía; la roja, la que menos.

La dispersión de luz en un espectro se comprueba con mayor claridad en la naturaleza con la formación de un arco iris, el cual es visto frecuentemente por un observador que está situado entre el Sol y una zona con lluvia. Para comprender cómo se forma, considere la figura 35.23. Un rayo de luz de sol (luz blanca) incide por arriba en una gota de agua en la atmósfera y es refractado y reflejado de la siguiente manera: primero es refractado en la superficie frontal de la gota, ahí la luz violeta tiene la mayor desviación y la luz roja la menor. En la superficie posterior de la gota, la luz se refleja y regresa a la superficie frontal, donde otra vez se somete a refracción cuando pasa del agua al aire. Los rayos dejan la gota tal que el ángulo entre la luz blanca incidente y el más intenso rayo violeta de retorno es de 40° y el ángulo entre la luz blanca incidente y el rayo rojo más intenso de retorno es de 42°. Esta pequeña diferencia angular entre los rayos de retorno hace posible que se vea un arco de colores.

Figura 35.23
Trayectoria de luz solar a través de una gota esférica de lluvia. La luz que sigue esta trayectoria contribuye al arco iris visible.

Ahora suponga que un observador mira un arco iris, como se muestra en la figura 35.24. Si se observa una gota de lluvia en el cielo, la luz roja más intensa que retorna de la gota llega al observador porque es la que más se desvía y la luz violeta más intensa pasa sobre el observador porque es la que menos se desvía. En consecuencia, el observador ve esta gota de color rojo. Del mismo modo, una gota más baja en el cielo dirigiría la más intensa luz violeta hacia el observador y se vería de color violeta. (La luz roja más intensa de esta gota pasaría por debajo de los ojos del observador y no sería visible.) La más intensa luz de otros colores del especto llegaría al observador desde gotas de lluvia que estuvieran entre estas dos posiciones extremas.

La fotografía de inicio de este capítulo muestra un *arco iris doble*. El arco iris secundario es más tenue que el arco iris primario y sus colores están invertidos, surge de la luz que provoca dos reflexiones desde la superficie interior antes de salir de la gota de lluvia. En el laboratorio se han observado numerosos arco iris en los que la luz hace más de 30 reflexiones antes de salir de la gota de agua. Como cada una de estas reflexiones comprende alguna pérdida de luz debido a la refracción de la gota de agua al salir, la intensidad de estos arco iris de orden superior es pequeña en comparación con la intensidad del arco iris primario.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.5

Un arco iris de muchos rayos de luz

Representaciones gráficas como la figura 35.23 normalmente se malinterpretan. La figura muestra un rayo de luz que entra a una gota de lluvia y se somete a reflexión y refracción, saliendo de la gota entre 40 y 42° respecto del rayo que entra. De esto podría interpretarse que *toda* luz que entra a la gota de agua sale en este pequeño margen de ángulos, lo que es incorrecto. En realidad, la luz sale de la gota de lluvia en un margen de ángulos mucho mayor, de 0 a 42°. Un cuidadoso análisis de la reflxión y la refracción desde la gota esférica de lluvia demuestra que el margen de 40 a 42° es donde *la luz de máxima intensidad* sale de la gota de lluvia.

Pregunta rápida 35.4 Las lentes de una cámara usan refracción para formar una imagen en una película. Lo ideal sería que todos los colores de la luz del objeto que es fotografiado refractaran en la misma cantidad. Entre los materiales que se muestran en la figura 35.21, ¿cuál escogería usted para el lente de una cámara de un solo elemento? a) Vidrio sin plomo, b) acrílico, c) cuarzo fundido, d) imposible de determinar.

35.8 Reflexión interna total

Un efecto interesante denominado **reflexión interna total** se presenta al dirigir luz desde un medio con un índice de refracción determinado hacia otro que tenga un índice de refracción menor. Considere la figura 35.25a, en la cual un rayo de luz se desplaza en el medio 1 y se encuentra la frontera entre el medio 1 y el medio 2, donde n_1 es mayor que n_2. En la figura los niveles 1 al 5 indican varias posibles direcciones del rayo, consistente con el modelo de una onda bajo refración. Los rayos refractados están doblados alejándose de la normal porque n_1 es mayor que n_2. En algún ángulo particular de incidencia θ_c, denominado **ángulo crítico**, el rayo de luz refractado se mueve paralelo a la frontera, de modo que $\theta_2 = 90°$ (figura 35.25b). Para ángulos de incidencia mayores a θ_c, el rayo se refleja por completo en la frontera, como lo muestra el rayo 5 de la figura 35.25a.

Figura 35.24 Formación de un arco iris visto por un observador situado con el Sol a su espalda.

Use la ley de la refracción de Snell para hallar el ángulo crítico. Cuando $\theta_1 = \theta_c$, $\theta_2 = 90°$ y la ecuación 35.8 da

$$n_1 \text{ sen } \theta_c = n_2 \text{ sen } 90° = n_2$$

$$\text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{para } n_1 > n_2) \qquad \textbf{(35.10)}$$

◀ Ángulo crítico para una reflexión interna total

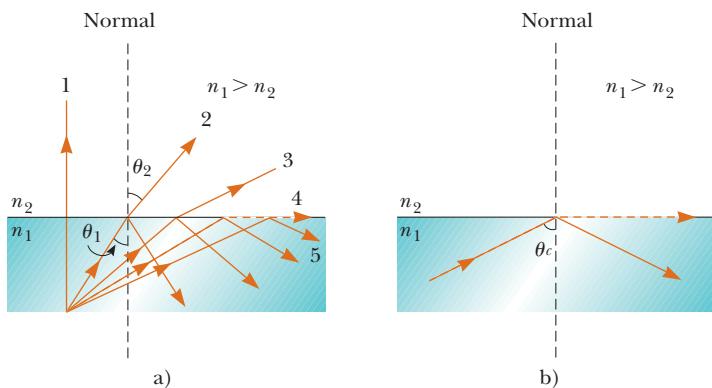



Figura 35.25

a) Los rayos se desplazan de un medio de índice de refracción n_1 hacia un medio de índice de refracción n_2, donde $n_2 < n_1$. Cuando el ángulo de incidencia aumenta θ_1, el ángulo de refracción θ_2 aumenta hasta que θ_2 es de 90° (rayo 4). La línea discontinua indica que no hay energía que se popague en esta dirección. Para ángulos de incidencia incluso mayores, se presenta reflexión interna total (rayo 5).
b) El ángulo de incidencia que produce un ángulo de refracción igual a 90° es el ángulo crítico θ_c. Con este ángulo de incidencia se refleja toda la energía de la luz incidente.

Esta ecuación se usa sólo cuando n_1 es mayor que n_2. Es decir, **la reflexión interna total se presenta sólo cuando la luz se dirige de un medio de índice de refracción conocido hacia un medio de índice de refracción menor.** Si n_1 fuera menor que n_2, la ecuación 35.10 daría sen $\theta_c > 1$; el cual es un resultado sin sentido porque el seno de un ángulo nunca puede ser mayor a la unidad.

El ángulo crítico para la reflexión interna total es pequeño cuando n_1 es considerablemente mayor a n_2. Por ejemplo, el ángulo crítico para un diamante en el aire es de 24°. Cualquier rayo dentro del diamante que se aproxime a la superficie a un ángulo mayor de 24° se refleja por completo de regreso hacia el interior del cristal. Esta propiedad, combinada con un correcto tallado de caras, hace que el diamante brille. Los ángulos de las caras se cortan de modo que la luz sea "atrapada" dentro del cristal por medio de múltiples reflexiones internas. Éstas dan a la luz una trayectoria larga en el medio, y se presenta una dispersión de colores considerable. En el momento en que la luz sale por la superficie superior del cristal, los rayos asociados con diferentes colores ya han sido ampliamente separados unos de otros.

El circonio cúbico también tiene un alto índice de refracción y se puede hacer que brille en forma muy parecida a un diamante legítimo. Si sospecha de una joya sumérjala en almíbar de maíz, la diferencia en n para el circonio cúbico y la del almíbar es pequeña, y por esa razón el ángulo crítico es mayor. Esto significa que más rayos escapan con mayor rapidez, y el resultado es que desaparece por completo el brillo. Un diamante verdadero no pierde todo su brillo cuando se sumerge en almíbar de maíz.

Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman.

Figura 35.26 (Pregunta rápida 35.5) Cinco rayos de luz no paralelos entran a un prisma de vidrio desde la izquierda.

Pregunta rápida 35.5 En la figura 35.2, cinco rayos de luz entran a un prisma de vidrio desde la izquierda. **i)** ¿Cuántos de estos rayos se someten a reflexión interna total en la superficie inclinada del prisma? a) 1, b) 2, c) 3, d) 4 y e) 5. **ii)** Suponga que el prisma de la figura 35.26 puede hacerse girar en el plano del papel. Para que *los cinco* rayos experimenten reflexión interna total desde la superficie inclinada, ¿el prisma debe girarse a) en el sentido de las manecillas del reloj o b) en sentido contrario al de las manecillas del reloj?

EJEMPLO 35.6 Vista desde el ojo de un pez

Encuentre el ángulo crítico para una frontera aire-agua. (El índice de refracción del agua es 1.33.)

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 35.25 para entender el concepto de reflexión interna total y el significado del ángulo crítico.

Categorizar Al usar los conceptos desarrollados en esta sección, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 35.10 para la interfaz aire-agua:

$$\text{sen}\,\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1.00}{1.33} = 0.752$$

$$\theta_c = \boxed{48.8^\circ}$$

¿Qué pasaría si? ¿Si un pez en un estanque tranquilo mira hacia arriba, hacia la superficie del agua a diferentes ángulos en relación con la superficie, como en la figura 35.27? ¿Qué ve?

Respuesta Porque la trayectoria de un rayo de luz es reversible, la luz que viaja del medio 2 al medio 1 en la figura 35.25a sigue las trayectorias mostradas, pero en la dirección *opuesta*. Un pez que mira hacia arriba, hacia la superficie del agua como en la figura 35.27, puede ver fuera del agua si mira hacia la superficie a un ángulo menor que el ángulo crítico. Por lo tanto, cuando la línea de visión del pez forma un ángulo $\theta = 40^\circ$ con la normal a la superficie, por ejemplo, la luz proveniente de arriba del agua llega al ojo del pez. A $\theta = 48.8^\circ$, el ángulo crítico para el agua, la luz tiene que pasar rozando la superficie del agua antes de refractarse hacia el ojo del pez; a este ángulo, el pez puede, en principio, ver toda la orilla del estanque. Con ángulos mayores que el ángulo crítico, la luz que alcanza al pez llega mediante una reflexión interna total en la superficie. Por lo tanto, a $\theta = 60^\circ$, el pez ve una reflexión del fondo del estanque.

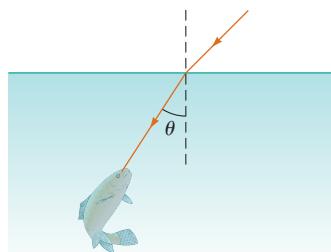



Figura 35.27 (Ejemplo 35.6) **¿Qué pasaría si?** Un pez mira hacia arriba, hacia la superficie del agua.

Fibras ópticas

Otra aplicación interesante de reflexión interna total es el uso de varillas de vidrio o plástico transparente para "transportar" luz de un lugar a otro. Como se indica en la figura 35.28, la luz es confinada a moverse dentro de una varilla, incluso alrededor de curvas, como resultado de reflexiones internas totales sucesivas. Este tubo de luz es flexible si se emplean fibras delgadas en lugar de varillas gruesas. Un tubo flexible de luz se denomina **fibra óptica**. Si se utiliza un cable de fibras paralelas para construir una línea de transmisión óptica, se pueden transmitir imágenes de un punto a otro. Esta técnica se emplea en una importante industria conocida como *óptica de fibras*.

Figura 35.28 La luz se desplaza en una varilla curva transparente por reflexiones internas múltiples.

Una fibra óptica práctica está formada por un núcleo transparente rodeado por un *revestimiento*, material que tiene menor índice de refracción que el núcleo. La combinación puede estar rodeada por un *forro* de plástico para evitar daños mecánicos. La figura 35.29 muestra una vista lateral de esta construcción. Porque el índice de refracción del revestimiento es menor que el del núcleo, la luz que se desplaza en éste experimenta reflexión interna total si llega a la interfaz entre el núcleo y el revestimiento a un ángulo de

Dennis O'Clair/Tony Stone Images.

Hank Morgan/Photo Researchs, Inc.

(*Izquierda*) Mediante cables de fibra óptica de vidrio se llevan señales de voz, video y datos en redes de telecomunicaciones. (*Derecha*) Cable de fibras ópticas iluminadas por un láser.

Figura 35.29 Construcción de una fibra óptica. La luz se desplaza en el núcleo que está rodeado por un revestimiento y un forro protector.

incidencia mayor al ángulo crítico. En este caso, la luz “rebota” a lo largo del núcleo de la fibra óptica, perdiendo muy poco de su intensidad a medida que se desplaza.

Cualquier pérdida de intensidad en una fibra óptica se debe en esencia a reflexiones de los dos extremos y a la absorción por el material de la fibra. Los dispositivos de fibras ópticas son particularmente útiles para ver objetos en lugares inaccesibles. Por ejemplo, los médicos a veces usan estos dispositivos para examinar órganos internos del cuerpo o para realizar cirugía sin necesidad de grandes incisiones. Los cables de fibra óptica hoy en día sustituyen el alambre de cobre y los cables coaxiales para telecomunicaciones debido a que las fibras llevan un volumen mucho mayor de llamadas telefónicas u otras formas de comunicación de lo que pueden hacerlo los alambres eléctricos.

Resumen

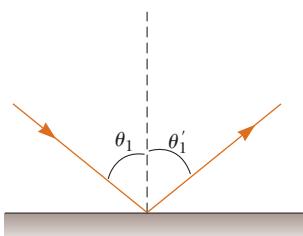
DEFINICIÓN

El **índice de refracción** n de un medio se define mediante la relación

$$n \equiv \frac{c}{v} \qquad \textbf{(35.4)}$$

donde c es la rapidez de la luz en un vacío y v es la rapidez de la luz en el medio.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

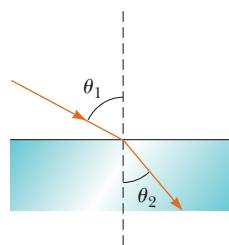
En óptica geométrica se usa la **aproximación de rayo**, en donde una onda viaja a través de un medio uniforme en líneas rectas en la dirección de los rayos.

La **reflexión interna total** se presenta cuando la luz viaja de un medio con alto índice de refracción a uno con menor índice de refracción. El **ángulo crítico** θ_c para el que se presenta la reflexión interna total en una interfaz se conoce por

$$\text{sen}\ \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{para } n_1 > n_2) \qquad \textbf{(35.10)}$$

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Onda bajo reflexión. La **ley de reflexión** afirma que, para un rayo de luz (u otro tipo de onda) incidente sobre una superficie uniforme, el ángulo de reflexión θ_1' es igual al ángulo de incidencia θ_1:

$$\theta_1' = \theta_1 \qquad \textbf{(35.2)}$$

Onda bajo refracción. Una onda que cruza una frontera conforme viaja del medio 1 al medio 2 se **refracta** o dobla. El ángulo de refracción θ_2 se relaciona con el ángulo incidente θ_1 mediante la correspondencia

$$\frac{\text{sen}\ \theta_2}{\text{sen}\ \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \qquad \textbf{(35.3)}$$

donde v_1 y v_2 son las magnitudes de velocidad de la onda en los medios 1 y 2, respectivamente. El rayo incidente, el rayo reflejado, el rayo refractado y la normal a la superficie se encuentran todos en el mismo plano.

Para ondas de luz, la **ley de refracción de Snell** afirma que

$$n_1\ \text{sen}\ \theta_1 = n_2\ \text{sen}\ \theta_2 \qquad \textbf{(35.8)}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción en los dos medios.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Por qué los astrónomos que observan galaxias distantes hablan de ver hacia atrás en el tiempo?

2. O ¿Cuál es el orden de magnitud del intervalo de tiempo requerido para que la luz viaje 10 km, como en el intento de Galileo para medir la rapidez de la luz? a) varios segundos, b) varios milisegundos, c) varios microsegundos, d) varios nanosegundos.

3. O En cada una de las siguientes situaciones, una onda pasa a través de una abertura en una pared absorbente. Clasifique las situaciones en orden de aquella donde la onda se describe mejor por la aproximación de rayo, a aquella donde la onda que pasa a través de la abertura se dispersa igual hacia todas las direcciones en el hemisferio más allá de la pared. a) El sonido de un silbato bajo a 1 kHz pasa a través de un portal de 1 m de ancho. b) Luz roja que pasa a través de la pupila de su ojo. c) Luz azul que pasa a través de la pupila de su ojo. d) La transmisión de onda de una estación de radio AM a través de un portal de 1 m de ancho. e) Un rayo X a través del espacio entre los huesos en la articulación de su codo.

4. Los escaparates de algunas tiendas de departamentos están ligeramente inclinados hacia adentro en la parte baja. Esto es para reducir el reflejo del alumbrado público o del Sol, que haría difícil que los compradores vieran lo que se exhibe dentro. Haga un bosquejo de un rayo de luz reflejándose en un escaparate para mostrar cómo es que funciona este principio.

5. Una persona lleva a una niña a dar un paseo por su vecindario. A ella le gusta escuchar los ecos en las casas cuando grita o aplaude con fuerza. Una casa con fachada plana y grande produce un eco si una persona está directamente frente a ella y a una distancia razonable. Haga un rápido dibujo de esta situación para explicar cómo se produce el eco; sombree el área donde usted debe estar ubicado para escuchar el eco. **¿Qué pasaría si?** La niña descubre que una casa con un diseño de piso en forma de L produce ecos si alguien se coloca en diversos puntos. Usted puede estar en un lugar razonablemente distante desde el cual es posible ver la esquina interior. Explique el eco en este caso y trace otro diagrama para hacer comparaciones. **¿Qué pasaría si?** Las dos alas de la casa no están perpendiculares entre sí. ¿La persona y la niña, de pie juntas, escuchan los ecos? **¿Qué pasaría si?** Una casa rectangular y su cochera tienen paredes perpendiculares que formarían una esquina interna pero tienen un pasaje abierto y techado entre ellas de tal modo que las paredes no se unen. Esta estructura, ¿producirá ecos intensos si las personas se colocan en una amplia variedad de lugares? Explique sus respuestas con diagramas.

6. El avión casa furtivo F-117A (figura P35.6) está específicamente diseñado para *no* retrorreflectarse en un radar. ¿Qué aspectos de su diseño sirven para lograr esto? *Sugerencia:* conteste la pregunta anterior para poder responder ésta. Observe que la parte inferior del avión es plana y que todos los paneles planos exteriores se forman en ángulos impares.

Cortesía de U.S. Air Force, Langley Air Force Base.

Figura P35.6

7. O Una onda luminosa se mueve entre el medio 1 y el medio 2. ¿Cuáles de los siguientes son enunciados correctos que relacionan su rapidez, frecuencia y longitud de onda en los dos medios; los índices de refracción de los medios y los ángulos de incidencia y refracción? Elija todos los enunciados correctos. a) $v_1/\text{sen}\ \theta_1 = v_2/\text{sen}\ \theta_2$, b) $\csc\theta_1/n_1 = \csc\theta_2/n_2$, c) $\lambda_1/\text{sen}\ \theta_1 = \lambda_2/\text{sen}\ \theta_2$, d) $f_1/\text{sen}\ \theta_1 = f_2/\text{sen}\ \theta_2$, e) $n_1/\cos\theta_1 = n_2/\cos\theta_2$.

8. Las ondas sonoras tienen mucho en común con las ondas de luz, incluyendo las propiedades de reflexión y refracción. Dé ejemplos para estos fenómenos y las ondas de sonido.

9. Considere una luz que pasa de un medio a otro con un índice diferente de refracción. a) ¿La longitud de onda de la luz cambia? b) ¿Cambia la frecuencia? c) ¿Qué sucede con la rapidez? d) ¿La dirección siempre cambia?

10. Un rayo láser que pasa por una solución azucarada no homogénea sigue una trayectoria curva. Explique por qué.

11. O a) ¿La luz puede someterse a reflexión interna total en una interfaz uniforme entre aire y agua? Si es así, ¿en cuál medio debe viajar originalmente? b) ¿El sonido puede someterse a reflexión interna total en una interfaz uniforme entre aire y agua? Si es así, ¿en cuál medio debe viajar originalmente?

12. Explique por qué un diamante brilla más que un cristal de vidrio de la misma forma y tamaño.

13. La reflexión interna total se aplica en el periscopio de un submarino para permitir que los marineros "vean alrededor de las esquinas". En este aparato, se colocan dos prismas como se ve en la figura P35.13, de modo que un rayo de luz incidente sigue la trayectoria mostrada. Podrían usarse espejos plateados paralelos inclinados, pero los prismas de vidrio que no tengan superficies plateadas darán una luz de salida intensa. Proponga una explicación para esta mayor eficiencia.

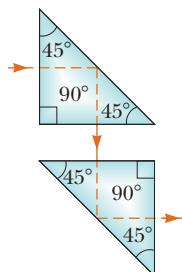



Figura P35.13

14. O Suponga que usted encuentra experimentalmente que dos colores de luz, A y B, que originalmente viajan en la misma dirección en aire se envían a través de un prisma de vidrio y A cambia de dirección más que B. ¿Cuál viaja más lentamente en el prisma, A o B? Alternativamente, ¿hay insuficiente información para determinar cuál se mueve más lentamente?

15. La retrorreflexión por esferas transparentes que se mencionó en el texto de la la sección 35.4 se puede observar con gotas de rocío; para hacerlo, observe la sombra de su cabeza sobre césped con rocío. Compare sus observaciones con las reacciones de otras dos personas. El artista del Renacimiento Benvenuto Cellini describió el fenómeno y la reacción en su *Autobiografía,* al final de la primera parte. El filósofo norteamericano Henry David Thoreau hizo lo mismo en *Walden,* "Baker Farm", párrafo dos. El despliegue óptico alrededor de la sombra de su cabeza se denomina *heiligenshein,* que en alemán significa *halo de luz.* Trate de encontrar una persona que haya visto el halo. ¿Qué piensa de esto?

16. ¿Cómo es posible que el círculo completo de un arco iris pueda verse a veces desde un avión? Con una escalera de tijera, un aspersor de prado y un día soleado, ¿cómo podría mostrarle el círculo completo a un niño?

17. En un restaurante, un trabajador usa gis de colores para escribir las especialidades diarias en un pizarrón iluminado con un reflector. En otro restaurante, un trabajador escribe con crayones de colores sobre una hoja plana y uniforme de plástico acrílico transparente con un índice de refracción 1.55. El panel cuelga enfrente de un trozo de fieltro negro. A lo largo de los bordes de la hoja, dentro de un canal opaco, se instalan pequeñas luces eléctricas brillantes. La figura P35.17 muestra un corte de la señal. Explique por qué los observadores en ambos restaurantes ven brillar las letras contra un fondo negro; también porqué la señal en el segundo restaurante puede usar menos energía de la compañía eléctrica que el pizarrón iluminado en el primer restaurante. ¿Cuál sería una buena elección para el índice de refracción del material en los crayones?

Figura P35.17

18. O El centro de una fibra óptica transmite luz con pérdida mínima si está rodeada, de qué? a) Agua, b) diamante, c) aire, d) vidrio, e) cuarzo fundido.

19. ¿Bajo qué condiciones se forma un espejismo? En un día caliente, ¿qué ve cuando observa "agua en el camino"?

Problemas

Sección 35.1 Naturaleza de la luz

Sección 35.2 Mediciones de la rapidez de la luz

1. Los astronautas del *Apollo 11* colocaron un panel de retrorreflectores de esquinas cúbicas eficientes en la superficie de la Luna. La rapidez de la luz se deduce al medir el intervalo de tiempo necesario para que un láser se dirija desde la Tierra, se refleje en el panel y regrese a la Tierra. Suponga que la medición de este intervalo es 2.51 s a la estación cuando la Luna está en su cenit. ¿Cuál es la rapidez medida de la luz? Considere la distancia de centro a centro de la Tierra a la Luna en 3.84×10^8 m/s? Explique si es necesario tomar en cuenta los tamaños de la Tierra y de la Luna en sus cálculos.

2. Como resultado de sus observaciones, Roemer concluyó que los eclipses de Io por Júpiter se retardaban 22 minutos, durante un periodo de seis meses, a medida que la Tierra se movía del punto en su órbita en donde está más cerca de Júpiter al punto diametralmente opuesto donde está más lejos. Con 1.50×10^8 km como el radio promedio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, calcule la rapidez de la luz a partir de estos datos.

3. En un experimento para medir la rapidez de la luz usando el aparato de Fizeau (véase la figura 35.2), la distancia entre la fuente de luz y un espejo fue de 11.45 km y la rueda tenía 720 ranuras. El experimento determinó el valor de c en 2.998×10^8 m/s. Calcule la rapidez angular mínima de la rueda para este experimento.

Sección 35.3 Aproximación de un rayo en óptica geométrica

Sección 35.4 La onda bajo reflexión

Sección 35.5 La onda bajo refracción

Nota: Usted puede buscar índices de refracción en la tabla 35.1.

4. Un salón de baile se construye sin columnas y con un plafón horizontal a 7.20 m sobre el piso. Un espejo plano se sujeta contra una sección del plafón. Después de un temblor, el espejo sigue en su lugar y no está roto. Un ingeniero hace una rápida revisión del plafón para ver si está hundido, dirigiendo un rayo láser vertical en el espejo y observando su reflexión en el piso. a) Demuestre que si el espejo gira para formar un ángulo ϕ con la horizontal, la normal al espejo forma un ángulo ϕ con la vertical. b) Demuestre que la luz láser reflejada forma un ángulo de 2ϕ con la vertical. c) Si la luz láser reflejada forma un punto en el piso a 1.40 cm de distancia del punto vertical debajo del láser, encuentre el ángulo ϕ.

5. Los dos espejos que se ilustran en la figura P35.5 forman un ángulo recto. El rayo de luz del plano vertical P incide en el espejo 1, como se muestra. a) Determine la distancia que el rayo reflejado recorre antes de incidir en el espejo 2. b) ¿En qué dirección se mueve el rayo de luz después de ser reflejado desde el espejo 2?

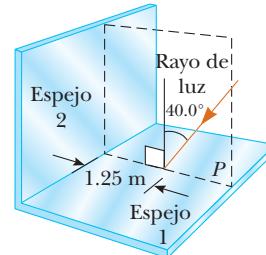



Figura P35.5

6. Dos espejos rectangulares planos, ambos perpendiculares a una hoja de papel horizontal, se colocan borde a borde, con sus superficies reflectoras perpendiculares entre sí. a) Un rayo de luz en el plano del papel incide en uno de los espejos a un ángulo arbitrario de incidencia θ_1. Demuestre que la dirección final del rayo, después de la reflexión desde ambos espejos, es opuesta a su dirección inicial. En una tienda de ropa, este par de espejos le muestra a una persona una imagen de sí misma cuando otras la ven, sin inversión aparente de izquierda a derecha. b) **¿Qué pasaría si?** El papel es sustituido por un tercer espejo plano que toca los bordes de los otros dos y se coloca perpendicular a ambos. El conjunto de tres espejos se llama *reflector de esquina de cubo*. Un rayo de luz incide desde cualquier dirección dentro del octante del espacio limitado por las superficies reflectoras. Demuestre que el rayo se reflejará una vez desde cada espejo y que su dirección final será opuesta a su dirección original. Los astronautas del *Apollo 11* colocaron un panel de retrorreflectores de esquina de cubo en la Luna. El análisis de los datos de sincronización tomados

con ese panel revela que el radio de la órbita de la Luna está aumentando en una proporción de 3.8 cm/año, dado que pierde energía cinética debido a la fricción de las mareas.

7. La distancia de una lámpara desde un espejo plano grande es el doble de la distancia de una persona al espejo plano. La luz de la lámpara llega a esta persona por dos trayectorias. Se mueve al espejo a un ángulo de incidencia θ, y se refleja del espejo a la persona. También se mueve directamente a ella sin reflejarse en el espejo. La distancia total recorrida por la luz en el primer caso es el doble de la distancia recorrida por la luz en el segundo. Encuentre el valor del ángulo θ.

8. Dos pulsos de luz son emitidos simultáneamente desde una fuente. Ambos viajan a un detector, pero unos espejos desvían un pulso a lo largo de una trayectoria que lo lleva a través de 6.20 m de hielo a lo largo del camino. Determine la diferencia en los tiempos de llegada de los pulsos al detector.

9. Un angosto rayo de luz amarilla de sodio, con longitud de onda de 589 nm en el vacío, incide desde el aire sobre una superficie uniforme de agua a un ángulo de incidencia de 35.0°. Determine el ángulo de refracción y la longitud de onda de la luz en el agua.

10. ● Una onda sonora plana en aire a 20°C, con longitud de 589 mm, incide sobre una superficie uniforme de agua a 25°C a un ángulo de incidencia de 3.50°. Determine el ángulo de refracción para la onda sonora y la longitud de onda del sonido en el agua. Compare y contraste el comportamiento del sonido en este problema con el comportamiento de la luz en el problema 9.

11. Un buceador con equipo autónomo ve el Sol a un ángulo aparente de 45.0° sobre el horizonte. ¿Cuál es el verdadero ángulo de elevación del Sol sobre el horizonte?

12. La longitud de onda de luz láser roja de helio-neón en el aire es de 632.8 nm. a) ¿Cuál es la frecuencia? b) ¿Cuál es la longitud de onda en un vidrio que tiene un índice de refracción de 1.50? c) ¿Cuál es su rapidez en el vidrio?

13. Un rayo de luz incide sobre la superficie plana de un bloque de vidrio sin plomo que está rodeado de agua. El ángulo de refracción es de 19.6°. Encuentre el ángulo de reflexión.

14. Un haz láser con longitud de onda en el vacío de 632.8 nm incide desde aire en un bloque de lucite, como se muestra en la figura 35.10b. La línea de visión del fotógrafo es perpendicular al plano donde se mueve la luz. Encuentre a) la rapidez, b) la frecuencia y c) la longitud de onda de la luz en el lucite. *Sugerencia:* Use un transportador.

15. Encuentre la rapidez de la luz en a) vidrio con plomo, b) agua y c) circonio cúbico.

16. Un estrecho haz de ondas ultrasónicas se refleja del tumor hepático que se ilustra en la figura P35.16. La rapidez de la onda es 10.0% menor en el hígado que en el medio circundante. Determine a qué profundidad se encuentra el tumor.

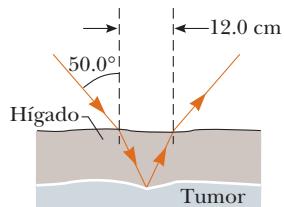



Figura P35.16

17. Un rayo de luz incide sobre un bloque plano de vidrio (n = 1.50) de 2.00 cm de grueso en un ángulo de 30.0° con la normal. Trace el rayo de luz a través del vidrio y encuentre los ángulos de incidencia y refracción en cada superficie.

18. Un tanque cilíndrico opaco con la parte superior abierta tiene un diámetro de 3.00 m y está completamente lleno de agua. Cuando el Sol de la tarde llega a un ángulo de 28.0° sobre el horizonte, la luz solar deja de iluminar cualquier parte del fondo del tanque. ¿Cuál es la profundidad del tanque?

19. Cuando la luz que se ve en la figura P35.19 pasa por el bloque de vidrio, se desplaza lateralmente una distancia d. Tome n = 1.50 y encuentre el valor de d.

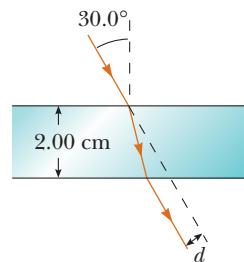



Figura P35.19

20. Encuentre el intervalo de tiempo necesario para que la luz pase por el bloque de vidrio descrito en el problema 19.

21. El haz de luz que se muestra en la figura P35.21 forma un ángulo de 20.0° con la línea normal NN' en el aceite de linaza. Determine los ángulos θ y θ'. (El índice de refracción del aceite de linaza es 1.48.)

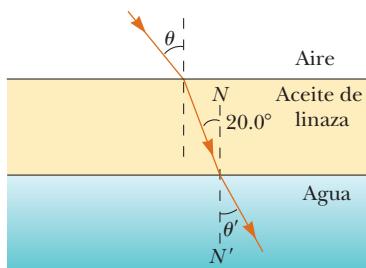



Figura P35.21

22. Tres láminas de plástico tienen índices de refracción desconocidos. La lámina 1 está colocada sobre la hoja 2 y un rayo láser es dirigido sobre las láminas desde arriba, de modo que incide en la interfase a un ángulo de 26.5° con la normal. El rayo refractado en la hoja 2 forma un ángulo de 31.7° con la normal. El experimento se repite con la hoja 3 colocada sobre la hoja 2, y, con el mismo ángulo de incidencia, el rayo refractado forma un ángulo de 36.7° con la normal. Si el experimento se repite de nuevo con la hoja 1 sobre la hoja 3, ¿cuál es el ángulo de refracción esperado en la hoja 3? Suponga el mismo ángulo de incidencia.

23. ● Considere la luz que pasa de aire a cristal con plomo. a) ¿Es posible que el componente de su velocidad perpendicular a la interfaz permanezca constante? Explique su respuesta. b) **¿Qué pasaría si?** ¿El componente de velocidad paralelo a la interfaz puede permanecer constante durante la refracción? Explique su respuesta.

24. Cuando mira por una ventana, ¿cuánto se retarda la luz que ve en pasar por vidrio en lugar de aire? Haga una estimación del orden de magnitud con base en los datos que usted especifique. ¿Cuántas longitudes de onda se retrasa?

25. Un prisma que tiene un ángulo en el ápice de 50.0° está hecho de circonio cúbico, con $n = 2.20$. ¿Cuál es su ángulo de desviación mínima?

26. Una luz de 700 nm de longitud de onda incide sobre la cara de un prisma de cuarzo fundido a un ángulo de 75.0° de respecto (la normal a la superficie). El ángulo en el ápice del prisma es de 60.0°. Utilice el valor de n de la figura 35.21 y calcule el ángulo a) de refracción en esta primera superficie, b) de incidencia en la segunda superficie, c) de refracción en la segunda superficie y d) entre los rayos incidente y emergente.

27. Un prisma triangular de vidrio con ángulo en el ápice $\Phi = 60.0°$ tiene un índice de refracción de $n = 1.50$ (figura P35.27). ¿Cuál es el ángulo de incidencia mínimo θ_1 en el que un rayo de luz puede emerger desde el otro lado?

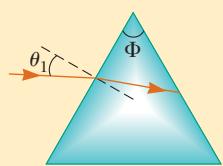
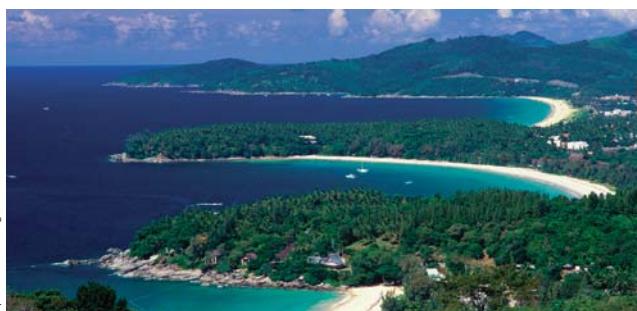



Figura P35.27 Problemas 27 y 28.

28. Un prisma triangular de vidrio con ángulo en el ápice Φ tiene un índice de refracción n. (Véase la figura P35.27.) ¿Cuál es el ángulo de incidencia mínima θ_1 en el que un rayo de luz puede emerger desde el otro lado?

29. Un prisma triangular de vidrio con ángulo en el ápice de 60.0° tiene un índice de refracción de 1.50. a) Demuestre que si su ángulo de incidencia sobre la primera superficie es $\theta_1 = 48.6°$ s, la luz pasará simétricamente por el prisma, como se muestra en la figura 35.17. b) Encuentre el ángulo de desviación $\delta_{mín}$ para $\theta_1 = 48.6°$. c) **¿Qué pasaría si?** Encuentre el ángulo de desviación si el ángulo de incidencia sobre la primera superficie es de 45.6°. d) Encuentre el ángulo de desviación si $\theta_1 = 51.6°$.

Sección 35.6 Principio de Huygens

30. La rapidez de una ola de agua se describe por $v = \sqrt{gd}$, donde d es la profundidad del agua, que se supone pequeña en comparación con la longitud de la ola. Ya que cambia su rapidez, las olas se refractan cuando se mueven en una región de profundidad diferente. Trace el mapa de la playa de un océano en el lado oriente de la masa de tierra. Muestre las líneas de contorno de profundidad constante bajo el agua, si se trata de una pendiente razonablemente uniforme. a) Suponga que las olas se aproximan a la costa desde una tormenta situada a lo lejos hacia el norte-noreste. Demuestre que las olas se moverán en forma casi perpendicular a la orilla cuando lleguen a la playa. b) Trace un mapa de una costa con bahías y puntas alternadas, como se sugiere en la figura P35.30. Calcule de

Ray Atkeson/Image Archive.

Figura P35.30

nuevo la forma de las líneas de contorno de profundidad constante. Suponga olas que se aproximan a la costa, que llevan energía con densidad uniforme a lo largo de frentes de onda originalmente rectos. Demuestre que la energía que llega a la orilla se concentra en las puntas y tiene menos intensidad en las bahías.

Sección 35.7 Dispersión

31. El índice de refracción para luz violeta en vidrio de piedra sílice es 1.66, y el de luz roja es 1.62. ¿Cuál es la dispersión angular de luz visible que pasa por un prisma de ángulo en el ápice de 60.0° si el ángulo de incidencia es de 50.0°? (Véase la figura P35.31.)

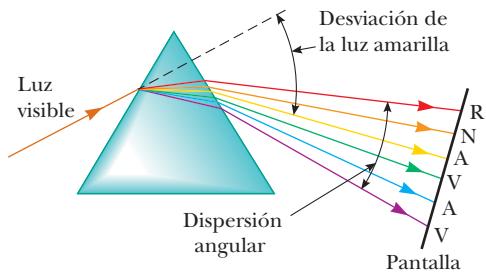



Figura P35.31

32. Un angosto rayo de luz blanca incide sobre un bloque de cuarzo fundido a un ángulo de 30.0°. Encuentre la dispersión angular del rayo de luz dentro del cuarzo debido a la dispersión.

Sección 35.8 Reflexión interna total

33. Calcule el ángulo crítico de una luz de 589 nm, para los siguientes materiales rodeados por aire: a) diamante, b) vidrio con plomo y c) hielo.

34. Una fibra de vidrio (n = 1.50) es sumergida en agua (n = 1.33). ¿Cuál es el ángulo crítico para que la luz permanezca dentro de la fibra óptica?

35. Considere un espejismo común formado por aire sobrecalentado en una carretera. El conductor de un camión, cuyos ojos están a 2.00 m sobre el pavimento, donde n = 1.000 3, mira hacia delante. Percibe la ilusión de un charco de agua adelante en el camino, donde su línea de vista forma un ángulo de 1.20° bajo la horizontal. Encuentre el índice de refracción del aire que está apenas por encima de la superficie del camino. (*Sugerencia:* considere éste como un problema en reflexión interna total.)

36. Determine el ángulo máximo θ en el que rayos de luz, que inciden sobre el extremo del tubo de la figura P35.36, están sometidos a reflexión interna total a lo largo de las paredes del tubo. Suponga que el tubo tiene un índice de refracción de 1.36 y el medio exterior es aire. Su respuesta define el tamaño del *cono de aceptación* para la tubería de luz.

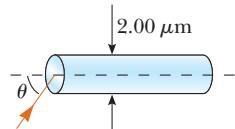



Figura P35.36

37. ● Una fibra óptica tiene un índice de refracción n y un diámetro d, y está rodeada por aire. Se envía luz por la fibra a lo largo de su eje, como se ve en la figura P35.37. a) Encuentre el mínimo radio exterior R permitido para una curva en la fibra si no ha de escapar luz. b) **¿Qué pasaría si?** El resultado del inciso a), ¿pronostica un comportamiento razonable cuando d se aproxima a cero, cuando n aumenta, o cuando n se aproxima a 1? c) Evalúe R si el diámetro de la fibra es 100 μm y su índice de refracción es 1.40.

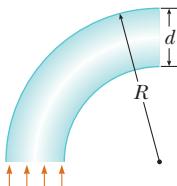



Figura P35.37

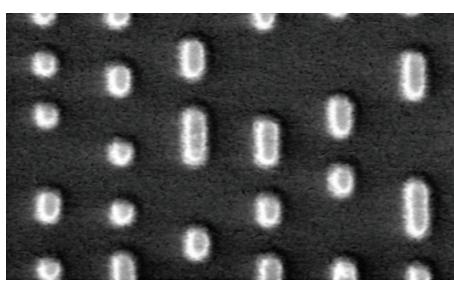
38. ● Una habitación, en la cual la rapidez del sonido es 343 m/s, contiene aire. Las paredes están hechas de concreto, en el que la rapidez del sonido es 1 850 m/s. a) Encuentre el ángulo crítico para la reflexión interna total del sonido en la frontera entre el concreto y el aire. b) ¿En qué medio debe moverse el sonido para someterce a una reflexión interna total? c) "Una pared de concreto desnudo es un espejo altamente eficiente para el sonido." Dé argumentos a favor o en contra de este enunciado.

39. ● Hacia 1965, ingenieros de la Toro Company inventaron un medidor de gasolina para motores pequeños, que se muestra en forma de diagrama en la figura P35.39. El medidor no tiene partes móviles. Está formado por una placa plana de material plástico transparente que se ajusta verticalmente en una ranura en el tapón del tanque de gasolina. Ninguna parte del plástico tiene recubrimiento reflector. El plástico sobresale de la parte superior horizontal, hacia abajo, casi al fondo del tanque opaco. Su borde inferior está cortado con facetas que forman ángulos de 45° con la horizontal. El operador de una podadora de jardín observa desde arriba una frontera entre brillante y oscuro en el medidor. La ubicación de la frontera, de un lado a otro del ancho del plástico, indica la cantidad de gasolina del tanque. Explique cómo funciona el medidor. Mencione los requisitos del diseño, si los hay, para el índice de refracción del plástico.

Figura P35.39

41. ● La figura P35.41a muestra un adorno de escritorio en forma de globo que contiene una fotografía. La fotografía plana está en el aire, dentro de una ranura vertical situada detrás de un compartimiento lleno de agua que tiene forma de la mitad de un cilindro. Suponga que usted mira al centro de la fotografía y luego hace girar el globo alrededor de un eje vertical; descubre que el centro de la fotografía desaparece cuando hace girar el globo más de cierto ángulo máximo (figura P35.41b). Tome en cuenta este fenómeno y calcule el ángulo máximo. Describa brevemente lo que vería si hiciera girar el globo más allá de este ángulo.

a) b)

Figura P35.41

Problemas adicionales

40. Un videodisco digital registra información en una pista espiral de aproximadamente 1 μm de ancho. La pista consiste en una serie de fosos (*pits*) en la capa de información (figura P35.40a) que dispersan la luz de un haz láser que se enfoca con precisión sobre ellos. El láser brilla a través del plástico transparente de grosor t = 1.20 mm e índice de refracción 1.55 (figura P35.40b). Suponga que el ancho del haz láser en la capa de información debe ser a = 1.00 μm para leer sólo desde una pista y no desde sus vecinas; además de que el ancho del haz cuando entra en el plástico transparente desde abajo es w = 0.700 mm. Una lente hace que el haz converja en un cono con un ángulo ápice $2\theta_1$ antes de ingresar en el videodisco. Encuentre el ángulo de incidencia θ_1 de la luz en el borde del haz cónico. Este diseño es relativamente inmune a pequeñas partículas de polvo que degradan la calidad del video. Las partículas en la superficie plástica tendría que ser de 0.7 mm para oscurecer el haz.

a)

b)

Figura P35.40

42. ● Un rayo de luz entra a la atmósfera de un planeta y desciende verticalmente a la superficie que está una distancia h hacia abajo. El índice de refracción donde la luz entra a la atmósfera es de 1.000, y aumenta linealmente con la distancia a la superficie, donde tiene un valor de n. a) ¿Cuánto tarda el rayo en recorrer esta trayectoria? b) Compare esto con el intervalo necesario en la ausencia de una atmósfera.

43. Un angosto rayo de luz incide desde el aire sobre la superficie de vidrio con un índice de refracción de 1.56. Encuentre el ángulo de incidencia en que el correspondiente ángulo de refracción sea la mitad del ángulo de incidencia. (*Sugerencia:* usted puede usar la identidad trigonométrica sen 2θ = 2 sen θ cos θ.)

44. a). Considere una interfase horizontal entre el aire por encima de un vidrio de índice 1.55. Trace un rayo de luz que incide desde el aire a un ángulo de incidencia de 30.0°. Determine los ángulos de los rayos reflejado y refractado e indíquelos en el diagrama. b) **¿Qué pasaría si?** El rayo de luz incide desde el vidrio a un ángulo de incidencia de 30.0°. Determine los ángulos de los rayos reflejado y refractado y señale los tres rayos en un nuevo diagrama. c) Para rayos que inciden desde el aire sobre la superficie de aire-vidrio, determine y tabule los ángulos de reflexión y refracción para todos los ángulos de incidencia a intervalos de 10.0° desde 0° hasta 90.0°. d) Haga

lo mismo para rayos de luz que suben a la interfase a través del vidrio.

45. La pequeña luz subacuática de una piscina está a 1.00 m por debajo de la superficie. La luz que emerge del agua forma un círculo sobre la superficie. ¿Cuál es el diámetro de este círculo?

46. Las paredes de la celda de una prisión están perpendiculares a las cuatro direcciones cardinales de la brújula. En el primer día de primavera, la luz del sol naciente entra a una ventana rectangular en la pared oriente. La luz recorre 2.37 m horizontalmente para aparecer en forma perpendicular en la pared opuesta a la ventana. Un joven prisionero observa el área iluminada que se mueve en esta pared poniente y por primera vez se forma su propia idea de la rotación de la Tierra. a) ¿Con qué rapidez se mueve el rectángulo iluminado? b) El prisionero sostiene un pequeño espejo cuadrado contra la pared en una esquina del rectángulo de luz. El espejo refleja luz directamente hacia su origen a un lugar en la pared oriente muy cerca de la ventana. ¿Con qué rapidez se mueve el cuadrado de luz de menor tamaño en esa pared? c) Visto desde una latitud de 40.0° al norte, el Sol naciente se traslada en el cielo a lo largo de una línea que forma un ángulo de 50.0° con el horizonte del sureste. ¿En qué dirección se mueve el rectángulo de luz en la pared poniente de la celda del prisionero? d) ¿En qué dirección se mueve el cuadrado de luz más pequeño en la pared oriente?

47. Un montañista está de pie en el pico de una montaña aislada cerca de la hora de la puesta de Sol y observa un arco iris causado por gotitas de agua en el aire a 8.00 km de distancia. El valle está 2.00 km abajo del pico de la montaña y es enteramente plano. ¿Qué fracción del arco completo del arco iris es visible por el montañista? (Véase la figura 35.24.)

48. La figura P35.48 muestra una vista superior de un cerco cuadrado. Las superficies interiores son espejos planos. Un rayo de luz entra por un pequeño agujero en el centro de un espejo. a) ¿A qué ángulo θ debe entrar el rayo para salir por el agujero después de ser reflejado una vez por cada uno de los otros tres espejos? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Existen otros valores de θ en los cuales el rayo pueda salir después de reflexiones múltiples? Si es así, dibuje las trayectorias de uno de los rayos.

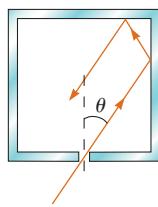



Figura P35.48

49. Un rayo láser incide en el extremo de una placa de material, como se ve en la figura P35.49. El índice de refracción de la placa es 1.48. Determine el número de reflexiones internas del rayo antes de que salga por el extremo opuesto de la placa.

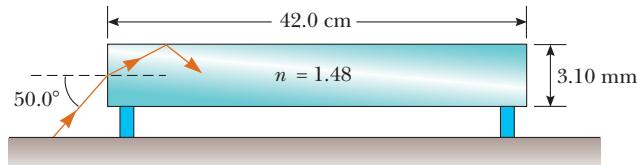



Figura P35.49

50. Un poste de 4.00 m de largo está colocado verticalmente en un lago que tiene una profundidad de 2.00 m. El Sol está 40.0° sobre la horizontal. Determine la longitud de la sombra del poste en el fondo del lago. Tome el índice de refracción del agua como 1.33.

51. El rayo de luz de la figura P35.51 incide sobre la superficie 2 en el ángulo crítico. Determine el ángulo de incidencia θ_1.

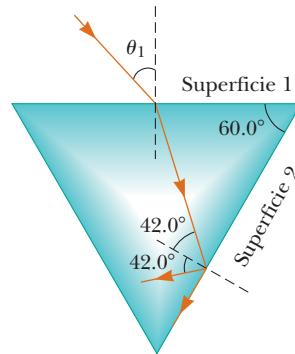



Figura P35.51

52. Los constructores usan un instrumento de nivelación en el que el haz proveniente de un láser fijo de helio-neón se refleja en un plano horizontal desde un pequeño espejo plano montado sobre un eje giratorio vertical. La luz es suficientemente brillante y la rapidez de rotación es suficientemente alta como para que la luz reflejada aparezca como una línea horizontal, dondequiera que caiga sobre una pared. a) Suponga que el espejo está en el centro de un elevador de grano circular de 3.00 m de radio. El espejo gira con velocidad angular constante de 35.0 rad/s. Encuentre la rapidez del punto de luz láser sobre la pared curva. b) Ahora suponga que el espejo giratorio está a una distancia perpendicular de 3.00 m desde el punto O sobre una larga pared plana vertical. Cuando el punto de luz láser sobre la pared está a una distancia x desde el punto O, ¿cuál es su rapidez? c) ¿Cuál es el valor mínimo para la rapidez? ¿Cuál valor de x le corresponde? ¿Cómo se compara la rapidez mínima con la rapidez que encontró en el inciso a)? d) ¿Cuál es la rapidez máxima del punto sobre la pared plana? e) ¿En qué intervalo de tiempo el punto cambia de su rapidez mínima a su máxima?

53. ● Un rayo de luz de 589 nm de longitud de onda incide a un ángulo θ sobre la superficie superior de un bloque de poliestireno, como se observa en la figura P35.53. a) Encuentre el valor máximo de θ para el cual el rayo refractado experimenta reflexión interna total en la cara vertical izquierda del bloque. **¿Qué pasaría si?** Repita el cálculo para el caso en que el bloque de poliestireno se encuentre inmerso en b) agua y c) disulfuro de carbono. Se requiere que explique sus respuestas.

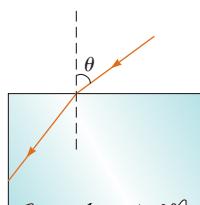



Figura P35.53

54. ● Conforme la luz solar entra a la atmósfera de la Tierra, cambia de dirección debido a la pequeña diferencia entre las rapideces de la luz en el vacío y en el aire. La duración de un día *óptico* se define como el intervalo de tiempo entre el instante en que la parte superior del Sol naciente es apenas visible sobre el horizonte y el instante en que la parte superior del Sol apenas desaparece bajo el plano horizontal. La duración del día *geométrico* se define como el intervalo de tiempo entre el instante en que una línea matemáticamente recta entre un observador y la parte superior del Sol apenas clarea el horizonte y el instante en que esta línea apenas se hunde bajo el horizonte. a) Explique cuál es más largo, un día óptico o un día geométrico. b) Encuentre la diferencia entre estos dos intervalos de tiempo. Modele la atmósfera de la Tierra como uniforme, con índice de refracción 1.000 293, una superficie superior definida con precisión y 8 614 m de profundidad. Suponga que el observador está en el ecuador de la Tierra de modo que la trayectoria aparente del Sol naciente y poniente es perpendicular al horizonte.

55. Un plato profundo de vidrio mide 4.00 cm de ancho en el fondo, como se ve en la figura P35.55. Cuando la mirada se coloca como en la figura, se observa el borde del fondo del plato vacío; si el plato es llenado con agua, el observador logra ver el centro del fondo del plato. Encuentre la altura del plato.

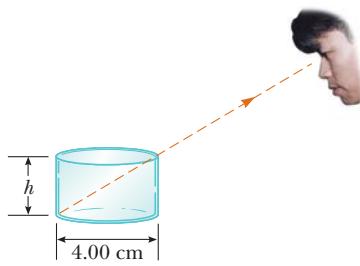



Figura P35.55

56. Un rayo de luz pasa de aire a agua. Para que su ángulo de desviación $\delta = |\theta_1 - \theta_2|$ sea de 10.0°, ¿cuál debe ser su ángulo de incidencia?

57. Un material que tiene un índice de refracción n está rodeado por vacío y tiene la forma de un cuarto de círculo de radio R (figura P35.57). Un rayo de luz paralelo a la base del material incide desde la izquierda a una distancia L por encima de la base y emerge desde el material a un ángulo θ. Determine una expresión para θ.

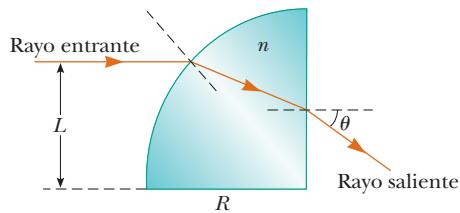



Figura P35.57

58. *Principio de Fermat.* Pierre de Fermat (1601-1665) demostró que siempre que la luz viaja desde un punto a otro su trayectoria real es la que requiere el intervalo de tiempo más pequeño. El ejemplo más simple es para la luz que se propaga en un medio homogéneo; ahí la luz se mueve en una línea recta porque una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. Deducir la ley de refracción de Snell a partir del principio de Fermat. Proceda del modo siguiente: en la figura P35.58, un rayo de luz viaja del punto P en el medio 1 al punto Q en el medio 2. Los dos puntos están respectivamente a las distancias perpendiculares a y b de la interfaz. El desplazamiento de P a Q tiene el componente d paralelo a la interfaz y se considera que x representa la coordenada del punto donde el rayo entra al segundo medio. Sea $t = 0$ el instante cuando la luz parte de P. a) Demuestre que el tiempo cuando la luz llega a Q es

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{n_1\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c}$$

b) Para obtener el valor de x para el que t tiene su valor mínimo, derive t respecto a x e iguale la derivada a cero. Demuestre que el resultado implica

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{n_2(d - x)}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

c) Demuestre que esta expresión, a su vez, da la ley de Snell

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

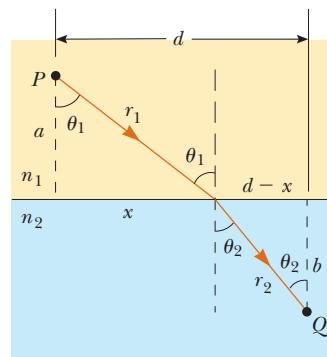



Figura P35.58

59. Consulte el problema 58 para el enunciado del principio de Fermat de tiempo mínimo. Derive la ley de reflexión (ecuación 35.2) a partir del principio de Fermat.

60. Un cilindro transparente con un radio $R = 2.00$ m tiene una superficie de espejo en su mitad derecha, como se muestra en la figura P35.60. Un rayo de luz que se desplaza en el aire incide sobre el lado izquierdo del cilindro. El rayo de luz incidente y el rayo de luz saliente son paralelos y $d = 2.00$ m. Determine el índice de refracción del material.

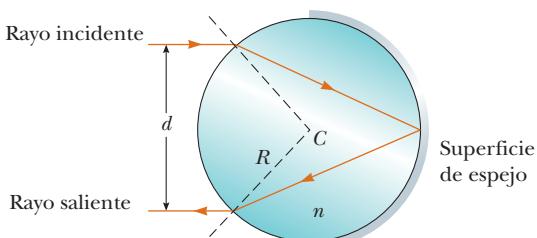



Figura P35.60

61. Suponga que una esfera luminosa de radio R_1 (por ejemplo el Sol) está rodeada por una atmósfera uniforme de radio R_2 y un índice de refracción n. Cuando la esfera se observa desde lejos en el vacío, ¿cuál es su radio aparente? Usted necesitará distinguir entre los dos casos a) $R_2 > nR_1$ y b) $R_2 < nR_1$.

62. ● El método de A. H. Pfund para medir el índice de refracción de un vidrio se ilustra en la figura P35.62. Una de las caras de una placa de grosor t se pinta de blanco, y un pequeño agujero perforado transparente en el punto P sirve como fuente de rayos divergentes cuando la placa se ilumina desde abajo. El rayo PBB' incide en la superficie transparente con ángulo crítico y se refleja en su totalidad, así como los rayos PCC'. Los rayos PAA' emergen de la superficie transparente. En la superficie pintada aparece un círculo oscuro de diámetro d, rodeado por una región iluminada, o halo. a) Deduzca una ecuación para hallar n en términos de las cantidades medidas d y t. b) ¿Cuál es el

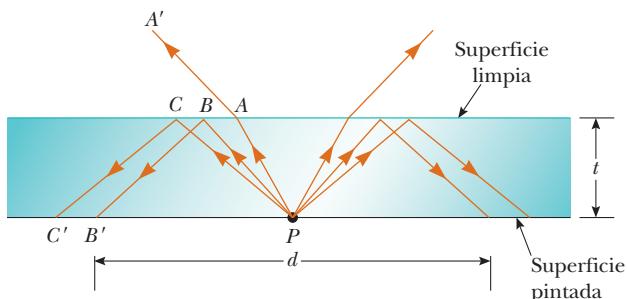



Figura P35.62

diámetro del círculo oscuro si $n = 1.52$ para una placa de 0.600 cm de espesor? c) Si se usa luz blanca, la dispersión ocasiona que el ángulo crítico dependa del color. El borde interior del halo blanco, ¿está teñido de luz roja o de luz violeta? Explique.

63. Un rayo de luz entra a un bloque rectangular de plástico en un ángulo $\theta_1 = 45.0°$ y emerge a un ángulo $\theta_2 = 76.0°$, como se ilustra en la figura P35.63. a) Determine el índice de refracción del plástico. b) Si el rayo de luz entra al plástico en un punto $L = 50.0$ cm del borde del fondo, ¿cuánto tarda en pasar por el plástico?

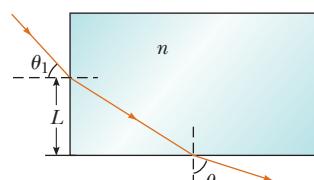



Figura P35.63

64. ● Unos estudiantes permiten que un rayo de luz láser incida sobre una superficie de agua. Se las ingenian para medir el ángulo de refracción para ángulos de incidencia seleccionados y registran los datos que se muestran en la tabla siguiente. Utilice los datos para comprobar la ley de la refracción de Snell graficando el seno del ángulo de incidencia con el seno del ángulo de refracción. Explique qué muestra la forma de la gráfica. Utilice la gráfica resultante para deducir el índice de refracción del agua, explique como lo hizo.

Ángulo de incidencia (grados)	Ángulo de refracción (grados)
10.0	7.5
20.0	15.1
30.0	22.3
40.0	28.7
50.0	35.2
60.0	40.3
70.0	45.3
80.0	47.7

65. **Problema de repaso**. Con frecuencia, un espejo se "platea" con aluminio. Al ajustar el grosor de la película metálica, uno puede convertir una hoja de vidrio en un espejo que refleje cualquier cosa entre, por decir, 3 y 98% de la luz incidente, y transmita el resto. Pruebe que es imposible construir un "espejo de una sola vía" que reflejaría 90% de las ondas electromagnéticas incidentes de un lado y reflejaría 10% de las incidentes del otro lado. *Sugerencia:* use el enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica.

Respuestas a las preguntas rápidas

35.1 d) Los rayos de luz provenientes de la cara de un actor deben reflejarse del espejo y entrar en la cámara. Si estos rayos de luz se invierten, la luz de la cámara se refleja en el espejo y entra en los ojos del actor.

35.2 Los rayos ② y ④ se reflejan; los rayos ③ y ⑤ se refractan.

35.3 c) Debido a que la luz entra a un material con índice de refracción menor, la rapidez de la luz es más alta y se dobla alejándose de la normal.

35.4 c) La lente ideal de una cámara tendría un índice de refracción que no varía con la longitud de onda, de modo que todos los colores serían doblados al mismo ángulo por la lente. De las tres opciones, el cuarzo fundido tiene la menor variación en n en el espectro visible. Un diseñador de lentes puede hacerlo incluso mejor al apilar juntos dos lentes de diferentes materiales para hacer un *doblete acromático*.

35.5 **i)**, b) Los dos rayos brillantes que salen del fondo del prisma a la derecha de la figura 35.26 resultan de la reflexión interna total en la cara derecha del prisma. Observe que no hay luz refractada que salga del lado inclinado para estos rayos. La luz de los otros tres rayos se divide en partes reflejadas y refractadas. **ii)** b) La rotación del prisma en sentido contrario al de las manecillas del reloj provoca que los rayos caigan en el lado inclinado del prisma a un ángulo mayor. Cuando los cinco rayos caen a un ángulo más grande que el ángulo crítico, todos se someten a reflexión interna total.

Los rayos luminosos provenientes de las hojas que están en segundo plano de esta escena no forman una imagen enfocada sobre el plano de la película de la cámara con que se tomó esta fotografía. En consecuencia, el fondo se ve extremadamente borroso. Sin embargo, los rayos de luz que pasan a través de la gota de lluvia, han sido modificados para formar sobre la película una imagen enfocada de las hojas del segundo plano. En este capítulo se analiza la formación de imágenes cuando los rayos de luz se reflejan de los espejos y se refractan al pasar por lentes. (Don Hammond/CORBIS)

36 Formación de las imágenes

El presente capítulo se ocupa de las imágenes que resultan cuando los rayos luminosos inciden sobre superficies planas y curvas. Las imágenes se forman, ya sea por reflexión o por refracción, y es posible diseñar espejos y lentes para formar imágenes que tengan las características que desee. Se continúa con el uso de la aproximación de rayo y el supuesto de que la luz viaja en línea recta. Estas dos etapas conducen a predicciones válidas en el campo conocido como *óptica geométrica*. En capítulos sucesivos se ocupará de los efectos de la interferencia y de la difracción, que son los temas de estudio de la *óptica ondulatoria*.

36.1 Imágenes formadas por espejos planos

Es posible comprender la formación de imágenes en los espejos a partir del análisis de los rayos de luz que siguen el modelo de onda bajo reflexión. Empecemos con la consideración del espejo más simple posible: el espejo plano. Imagine una fuente puntual de luz colocada en O en la figura 36.1, a una distancia p frente a un espejo plano. La distancia p se conoce como **distancia objeto.** Los rayos luminosos divergentes que salen de la fuente son reflejados por el espejo. Después de reflejarse, los rayos siguen un proceso de divergencia. Las líneas discontinuas de la figura 36.1 son extensiones de los rayos divergentes hacia atrás, hasta un punto de intersección en I. Para el observador parece que los rayos divergentes surgen del punto I detrás del espejo. El punto I, que está a una distancia q detrás del espejo, se conoce como **imagen** del objeto en O. A la distancia q se le llama **distancia de imagen**. Independientemente del sistema en estudio, siempre localizará las imágenes extendiendo hacia atrás los rayos divergentes, hasta el punto en que hacen intersección. **Las imágenes están localizadas ya sea en un punto a partir del cual los rayos luminosos *realmente* divergen o en un punto a partir del cual *parece* que divergen.**

Figura 36.1 Imagen formada por reflexión en un espejo plano. El punto de imagen I está localizado por detrás del espejo a una distancia perpendicular q de éste (la distancia de imagen). La distancia de imagen tiene la misma magnitud que la distancia de objeto p.

Las imágenes se clasifican en **reales** o **virtuales. Una imagen real es la que se forma cuando los rayos luminosos pasan a través y divergen del punto de imagen; una imagen virtual es la que se forma cuando los rayos luminosos no pasan a través del punto de imagen sino que sólo parecen divergir de dicho punto.** La imagen formada por el espejo en la figura 36.1 es virtual. La imagen de un objeto vista en un espejo plano es *siempre* virtual. Es posible desplegar imágenes reales sobre una pantalla (como en el cine), pero no se puede desplegar imágenes virtuales en una pantalla. En la sección 36.2 encontrará un ejemplo de una imagen real.

Figura 36.2 Construcción geométrica utilizada para localizar la imagen de un objeto colocado frente a un espejo plano. Porque los triángulos PQR y $P'QR$ son congruentes, $|p| = |q|$ y $h = h'$.

La geometría simple de la figura 36.2 sirve para examinar las propiedades de las imágenes de objetos extensos formadas por espejos planos. A pesar de que existe un número infinito de posibles direcciones hacia las cuales los rayos luminosos pueden salir de cada punto del objeto (representado por la flecha azul), sólo es necesario elegir dos rayos para determinar dónde se formará la imagen. Uno de esos rayos parte de P, sigue una trayectoria perpendicular hasta el espejo y se refleja sobre sí mismo. El segundo rayo sigue la trayectoria oblicua PR y se refleja como se muestra en la figura 36.2, de acuerdo con las leyes de la reflexión. Un observador frente al espejo extendería los dos rayos reflejados de regreso hacia el punto en el cual parecen haberse originado, es decir, el punto P' por detrás del espejo. Continuar con este proceso para puntos diferentes de P sobre el objeto da como resultado una imagen virtual (representada por la flecha amarilla) del objeto completo detrás del espejo. Porque los triángulos PQR y $P'QR$ son congruentes, $PQ = P'Q$. Debido a eso, la **imagen formada por un objeto colocado frente a un espejo plano está tan lejos detrás del espejo como lo está el objeto frente a él.**

La geometría en la figura 36.2 también revela que la altura del objeto h es igual a la altura de la imagen h'. El **aumento lateral** M de una imagen se define como sigue

$$M \equiv \frac{\text{Altura de la imagen}}{\text{Altura del objeto}} = \frac{h'}{h} \qquad (36.1)$$

◀ Aumento lateral

Esta definición general del aumento lateral para una imagen a partir de cualquier tipo de espejo también es válida para imágenes formadas por lentes, que se estudiarán en la sección 36.4. Para un espejo plano, $M = +1$ para cualquier imagen porque $h' = h$. El valor positivo de la amplificación significa que la imagen es vertical. (Por vertical se entiende que, si la flecha de objeto apunta hacia arriba, como en la figura 36.2, igual lo hace la flecha de la imagen.)

Observe que un espejo plano produce una imagen con una inversión *aparente* de izquierda a derecha. Es posible detectar esta inversión al colocarse delante del espejo y levantar la mano derecha como se observa en la figura 36.3. La imagen que ve levanta la mano izquierda. De igual manera, la raya de su peinado parece separar el cabello en el lado opuesto al verdadero, y un lunar sobre su mejilla derecha parece estar colocado en su mejilla izquierda.

Esta inversión no es *de hecho* una inversión de izquierda a derecha. Imagine, por ejemplo, que usted descansa sobre su lado izquierdo acostado en el piso y que su cuerpo está paralelo a la superficie del espejo. Ahora su cabeza aparece a la izquierda y sus pies a la derecha. Si mueve los pies, ¡la imagen no mueve la cabeza! Si levanta la mano derecha, no obstante, la imagen otra vez levantará la mano izquierda. Por lo tanto, otra vez el espejo parece producir una inversión de izquierda a derecha, ¡pero en dirección de arriba hacia abajo!

De hecho, esta inversión es realmente una *inversión de adelante hacia atrás*, causada por los rayos luminosos que se mueven hacia el espejo y después se reflejan de nuevo en él. Un ejercicio interesante es colocarse de pie frente a un espejo mientras sujeta un acetato al frente de forma que pueda leer lo que hay escrito en él. También podrá leerlo en la imagen del acetato. Posiblemente haya tenido una experiencia similar al fijar una calcomanía transparente con palabras impresas en el vidrio trasero de su automóvil. Si es posible leer la calcomanía desde afuera del vehículo, también será posible leerlo si lo observa en su espejo retrovisor desde el interior.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 36.1
Amplificación no necesariamente implica aumento

Para elementos ópticos diferentes de los espejos planos, el aumento definido en la ecuación 36.1 puede dar como resultado un número con magnitud mayor *o* menor que 1. Por lo tanto, a pesar del uso cultural de la palabra *aumento* con el significado de *amplificación*, la imagen puede resultar menor que el objeto.

© Thomson Learning/George Semple.

Figura 36.3 La imagen de la mano derecha de una persona en el espejo aparece invertida de adelante hacia atrás por lo cual aparece como mano izquierda. Observe que el pulgar está del lado izquierdo de las manos verdaderas y del lado izquierdo de la imagen. El hecho de que el pulgar no aparezca del lado derecho de la imagen indica que no existe una inversión de izquierda a derecha.

Pregunta rápida 36.1 Imagine que está de pie a aproximadamente dos metros de un espejo, y que éste tiene gotas de agua sobre su superficie. Verdadero o falso: ¿es posible ver simultáneamente en foco las gotas de agua, así como su propia imagen?

EJEMPLO CONCEPTUAL 36.1 Varias imágenes formadas por dos espejos

Dos espejos planos han sido colocados en forma perpendicular entre sí, como se observa en la figura 36.4, y se coloca un objeto en el punto *O*. En esta situación se forman varias imágenes. Localice las posiciones de dichas imágenes.

SOLUCIÓN La imagen del objeto está en I_1 en el espejo 1 (rayos violetas) y en I_2 en el espejo 2 (rayos azules). Además, se forma una tercera imagen en I_3 (rayos cafés). Esta tercera imagen es la imagen de I_1 que se forma en el espejo 2 o, de manera equivalente, la imagen de I_2 que se forma sobre el espejo 1. Es decir, la imagen en I_1 (o en I_2) sirve como objeto para I_3. Advierta que para formar esta imagen en I_3, los rayos tienen que reflejarse dos veces después de salir del objeto en *O*.

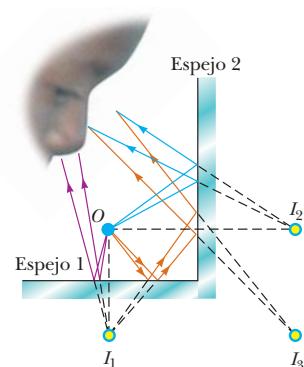



Figura 36.4 (Ejemplo conceptual 36.1) Cuando se coloca un objeto frente a dos espejos mutuamente perpendiculares, como se muestra en la figura, se forman tres imágenes. Siga los rayos de luz de colores para comprender la formación de cada imagen.

EJEMPLO CONCEPTUAL 36.2 Espejo retrovisor inclinable

La mayor parte de los espejos retrovisores en los automóviles tienen una posición diurna y una nocturna. La posición nocturna disminuye de manera importante la intensidad de la imagen para que los faros de los vehículos detrás del automóvil no afecten la visibilidad del conductor. ¿Cómo funciona este espejo?

SOLUCIÓN La figura 36.5 muestra una sección transversal de un espejo retrovisor en cada una de sus posiciones. La unidad tiene una cuña de vidrio con un recubrimiento reflejante en su parte trasera. En la posición diurna (figura 36.5a), la luz proveniente de un objeto detrás del automóvil incide en la cuña de vidrio en el punto 1. La mayor parte de la luz entra en la cuña, refractándose al cruzar la superficie delantera y se refleja en la superficie trasera para volver a la superficie delantera, donde es refractada de nuevo cuando pasa otra vez al aire como rayo *B* (*brillante*). Además, una pequeña porción de la luz se refleja en la superficie delantera del vidrio, como se observa en el rayo *D* (*opaco*).

Esta luz opaca reflejada es responsable de la imagen que se ve cuando el espejo está en la posición nocturna (figura 36.5b). En este caso, la cuña es girada de manera que la trayectoria que sigue la luz brillante (rayo *B*) no se dirige al ojo. Más bien, la que sigue esta dirección es la luz opaca reflejada de la superficie delantera de la cuña, y la brillantez de los faros de los vehículos de atrás no representa un riesgo.

Lado reflectante del espejo
B
1
D
Luz incidente
Posición diurna
a)

B
D
Luz incidente
Posición nocturna
b)

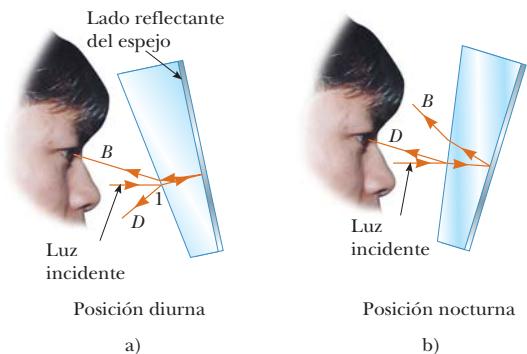



Figura 36.5 (Ejemplo conceptual 36.2) Vista de sección transversal de un espejo retrovisor. a) En la posición diurna, la superficie trasera plateada del espejo refleja un rayo brillante *B* hacia los ojos del conductor. b) En la posición nocturna, el vidrio de la superficie no plateada delantera del espejo refleja un rayo opaco *D* en los ojos del conductor.

36.2 Imágenes formadas por espejos esféricos

En la sección anterior se consideraron imágenes formadas a partir de espejos planos. Ahora se estudiarán las imágenes formadas por espejos curvos. Aunque son posibles varias curvaturas, la investigación se restringirá a espejos esféricos. Como su nombre implica, un **espejo esférico** tiene la forma de una sección de una esfera.

Espejos cóncavos

Primero se considera la reflexión de luz desde la superficie interior cóncava de un espejo esférico, como se muestra en la figura 36.6. Este tipo de superficie reflectora se llama **espejo cóncavo**. La figura 36.6a muestra que el espejo tiene un radio de curvatura *R*, y su centro de curvatura es el punto *C*. El punto *V* es el centro de la sección esférica, y una línea a través de *C* y *V* se llama **eje principal** del espejo. La figura 36.6a muestra

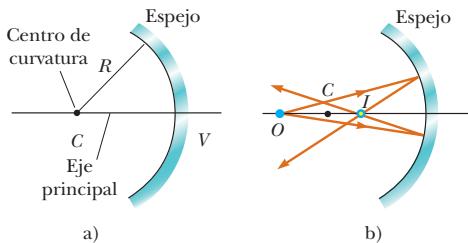



Figura 36.6 a) Espejo cóncavo de radio R. El centro de la curvatura C está ubicado sobre el eje principal. b) Un objeto puntual colocado en O frente a un espejo esférico cóncavo de radio R, donde O es cualquier punto a lo largo del eje principal alejado una distancia mayor que R de la superficie del espejo, forma una imagen real en I. Si los rayos divergen de O en ángulos pequeños, todos ellos se reflejan a través del mismo punto de imagen.

Ken Ray/Fundamental Photographs.

Figura 36.7 Los rayos de colores rojo, azul y verde son reflejados por un espejo curvo. Observe que los tres haces de color se unen en un punto.

una sección transversal de un espejo esférico, con su superficie representada por la línea curva negra sólida. (La banda azul representa el soporte estructural de la superficie especular, como puede ser un trozo curvo de vidrio sobre el que se depositó una superficie plateada.) Este tipo de espejo enfoca los rayos paralelos entrantes en un punto, como se demuestra por los rayos de luz de colores en la figura 36.7.

Ahora considere una fuente de luz puntual colocada en el punto O de la figura 36.6b, donde O es cualquier punto sobre el eje principal, a la izquierda de C. En la figura se muestran dos rayos divergentes que se originan en O. Después de reflejarse en el espejo, estos rayos convergen y se cruzan en la imagen que aparece en el punto I. Después continúan divergiendo alejándose de I como si en ese punto existiera un objeto. Como resultado, la imagen en el punto I es real.

En esta sección sólo considerará rayos que divergen del objeto formando un ángulo pequeño con el eje principal. Estos rayos se conocen como **rayos paraxiales.** Todos los rayos paraxiales se reflejan a través del punto imagen, como se muestra en la figura 36.6b. Aquellos rayos que están lejos del eje principal, como los que se muestran en la figura 36.8, convergen en otros puntos del eje principal, y producen una imagen borrosa. Este efecto, que se conoce como *aberración esférica*, está presente con mayor o menor grado en cualquier espejo esférico y se analiza en la sección 36.5.

Figura 36.8 Rayos que divergen desde un objeto a grandes ángulos en relación con el eje principal se reflejan en un espejo esférico cóncavo para cruzar con el eje principal en puntos distintos, lo que genera una imagen borrosa. Este fenómeno se conoce como *aberración esférica*.

Para calcular la distancia de la imagen q utilice la figura 36.9, si conoce la distancia objeto p y el radio de curvatura R. Por regla, estas distancias se observan a partir del punto V. La figura 36.9 muestra dos rayos que salen de la punta del objeto. Uno de estos rayos pasa a través del centro de curvatura C del espejo e incide en el espejo, perpendicular a la superficie del mismo, reflejándose de regreso sobre sí mismo. El segundo rayo incide en el espejo en su centro (punto V) y se refleja como se muestra, en cumplimiento con la ley de la reflexión. La imagen de la punta de la flecha se localiza en el punto donde se cruzan ambos rayos. En el amplio triángulo rectángulo color oro de la figura 36.9, $\tan\theta = h/p$, y con el triángulo rectángulo azul vemos que $\tan\theta = -h'/q$. Se introduce el signo negativo porque la imagen está invertida, por lo que h' se considera negativa. En consecuencia, por la ecuación 36.1 y por estos resultados, encontramos que el aumento de la imagen es igual a

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \qquad \textbf{(36.2)}$$

Cortesía de Thomson Consumer Electronics.

Una antena parabólica para satélite es un reflector cóncavo para señales de televisión de un satélite en órbita alrededor de la Tierra. Puesto que el satélite está tan alejado, las señales son transportadas por microondas que resultan paralelas cuando llegan a la antena parabólica. Estas ondas se reflejan del plato y se enfocan en el receptor.

Figura 36.9 Imagen formada por un espejo esférico cóncavo cuando el objeto O yace fuera del centro de curvatura C. Esta es la construcción geométrica utilizada para deducir la ecuación 36.4.

Además observe del triángulo recto verde en la figura 36.9 y del triángulo rectángulo dorado más pequeño que

$$\tan \alpha = \frac{-h'}{R - q} \quad \text{y} \quad \tan \alpha = \frac{h}{p - R}$$

de donde surge

$$\frac{h'}{h} = -\frac{R - q}{p - R} \tag{36.3}$$

Si compara las ecuaciones 36.2 y 36.3,

$$\frac{R - q}{p - R} = \frac{q}{p}$$

Por simple álgebra, lo anterior se reduce a

Ecuación del espejo en función del radio de curvatura ▶

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \tag{36.4}$$

que se denomina *ecuación del espejo*. En breve se presenta una versión modificada de esta ecuación.

Si el objeto está muy lejos del espejo —es decir, si p es mucho más grande que R de forma que se puede decir que p tiende a infinito— entonces $1/p \approx 0$, y por la ecuación 36.4 $q \approx R/2$. Es decir, cuando el objeto está muy lejos del espejo, el punto imagen está a la mitad del camino entre el centro de curvatura y el punto central sobre el espejo, como se observa en la figura 36.10a. Los rayos incidentes del objeto son esencialmente paralelos en esta figura porque se supone que la fuente está muy lejos del espejo. En este caso en especial, se le llama al punto de imagen **foco** F y a la distancia de imagen **distancia focal** f, donde

Distancia focal ▶

$$f = \frac{R}{2} \tag{36.5}$$

En la figura 36.7 los rayos de colores viajan en forma paralela al eje principal y el espejo refleja los tres haces en el **foco**. Observe que el punto en el cual se cruzan los tres haces y donde se suman los colores, se ve blanco.

La distancia focal es un parámetro particular de un espejo determinado, y puede ser utilizada para comparar un espejo con otro. Al combinar las ecuaciones 36.4 y 36.5 la **ecuación del espejo** se expresa en función de la distancia focal:

Ecuación del espejo en función de la distancia focal ▶

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{36.6}$$

Advierta que la distancia focal de un espejo depende sólo de su curvatura y no del material con que esté fabricado, porque la formación de la imagen es el resultado de rayos que se

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 36.2

El foco no es el punto de *enfoque*

Por lo general, el **foco** no es el punto en el cual los rayos luminosos se enfocan para formar una imagen. El **foco** está determinado sólo por la curvatura del espejo, no depende de la posición del objeto. Por lo común, la imagen se forma en un punto distinto del **foco** de un espejo (o de una lente). La *única* excepción es cuando el objeto está localizado infinitamente lejos del espejo.

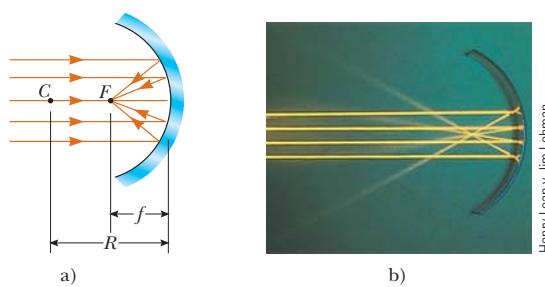



Figura 36.10 a) Rayos de luz de un objeto distante ($p \to \infty$) se reflejan de un espejo cóncavo a través del **foco** F. En este caso, la distancia imagen $q \approx R/2 = f$, donde esta última es la distancia focal del espejo. b) Reflexión de rayos paralelos provenientes de un espejo cóncavo.

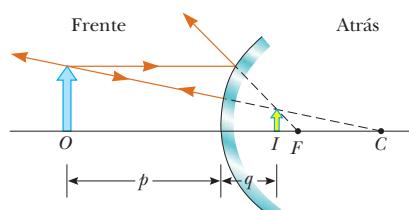



Figura 36.11 Formación de una imagen en un espejo esférico convexo. La imagen formada por el objeto real es virtual y vertical.

reflejan de la superficie del material. La situación es distinta en el caso de las lentes en que la luz realmente atraviesa el material y la distancia focal depende del tipo de material con que fueron fabricadas. (Véase la sección 36.4.)

Espejos convexos

La figura 36.11 muestra la formación de una imagen en un **espejo convexo,** es decir, plateado de forma que la luz sea reflejada en la superficie exterior convexa. A veces éste se conoce como **espejo divergente** porque los rayos de cualquier punto de un objeto divergen después de haberse reflejado, como si vinieran de algún punto de detrás del espejo. La imagen de la figura 36.11 es virtual porque los rayos reflejados sólo dan la impresión de originarse en el punto imagen, como se indica mediante las líneas discontinuas. Además, la imagen siempre es vertical y es menor que el objeto. Este tipo de espejo se utliza con frecuencia en las tiendas para desanimar a los ladrones. Es posible utilizar un solo espejo para obtener una amplia visibilidad, ya que forma una imagen más pequeña del interior de la tienda.

No deducirá ecuaciones para los espejos esféricos convexos, porque puede utilizar las ecuaciones 36.2, 36.4 y 36.6 tanto para espejos cóncavos como convexos, siempre y cuando sigamos el procedimiento siguiente: identifique la región en la cual los rayos luminosos se mueven hacia el espejo como *cara frontal* del mismo y el otro lado como *cara posterior*; por ejemplo, en las figuras 36.9 y 36.11, el lado a la izquierda de los espejos es el delantero y el lado a la derecha, el trasero. La figura 36.12 presenta las reglas para los signos de las distancias objeto e imagen, y la tabla 36.1 resume los signos convencionales para todas las cantidades. Una entrada de la tabla, *objeto virtual*, se introduce formalmente en la sección 36.4.

Figura 36.12 Signos de p y de q para espejos convexos y cóncavos.

Diagramas de rayos para los espejos

La posición y el tamaño de las imágenes formadas por los espejos se determinan convenientemente mediante *diagramas de rayos*. Estas construcciones gráficas revelan la naturaleza de la imagen y sirven para verificar resultados calculados a partir de las representaciones matemáticas utilizando las ecuaciones del espejo y del aumento. Para dibujar el diagrama de un rayo, es necesario conocer la posición del objeto y la localización del foco, así como el centro de curvatura del espejo. Después, dibuje tres rayos

TABLA 36.1

Reglas para los signos de los espejos

Cantidad	Positivos cuando. . .	Negativos cuando. . .
Localización del objeto (p)	el objeto está delante del espejo (objeto real)	el objeto está detrás del espejo (objeto virtual)
Localización de la imagen (q)	la imagen está delante del espejo (imagen real)	la imagen está detrás del espejo (imagen virtual)
Altura de la imagen (h')	la imagen está vertical	la imagen está invertida
Distancia focal (f) y radio (R)	el espejo es cóncavo	el espejo es convexo
Aumento (M)	la imagen está vertical	la imagen está invertida

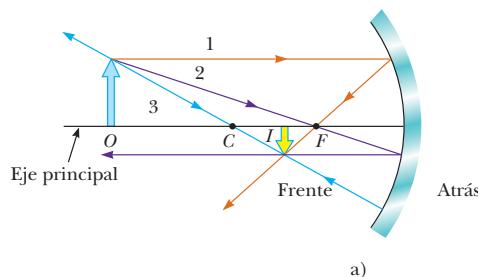
PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 36.3

Cuide sus signos

El éxito en la solución de problemas de espejos (así como problemas con superficies de refracción y lentes delgadas) depende de la correcta elección de signos al sustituir en las ecuaciones. La mejor manera de habituarse a esto es resolviendo por sí mismo una gran cantidad de problemas.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 36.4

Se elige un número pequeño de rayos

De cada uno de los puntos de un objeto se emite un número *enorme* de rayos luminosos (que pasan a través de cada uno de los puntos de la imagen). En un diagrama de rayos, que despliega las características de la imagen, escoja sólo unos cuantos rayos que siguen las leyes simplemente enunciadas. La localización de la imagen mediante el cálculo complementa el diagrama.

principales para localizar la imagen como se muestra en los ejemplos de la figura 36.13. Estos rayos salen todos del mismo punto objeto y se dibujan como sigue. Puede escoger cualquier punto sobre el objeto; aquí, por simplicidad se ha escogido la parte superior. En el caso de espejos cóncavos (véase las figuras 36.13a y 36.13b), trace los tres rayos principales siguientes:

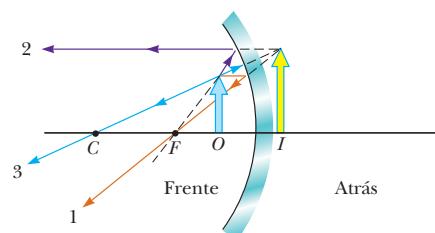
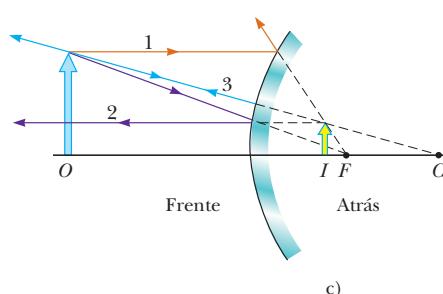
- El rayo 1, desde la parte superior del objeto, en paralelo al eje principal, y se refleja a través del foco F.
- El rayo 2, desde la parte superior del objeto a través del foco (o como si viniera del foco si $p < f$) y se refleja paralelo al eje principal.
- El rayo 3, desde la parte superior del objeto a través del centro de curvatura C y se refleja de regreso sobre sí mismo.

La intersección de cualesquiera de estos dos rayos permite ubicar la imagen. El tercero sirve para verificar la construcción. El punto imagen obtenido de esta manera siempre debe concordar con el valor de q calculado a partir de la ecuación del espejo. En el caso de los espejos cóncavos, observe lo que ocurre cuando se acerca el objeto al espejo. La imagen real invertida de la figura 36.13a se mueve hacia la izquierda y se alarga al acercarse el objeto al foco. Cuando el objeto está en este punto, la imagen queda infinitamente lejos a la izquierda. Sin embargo, cuando el objeto está entre el foco y la superficie del espejo, como se observa en la figura 36.13b, la imagen está hacia la derecha, detrás del objeto y virtual, vertical y alargada. Esta última situación se da cuando se utiliza un espejo para rasurarse o para maquillarse, ya que ambos son cóncavos. Su cara está más cerca del espejo que el foco y lo que se ve es una imagen vertical y alargada de la cara.

Figura 36.13

Diagramas de rayos para espejos esféricos junto con las correspondientes fotografías de las imágenes de las velas. a) Cuando el objeto está localizado de manera que el centro de curvatura está entre el objeto y una superficie de espejo cóncavo, la imagen es real, invertida y de tamaño reducido. b) Cuando el objeto está localizado entre el foco y la superficie de un espejo cóncavo, la imagen es virtual, vertical y alargada. c) Cuando el objeto está frente a un espejo convexo, la imagen es virtual, vertical y de tamaño reducido.

En el caso de los espejos convexos (véase la figura 36.13c), trace los tres rayos principales siguientes:

- El rayo 1, se dibuja desde la parte superior del objeto paralelo al eje principal y se refleja *alejándose* del foco *F*.
- El rayo 2, se dibuja desde la parte superior del objeto hacia el foco en la cara posterior del espejo y se refleja paralelo al eje principal.
- El rayo 3, se dibuja desde la parte superior del objeto hacia el centro de curvatura *C* en la cara posterior del espejo y se refleja de regreso sobre sí mismo.

En un espejo convexo la imagen de un objeto es siempre virtual, vertical y de tamaño reducido, como se observa en la figura 36.13c. En este caso, conforme disminuye la distancia del objeto, la imagen virtual aumenta de tamaño y se aleja del foco hacia el espejo conforme el objeto se acerca al espejo. Es conveniente construir otros diagramas para verificar la manera en que varía la posición de la imagen en relación con la posición del objeto.

Pregunta rápida 36.2 Desea prender una fogata, con el reflejo de la luz del sol mediante un espejo sobre papel bajo un cúmulo de madera. ¿Cuál sería la mejor selección del tipo de espejo? a) Plano, b) cóncavo, o c) convexo.

Pregunta rápida 36.3 Considere la imagen en el espejo que se ve en la figura 36.14. De acuerdo con la apariencia de esta imagen, se podría concluir que a) el espejo es cóncavo y la imagen real, b) el espejo es cóncavo y la imagen virtual, c) el espejo es convexo y la imagen real, o d) el espejo es convexo y la imagen virtual.

NASA.

Figura 36.14 (Pregunta rápida 36.3) ¿Qué tipo de espejo es éste?

EJEMPLO 36.3 Imagen formada por un espejo cóncavo

Un espejo esférico tiene una distancia focal de $+10.0$ cm.

A) Ubique y describa la imagen para una distancia de objeto de 25.0 cm.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Puesto que la distancia focal del espejo es positiva, es un espejo cóncavo (véase la tabla 36.1). Piense en las posibilidades de imágenes real y virtual.

Categorizar Ya que la distancia del objeto en esta parte del problema es mayor que la distancia focal, se espera que la imagen sea real. Esta situación es análoga a la de la figura 36.13a.

Analizar Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 36.6:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{10.0\text{ cm}} - \frac{1}{25.0\text{ cm}}$$

$$q = \boxed{16.7\text{ cm}}$$

Encuentre el aumento de la imagen de la ecuación 36.2:

$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{16.7\text{ cm}}{25.0\text{ cm}} = \boxed{-0.668}$$

Finalizar El valor absoluto de M es menor que la unidad, así que la imagen es más pequeña que el objeto, y el signo negativo para M dice que la imagen está invertida. Porque q es positiva, la imagen se ubica en la cara frontal del espejo y es real. Mire en la concavidad de una cuchara pulida o párese lejos de un espejo de afeitar para ver esta imagen.

B) Ubique y describa la imagen para una distancia de objeto de 10.0 cm.

SOLUCIÓN

Categorizar Porque el objeto está en el foco, se espera que la imagen esté infinitamente alejada.

Analizar Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 36.6:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{10.0 \text{ cm}} - \frac{1}{10.0 \text{ cm}}$$

$$q = \boxed{\infty}$$

Finalizar Este resultado significa que los rayos que se originan desde un objeto colocado en el foco de un espejo se reflejan de modo que la imagen se forma a una distancia infinita del espejo; es decir, los rayos viajan paralelos después de la reflexión. Tal es la situación en una lámpara de mano o el faro de un automóvil, donde el filamento del bulbo se coloca en el foco de un reflector, lo que produce un haz de luz paralelo.

C) Ubique y describa la imagen para una distancia de objeto de 5.00 cm.

SOLUCIÓN

Categorizar Ya que la distancia de objeto es menor que la distancia focal, se espera que la imagen sea virtual. Esta situación es análoga a la de la figura 36.13b.

Analizar Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 36.6:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{10.0 \text{ cm}} - \frac{1}{5.00 \text{ cm}}$$

$$q = \boxed{-10.0 \text{ cm}}$$

Encuentre el aumento de la imagen a partir de la ecuación 36.2:

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-10.0 \text{ cm}}{5.00 \text{ cm}}\right) = \boxed{+2.00}$$

Finalizar La imagen es el doble de grande que el objeto, y el signo positivo para M indica que la imagen es vertical (véase la figura 36.13b). El valor negativo de la distancia de imagen dice que la imagen es virtual, como se esperaba. Ponga la cara cerca de un espejo de afeitar para ver este tipo de imagen.

¿Qué pasaría si? Suponga que usted configura el aparato de vela y espejo que se ilustra en la figura 36.13a descrito aquí en el mismo inciso A). Mientras ajusta el aparato, accidentalmente golpea la vela y comienza a deslizarse hacia el espejo con velocidad v_p. ¿Qué tan rápido se mueve la imagen de la vela?

Respuesta Resuelva la ecuación del espejo, ecuación 36.6, para q:

$$q = \frac{fp}{p - f}$$

Derive esta ecuación respecto al tiempo para encontrar la velocidad de la imagen:

$$1) \quad v_q = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{fp}{p - f}\right) = -\frac{f^2}{(p - f)^2}\frac{dp}{dt} = -\frac{f^2 v_p}{(p - f)^2}$$

Sustituya los valores numéricos del inciso A):

$$v_q = -\frac{(10.0 \text{ cm})^2 v_p}{(25.0 \text{ cm} - 10.0 \text{ cm})^2} = -0.444 v_p$$

Por lo tanto, en este caso, la rapidez de la imagen es menor que la del objeto.

Se pueden ver dos comportamientos interesantes de la función para v_q en la ecuación 1). Primero, la velocidad es negativa sin importar el valor de p o f. En consecuencia, si el objeto se mueve hacia el espejo, la imagen se mueve hacia la izquierda

en la figura 36.13 sin importar el lado del foco en donde se ubica el objeto o si el espejo es cóncavo o convexo. Segundo, en el límite de $p \to 0$, la velocidad v_q tiende a $-v_p$. Conforme el objeto se mueve muy cerca del espejo, el espejo parece como un espejo plano, la imagen está tan lejos detrás del espejo como el objeto está enfrente, y tanto el objeto como la imagen se mueven con la misma rapidez.

EJEMPLO 36.4 **Imagen formada por un espejo convexo**

Un espejo retrovisor, como se muestra en la figura 36.15, muestra la imagen de un camión ubicado a 10.0 m del espejo. La distancia focal del espejo es −0.60 m.

Figura 36.15 (Ejemplo 36.4) En el espejo convexo del lado derecho de un automóvil se ve un camión que se aproxima. Ya que la imagen tiene tamaño reducido, el camión aparece más alejado de lo que en realidad está. Además observe que la imagen del camión está en foco, pero el marco del espejo no lo está, lo que demuestra que la imagen no está en la misma ubicación que la superficie del espejo.

A) Encuentre la posición de la imagen del camión.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Esta situación se muestra en la figura 36.13c.

Categorizar Porque el espejo es convexo, se espera que forme una imagen virtual reducida y vertical para cualquier posición del objeto.

Analizar Encuentre la distancia de la imagen con la ecuación 36.6:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{-0.60 \text{ m}} - \frac{1}{10.0 \text{ m}}$$

$$q = \boxed{-0.57 \text{ m}}$$

B) Encuentre el aumento de la imagen.

SOLUCIÓN

Analizar Use la ecuación 36.2:

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-0.57 \text{ m}}{10.0 \text{ m}}\right) = \boxed{+0.057}$$

Finalizar El valor negativo de q en el inciso A) indica que la imagen es virtual, o está detrás del espejo, como se muestra en la figura 36.13c. El aumento en el inciso B) indica que la imagen es mucho más pequeña que el camión y es vertical porque M es positiva. Debido al tamaño pequeño de la imagen, estos espejos llevan la inscripción "Los objetos en este espejo están más cerca de lo que aparecen." Observe su espejo retrovisor o la cara posterior de una cuchara brillante para ve una imagen de este tipo.

36.3 Imágenes formadas por refracción

En esta sección se describe la manera en que se forman las imágenes cuando los rayos luminosos siguen el modelo de onda bajo refracción en la frontera entre dos materiales transparentes. Considere dos medios transparentes con índices de refracción n_1 y n_2, donde los límites entre los dos medios forman una superficie esférica de radio R (figura 36.16). Suponga que el objeto en O está en el medio cuyo índice de refracción es n_1. Consideremos los rayos paraxiales que salen de O. Como verá, todos estos rayos se refractan en la superficie esférica y se enfocan en un único punto I, el punto imagen.

Figura 36.16 Imagen formada por refracción en una superficie esférica. Los rayos que forman ángulos pequeños en relación con el eje principal divergen de un punto en el objeto O y se refractan hasta el punto imagen I.

La figura 36.17 muestra un rayo simple que sale del punto O y se refracta hacia el punto I. La ley de Snell de la refracción aplicada a este rayo da

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

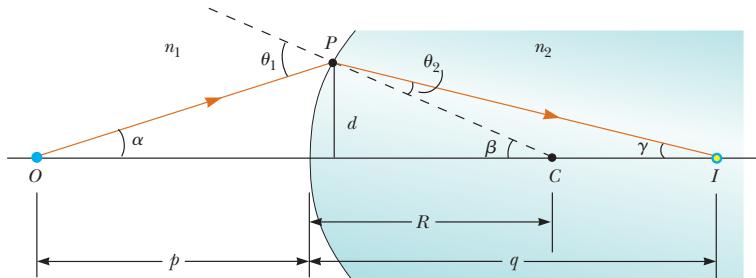



Figura 36.17 Geometría utilizada para deducir la ecuación 36.8, suponiendo que $n_1 < n_2$.

Ya que θ_1 y θ_2 se consideran pequeños, utilice la aproximación para ángulos pequeños sen $\theta \approx \theta$ (ángulos en radianes) y escriba la ley de Snell como

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2$$

Ahora considere que el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos; aplique esta regla a los triángulos *OPC* y *PIC* de la figura 36.17 y obtiene

$$\theta_1 = \alpha + \beta$$

$$\beta = \theta_2 + \gamma$$

Si combina las tres expresiones y elimina θ_1 y θ_2,

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \qquad \textbf{(36.7)}$$

La figura 36.17 exhibe tres triángulos rectángulos que tienen un cateto vertical común de longitud *d*. En el caso de los rayos paraxiales (a diferencia del rayo de ángulo relativamente grande que se muestra en la figura 36.17), los catetos horizontales de estos triángulos son aproximadamente *p* para el triángulo que contiene el ángulo α, *R* para el que contiene el ángulo β y *q* para el triángulo que contiene el ángulo γ. En la aproximación por ángulos pequeños, tan $\theta \approx \theta$, por lo que puede escribir las correspondencias aproximadas de estos triángulos como sigue:

$$\tan\alpha \approx \alpha \approx \frac{d}{p} \qquad \tan\beta \approx \beta \approx \frac{d}{R} \qquad \tan\gamma \approx \gamma \approx \frac{d}{q}$$

Reemplace estas expresiones en la ecuación 36.7 y después divida entre *d* para obtener

Relación entre distancia objeto y distancia imagen para una superficie refractora ►

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad \textbf{(36.8)}$$

Para el caso de una distancia objeto *p* fija, la distancia imagen *q* es independiente del ángulo que forma el rayo con el eje. Este resultado indica que todos los rayos paraxiales se enfocan en el mismo punto *I*.

Igual que en el caso de los espejos, es necesario utilizar una convención para los signos si desea aplicar esta ecuación a diferentes casos. El lado de la superficie en el cual se originan los rayos luminosos se define como la cara frontal. El otro se llama cara posterior. A diferencia de los espejos, donde se forman las imágenes reales en la cara frontal de la supeficie reflectante, las imágenes se forman por refracción de los rayos de luz en la cara posterior de la superficie. Debido a la diferencia de ubicación de las imágenes reales, las reglas convencionales para los signos de la refracción para *q* y *R* son opuestas a las reglas para los signos de la reflexión. Por ejemplo, en la figura 36.17, *q* y *R* son ambas positivas. Las reglas para los signos en superficies refractoras esféricas se resumen en la tabla 36.2.

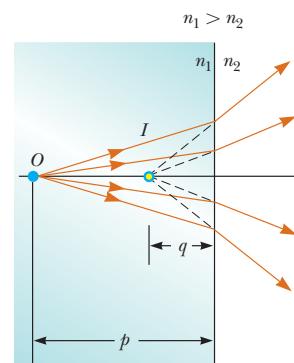
De la figura 36.17 se deduce la ecuación 36.8, a partir de la hipótesis de que $n_1 < n_2$. Esta hipótesis, sin embargo, no es necesaria. La ecuación 36.8 es válida independientemente de cuál de los índices de refracción es mayor.

TABLA 36.2

Reglas para signos en superficies refractoras

Cantidad	Positivos cuando. . .	Negativos cuando. . .
Ubicación del objeto (p)	el objeto está delante de la superficie (objeto real)	el objeto está detrás de la superficie (objeto virtual)
Ubicación de la imagen (q)	la imagen está detrás de la superficie (imagen real)	la imagen está delante de la superficie (imagen virtual)
Altura de la imagen (h')	la imagen es vertical	la imagen está invertida
Radio (R)	el centro de curvatura está detrás de la superficie	el centro de curvatura está delante de la superficie

Superficies refractoras planas

Si una superficie refractora es plana, en tal caso R es infinito y la ecuación 36.8 se reduce a

$$\frac{n_1}{p} = -\frac{n_2}{q}$$

$$q = -\frac{n_2}{n_1} p \qquad \textbf{(36.9)}$$

Por esta expresión el signo de q es opuesto al signo de p. Por lo tanto, de acuerdo con la tabla 36.2, **la imagen formada por una superficie refractora plana está en el mismo lado de la superficie que el objeto**, esto se ilustra en la figura 36.18 para el caso en que el objeto está en el medio del índice n_1, y éste es mayor que n_2. En este caso se forma una imagen virtual entre el objeto y la superficie. Si n_1 es menor que n_2, los rayos de la cara posterior divergen entre sí en ángulos más pequeños que los de la figura 36.18. Como resultado, se forma la imagen virtual a la izquierda del objeto.

Figura 36.18

La imagen formada por una superficie refractora plana es virtual y aparece del mismo lado de la superficie que el objeto. Todos los rayos se suponen paraxiales.

Pregunta rápida 36.4 En la figura 36.16, ¿qué le pasa al punto imagen I al mover el punto objeto O hacia la derecha muy lejos o bien muy cerca de la superficie refractora? a) Siempre estará a la derecha de la superficie. b) Siempre estará a la izquierda de la superficie. c) Comienza a la izquierda y, en cierta posición O, I se traslada al lado derecho de la superficie. d) Comienza a la derecha y, en cierta posición O, I se traslada al lado izquierdo de la superficie.

Pregunta rápida 36.5 En la figura 36.18, ¿qué le sucede al punto imagen I conforme el punto objeto O se mueve hacia la superficie del lado derecho del material de índice de refracción n_1? a) Permanece siempre entre O y la superficie, llegando a ésta justo en el momento en que lo hace O. b) Se mueve hacia la superficie con mayor lentitud que O, de forma que en algún momento O se adelanta a I. c) Se acerca a la superficie y después se mueve hacia la derecha de la misma.

EJEMPLO CONCEPTUAL 36.5 ¡A bucear!

Es bien sabido que los objetos que se ven por debajo del agua a simple vista aparecen borrosos y fuera de foco; sin embargo, un buceador que utiliza visor tiene una vista clara de los objetos bajo el agua. Explique cómo funciona esto, los índices de refracción de la córnea, del agua y del aire son 1.376, 1.333 y 1.000 29, respectivamente.

SOLUCIÓN Debido a que la córnea y el agua tienen índices de refracción casi idénticos, se presenta una refracción muy ligera cuando una persona observa los objetos a simple vista por debajo del agua. En este caso, los rayos luminosos provenientes de un objeto se enfocan por detrás de la retina, lo que da como resultado una imagen borrosa. De cualquier modo, cuando se utiliza un visor, el espacio de aire entre el ojo y la superficie del visor proporciona la cantidad de refracción normal en la interfaz ojo-aire; en consecuencia la luz proveniente de los objetos se enfoca en la retina.

EJEMPLO 36.6 Mire fijamente dentro de la bola de cristal

Un conjunto de monedas está incrustado en un pisapapeles esférico de plástico que tiene un radio de 3.0 cm. El índice de refracción del plástico es $n_1 = 1.50$. Una moneda está colocada a 2.0 cm del borde de la esfera (figura 36.19). Encuentre la posición de la imagen de la moneda.

Figura 36.19 (Ejemplo 36.6) Los rayos de luz provenientes de una moneda incrustada en una esfera de plástico forman una imagen virtual entre la superficie del objeto y la superficie de la esfera. Ya que el objeto está dentro de la esfera, el frente de la superficie refractante es el *interior* de la esfera.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Debido a que $n_1 > n_2$, donde $n_2 = 1.00$ es el índice de refracción del aire, los rayos que se originan en la moneda de la figura 36.19 se refractan alejándose de la normal en la superficie y divergen hacia afuera.

Categorizar Porque los rayos de luz se originan en un material y luego pasan a través de una superficie curva hacia otro material, este ejemplo es de una imagen formada por refracción.

Analizar Aplique la ecuación 36.8 y note, de la tabla 36.2, que R es negativo:

$$\frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1.00 - 1.50}{-3.0 \text{ cm}} - \frac{1.50}{2.0 \text{ cm}}$$

$$q = -1.7 \text{ cm}$$

Finalizar El signo negativo de q indica que la imagen está enfrente de la superficie; en otras palabras, está en el mismo medio que el objeto, como se muestra en la figura 36.19. En consecuencia, la imagen debe ser virtual. (Véase la tabla 36.2.) La moneda parece estar más cerca de la superficie del pisapapeles de lo que en realidad está.

EJEMPLO 36.7 El que se fue

Un pez pequeño nada a una profundidad d bajo la superficie de un estanque (figura 36.20).

A) ¿Cuál es la profundidad aparente del pez, visto directamente desde arriba?

Figura 36.20 (Ejemplo 36.7) a) La profundidad aparente q del pez es menor que la profundidad verdadera d. Se supone que todos los rayos son paraxiales. b) Al pez le parece que la cara de usted es más grande de lo que es.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Porque $n_1 > n_2$, donde $n_2 = 1.00$ es el índice de refracción del aire, los rayos que se originan en el pez en la figura 36.20a se refractan alejándose de la normal en la superficie y divergen hacia afuera.

Categorizar Ya que la superficie refractante es plana, R es infinito. Por esto, puede usar la ecuación 36.9 para determinar la ubicación de la imagen, con $p = d$.

Analizar Use en la ecuación 36.9 los índices de refracción conocidos en la figura 36.20a:

$$q = -\frac{n_2}{n_1} p = -\frac{1.00}{1.33} d = -0.752d$$

Finalizar Puesto que q es negativa, la imagen es virtual, como indican las líneas discontinuas en la figura 36.20a. La profundidad aparente es aproximadamente tres cuartos la profundidad real.

B) Si su cara está a una distancia d sobre la superficie del agua, ¿a qué distancia aparente sobre la superficie el pez ve su cara?

SOLUCIÓN

Los rayos de luz de su cara se muestran en la figura 36.20b.

Conceptualizar Como los rayos se refractan hacia la normal, su cara parece más grande sobre la superficie de lo que en realidad es.

Categorizar Porque la superficie refractante es plana, R es infinito. Por esto, puede usar la ecuación 36.9 para determinar la ubicación de la imagen con $p = d$.

Analizar Use la ecuación 36.9 para encontrar la distancia de imagen:

$$q = -\frac{n_2}{n_1}p = -\frac{1.33}{1.00}d = -1.33d$$

Finalizar El signo negativo para q indica que la imagen está en el medio desde donde se originó la luz, que es el aire sobre el agua.

¿Qué pasaría si? ¿Y si usted observa más cuidadosamente al pez y mide su *altura* aparente desde su aleta superior hasta su aleta inferior? ¿La altura aparente h' del pez es diferente de la altura real h?

Respuesta Puesto que todos los puntos sobre el pez parecen estar fraccionalmente más cerca del observador, es de esperar que la altura sea más pequeña. Sea d la distancia medida en la figura 36.20a hasta la aleta superior, y $d + h$ la distancia hasta la aleta inferior. En tal caso, las imágenes de las partes superior e inferior del pez se ubican en

$$q_{\text{superior}} = -0.752d$$
$$q_{\text{inferior}} = -0.752(d + h)$$

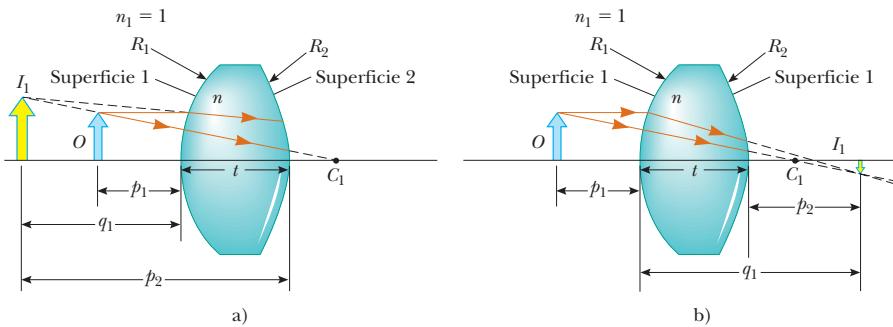
La altura aparente h' del pez es

$$h' = q_{\text{superior}} - q_{\text{inferior}} = -0.752d - [-0.752(d + h)] = 0.752h$$

Por tanto, el pez parece tener aproximadamente tres cuartos de su altura real.

36.4 Lentes delgadas

Usualmente las lentes se utilizan para formar imágenes por refracción en los instrumentos ópticos, como es el caso de cámaras fotográficas, telescopios y microscopios. Utilice lo que acaba de aprender sobre las imágenes formadas por superficies de refracción para localizar la imagen formada por una lente. La luz que pasa a través de ella experimenta una refracción en dos superficies. El desarrollo a seguir está en función de la creencia de que **la imagen formada por una superficie refractora sirve como el objeto para la segunda superficie.** Primero analizará una lente gruesa y posteriormente su espesor será aproximadamente igual a cero.

Considere una lente con un índice de refracción n y dos superficies esféricas con radios de curvatura R_1 y R_2, como en la figura 36.21. (Observe que R_1 es el radio de curvatura de la superficie de la lente que primero atraviesa la luz que proviene del objeto y que R_2 es el radio de curvatura de la otra superficie de la lente.) Se coloca un objeto en el punto O a una distancia p_1 enfrente de la superficie 1.

Empiece con la imagen formada por la superficie 1. Utilice la ecuación 36.8 y suponga que $n_1 = 1$, porque la lente está rodeada por aire, encontrará que la imagen I_1 formada por la superficie 1 satisface la ecuación

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{R_1} \qquad \textbf{(36.10)}$$

donde q_1 es la posición de la imagen debida a la superficie 1. Si la imagen debida a la superficie 1 es virtual (figura 36.21a), q_1 es negativa, y si la imagen es real, q_1 es positiva (figura 36.21b).

Ahora aplique la ecuación 36.8 a la superficie 2, con $n_1 = n$ y $n_2 = 1$. (Este cambio en el índice se debe a que los rayos luminosos que se acercan a la superficie 2 están en

Figura 36.21 Para localizar la imagen formada por una lente, utilice la imagen virtual en I_1 formada por la superficie 1 como el objeto de la imagen formada para la superficie 2. El punto C_1 es el centro de curvatura de la superficie 1. a) La imagen debida a la superficie 1 es virtual, por lo que I_1 está del lado izquierdo de la superficie. b) La imagen debida a la superficie 1 es real, por lo que I_1 aparece a la derecha de la superficie.

el material de la lente, y este material tiene un índice de refracción n.) Si p_2 es la distancia objeto de la superficie 2 y q_2 es la distancia imagen, obtiene

$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1 - n}{R_2} \tag{36.11}$$

Ahora hay que introducir, en términos matemáticos, el hecho de que la imagen formada por la primera superficie actúa como el objeto para la segunda superficie. Si la imagen en la superficie 1 es virtual como en la figura 36.21a, observe que p_2, medido desde la superficie 2, está relacionado con q_1 como $p_2 = -q_1 + t$, donde t es el espesor de la lente. Puesto que q_1 es negativa, p_2 es un número positivo. La figura 36.21b muestra el caso de la imagen de la superficie 1 como real. En esta situación, q_1 es positiva y $p_2 = -q_1 + t$, donde la imagen de la superficie 1 actúa como un objeto virtual, de modo que p_2 es negativo. Sin importar el tipo de imagen de la superficie 1, la misma ecuación describe la ubicación del objeto para la superficie 2 según la convención de signos. En el caso de una lente *delgada* (cuyo espesor es menor comparado con el radio de curvatura), desprecie t. En esta aproximación, $p_2 = -q_1$ para cualquiera de los dos tipos de imágenes de la superficie 1. Por esto, la ecuación 36.11 se convierte en

$$-\frac{n}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1 - n}{R_2} \tag{36.12}$$

Al sumar las ecuaciones 36.10 y 36.12, halla que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{36.13}$$

Figura 36.22 Geometría simplificada para el caso de una lente delgada.

En el caso de una lente delgada, elimine los subíndices de p_1 y q_2 de la ecuación 36.13 e identifique p como la distancia objeto y q como la distancia imagen, como en la figura 36.22. De aquí, escriba la ecuación 36.13 en la forma

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{36.14}$$

Esta expresión relaciona la distancia imagen q de la imagen formada por una lente delgada con la distancia objeto p y con las propiedades de la lente (índice de refracción y radios de curvatura). Sólo es válida para rayos paraxiales y únicamente cuando el espesor de la lente es mucho menor que R_1 y R_2.

La **distancia focal** f de una lente delgada es la distancia imagen que corresponde a una distancia objeto infinita, lo mismo que ocurre con los espejos. Si en la ecuación 36.14 hace que p tienda a ∞ y q tienda a f, la inversa de la distancia focal de una lente delgada es igual a

Ecuación de los fabricantes de lentes ▶

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{36.15}$$

Esta relación se conoce como la **ecuación de los fabricantes de lentes** porque se utiliza para determinar los valores de R_1 y R_2 necesarios para un índice de refracción dado y una distancia focal f deseada. A la inversa, si se conocen tanto el índice de refracción como los radios de curvatura de la lente, esta ecuación permite el cálculo de la distancia

Figura 36.23 Los rayos luminosos paralelos pasan a través de a) una lente convergente y b) una lente divergente. La distancia focal es la misma para los rayos luminosos que pasan a través de cierta lente en cualquiera de las direcciones. Los focos F_1 y F_2 están a la misma distancia de la lente.

focal. Si la lente está sumergida en algo diferente del aire, puede utilizar esta misma ecuación, interpretando n como la *relación* del índice de refracción del material de la lente con el fluido que la rodea.

Mediante la ecuación 36.15 puede escribir la ecuación 36.14 de manera idéntica a la ecuación 36.6 para los espejos:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \qquad \textbf{(36.16)}$$

Esta ecuación, conocida como la **ecuación de las lentes delgadas,** se utiliza para relacionar la distancia imagen con la distancia objeto para una lente delgada.

Puesto que la luz pasa en ambas direcciones a través de una lente, cada lente tiene dos focos, uno para los rayos luminosos que pasan en una dirección y el otro para rayos luminosos que pasan en la otra dirección. Éstos quedan ilustrados en la figura 36.23 para una lente plana convexa (lente convergente) y una lente plana cóncava (lente divergente).

La figura 36.24 resulta útil para obtener los signos de p y de q, y la tabla 36.3 contiene las convenciones de signos para lentes delgadas. Observe que estas reglas de signos son las *mismas* que las superficies refractoras (véase la tabla 36.2).

En la figura 36.25 se muestran varias formas de lentes. Observe que una lente convergente es más gruesa en su parte central que en los bordes, en tanto que una lente divergente es más delgada en el centro que en los bordes.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 36.5

Una lente tiene dos focos pero sólo una distancia focal

Una lente tiene un foco a cada lado, adelante y atrás. Sin embargo, sólo tiene una distancia focal; cada foco está ubicado a la misma distancia de la lente (figura 36.23). Como resultado, la lente forma la imagen de un objeto en el mismo punto si se le da vuelta. Es posible que en la práctica esto no ocurra, ya que las lentes en la realidad no son infinitesimalmente delgadas.

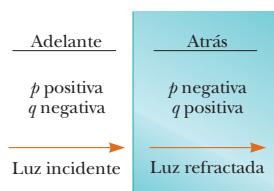



Figura 36.24 Diagrama para obtener los signos de p y de q para lentes delgadas. (Este diagrama también es aplicable a una superficie refractora.)

Aumento de las imágenes

Considere una lente delgada a través de la cual pasan los rayos luminosos provenientes de un objeto. Igual que con los espejos (ecuación 36.2), la construcción geométrica demuestra que el aumento lateral de la imagen es igual a

$$M=\frac{h'}{h}=-\frac{q}{p} \qquad \textbf{(36.17)}$$

Al partir de esta expresión, se deduce que cuando M es positiva, la imagen es vertical y del mismo lado de la lente que el objeto. Cuando M es negativa, la imagen aparece invertida y del lado de la lente opuesta al objeto.

Figura 36.25 Diferentes formas de lentes. a) Las lentes convergentes tienen una distancia focal positiva y son más gruesas en su parte central. b) Las lentes divergentes tienen una distancia focal negativa y su parte más gruesa está en los bordes.

TABLA 36.3

Reglas convencionales para signos en el caso de lentes delgadas

Cantidad	Positivos cuando. . .	Negativos cuando. . .
Ubicación del objeto (p)	el objeto está delante de la lente (objeto real)	el objeto detrás de la lente (objeto virtual)
Ubicación de la imagen (q)	la imagen está detrás de la lente (imagen real)	la imagen está delante de la lente (imagen virtual)
Altura de la imagen (h')	la imagen es vertical	la imagen está invertida
R_1 y R_2	el centro de curvatura está detrás de la lente	el centro de curvatura está delante de la lente
Distancia focal (f)	la lente es convergente	la lente es divergente

Diagramas de rayos para lentes delgadas

Los diagramas de rayos resultan convenientes para localizar las imágenes formadas por lentes o sistema de lentes delgadas. También ayudan a aclarar las reglas para los signos. La figura 36.26 muestra estos diagramas para tres situaciones de una sola lente.

Para localizar la imagen de una lente *convergente* (figuras 36.26a y b), se trazan los tres rayos siguientes a partir de la parte superior del objeto:

- El rayo 1, se dibuja paralelo al eje principal. Una vez refractado por la lente, este rayo pasa a través del foco en la cara posterior de la lente.
- El rayo 2, se dibuja a través del centro de la lente y sigue en línea recta.
- El rayo 3, se dibuja a través del foco en la cara frontal de la lente (o como si saliera del foco en el caso de que $p < f$) y emerge de ésta paralelo al eje principal.

Para localizar la imagen de una lente *divergente* (figura 36.26c), se trazan los tres rayos siguientes a partir de la parte superior del objeto:

- El rayo 1, se dibuja paralelo al eje principal. Después de ser refractado por la lente, emerge alejándose desde el foco en la cara frontal de la lente.
- El rayo 2, se dibuja a través del centro de la lente y continúa en línea recta.
- El rayo 3, se dibuja en la dirección hacia el foco en la cara posterior de la lente y emerge de ésta paralelo al eje principal.

Para la lente convergente de la figura 36.26a, donde el objeto está a la izquierda del foco ($p > f$), la imagen es real e invertida. Cuando el objeto está entre el foco y la lente ($p < f$), como en la figura 36.26b, la imagen es virtual y vertical. En este caso, las lentes actúan como una lupa, que se estudiará con más detalle en la sección 36.8. Para una lente divergente (figura 36.26c), la imagen siempre es virtual y hacia arriba, sin importar dónde esté colocado el objeto. Estas construcciones geométricas son razonablemente precisas sólo en el caso en que la distancia entre los rayos y el eje principal sea mucho menor que los radios de las superficies de las lentes.

Observe que la refracción se presenta sólo en la superficie de la lente. Un cierto diseño de lentes aprovecha este hecho para producir las *lentes Fresnel*, las cuales son po-

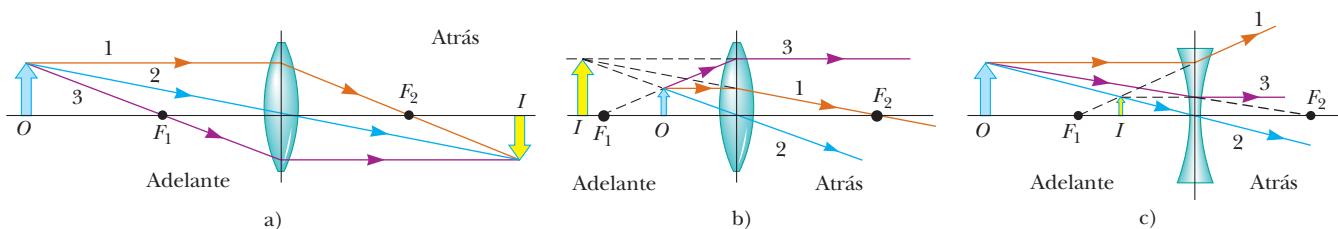



Figura 36.26

Diagramas de rayos para la localización de la imagen formada por una lente delgada. a) Cuando el objeto está por delante y fuera del foco de una lente convergente, la imagen es real, invertida y en la cara posterior de la lente. b) Cuando el objeto está entre el foco y una lente convergente, la imagen es virtual, vertical y mayor que el objeto y aparece en la cara frontal de la lente. c) Cuando un objeto está en cualquier sitio por delante de una lente divergente, la imagen es virtual, vertical y menor que el objeto y en la cara frontal de la lente.

derosas y muy delgadas. Como únicamente la superficie de la curvatura es importante en las características refractoras de la lente, el material central de una lente Fresnel se retira como se muestra en el corte transversal de las lentes en la figura 36.27. Ya que las orillas de los segmentos curvos provocan algo de distorsión, las lentes Fresnel se utilizan en situaciones en que la calidad de la imagen es menos importante que la ligereza; los proyectores para aulas tienen lentes Fresnel; las orillas circulares entre segmentos de lente pueden apreciarse al ver de cerca la luz proyectada a una pantalla.

Figura 36.27 La lente Fresnel de la izquierda tiene la misma distancia focal que la lente gruesa de la derecha, pero está hecha con mucho menos vidrio.

Pregunta rápida 36.6 ¿Cuál es la distancia focal de una hoja de vidrio para ventana? a) Cero, b) infinito, c) el espesor del vidrio, d) imposible de determinar.

EJEMPLO 36.8 Imágenes formadas por una lente convergente

Una lente convergente tiene una distancia focal de 10.0 cm.

A) Se coloca un objeto a 30.0 cm de la lente. Construya un diagrama de rayos, encuentre la distancia de la imagen y describa la imagen.

Figura 36.28 (Ejemplo 36.8) Imagen formada por una lente convergente. a) El objeto está más alejado de la lente que el foco. b) El objeto está más cerca de la lente que el foco.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que la lente es convergente, la distancia focal es positiva (véase la tabla 36.3). Espere posibilidades de imágenes real y virtual.

Categorizar Como la distancia de objeto es mayor que la distancia focal, se espera que la imagen sea real. El diagrama de rayos para esta situación se muestra en la figura 36.28a.

Analizar Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 36.16:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{10.0 \text{ cm}} - \frac{1}{30.0 \text{ cm}}$$

$$q = \boxed{+15.0 \text{ cm}}$$

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 36.17:

$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{15.0 \text{ cm}}{30.0 \text{ cm}} = \boxed{-0.500}$$

Finalizar El signo positivo para la distancia de imagen dice que la imagen de hecho es real y en la cara posterior de la lente. El aumento de la imagen dice que se reduce en altura a la mitad, y el signo negativo para M dice que la imagen está invertida.

B) Un objeto se coloca a 10.0 cm de la lente. Encuentre la distancia de la imagen y describa la imagen.

SOLUCIÓN

Categorizar Porque el objeto está en el foco, se espera que la imagen esté infinitamente alejada.

Analizar Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 36.16:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{10.0 \text{ cm}} - \frac{1}{10.0 \text{ cm}}$$

$$q = \infty$$

Finalizar Este resultado significa que los rayos que se originan desde un objeto colocado en el foco de una lente se refractan de modo que la imagen se forma a una distancia infinita de la lente; es decir: los rayos viajan paralelos de una a otra después de la refracción.

C) Un objeto se coloca a 5.00 cm de la lente. Construya un diagrama de rayos, halle la distancia de imagen y describa la imagen.

SOLUCIÓN

Categorizar Como la distancia del objeto es menor que la distancia focal, se espera que la imagen sea virtual. El diagrama de rayos para esta situación se muestra en la figura 36.28b.

Analizar Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 36.16:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{10.0 \text{ cm}} - \frac{1}{5.00 \text{ cm}}$$

$$q = -10.0 \text{ cm}$$

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 36.17:

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-10.0 \text{ cm}}{5.00 \text{ cm}}\right) = +2.00$$

Finalizar La distancia de imagen negativa dice que la imagen es virtual y se forma en el lado del lente desde donde incide la luz, la cara frontal. La imagen es agrandada y el signo positivo para M dice que la imagen es vertical.

¿Qué pasaría si? ¿Si el objeto se mueve en línea recta hacia la superficie de la lente, de modo que $p \to 0$? ¿Dónde está la imagen?

Respuesta En este caso, ya que $p << R$, donde R es cualquiera de los radios de las superficies de la lente, la curvatura de la lente se ignora. Debe parecer que las lentes tienen el mismo efecto que una pieza plana de material, lo que sugiere que la imagen está justo en la cara frontal de la lente, en $q = 0$. Esta conclusión se verifica matemáticamente al reordenar la ecuación de lente delgada:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

Si se hace $p \to 0$, el segundo término a la derecha se vuelve muy grande en comparación con el primero y se puede despreciar $1/f$. La ecuación se convierte en

$$\frac{1}{q} = -\frac{1}{p} \quad \to \quad q = -p = 0$$

Por lo tanto, q está en la cara frontal de la lente (porque tiene el signo opuesto a p) y recto en la superficie de la lente.

EJEMPLO 36.9 Imágenes formadas por lentes divergentes

Una lente divergente tiene una longitud focal de 10.0 cm.

A) Se coloca un objeto a 30.0 cm de la lente. Construya un diagrama de rayos, encuentre la distancia de imagen y describa la imagen.

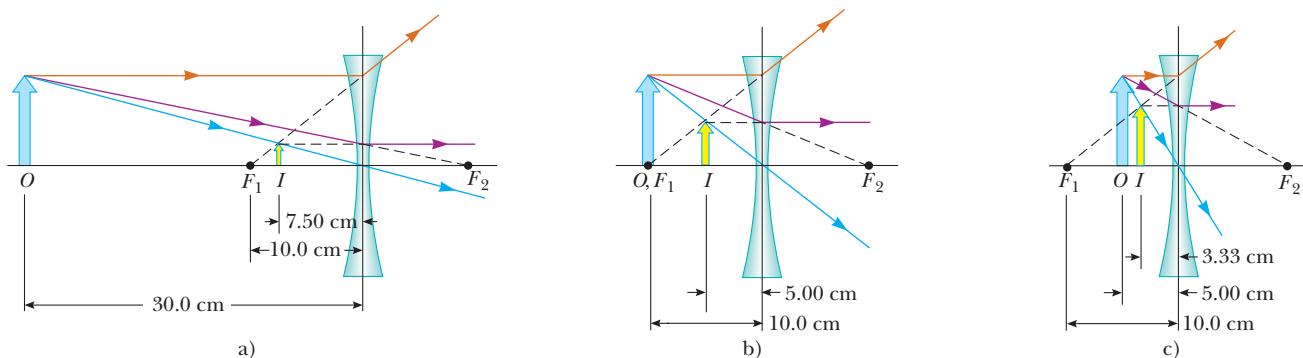



Figura 36.29 (Ejemplo 36.9) Imagen formada por una lente divergente. a) El objeto está más alejado de la lente que el foco. b) El objeto está en el foco. c) El objeto está más cerca de la lente que el foco.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Porque la lente es divergente, la distancia focal es negativa (véase la tabla 36.3). El diagrama de rayos para esta situación se muestra en la figura 36.29a.

Categorizar Ya que la lente es divergente, se espera que se forme una imagen virtual reducida vertical para cualquier posición del objeto.

Analizar Encuentre la distancia de la imagen con la ecuación 36.16:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{-10.0 \text{ cm}} - \frac{1}{30.0 \text{ cm}}$$

$$q = \boxed{-7.50 \text{ cm}}$$

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 36.17:

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-7.50 \text{ cm}}{30.0 \text{ cm}}\right) = \boxed{+0.250}$$

Finalizar Este resultado confirma que la imagen es virtual, menor que el objeto y vertical. Vea a través de la lente divergente de una mirilla de puerta para ver este tipo de imagen.

B) Un objeto se coloca a 10.0 cm del lente. Construya un diagrama de rayos, encuentre la distancia de imagen y describa la imagen.

SOLUCIÓN

El diagrama de rayos para esta situación se muestra en la figura 36.29b.

Analizar Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 36.16:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{-10.0 \text{ cm}} - \frac{1}{10.0 \text{ cm}}$$

$$q = \boxed{-5.00 \text{ cm}}$$

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 36.17:

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-5.00 \text{ cm}}{10.0 \text{ cm}}\right) = \boxed{+0.500}$$

Finalizar Note la diferencia entre esta situación y la de la lente convergente. Para una lente divergente, un objeto en el foco no produce una imagen infinitamente alejada.

C) Se coloca un objeto a 5.00 cm de la lente. Construya un diagrama de rayos, encuentre la distancia de la imagen y describa la imagen.

SOLUCIÓN

El diagrama de rayos para esta situación se muestra en la figura 36.29c.

Analizar Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 36.16:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{-10.0 \text{ cm}} - \frac{1}{5.00 \text{ cm}}$$

$$q = -3.33 \text{ cm}$$

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 36.17:

$$M = -\left(\frac{-3.33 \text{ cm}}{5.00 \text{ cm}}\right) = +0.667$$

Finalizar Para las tres posiciones del objeto, la posición de imagen es negativa y el aumento es un número positivo menor que 1, lo que confirma que la imagen es virtual, menor que el objeto y vertical.

Combinación de lentes delgadas

Si dos lentes delgadas se utilizan para formar una imagen, el sistema se trata de la siguiente manera: primero, la imagen formada por la primera lente se localiza como si no estuviera presente la segunda lente. Después se traza un diagrama de rayos para la segunda lente, con la imagen formada por la primera lente como objeto para la segunda. La segunda imagen formada es la imagen final del sistema. Si la imagen formada por la primera lente aparece en la cara posterior de la segunda, esa imagen se trata como un **objeto virtual** para la segunda lente (es decir, en la ecuación de las lentes delgadas, p es negativa). Este mismo procedimiento se extiende a sistemas de tres o más lentes. Ya que el aumento debido a la segunda lente se efectúa sobre la imagen aumentada debida a la primera lente, **el aumento general de la imagen causada por la combinación de las lentes es el producto de los aumentos individuales.**

$$M = M_1 M_2 \tag{36.18}$$

Esta ecuación sirve para combinaciones de elementos ópticos cualesquiera como una lente y un espejo. Para más de dos elementos ópticos, los aumentos debidos a todos los elementos se multiplican juntos.

Consideremos el caso especial de un sistema de dos lentes de distancias focales f_1 y f_2 que están en contacto la una con la otra. Si $p_1 = p$ es la distancia objeto de la combinación, la aplicación de la ecuación de las lentes delgadas (ecuación 36.16) a la primera lente da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$$

donde q_1 es la distancia imagen para la primera lente. Si trata esta imagen como objeto de la segunda lente, la distancia objeto para ésta debe ser $p_2 = -q_1$. (Las distancias son iguales porque las lentes están en contacto y se han supuesto infinitesimalmente delgadas. La distancia objeto es negativa porque el objeto es virtual.) Por lo tanto, para la segunda lente

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

donde $q = q_2$ es la distancia de imagen final desde la segunda lente, que es la distancia de imagen de la combinación de lentes. Si suma las ecuaciones para las dos lentes, elimine q_1 y eso da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

La combinación es sustituida con una lente simple que forma una imagen en la misma ubicación, su distancia focal está relacionada con las distancias focales individuales mediante

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad \textbf{(36.19)}$$

◀ Distancia focal para una combinación de dos lentes delgadas en contacto

Por lo tanto, **dos lentes delgadas en contacto entre sí son equivalentes a una lente simple delgada de distancia focal conocida por la ecuación 36.19.**

EJEMPLO 36.10 ¿Dónde está la imagen final?

Dos lentes convergentes delgadas, con distancias focales $f_1 = 10.0$ cm y $f_2 = 20.0$ cm, separadas 20.0 cm, como se ilustra en la figura 36.30. Un objeto se coloca a 30.0 cm a la izquierda de la lente 1. Encuentre la posición y la amplificación de la imagen final.

Figura 36.30 (Ejemplo 36.10) Una combinación de dos lentes convergentes. El diagrama de rayos muestra la ubicación de la imagen final debida a la combinación de lentes. Los puntos negros son los focos de la lente 1 y los puntos rojos son los focos de la lente 2.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los rayos de luz pasan a través de la primera lente y forman una imagen real (ya que $p > f$) en ausencia de una segunda lente. La figura 36.30 muestra estos rayos de luz que forman la imagen invertida I_1. Una vez que los rayos de luz convergen en el punto imagen, no se detienen. Continúan a través del punto de imagen e interactúan con la segunda lente. Los rayos que dejan el punto de imagen se comportan en la misma forma que los rayos que dejan al objeto. Por tanto, la imagen de la primera lente sirve como el objeto de la segunda lente.

Categorizar Este problema se clasifica como uno en el que la ecuación de lente delgada es aplicada de manera gradual a las dos lentes.

Analizar Encuentre la ubicación de la imagen formada por la lente 1 a partir de la ecuación de lente delgada:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_1}$$

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{10.0 \text{ cm}} - \frac{1}{30.0 \text{ cm}}$$

$$q_1 = +15.0 \text{ cm}$$

Encuentre el aumento de la imagen a partir de la ecuación 36.17:

$$M_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{15.0 \text{ cm}}{30.0 \text{ cm}} = -0.500$$

La imagen formada por esta lente actúa como el objeto para la segunda lente. Debido a eso, la distancia del objeto para la segunda lente es 20.0 cm − 15.0 cm = 5.00 cm.

Encuentre la ubicación de la imagen formada por la lente 2 a partir de la ecuación de la lente delgada:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{20.0 \text{ cm}} - \frac{1}{5.00 \text{ cm}}$$

$$q_2 = -6.67 \text{ cm}$$

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 36.17:

$$M_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{(-6.67 \text{ cm})}{5.00 \text{ cm}} = +1.33$$

Halle el aumento global del sistema a partir de la ecuación 36.18:

$$M = M_1 M_2 = (-0.500)(1.33) = -0.667$$

Finalizar El signo negativo en el aumento global indica que la imagen final está invertida respecto al objeto inicial. Ya que el valor absoluto del aumento es menor que 1, la imagen final es menor que el objeto. Porque q_2 es negativa, la imagen final está en el lado de enfrente, o izquierdo, de la lente 2. Estas conclusiones son consistentes con el diagrama de rayos de la figura 36.30.

¿Qué pasaría si? Suponga que quiere crear una imagen vertical con este sistema de dos lentes. ¿Cómo debe mover la segunda lente?

Respuesta Ya que el objeto está más lejos de la primera lente que la distancia focal de dicha lente, la primera imagen está invertida. En consecuencia, la segunda lente debe invertir la imagen una vez más de modo que la imagen final esté derecha. Una imagen invertida sólo se forma por una lente convergente si el objeto está fuera del foco. Por lo tanto, la imagen formada por la primera lente debe estar a la izquierda del punto focal de la segunda lente en la figura 36.30. Para hacer que esto suceda, debe mover la segunda lente al menos tan lejos de la primera lente como la suma $q_1 + f_2 = 15.0\text{ cm} + 20.0\text{ cm} = 35.0\text{ cm}$.

36.5 Aberraciones de las lentes

Este análisis de espejos y de lentes supone que los rayos forman ángulos pequeños con el eje principal y que las lentes son delgadas. En este modelo simple, todos los rayos que salen de una fuente puntual se enfocan en un solo punto, produciendo una imagen nítida. Es claro que no siempre sucede así. Cuando las aproximaciones que se utilizan en este análisis ya no son válidas, se forman imágenes imperfectas.

Un análisis preciso de la formación de la imagen requiere trazar cada rayo utilizando la ley de Snell sobre cada superficie de refracción así como las leyes de la reflexión en cada superficie de reflexión. Este procedimiento muestra que los rayos provenientes de un objeto puntual no se enfocan en un solo punto, lo que da como resultado una imagen borrosa. Las desviaciones de imágenes reales del ideal pronosticado en este modelo simplificado, se conocen como **aberraciones.**

Figura 36.31 Aberración cromática causada por una lente convergente. Los rayos de diferentes longitudes de onda se enfocan en puntos diferentes.

Aberraciones esféricas

Las aberraciones esféricas se presentan debido a que los focos de los rayos alejados del eje principal de una lente (o espejo) esférica son diferentes de los focos de rayos con la misma longitud de onda que pasan cerca del eje. La figura 36.31 muestra la aberración esférica para los rayos paralelos que pasan a través de una lente convergente. Los rayos que pasan a través de puntos cercanos al centro de la lente forman una imagen más lejos de la lente que los rayos que pasan a través de puntos cerca de los bordes. La figura 36.8 mostró una situación similar para un espejo esférico.

Muchas cámaras fotográficas tienen una abertura ajustable para controlar la intensidad de la luz y reducir la aberración esférica. (Una abertura es un orificio que controla la cantidad de luz que pasa a través de la lente.) Conforme el tamaño de la abertura disminuye se producen imágenes más nítidas porque, en el caso de una pequeña abertura, sólo la parte central de la lente queda expuesta a la luz y debido a eso, un mayor porcentaje de los rayos son paraxiales. Sin embargo, al mismo tiempo, pasa menos luz a través de la lente. Con la finalidad de compensar esta menor intensidad luminosa, se utiliza más tiempo de exposición.

En el caso de los espejos, la aberración esférica se minimiza mediante una superficie reflejante parabólica en lugar de una superficie esférica. De cualquier modo, las superficies parabólicas se utilizan muy poco, ya que aquellas con una óptica de alta calidad resultan muy costosas de fabricar. Los rayos de luz paralelos que inciden en una superficie parabólica se enfocan en un punto común, independiente de su distancia al eje principal. Estas superficies reflectoras parabólicas se utilizan en muchos telescopios astronómicos a fin de mejorar la calidad de la imagen.

Figura 36.32 Aberración cromática causada por una lente convergente. Los rayos de diferentes longitudes de onda se enfocan en puntos diferentes.

Aberraciones cromáticas

En el capítulo 35 se describe la dispersión, por medio de la cual un índice de refracción de un material se modifica en función de la longitud de onda. Debido a este fenómeno, cuando pasa luz blanca a través de una lente, los rayos violeta se refractan más que los

rojos (figura 36.32). La figura muestra que la distancia focal de una lente es mayor para la luz roja que para la violeta. Otras longitudes de onda (que no se muestran en la figura 36.32) tienen focos intermedios entre la luz roja y la violeta, lo que causa una imagen borrosa, llamada **aberración cromática**.

La aberración cromática para el caso de una lente divergente también da como resultado una distancia focal más corta para la luz violeta que para la luz roja, pero en la cara frontal de la lente. La aberración cromática puede reducirse de manera significativa al combinar una lente convergente fabricada con un clase de vidrio y con una lente divergente hecha con otra clase de vidrio.

36.6 La cámara fotográfica

La **cámara** fotográfica es un instrumento óptico sencillo cuyas características esenciales aparecen en la figura 36.33. Está constituida por una cámara hermética a la luz, una lente convergente que produce una imagen real y una película por detrás de la lente para recibir la imagen.

Las cámaras digitales son similares a las cámaras que hemos descrito aquí, excepto que la luz no forma una imagen sobre una película fotográfica. La imagen de una cámara digital es formada en un *dispositivo acoplado por carga* (CCD, *charge-coupled device*), que traduce en números la imagen, lo que resulta en un código binario, como se explicó en el caso del sonido en la sección 17.5 del volumen I. (El CCD se describe en la sección 40.2.) Esta información digital se guarda después en la memoria para reproducirla en la pantalla de la cámara, o puede ser descargada a una computadora. En la explicación que sigue se considera que la cámara es digital.

Figura 36.33 Vista de la sección transversal de una cámara digital sencilla. El CCD es el componente sensible a la luz de la cámara. En cámaras no digitales, la luz cae sobre la película fotográfica. En realidad, $p \gg q$.

Una cámara se enfoca al variar la distancia entre la lente y el CCD. Para un enfoque adecuado –que es necesario para la formación de imagenes nítidas– la distancia lente a CCD depende de la distancia objeto así como la distancia focal de la lente.

El obturador, colocado por detrás de la lente es un dispositivo mecánico que se abre durante intervalos predeterminados de tiempo, conocidos como *tiempo de exposición*. Es posible fotografiar objetos en movimiento utilizando tiempos de exposición breves, o fotografiar escenas oscuras (con bajos niveles de luminosidad) utilizando tiempos de exposición largos. De no tener este ajuste disponible, resultaría imposible registrar fotografías que detienen el movimiento. Por ejemplo, un vehículo que se desplaza rápidamente puede moverse lo suficiente mientras el obturador está abierto como para producir una imagen borrosa. Otra causa principal de imágenes borrosas es que la cámara se mueve mientras el obturador está abierto. A fin de impedir este movimiento, deberán utilizarse tiempos de exposición breves o un tripié, incluso para objetos inmóviles. Las velocidades características de obturador (es decir, tiempos de exposición) son (1/30)s, (1/60)s, (1/125)s y (1/250)s. En la práctica, los objetos estacionarios se fotografían normalmente con una velocidad de obturador intermedia (1/60)s.

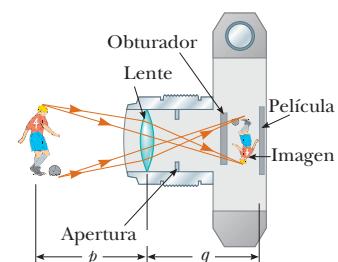
La intensidad I de la luz que llega el CCD es proporcional al área de la lente. En vista de que esta área es proporcional al cuadrado del diámetro D, resulta que I también es proporcional a D^2. La intensidad de la luz es una medida de la proporción a la cual el CCD recibe energía por cada unidad de área de la imagen. Ya que el área de la imagen es proporcional a q^2 y $q \approx f$ (cuando $p \gg f$, de manera que p puede considerarse aproximadamente como infinita), concluya que la intensidad también es proporcional a $1/f^2$ y, por lo tanto, $I \propto D^2/f^2$.

La relación f/D se conoce como el **número** f de una lente:

$$\text{número } f \equiv \frac{f}{D} \qquad \textbf{(36.20)}$$

Por esto, la intensidad de la luz que incide sobre la película varía según la proporcionalidad siguiente:

$$I \propto \frac{1}{(f/D)^2} \propto \frac{1}{(\text{número } f)^2} \qquad \textbf{(36.21)}$$

A menudo el número f se utiliza como una descripción de la "rápidez" de una lente. Mientras menor sea el número f, mayor será la apertura y más elevada la rapidez a la cual la energía proveniente de la luz expone el CCD; en consecuencia, una lente

con un número f bajo es una lente "rápida". La notación convencional de un número f es "$f/$" seguido por el número real. Por ejemplo, "$f/4$" significa un número f de 4; ¡*No significa* que el 4 divide a la f! Algunas lentes extremadamente rápidas, con números f tan bajos como $f/1.2$, resultan costosas, pues es muy difícil mantener aberraciones razonablemente pequeñas con rayos luminosos que pasan a través del área de la lente considerable. Los sistemas de lentes de las cámaras fotográficas (es decir, las combinaciones de lentes con aberturas ajustables) a menudo tienen marcados múltiples números f, por lo general $f/2.8$, $f/4$, $f/5.6$, $f/8$, $f/11$ y $f/16$. Para ajustar la abertura se puede seleccionar cualquiera de esas medidas, lo que cambia el valor de D. Si se incrementa el ajuste de un número f al siguiente valor más alto (por ejemplo, de $f/2.8$ a $f/4$), se reduce el área de la abertura en un factor de 2. El ajuste de número f más bajo en la lente de una cámara corresponde a la lente totalmente abierta y el consiguiente uso del máximo posible del área de la lente.

Las cámaras fotográficas sencillas por lo general tienen una lente de distancia focal y abertura fijas, con un número f de aproximadamente $f/11$. Un número f tan elevado consigue una gran **profundidad de campo,** lo que quiere decir que objetos ubicados en una amplia gama de distancias de la lente forman imágenes razonablemente nítidas sobre el CCD. En otras palabras, no es necesario enfocar la cámara.

Pregunta rápida 36.7 Es posible modelar o representar una cámara fotográfica como una lente convergente simple que enfoca una imagen sobre el CCD, que actúa como pantalla. Inicialmente una cámara se enfoca sobre un objeto lejano. Para enfocar la imagen de un objeto cercano a la cámara, la lente deberá a) alejarse del CCD, b) quedarse donde está, o c) acercarse hacia el CCD.

EJEMPLO 36.11 Búsqueda del tiempo de exposición correcto

La lente de una cámara digital tiene una distancia focal de 55 mm y una rapidez (número f) de $f/1.8$. El tiempo de exposición correcto para esta rapidez bajo ciertas condiciones se sabe que es $\frac{1}{500}$ s.

A) Determine el diámetro de la lente.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Recuerde que el número f para una lente relaciona su distancia focal con su diámetro.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 36.20 para D y sustituya valores numéricos:

$$D = \frac{f}{\text{número } f} = \frac{55 \text{ mm}}{1.8} = \boxed{31 \text{ mm}}$$

B) Calcule el tiempo de exposición correcto si el número f cambia a $f/4$ bajo las mismas condiciones de iluminación.

SOLUCIÓN

La energía luminosa total que incide en el CCD es proporcional al producto de la intensidad y el tiempo de exposición. Si I es la intensidad luminosa que llega al CCD, la energía por unidad de área recibida por el CCD en un intervalo de tiempo Δt es proporcional a $I\,\Delta t$. Al comparar las dos situaciones, se requiere que $I_1\,\Delta t_1 = I_2\,\Delta t_2$, donde Δt_1 es el tiempo de exposición correcto para $f/1.8$ y Δt_2 es el tiempo de exposición correcto para $f/4$.

Use este resultado y sustituya para I a partir de la ecuación 36.21:

$$I_1\,\Delta t_1 = I_2\,\Delta t_2 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta t_1}{(\text{número } f_1)^2} = \frac{\Delta t_2}{(\text{número } f_2)^2}$$

Resuelva para Δt_2 y sustituya valores numéricos:

$$\Delta t_2 = \left(\frac{\text{número } f_2}{\text{número } f_1}\right)^2 \Delta t_1 = \left(\frac{4}{1.8}\right)^2 \left(\tfrac{1}{500}\text{ s}\right) \approx \boxed{\tfrac{1}{100}\text{ s}}$$

Conforme se reduce el tamaño de abertura, el tiempo de exposición debe aumentar.

36.7 El ojo humano

Similar a la cámara fotográfica, un ojo normal enfoca la luz y produce una imagen nítida. Sin embargo, los mecanismos mediante los cuales el ojo controla y ajusta la cantidad de luz admitida para producir imágenes correctamente enfocadas, son mucho más complejos, intrincados y efectivos que los de la cámara más avanzada. En todos los aspectos, el ojo humano es una maravilla fisiológica.

La figura 36.34 muestra los componentes básicos del ojo humano. La luz que entra en el ojo pasa a través de una estructura transparente llamada *córnea* (figura 36.35), por detrás de la cual existen un líquido transparente (el *humor acuoso*), una abertura variable (la *pupila,* que es una vía dentro del *iris*) y la *lente cristalino.* La mayor parte de la refracción se presenta en la superficie externa del ojo, donde la córnea está siempre cubierta por una película de lágrima. En la lente cristalino existe relativamente poca refracción, porque el humor acuoso en contacto con esta lente tiene un índice de refracción promedio similar al de la lente. El iris, que es la parte de color del ojo, es un diafragma muscular que controla el tamaño de la pupila. El iris regula la cantidad de luz que entra en el ojo al dilatar o abrir la pupila en condiciones de luz insuficiente y al contraer o cerrar la pupila en condiciones de elevada luminosidad. El intervalo en número f del ojo humano, es desde aproximadamente $f/2.8$ a $f/16$.

El sistema córnea-lente enfoca la luz en la superficie posterior del ojo, la *retina,* constituida por millones de receptores sensibles, conocidos como *bastones* y *conos.* Al ser estimulados por la luz, estos receptores envían impulsos por el nervio óptico al cerebro, donde se percibe una imagen. Mediante este proceso, se observa una imagen nítida de un objeto cuando su imagen coincide en la retina.

El ojo humano enfoca un objeto al variar la forma de la dúctil lente llamada cristalino mediante un proceso maravilloso conocido como **acomodación.** Todos estos ajustes de la lente ocurren con tanta rapidez que ni siquiera es posible darse cuenta del cambio. La acomodación tiene como límite que cuando los objetos están muy cerca del ojo, se producen imágenes borrosas. El **punto proximal** es la menor distancia a la cual el ojo puede acomodarse para enfocar la luz en la retina. Esta distancia por lo general aumenta con el transcurso del tiempo y tiene un valor promedio de 25 cm. Por lo general, a los 10 años el punto proximal del ojo es de aproximadamente 18 cm. Aumenta a cerca de 25 cm a los 20 años, a 50 cm a los 40 años y a 500 cm o más a los 60 años. El **punto lejano** del ojo representa la mayor distancia en la cual la lente del ojo relajado enfoca luz sobre la retina. Una persona con visión normal ve objetos muy lejanos y por lo tanto tiene un punto lejano que se acerca al infinito.

Recuerde que la luz que se refleja en el espejo de la figura 36.7 se vuelve blanca donde se une, pero después de nuevo diverge en colores separados. Ya que en el punto en que los rayos se cruzan no existe más que aire (y por tanto no hay nada que haga que los colores se separen de nuevo), el ver luz blanca como resultado de una combinación de colores debe ser una ilusión visual. De hecho, ese es el caso. En la retina sólo están

Arte de Robert Demarest de Cecie Starr y Beverly McMillan. *Human Biology,* 5th ed., © 2003. Brooks/Cole, a Division of Thomson Learning, Inc.

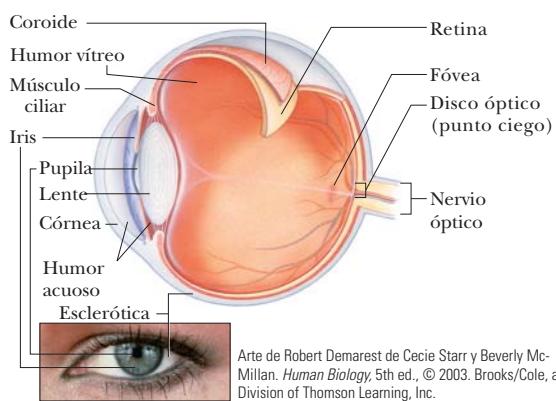



Figura 36.34 Partes principales del ojo humano.

De Lennart Nilsson, en colaboración con Jan Lindberg, *Behold man: A Photographic Journey of Discovery Inside the Body,* Boston, Little, Brown & Co. 1974.

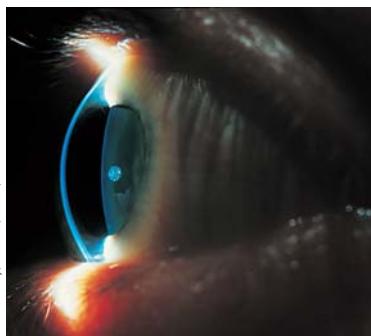



Figura 36.35 Acercamiento a la córnea del ojo humano.

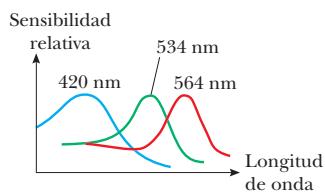



Figura 36.36 Sensibilidad al color aproximada de los tres tipos de conos presentes en la retina.

presentes tres tipos de celdas sensibles al color; se conocen como conos rojos, verdes y azules, debido al máximo de la escala cromática a la cual responden (figura 36.36). Si se estimulan simultáneamente los conos rojos y los verdes (como ocurriría si fueran iluminados por una luz amarilla), el cerebro interpreta lo que se está viendo como color amarillo. Si todos los tipos de conos se estimulan mediante rayos independientes de color rojo, azul y verde, como en la figura 36.7, aparece el color blanco. Si los tres tipos de conos se estimulan por luz que contiene *todos* los colores, como es por ejemplo la luz solar, de nuevo se ve luz blanca.

Las televisiones a color aprovechan esta ilusión visual utilizando sólo puntos rojos, verdes y azules en la pantalla. Con combinaciones específicas de la brillantez en estos tres colores primarios, se logra que los ojos vean cualquiera de los colores del arco iris. Por lo tanto, el limón amarillo que observa en un anuncio de televisión, no es realmente amarillo, ¡es rojo y verde! El papel sobre el cual está impresa esta página está constituido por fibras minúsculas aplastadas y traslúcidas que dispersan la luz en todas las direcciones; la mezcla resultante de colores parece blanca para el ojo humano. La nieve, las nubes y las canas no son realmente blancas. De hecho, no existe un pigmento blanco. La apariencia de estas cosas es una consecuencia de la dispersión de luz que contiene todos los colores y que el cerebro interpreta como blanco.

Estados del ojo humano

Cuando el ojo sufre una falta de coincidencia entre el alcance de enfoque del sistema lente-córnea y la longitud real del ojo, con el resultado de que los rayos luminosos provenientes de un objeto cercano llegan a la retina antes de converger para formar una imagen, según se observa en la figura 36.37a, el estado se conoce como **hipermetropía** (o *hiperopía*). Una persona hipermétrope por lo general puede ver objetos lejanos con claridad, pero no los cercanos. A pesar de que el punto proximal de un ojo humano normal es de aproximadamente 25 cm, el punto proximal de una persona hipermétrope está mucho más alejado. La capacidad de refracción de la córnea y en el cristalino es insuficiente para enfocar la luz de todos los objetos de manera satisfactoria, con excepción de los distantes. Este estado puede ser corregido colocando una lente convergente delante del ojo, según se observa en la figura 36.37b. La lente refracta los rayos incidentes acercándolos más al eje principal antes de que entren en el ojo, permitiendo su convergencia y su enfoque en la retina.

Una persona con visión corta (**o miopía),** otro estado de falta de coincidencia, puede enfocar objetos cercanos pero no los lejanos. El punto lejano del ojo miope no es el infinito y puede ser incluso inferior a un metro. La distancia focal máxima del ojo miope es insuficiente para producir una imagen nítida sobre la retina y los rayos provenientes de un objeto distante convergen en foco por delante de ésta. Después de eso continúan más allá de dicho punto, en divergencia hasta que finalmente llegan a la retina, lo que causa visión borrosa (figura 36.38a). La miopía puede ser corregida mediante una lente divergente, como se observa en la figura 36.38b. La lente refracta los rayos alejándolos del eje principal antes de que entren en el ojo, lo que permite que se enfoquen sobre la retina.

A partir de una edad media, la mayor parte de las personas pierden parte de su capacidad de acomodación debido a que el músculo ciliar se debilita y el cristalino se endurece. A diferencia de lo que sucede con la hipermetropía, que es una falta de coincidencia entre el poder de enfoque y la longitud del ojo, la **presbicia** (literalmente

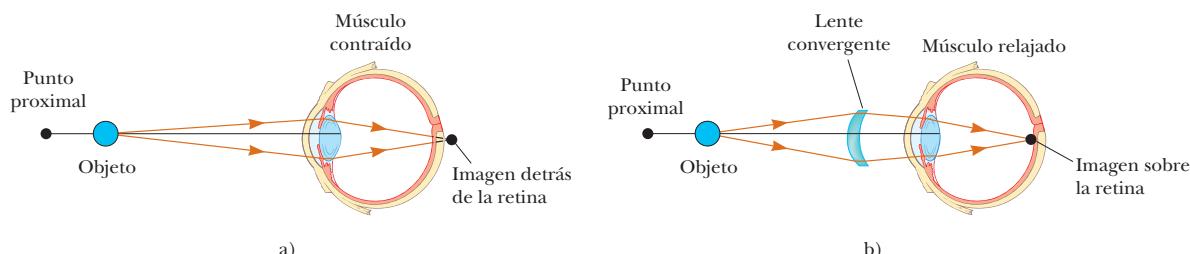



Figura 36.37 a) Cuando un ojo hipermétrope mira un objeto localizado entre el punto proximal y el ojo, el punto imagen aparece por detrás de la retina, lo que resulta en una visión borrosa. El músculo del ojo se contrae tratando de llevar el objeto a un punto de enfoque. b) La hipermetropía se corrige con una lente convergente.

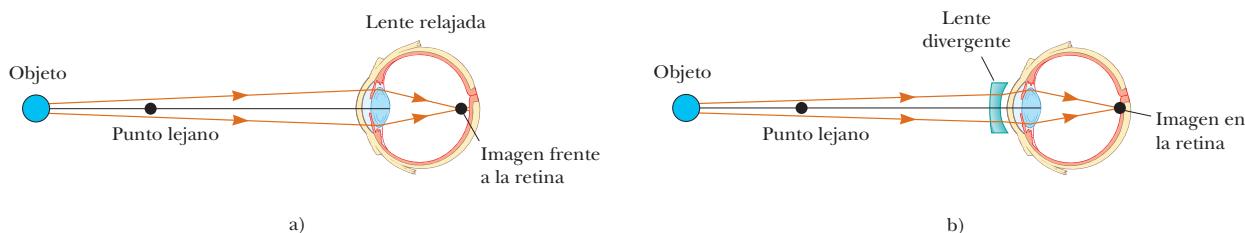



Figura 36.38 a) Cuando un ojo miope mira un objeto que queda más allá del punto lejano, la imagen se forma por delante de la retina, lo que resulta en visión borrosa. b) La miopía se corrige mediante una lente divergente.

llamada "visión de la tercera edad"), se debe a una reducción en la capacidad de acomodación. La córnea y la lente no tienen suficiente poder de enfoque para colocar los objetos cercanos a un foco sobre la retina. Los síntomas son iguales a los de la hipermetropía, y este estado puede ser corregido por medio de lentes convergentes.

En el defecto del ojo humano conocido como **astigmatismo,** la luz proveniente de una fuente puntual produce una imagen lineal sobre la retina. Este estado se presenta cuando la córnea o la lente, o ambos, no son perfectamente simétricos. El astigmatismo puede ser corregido mediante lentes con curvaturas distintas en dos direcciones mutuamente perpendiculares.

Los optometristas y los oftalmólogos, por lo general prescriben lentes[1] que se miden en **dioptrías:** la **potencia** P de una lente en dioptrías es igual al inverso de la distancia focal en metros: $P = 1/f$. Por ejemplo, una lente convergente de +20 cm de distancia focal tiene una potencia de +5.0 dioptrías, y una lente divergente de −40 cm de distancia focal tiene una potencia de −2.5 dioptrías.

Pregunta rápida 36.8 Dos excursionistas desean prender una fogata durante el día. Uno de ellos es miope y el otro hipermétrope. ¿Los anteojos de cuál de los dos deberán ser utilizados para enfocar los rayos del sol sobre papel para iniciar el fuego? a) De cualquiera de los excursionistas, b) del excursionista miope, c) del excursionista hipermétrope.

36.8 La lupa simple

La lupa simple, o amplificador de vidrio, está constituida por una única lente convergente. Como el nombre implica, este dispositivo aumenta el tamaño aparente de un objeto.

Figura 36.39 El tamaño de la imagen que se forma sobre la retina depende del ángulo θ subtendido en el ojo.

Suponga que se mira un objeto a cierta distancia p del ojo, según se ilustra en la figura 36.39. El tamaño de la imagen que se forma en la retina depende del ángulo θ subtendido por el objeto en el ojo. Conforme el objeto se acerca al ojo, θ aumenta y se observa una imagen más grande. Sin embargo, un ojo normal promedio no puede enfocar un objeto que esté más cerca de aproximadamente 25 cm, el punto proximal (figura 36.40a). Debido a eso θ pasa por un máximo en el punto proximal.

A fin de aumentar aún más el tamaño angular aparente de un objeto, se coloca una lente convergente frente al ojo humano, como en la figura 36.40b, estando el objeto en el punto O, justo dentro del punto focal de la lente. En esa ubicación, la lente forma una imagen virtual, ampliada y vertical. La **amplificación angular** m es la relación del ángulo subtendido por un objeto con la lente que se está usando (ángulo θ de la figura 36.40b) al ángulo subtendido por el objeto cuando está colocado en el punto proximal sin lente en uso (ángulo θ_0 de la figura 36.40a):

[1] La palabra *lente* proviene de *lentil,* el nombre de una legumbre italiana. (Posiblemente ya ha comido sopa de lentejas.) Los primeros anteojos se llamaban "lentejas de vidrio" debido a que la forma biconvexa de sus lentes se parecía a la forma de una lenteja. Los primeros lentes para la hipermetropía y la presbicia aparecieron cerca del año 1280; los anteojos cóncavos para la corrección de la miopía no se descubrieron sino hasta más de 100 años después.

Figura 36.40 a) Un objeto colocado en el punto proximal del ojo (p = 25 cm) subtiende en el ojo un ángulo $\theta_0 \approx h/25$. b) Un objeto colocado cerca del foco de una lente convergente produce una imagen aumentada que en el ojo subtiende un ángulo $\theta \approx h'/25$.

$$m \equiv \frac{\theta}{\theta_0} \tag{36.22}$$

La amplificación angular es un máximo cuando la imagen aparece en el punto proximal del ojo humano, es decir, cuando $q = -25$ cm. A partir de la ecuación de las lentes delgadas se puede calcular la distancia objeto correspondiente a esta distancia imagen,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad p = \frac{25f}{25 + f}$$

donde f es la distancia focal de la lupa, en centímetros. Si efectúa las aproximaciones por ángulos pequeños

$$\tan \theta_0 \approx \theta_0 \approx \frac{h}{25} \quad \text{y} \quad \tan \theta \approx \theta \approx \frac{h}{p} \tag{36.23}$$

La ecuación 36.22 se convierte en

$$m_{\text{máx}} = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{h/p}{h/25} = \frac{25}{p} = \frac{25}{25f/(25 + f)}$$

$$m_{\text{máx}} = 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f} \tag{36.24}$$

Aunque el ojo puede enfocar una imagen formada en cualquier posición entre el punto proximal y el infinito, está más relajado cuando la imagen se encuentra en el infinito. Para que una imagen formada por la lupa aparezca en el infinito, el objeto debe estar en el foco de la lupa. En este caso, las ecuaciones 36.23 se convierten en

George Semple

Una lente de aumento simple, también conocida como lupa, se utiliza para ver una imagen amplificada de una parte de un mapa.

$$\theta_0 \approx \frac{h}{25} \quad \text{y} \quad \theta \approx \frac{h}{f}$$

y la amplificación es igual a

$$m_{\text{mín}} = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{25 \text{ cm}}{f} \tag{36.25}$$

Con sólo una lente, es posible obtener hasta cuatro amplificaciones angulares sin aberraciones de importancia. Usando una o dos lentes adicionales para corregir las aberraciones, se logran hasta 20 amplificaciones.

EJEMPLO 36.12 Amplificación de una lente

¿Cuál es la máxima amplificación que es posible con una lente que tiene una distancia focal de 10 cm y cuál es la amplificación de esta lente cuando el ojo está relajado?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 36.40b para la situación en la que una lente de aumento forma una imagen alargada de un objeto colocado dentro del foco. La máxima amplificación se presenta cuando la imagen se ubica en el punto cercano del ojo. Cuando el ojo está relajado, la imagen está en el infinito.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la amplificación máxima a partir de la ecuación 36.24:

$$m_{\text{máx}} = 1 + \frac{25\text{ cm}}{f} = 1 + \frac{25\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 3.5$$

Evalúe la amplificación mínima, cuando el ojo está relajado a partir de la ecuación 36.25:

$$m_{\text{mín}} = \frac{25\text{ cm}}{f} = \frac{25\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 2.5$$

36.9 El microscopio compuesto

Una lente de aumento simple proporciona sólo una ayuda limitada en la inspección detallada de un objeto. Se logra una mayor amplificación combinando dos lentes en un dispositivo que se conoce como **microscopio compuesto**, que aparece en la figura 36.41a. El microscopio compuesto está constituido por una lente, el *objetivo*, que tiene una distancia focal muy corta $f_o < 1$ cm, y una segunda lente, el *ocular*, que tiene una distancia focal f_e de unos cuantos centímetros. Las dos lentes están separadas una distancia L que es mucho mayor que f_o o que f_e. El objeto que se coloca justo por fuera del foco de un objetivo forma una imagen real, invertida en I_1, y queda localizada en, o cerca, del foco del ocular. El ocular, que sirve como una lente de aumento simple, produce en I_2 una imagen virtual amplificada de I_1. La amplificación lateral M_1 de la primera imagen es $-q_1/p_1$. Observe, en la figura 36.41a, que q_1 es aproximadamente igual a L y que el objeto queda muy cerca del foco del objetivo: $p_1 \approx f_o$. Debido a eso, la amplificación lateral que logra el objetivo es igual a

$$M_o \approx -\frac{L}{f_o}$$

La amplificación angular del ocular para un objeto (correspondiente a la imagen en I_1) colocado en el foco del ocular es, de acuerdo con la ecuación 36.25,

$$m_e = \frac{25\text{ cm}}{f_e}$$

La amplificación global de la imagen formada por un microscopio compuesto se define como el producto del aumento lateral y amplificación angular:

$$M = M_o m_e = -\frac{L}{f_o}\left(\frac{25\text{ cm}}{f_e}\right) \qquad \textbf{(36.26)}$$

El signo negativo indica que la imagen está invertida.

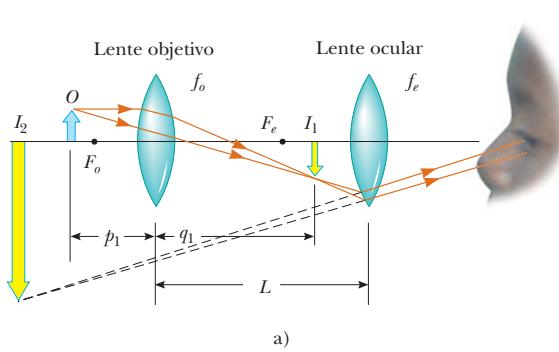



Figura 36.41

a) Diagrama de un microscopio compuesto, constituido de una lente objetivo y de una lente ocular. b) Microscopio compuesto. La torreta de tres objetivos permite que el usuario elija varios niveles de amplificación. Las combinaciones de oculares con distintas distancias focales y diferentes objetivos produce una amplia gama de amplificación.

El microscopio ha extendido la visión del ser humano hasta el punto en que se pueden observar detalles antes desconocidos de objetos increíblemente pequeños. La capacidad de este instrumento se ha venido incrementando con técnicas mejoradas en el pulido de precisión de las lentes. Una pregunta frecuente en relación con los microscopios es: "¿si fuera uno extremadamente paciente y cuidadoso, sería posible construir un microscopio que pudiera hacer visible al ojo humano un átomo?". La respuesta es no, siempre que se utilice luz para iluminar el objeto. La explicación es que, para que se vea un objeto bajo un microscopio óptico (que utiliza luz visible), debe ser por lo menos tan grande como la longitud de onda de la luz. Porque el diámetro de cualquier átomo es muchas veces menor que las longitudes de onda de la luz visible, los misterios del átomo deberán ser descubiertos mediante otro tipo de "microscopio".

36.10 El telescopio

Existen básicamente dos tipos diferentes de **telescopios:** ambos están diseñados para poder ver objetos distantes, como por ejemplo los planetas del sistema solar. El **telescopio de refracción** usa una combinación de lentes para formar una imagen, y el **telescopio de reflexión** usa un espejo curvo y una lente.

Parecido al microscopio compuesto, el telescopio de refracción que se muestra en la figura 36.42a tiene una lente objetivo y una lente ocular. Las dos lentes están colocadas de manera tal que el objetivo forma una imagen real e invertida de un objeto distante muy cerca del foco del ocular. Porque el objeto está esencialmente como si estuviera en el infinito, este punto en el cual se forma I_1 es el foco del objetivo. El ocular forma después, en I_2, una imagen amplificada e invertida de la imagen en I_1. A fin de obtener la amplificación más grande posible, la distancia de imagen para el ocular es infinita. Esto quiere decir que todos los rayos luminosos salen del ocular paralelos al eje principal, y la imagen de la lente objetivo deberá formarse en el foco del ocular, por lo que las dos lentes están separadas una distancia $f_o + f_e$, lo que corresponde a la longitud del tubo del telescopio.

La amplificación angular del telescopio se conoce por θ/θ_o, donde θ_o es el ángulo subtendido por el objeto en el objetivo y θ el ángulo subtendido por la imagen final en el ojo del observador. Considere la figura 36.42a, en la que el objeto está a una distancia muy grande a la izquierda de la figura. El ángulo θ_o (a la *izquierda* del objetivo) subtendido por el objeto en el objetivo es el mismo que el ángulo (a la *derecha* del objetivo) subtendido por la primera imagen en el objetivo. Debido a eso,

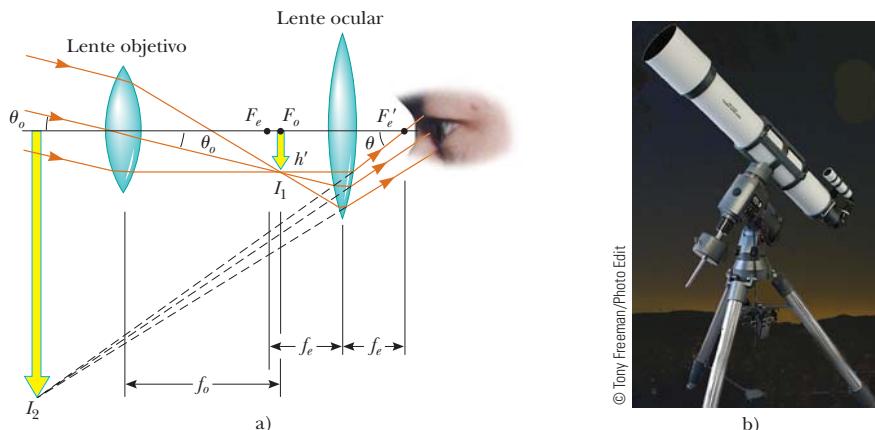



Figura 36.42

a) Organización de lentes en un telescopio de refracción, con el objeto en el infinito. b) Telescopio de refracción.

$$\tan \theta_o \approx \theta_o \approx -\frac{h'}{f_o}$$

donde el signo menos indica que la imagen está invertida.

El ángulo θ subtendido por la imagen final en el ojo del observador es el mismo que forma un rayo proveniente desde la punta de I_1, y que viaja paralelamente al eje principal, con este eje después de haber pasado a través de la lente. Por lo tanto,

$$\tan \theta \approx \theta \approx \frac{h'}{f_e}$$

En esta ecuación no hay un signo negativo, porque la imagen final no está invertida; el objeto que crea esta imagen final I_2 es I_1, y tanto ésta como I_2 apuntan en la misma dirección. En consecuencia, la amplificación angular del telescopio se expresa como

$$m = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{h'/f_e}{-h'/f_o} = -\frac{f_o}{f_e} \quad \textbf{(36.27)}$$

Este resultado muestra que la amplificación angular de un telescopio es igual a la relación entre la distancia focal del objetivo y la distancia focal del ocular. El signo menos indica que la imagen está invertida.

Cuando a través de un telescopio observa objetos relativamente cercanos, como por ejemplo la Luna y los planetas, la amplificación es significativa. Sin embargo, las estrellas de la galaxia están tan lejos que siempre aparecerán como pequeños puntos de luz, cualquiera que sea la amplificación. Un gran telescopio de investigación que se utilice para estudiar objetos muy distantes, debe poseer un diámetro significativo para recolectar toda la luz que sea posible. Las lentes para los telescopios de refracción de gran diámetro son de manufactura difícil y costosa. Otra dificultad con lentes grandes es que su peso crea un pandeo, que es una fuente adicional de aberración.

Estos problemas se superan parcialmente reemplazando el objetivo por un espejo cóncavo, lo que da como resultado un telescopio de reflexión. Porque la luz es reflejada por el espejo y no pasa a través de una lente, éste puede tener soportes muy rígidos en la cara posterior. Estos soportes eliminan el pandeo.

La figura 36.43a muestra el diseño de un telescopio de reflexión representativo. Los rayos de luz incidentes son reflejados por un espejo parabólico existente en la base. Estos rayos convergen hacia el punto A en la figura, donde debería formarse una imagen. Sin embargo, antes de que se forme esta imagen, un espejo pequeño y plano M refleja la luz dirigiéndola hacia una abertura en el costado del cuerpo o tubo del telescopio, y pasa a un ocular. Este diseño en particular se dice que tiene un enfoque newtoniano porque fue Newton quien lo desarrolló. La figura 36.43b muestra este tipo de telescopio. Observe que, en el telescopio de refracción, la luz nunca pasa a través de vidrio (sólo a

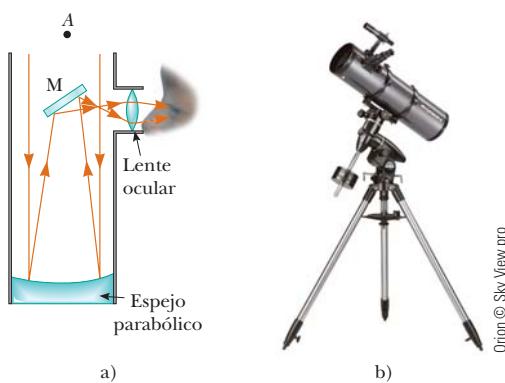



Figura 36.43 a) Telescopio de reflexión de enfoque newtoniano. b) Telescopio de reflexión. Este tipo de telescopio es más corto que el de la figura 36.42b.

través del pequeño ocular). Como resultado, se eliminan virtualmente todos los problemas asociados con la aberración cromática. El telescopio de reflexión se puede fabricar menos largo con el espejo plano orientado para que refleje la luz de regreso hacia el espejo objetivo y que la luz penetre en un ocular en una perforación en el punto medio del espejo.

Los telescopios de reflexión más grandes del mundo se encuentran en el Observatorio Keck en Mauna Kea, Hawaii. El sitio incluye telescopios con diámetro de 10 m, cada uno constituido por 36 espejos de forma hexagonal controlados por computadora para formar una superficie de reflexión muy grande. Se han iniciado discusiones y planes para telescopios con diferentes espejos que trabajen en conjunto, como el Observatorio Keck, que resulten en un diámetro efectivo de hasta 21 m. En comparación, el telescopio de refracción más grande del mundo, el del Observatorio Yerkes en Williams Bay, Wisconsin, tiene un diámetro de apenas un metro.

Resumen

DEFINICIONES

El **aumento lateral** M de la imagen debida a un espejo o lente se define como la relación de la altura de la imagen h' a la altura del objeto h. Es igual al negativo de la relación de la distancia de imagen q a la distancia objeto p:

$$M \equiv \frac{\text{altura de imagen}}{\text{altura de objeto}} = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \qquad \textbf{(36.1, 36.2, 36.17)}$$

La **amplificación angular** m es la relación del ángulo subtendido por un objeto con un lente en uso (ángulo θ en la figura 36.40b), al ángulo subtendido por el objeto colocado en el punto cercano sin lente en uso (ángulo θ_0 en la figura 36.40a):

$$m \equiv \frac{\theta}{\theta_0} \qquad \textbf{(36.22)}$$

La relación de la longitud local de la lente de una cámara al diámetro de la lente se llama **número *f*** de la lente:

$$\text{número } f \equiv \frac{f}{D} \qquad \textbf{(36.20)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

En la aproximación de rayo paraxial, la distancia del objeto p y la distancia de la imagen q para un espejo esférico de radio R se relacionan mediante la **ecuación del espejo**:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \qquad \textbf{(36.4, 36.6)}$$

donde $f = R/2$ es la **longitud focal** del espejo.

Una imagen se puede formar por refracción de una superficie esférica de radio R. Las distancias del objeto y la imagen para refracción de tal superficie se relacionan mediante

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad \textbf{(36.8)}$$

donde la luz es incidente en el medio para el que el índice de refracción es n_1 y se refracta en el medio para el que el índice de refracción es n_2.

(*continúa*)

El inverso de la **distancia focal** f de una lente delgada rodeada por aire se conoce por la **ecuación del fabricante de lentes**:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad \textbf{(36.15)}$$

Las **lentes convergentes** tienen distancias focales positivas, y las **lentes divergentes** tienen distancias focales negativas.

Para una lente delgada, y en la aproximación de rayo paraxial, las distancias del objeto y la imagen se relacionan mediante la **ecuación de lente delgada**:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \textbf{(36.16)}$$

La amplificación máxima de una lente sencilla con distancia focal f usada como una lupa simple es

$$m_{\text{máx}} = 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f} \quad \textbf{(36.24)}$$

La amplificación global de la imagen formada por un microscopio compuesto es:

$$M = -\frac{L}{f_o}\left(\frac{25 \text{ cm}}{f_e}\right) \quad \textbf{(36.26)}$$

donde f_o y f_e son las distancias de las lentes objetivo y ocular, respectivamente, y L es la distancia entre las lentes.

La amplificación angular de un telescopio de refracción se expresa como

$$m = -\frac{f_o}{f_e} \quad \textbf{(36.27)}$$

donde f_o y f_e son las distancias focales de las lentes objetivo y ocular, respectivamente. La ampliación angular de un telescopio de refracción se conoce por la misma expresión donde f_o es la distancia focal del espejo objetivo.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. Considere un espejo esférico cóncavo con un objeto real. ¿La imagen siempre está invertida? ¿ La imagen siempre es real? Justifique sus respuestas.

2. Repita la pregunta anterior pero considere un espejo esférico convexo.

3. **O i)** ¿Cuál es la distancia focal de un espejo plano? a) 0, b) 1, c) −1, d) ∞, e) igual a la altura del espejo, f) No se pueden definir ni la distancia focal ni su recíproco. **ii)** ¿Qué amplificación produce un espejo plano? a) 0, b) 1, c) −1, d) ∞, e) No se pueden definir ni la amplificación ni su recíproco.

4. ¿Son aplicables las ecuaciones $1/p + 1/q = 1/f$, o bien $M = -q/p$, a la imagen formada por un espejo plano? Explique su respuesta.

5. **O** Lulú observa su imagen en un espejo de maquillaje. Aparece alargada cuando está cerca al espejo. Conforme retrocede, la imagen se vuelve más grande, luego es imposible de identificar cuando ella está a 30 cm del espejo, después de cabeza cuando está más allá de 30 cm y finalmente pequeña, clara y de cabeza cuando está mucho más lejos del espejo. **i)** El espejo es, ¿a) convexo, b) plano o c) cóncavo? **ii)** ¿Cuál es la magnitud de su distancia focal? a) 0, b) 15 cm, c) 30 cm, d) 60 cm, e) ∞.

6. Considere un espejo esférico cóncavo, y un objeto situado a la izquierda del espejo más allá del punto focal. Mediante diagramas de rayos, demuestre que la imagen se mueve hacia la izquierda conforme el objeto se acerca al foco.

7. **O i)** Considere el espejo de la figura 36.11. ¿Cuáles son los signos de los siguientes? a) la distancia del objeto, b) la distancia de la imagen, c) el radio del espejo, d) la distancia focal, e) la altura del objeto, f) la altura de la imagen, g) la amplificación. **ii)** Considere la lente objetivo en la figura 36.41a. ¿Cuáles son los signos de los siguientes? a) la distancia del objeto, b) la distancia de la imagen, c) la distancia focal, d) la altura del objeto, e) la altura de la imagen, f) la amplificación. **iii)** Responda las mismas preguntas, de la a) a la f), como en el inciso ii), para el ocular en la figura 36.41a.

8. **O** Una persona que pesca con arpón desde un bote ve un pez inmóvil a pocos metros en una dirección aproximadamente 30° bajo la horizontal. Para arponear al pez, la persona debe ¿a) apuntar arriba de donde ve al pez, b) apuntar precisamente al pez o c) apuntar abajo del pez? Suponga que el denso arpón no cambia de dirección cuando entra al agua.

9. **O** Una sola lente convergente sirve para construir un modelo a escala de cada uno de los siguientes dispositivos en uso, al simplemente cambiar la distancia desde la lente hasta una vela que representa al objeto. Clasifique los casos de acuerdo con la distancia desde el objeto hasta la lente de mayor a menor. a) Un proyector de películas, b) la señal de Batman, usada para proyectar una imagen sobre las nubes en lo alto de Ciudad Gótica, c) una lupa, d) un vidrio quemador, que se utiliza para hacer una imagen clara del Sol sobre la yesca, e) un telescopio de refracción astronómico, que se usa para hacer una imagen nítida de las estrellas sobre un detector electrónico, f) una luz de búsqueda, que se usa para producir un haz de rayos paralelos desde una fuente puntual, g) la lente de una cámara, que se usa para fotografiar un juego de futbol sóccer.

10. En la figura 36.26a suponga que la flecha objeto de color azul es reemplazada por una mucho más alta que la lente. ¿Cuántos rayos desde la parte superior del objeto incidirán sobre ésta? ¿Cuántos rayos principales pueden ser dibujados en un diagrama de rayos?

11. **O** Una lente convergente en un plano vertical recibe luz desde un objeto y forma una imagen invertida sobre una pantalla. Luego, junto a la lente, se coloca una tarjeta opaca que cubre sólo la mitad superior de la lente. ¿Qué ocurre con la imagen sobre la pantalla? a) La mitad superior de la imagen desaparece. b) La mitad inferior de la imagen desaparece. c) Toda la imagen desaparece. d) Toda la imagen todavía es visible, pero más difusa. e) La mitad de la imagen desaparece y el resto es más difuso. f) No se presenta cambio en la imagen.

12. **O** Una lente convergente, con distancia focal de 8 cm, forma una imagen nítida de un objeto sobre una pantalla. ¿Cuál es la menor distancia posible entre el objeto y la pantalla? a) 0, b) 4 cm, c) 8 cm, d) 16 cm, e) 32 cm, f) ∞.

13. Explique este enunciado: "El foco de una lente es la ubicación de la imagen de un objeto puntual en el infinito". Explique la noción de infinito en términos reales según se aplica a distancias objeto. Según esta afirmación, ¿puede pensar en un método simple para determinar la distancia focal de una lente convergente?

14. Explique la posición adecuada de una diapositiva fotográfica en relación con la lente en un proyector de diapositivas. ¿Qué tipo de lente debe tener el proyector de diapositivas?

15. **O** En la fotografía de inicio de este capítulo, una gota de agua funciona como una lente biconvexa con radios de curvatura de pequeña magnitud. ¿Cuál es la ubicación de la imagen fotografiada? a) Dentro de la gota de agua, b) en la superficie posterior de la gota, más lejos de la cámara, c) un poco detrás de la superficie posterior de la gota, d) en la superficie frontal de la gota, más cerca de la cámara, e) un poco más cerca de la cámara que la superficie frontal de la gota.

16. Explique por qué un espejo no puede provocar aberración cromática.

17. ¿Es posible hacer que una lente convergente diverja la luz si se le coloca en un líquido? **¿Qué pasaría si?** ¿Qué piensa respecto a un espejo convergente?

18. Explique por qué un pez en una pecera esférica para carpas japonesas doradas, se ve mayor de lo que realmente es.

19. ¿Por qué algunos vehículos para emergencias tienen escrito en su parte delantera el símbolo AICNALUBMA)?

20. Las lentes que se utilizan en los anteojos, ya sean convergentes o divergentes, están siempre diseñadas de modo que la parte media de la lente tiene una curva que se aleja del ojo, igual que las lentes centrales de la figura 36.27a y b. ¿Por qué?

21. **O** La pantalla de vidrio de un visor para buceo puede ser una lente correctiva para un buzo que no tenga visión perfecta y necesite en esencia la misma prescripción para ambos ojos. En tal caso el buzo no tiene que usar anteojos o lentes de contacto. El diseño adecuado permite a la persona ver con claridad tanto bajo el agua como en el aire. Los anteojos normales tienen curvadas las superficies frontal y posterior. ¿El lente de un visor para buceo debe estar curvado a) sólo en la superficie exterior, b) sólo en la superficie interior o c) en ambas superficies?

22. ¿Cuál par de anteojos, en la figura P36.22, corrige la miopía y cuál la hipermetropía?

© Thomson Learning/George Semple

Figura P36.22

23. Un niño se prueba los anteojos de su abuelo hiperópico y los de su abuela miope y se queja de que “ve todo borroso”. ¿Por qué no ven borroso las personas que usan anteojos? (véase la figura P36.22).

24. En una novela de Julio Verne, un trozo de hielo se talla para formar una lupa que permite enfocar la luz solar e iniciar una fogata. ¿Es esto posible?

25. Con un espejo cóncavo para reflejar y enfocar la luz solar en un horno, es posible construir un horno solar. ¿Qué factores en el diseño del espejo de reflexión garantizarían una temperatura muy elevada?

26. La figura P36.26 muestra una litografía de M. C. Escher titulada *Mano con una esfera de reflexión (Autorretrato en un espejo esférico)*. Escher dijo en relación con este trabajo:

> La imagen muestra un espejo esférico que descansa en una mano izquierda. Pero como un grabado muestra el inverso del dibujo original en piedra, la que se ilustra es mi mano derecha. (Dado que soy zurdo, necesitaba mi mano izquierda para ejecutar el trabajo.) Esta reflexión globular reune prácticamente todo lo que rodea a la imagen en forma de disco. La totalidad de la habitación, las cuatro paredes, el piso, el techo, todo, aunque distorsionado, queda comprimido en ese pequeño círculo. Su propia cabeza o más precisamente el punto entre sus ojos, es el centro absoluto. Sin importar que se dé vuelta o se retuerza, no le es posible salirse del punto central. Se ha vuelto sin ninguna posibilidad de cambio, el foco, el núcleo inamovible de su mundo.

Comente la precisión de la descripción hecha por Escher.

Figura P36.36

27. Una lente convergente de distancia focal pequeña puede tomar la luz que diverge de una pequeña fuente y refractarla en un haz de rayos paralelos. Para este fin, en los faros de navegación se utilizan lentes Fresnel, como se muestra en la figura 36.27. Un espejo cóncavo puede recibir la luz que diverge de una pequeña fuente y reflejarla en un haz de rayos paralelos. ¿Es posible construir un espejo Fresnel? ¿Se trata de una idea original o ya se ha hecho? *Sugerencia:* Observe las paredes y el techo de un auditorio.

Problemas

Sección 36.1 Imágenes formadas por espejos planos

1. ¿El espejo de su cuarto de baño lo hace ver más viejo o más joven de lo que realmente es? Calcule una estimación del orden de magnitud de la diferencia en edad, en función de los datos que se especifiquen.

2. En el balcón interior de una iglesia para el coro, dos paredes paralelas están separadas 5.30 m. El grupo coral se coloca contra la pared norte. La organista le da la cara a la pared sur, a 0.800 m de separación. Para que ella pueda ver el coro, se ha instalado un espejo plano de 0.600 m de ancho sobre la pared sur, justo enfrente de ella. ¿Qué ancho de la pared norte alcaza a ver? *Sugerencia:* Dibuje un diagrama desde arriba para justificar su respuesta.

3. Determine la altura mínima de un espejo plano vertical en el que una persona de 5′ 10″ de altura puede verse de cuerpo entero. (Puede resultar útil un diagrama de rayos.)

4. Una persona entra en una habitación que tiene dos espejos planos en paredes opuestas y produce múltiples imágenes de la persona. Cuando la persona está colocada a 5.00 pies del espejo de la pared izquierda y a 10.0 pies del espejo de la pared derecha, determine la distancia que hay de las tres primeras imágenes que se ven en el espejo de la izquierda a la persona.

5. El uso de un periscopio (figura P36.5) es útil para observar objetos que no es posible ver de manera directa. Resulta útil en los submarinos y para observar los torneos de golf o los desfiles entre la muchedumbre. Suponga que un objeto está a una distancia p_1 del espejo superior y que los dos espejos planos están separados una distancia h. a) ¿Cuál es la distancia de la imagen final al espejo inferior? b) ¿La imagen final es real o virtual? c) ¿Está vertical o hacia abajo? d) ¿Cuál es el aumento? e) ¿ La imagen está invertida de izquierda a derecha?

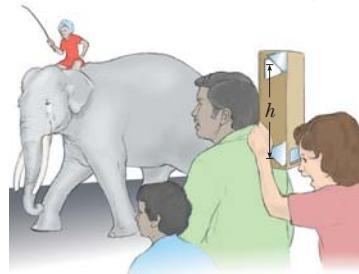



Figura P36.5

Sección 36.2 Imágenes formadas por espejos esféricos

6. Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 20.0 cm. Determine la localización de la imagen para distancias objeto de a) 40.0 cm, b) 20.0 cm, y c) 10.0 cm. En cada caso, diga si la imagen es real o virtual o si está vertical o invertida. También determine el aumento para cada caso.

7. Un espejo esférico convexo tiene un radio de curvatura de 40.0 cm. Determine la posición de la imagen virtual, así como el aumento para distancias objeto de a) 30.0 cm y b) 60.0 cm. c) ¿Las imágenes son verticales o invertidas?

8. En la intersección de los pasillos de un hospital, en la parte superior, sobre la pared, se montó un espejo convexo que ayuda a que las personas eviten chocar con otras. El espejo tiene un radio de curvatura de 0.550 m. Localice y describa la imagen de un paciente a 10.0 m del espejo. Determine el aumento de la imagen.

9. Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 60.0 cm. Calcule la posición y aumento de la imagen creada por un objeto situado frente al espejo, a) a 90.0 cm y b) a 20.0 cm. c) Dibuje en cada caso los diagramas de rayos necesarios para obtener las características de la imagen.

10. Una iglesia de gran tamaño tiene un nicho en una pared. En el plano de la iglesia aparece como una hendidura semicircular de un radio de 2.50 m. Una persona está de pie en la línea central del nicho, a 2.00 m de su punto más profundo, rezando en voz baja. ¿En qué punto se concentra el sonido después de haberse reflejado de la pared del fondo del nicho?

11. Un dentista usa un espejo para examinar un diente. El diente está 1.00 cm enfrente del espejo y la imagen se forma 10.0 cm detrás del espejo. Determine a) el radio de curvatura del espejo y b) el aumento de la imagen.

12. Un cierto adorno navideño está constituido por una esfera plateada de 8.50 cm de diámetro. Determine la ubicación de un objeto en donde el tamaño de la imagen reflejada sea tres cuartas partes las dimensiones del objeto. Use un diagrama de rayos principales para describir la imagen.

13. a) Un espejo cóncavo forma una imagen invertida cuatro veces mayor que el objeto. Determine la distancia focal del espejo, si la distancia entre la imagen y el objeto es de 0.600 cm. b) Un espejo convexo forma una imagen que es de la mitad del tamaño del objeto. Suponga que la distancia entre la imagen y el objeto es de 20.0 cm y determine el radio de curvatura del espejo.

14. A fin de ajustar los lentes de contacto a los ojos del paciente es útil un *keratómetro* que mide la curvatura de la superficie frontal del ojo, la córnea. El instrumento coloca un objeto iluminado de tamaño conocido a una distancia p, también conocida de la córnea. Ésta refleja parcialmente la luz del objeto, formando una imagen del mismo. El aumento M de la imagen se mide con un pequeño telescopio ocular que permite comparar la imagen formada por la córnea con una segunda imagen calibrada que se proyecta en el campo visual gracias a un arreglo de prismas. Determine el radio de curvatura de la córnea en el caso de que $p = 30.0$ cm y $M = 0.013\ 0$.

15. Un objeto de 10.0 cm de altura se coloca en la marca cero de un metro de madera. Un espejo esférico, colocado en algún punto sobre el metro, crea una imagen del objeto que está vertical, tiene 4.00 cm de altura y se encuentra en la marca de los 42.0 cm en el metro. a) ¿El espejo es convexo o cóncavo? b) ¿Dónde se encuentra? c) ¿Cuál es su distancia focal?

16. Un entusiasta de automóviles deportivos pule las superficies interior y exterior de un tapón de rueda que tiene la forma de una sección de esfera. Cuando mira en uno de los lados del tapón, ve una imagen de su cara 30.0 cm detrás del tapón mismo. Ahora hace girar el tapón y entonces ve otra imagen de su cara, a 10.0 cm por detrás de éste. a) ¿A qué distancia está su cara en relación con el tapón? b) ¿Cuál es el radio de curvatura del tapón?

17. Con un espejo esférico se forma, sobre una pantalla colocada a 5.00 m del objeto, una imagen con un tamaño cinco veces el del objeto. a) Describa el tipo de espejo requerido. b) ¿Dónde, en relación con el objeto, debe colocarse el espejo?

18. De manera subconsciente, el ser humano estima la distancia a un objeto desde el ángulo que subtiende su campo visual. Este ángulo θ en radianes está relacionado con la altura lineal h del objeto y la distancia d, de acuerdo con $\theta = h/d$. Suponga que está manejando un automóvil y que otro vehículo, de 1.50 m de altura está a 24.0 m detrás de usted. a) Suponga que su automóvil tiene un espejo retrovisor de tipo plano del lado del pasajero, a 1.55 m de los ojos del conductor. ¿A qué distancia de los ojos está la imagen del automóvil que le viene siguiendo? b) ¿Cuál es el ángulo subtendido por la imagen que aparece en su campo visual? c) **¿Qué pasaría si?** Su automóvil tiene un espejo retrovisor convexo con un radio de curvatura de 2.00 m (como sugiere la figura 36.15). ¿Qué tan lejos de sus ojos está la imagen del automóvil que viene atrás? d) ¿Cuál es el ángulo que subtiende la imagen en sus ojos? e) En terminos de su tamaño angular, ¿qué tan lejos parece estar el automóvil que lo viene siguiendo?

19. ● **Problema de repaso.** Si deja caer una pelota en el tiempo $t = 0$ desde el reposo a 3.00 m directamente por encima del vértice de un espejo cóncavo que tiene un radio de curvatura de 1.00 m y que yace en un plano horizontal. a) Describa el movimiento de la imagen de la pelota en el espejo. b) ¿En qué momento coinciden la pelota y su imagen?

Sección 36.3 Imágenes formadas por refracción

20. Una placa de cristal de roca ($n = 1.66$) descansa en el fondo de un acuario. La placa tiene 8.00 cm de espesor (dimensión vertical) y está cubierta por una capa de agua ($n = 1.33$) de 12.0 cm de profundidad. Calcule el espesor aparente de la placa visto directamente desde encima del agua.

21. Un bloque cúbico de hielo de 50.0 cm de lado está colocado sobre un grano de polvo a nivel del piso. Determine la localización de la imagen del grano visto desde arriba. El índice de refracción del hielo es de 1.309.

22. El extremo de una larga varilla de vidrio ($n = 1.50$) se moldea formando una superficie convexa con un radio de curvatura de 6.00 cm. Un objeto está colocado en el aire a lo largo del eje de la varilla. Determine las posiciones de las imágenes que correspondan a distancias objeto de a) 20.0 cm, b) 10.0 cm y c) 3.00 cm del extremo de la varilla.

23. Una esfera de vidrio ($n = 1.50$) con un radio de 15.0 cm tiene una pequeña burbuja de aire a 5.00 cm por encima de su centro. La esfera se observa mirando hacia abajo a lo largo del radio que contiene a la burbuja. ¿Cuál es la profundidad aparente de la burbuja por debajo de la superficie de la esfera?

24. La figura P36.24 muestra una superficie curva que separa un material con índice de refracción n_1 de un material con índice n_2. La superficie forma una imagen I del objeto O. El rayo que se muestra en azul pasa a través de la superficie a lo largo de la línea radial. Sus ángulos de incidencia y refracción son cero, de modo que su dirección no cambia en la superficie. Para el rayo que se muestra en café, la dirección cambia de acuerdo con n_1 sen $\theta_1 = n_2$ sen θ_2. Para rayos paraxiales, se supone que θ_1 y θ_2 son pequeños, así que puede escribir $n_1 \tan \theta_1 = n_2 \tan \theta_2$. El aumento se define como $M = h'/h$. Pruebe que el aumento está dado por $M = -n_1q/n_2p$.

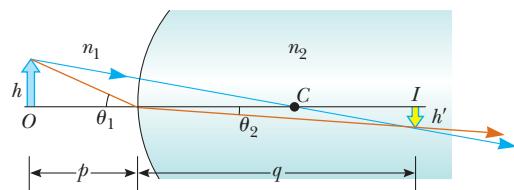



Figura P36.24

25. ● Como se muestra en la figura P36.25, un tanque de agua que contiene langostas tiene un frente curvo hecho de plástico con grosor uniforme y un radio de curvatura de 80.0 cm de magnitud. Ubique y describa las imágenes de las langostas a a) 30.0 cm y b) 90.0 cm de la base de la pared frontal. c) Encuentre el aumento de cada imagen. Puede usar el resultado del problema 24. d) Las langostas tienen 9.00 cm de alto. Encuentre la altura de cada imagen. e) Explique por qué no necesita conocer el índice de refracción del plástico para resolver este problema.

Alexandra Héder

Figura P36.25

26. Una carpa japonesa dorada nada a una velocidad de 2.00 cm/s hacia la pared delantera de un acuario rectangular. ¿Cuál es la rapidez aparente del pez medida por un observador que mira al acuario desde el exterior? El índice de refracción del agua es de 1.33.

Sección 36.4 Lentes delgadas

27. La cara izquierda de una lente biconvexa tiene un radio de curvatura de 12.0 cm, y la derecha de 18.0 cm. El índice de refracción del vidrio es de 1.44. a) Calcule la distancia focal de la lente. b) **¿Qué pasaría si?** Calcule la distancia focal de la lente después de que ésta es girada alrededor para intercambiar los radios de curvatura de las dos caras.

28. Una lente de contacto está hecho de plástico con un índice de refracción de 1.50. La lente tiene un radio de curvatura exterior de +2.00 cm y un radio de curvatura interior de +2.50 cm. ¿Cuál es su distancia focal?

29. Una lente convergente tiene una distancia focal de 20.0 cm. Localice la imagen para una distancia objeto de a) 40.0 cm, b) 20.0 cm y c) 10.0 cm. En cada caso diga si la imagen es real o virtual y si está hacia arriba o invertida. Determine también las amplificaciones.

30. Un objeto localizado a 32.0 cm por delante de una lente forma una imagen en una pantalla a 8.00 cm por detrás de la lente. a) Determine su distancia focal. b) Determine su amplificación. c) ¿Es la lente convergente o divergente?

31. La imagen de la moneda de cinco centavos de la figura P36.31 tiene el doble de diámetro que la moneda en sí y está a 2.84 cm frente a la lente. Determine la distancia focal de ésta.

Figura P36.31

32. Suponga que un objeto tiene un espesor dp de manera que sobresale de la distancia objeto p hasta la distancia $p + dp$. Demuestre que el espesor dq de su imagen se conoce por $(-q^2/p^2)\,dp$, de forma que la amplificación longitudinal $dq/dp = -M^2$, donde M es el aumento lateral.

33. Un objeto se encuentra a 20.0 cm a la izquierda de una lente divergente de distancia focal $f = -32.0$ cm. Determine a) la localización y b) la amplificación de la imagen. c) Elabore un diagrama de rayos para esta disposición.

34. La lente de proyección de cierto proyector de transparencias es delgada y simple. Debe proyectar una transparencia de 24 mm de altura de forma que su imagen llene una pantalla de 1.80 m de altura. La distancia de la transparencia a la pantalla es de 3.00 m. a) Determine la distancia focal de la lente de proyección. b) ¿A qué distancia de la transparencia deberá colocarse la lente a fin de formar la imagen en la pantalla?

35. El uso de una lente en cierta situación se describe por la ecuación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-3.50p} = \frac{1}{7.50 \text{ cm}}$$

Determine a) la distancia del objeto y b) la distancia de la imagen. c) Use un diagrama de rayos para obtener una descripción de la imagen. d) Identifique un dispositivo práctico descrito por la ecuación dada y escriba el enunciado de un problema para el que la ecuación aparezca en la solución.

36. Un antílope se encuentra a 20.0 m de una lente convergente con una distancia focal de 30.0 cm. La lente forma una imagen del animal. Si el antílope se aleja corriendo de la lente a una rapidez de 5.00 m/s, ¿con qué rapidez se mueve la imagen? ¿La imagen se acerca o se aleja de la lente?

37. ● Un objeto se encuentra a una distancia d a la izquierda de una pantalla plana. Una lente convergente con distancia focal $f < d/4$ se coloca entre el objeto y la pantalla. a) Demuestre que existen dos posiciones para la lente que forman una imagen sobre la pantalla, y determine a qué distancia están del objeto. b) ¿En qué difieren las imágenes entre sí?

38. ● En la figura P36.38, una lente convergente, delgada con distancia focal de 36.0 cm, forma una imagen del cuadrado $abcd$, que tiene de alto $h_c = h_b = 10.0$ cm y se encuentra entre las distancias de $p_d = 20.0$ cm y $p_a = 30.0$ cm del lente. a) Sean a', b', c' y d' las respectivas esquinas de la imagen. Sea q_a la distancia de imagen para los puntos a' y b', q_d la distancia de imagen para los puntos c' y d', h'_b la distancia desde el punto b' al eje, y h'_c la altura de c'. Evalúe cada una de estas cantidades. Elabore un bosquejo de la imagen. b) El área del objeto es 100 cm^2. Al realizar las siguientes etapas, evaluará el área de la imagen. Sea q la distancia de imagen de cualquier punto entre a' y d', para el que la distancia del objeto es p. Sea h' la distancia desde el eje al punto en el borde de la imagen entre b' y c' a la distancia de imagen q. Demuestre que

$$|h'| = (10 \text{ cm})q\left(\frac{1}{14 \text{ cm}} - \frac{1}{q}\right)$$

c) Explique por qué el área geométrica de la imagen se conoce por

$$\int_{q_a}^{q_d} |h'|\,dq$$

Realice la integración para encontrar el área de la imagen.

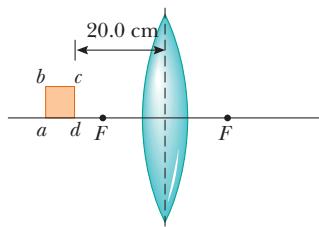



Figura P36.38

39. La figura 36.33 representa el diagrama de la sección transversal de una cámara, que tiene una lente simple de 65.0 mm de distancia focal, la cual sirve para formar una imagen en el CCD en la parte posterior de la cámara. Suponga que la posición de la lente ha sido ajustada para enfocar la imagen de un objeto distante. ¿Cuánto y en qué dirección debe moverse la lente para formar una imagen nítida de un objeto que está a 2.00 m de distancia?

Sección 36.5 Aberraciones de las lentes

40. Las caras de una lente bicóncava tienen radios de curvatura de 32.5 cm y 42.5 cm, respectivamente. El vidrio tiene un índice de refracción de 1.53 para la luz violeta y 1.51 para la luz roja. Para un objeto muy distante, localice y describa a) la imagen formada con luz violeta y b) la imagen formada con luz roja.

41. Dos rayos que se desplazan en paralelo al eje principal inciden sobre una gran lente plana convexa con un índice de refracción de 1.60 (figura P36.41). Si la cara convexa es esférica, un rayo que pase cerca del borde de la lente no pasa por el foco (se presenta aberración esférica). Suponga que esta cara tiene un radio de curvatura de 20.0 cm y que ambos rayos se encuentran a $h_1 = 0.500$ cm y $h_2 = 12.0$ cm del eje principal. Encuentre cuál es la diferencia Δx en las posiciones en las cuales cada uno de ellos cruza el eje principal.

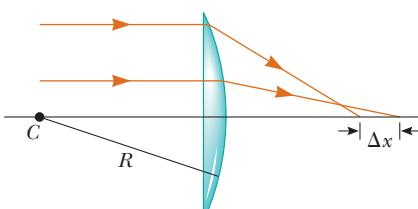



Figura P36.41

Sección 36.6 La cámara fotográfica

42. Una cámara se utiliza con una exposición correcta en $f/4$ y una velocidad de obturador de (1/16) s. Con el fin de fotografiar un sujeto en movimiento rápido, se modifica la velocidad del obturador a (1/128) s. Determine el nuevo ajuste para el número f necesario para obtener una exposición correcta.

Sección 36.7 El ojo humano

43. Una persona miope no puede ver objetos con claridad más allá de 25.0 cm (su punto distante). Si no tiene astigmatismo y se le prescriben lentes de contacto, ¿cuál es el tipo de lente necesario para corregir su visión y de cuántas dioptrías?

44. Los límites de acomodación de los ojos de Nick el miope son de 18.0 cm y 80.0 cm. Cuando usa sus anteojos, puede ver lejos con claridad. ¿A qué distancia mínima ocurre esto?

Sección 36.8 La lupa simple

Sección 36.9 El microscopio compuesto

Sección 36.10 El telescopio

45. Una lente con distancia focal de 5.00 cm se utiliza como lupa. a) Para obtener el máximo aumento, ¿dónde deberá colocarse el objeto? b) ¿Cuál es el valor del aumento?

46. La distancia entre las lentes ocular y objetivo en un microscopio compuesto es de 23.0 cm. La distancia focal del ocular es de 2.50 cm y la del objetivo es de 0.400 cm. ¿Cuál es el aumento global del microscopio?

47. El telescopio de refracción Yerkes tiene una lente objetivo de 1.00 m de diámetro y una distancia focal de 20.0 m. Suponga que es utilizado con una lente ocular de 2.5 cm de distancia focal. a) Determine la amplificación del planeta Marte visto a través de este telescopio. b) ¿Los casquetes polares de Marte están cabeza arriba o cabeza abajo?

48. ● Los astrónomos con frecuencia toman fotografías utilizando sólo la lente objetivo o el espejo del telescopio, sin el ocular. a) Demuestre que el tamaño de la imagen h' de este telescopio se conoce por la expresión $h' = fh/(f - p)$, donde h es el tamaño del objeto, f la distancia focal del objetivo y p la distancia al objeto. b) **¿Qué pasaría si?** Simplifique la expresión del inciso a) para el caso en el cual la distancia del objeto es mucho más grande que la distancia focal del objetivo. c) La "envergadura" de la Estación Espacial Internacional es de 108.6 m, que es el ancho total de la configuración de su panel solar. Determine el ancho de la imagen formada por un objetivo de telescopio con una distancia focal de 4.00 m cuando la estación orbita a una altitud de 407 km.

49. Cierto telescopio, que tiene un espejo objetivo con una abertura de diámetro de 200 mm y una distancia focal de 2000 mm, captura la imagen de una nebulosa sobre película fotográfica en su foco principal con un tiempo de exposición de 1.50 min. Para producir la misma energía luminosa por unidad de área sobre la película, ¿cuál es el tiempo de exposición requerido para

fotografiar la misma nebulosa con un telescopio más pequeño, con un objetivo de 60.0 mm de diámetro y una distancia focal de 900 mm?

Problemas adicionales

50. Un sistema de *lentes zoom* es una combinación de lentes que producen una amplificación variable que mantienen a la vez posiciones fijas del objeto y de la imagen. La amplificación se modifica moviendo una o más lentes a lo largo del eje. Aunque en la práctica se utilizan múltiples lentes para obtener imágenes de alta calidad, el efecto de acercamiento de un objeto se puede demostrar con un sistema simple de dos lentes. Sobre un banco de óptica se montan un objeto, dos lentes convergentes y una pantalla. La primera lente, que queda a la derecha del objeto, tiene una distancia focal de 5.00 cm y la segunda, que está a la derecha de la primera, tiene una distancia focal de 10.0 cm. La pantalla está a la derecha de la segunda lente. Inicialmente, el objeto se sitúa a una distancia de 7.50 cm a la izquierda de la primera lente, y la imagen que se forma en la pantalla tiene una amplificación de +1.00. a) Determine la distancia entre el objeto y la pantalla. b) Ahora se mueven ambas lentes a lo largo de su eje común hasta que la imagen formada en la pantalla tiene una amplificación de +3.00. Determine el desplazamiento de cada una de las lentes desde su posición inicial en el inciso a). ¿Es posible desplazar las lentes en más de una forma?

51. La distancia entre un objeto y su imagen vertical es de 20.0 cm. Si la amplificación es de 0.500, ¿cuál es la distancia focal de la lente que se utiliza para formar la imagen?

52. La distancia entre un objeto y su imagen vertical es d. Si la amplificación es M, ¿cuál es la distancia focal de la lente que se utiliza para formar la imagen?

53. Un objeto real se ubica en el extremo cero de una regleta de medir. Un gran espejo cóncavo en la marca de 100 cm del extremo de la regleta forma una imagen del objeto en la posición de 70.0 cm. Un pequeño espejo convexo colocado en la marca de 20.0 cm forma una imagen final en el punto de 10.0 cm. ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo convexo?

54. La lente y el espejo de la figura P36.54 tienen distancias focales de +80.0 cm y −50.0 cm, respectivamente. Un objeto se coloca a 1.00 m a la izquierda de la lente, como se muestra. Ubique la imagen final, formada por la luz que pasa a través de la lente dos veces. Establezca si la imagen es vertical o invertida y determine la amplificación global.

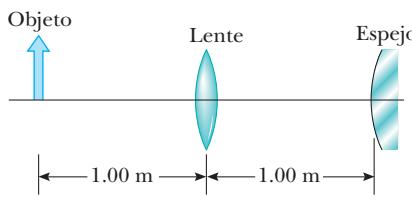



Figura P36.54

55. ● Un objeto está originalmente en la posición $x_i = 0$ cm de un metro de madera ubicado sobre el eje x. Una lente convergente de 26.0 cm de distancia focal está fija en la posición de 32.0 cm. Después el objeto se desliza gradualmente a la posición $x_f = 12.0$ cm. Encuentre la posición x' de la imagen del objeto como función de la posición del objeto x. Describa el patrón de movimiento de la imagen en referencia a una gráfica o una tabla de valores. Conforme el objeto se mueve 12 cm hacia la derecha, ¿a qué distancia se mueve la imagen? ¿En qué dirección o direcciones?

56. El objeto de la figura P36.56 está a la mitad entre la lente y el espejo. El radio de curvatura del espejo es de 20.0 cm y la lente tiene una distancia focal de −16.7 cm. Tome en consideración únicamente la luz que emana del objeto y que se desplaza primero hacia el espejo, y localice la imagen final formada por este sistema. ¿Esta imagen es real o virtual? ¿Está hacia arriba o invertida? ¿Cuál es la amplificación global?

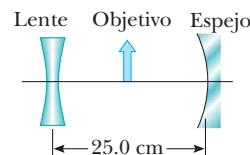



Figura P36.56

57. ● En muchas aplicaciones resulta necesario aumentar o disminuir el diámetro de un haz de rayos de luz paralelos. Este cambio se lleva a cabo con una combinación de lente convergente y lente divergente. Suponga que tiene una lente convergente con una distancia focal de 21.0 cm y una lente divergente de distancia focal de −12.0 cm. ¿De qué manera puede organizar estas lentes para incrementar el diámetro de un haz de rayos paralelos? ¿En qué factor el diámetro se incrementará?

58. La ecuación del fabricante de lentes se aplica a una lente sumergida en un líquido si n en la ecuación se sustituye por n_2/n_1. En este caso n_2 se refiere al índice de refracción del material de la lente y n_1 es el del medio que rodea a la lente. a) Cierta lente tiene distancia focal de 79.0 cm en aire e índice de refracción 1.55. Encuentre su distancia focal en agua. b) Cierto espejo tiene distancia focal de 79.0 cm en aire. Encuentre su distancia focal en agua.

59. Un rayo paralelo de luz entra en una semiesfera perpendicular a su cara plana, como se observa en la figura P36.59. La magnitud del radio es de 6.00 cm y tiene un índice de refracción de 1.560. Determine el punto en el cual está el haz enfocado (suponga que se trata de rayos paraxiales).

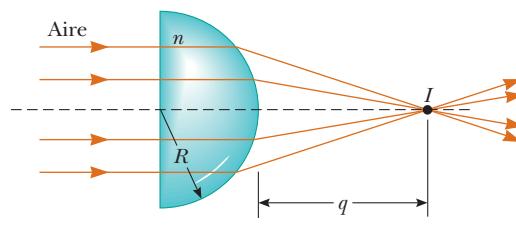



Figura P36.59

60. **Problema de repaso.** Una foco de 3.20 cm de diámetro emite luz de manera uniforme en todas direcciones con una potencia de 4.50 W. a) Determine la intensidad de la luz sobre la superficie del foco. b) Halle la intensidad de la luz a 7.20 m de distancia del centro del foco. c) A esta distancia de 7.20 m se coloca una lente con su eje apuntando hacia el foco. Esta lente tiene una cara circular de 15.0 cm de diámetro y una distancia focal de 35.0 cm. Determine el diámetro de la imagen del foco. d) Determine la intensidad de la luz en la imagen.

61. Un objeto está colocado a 12.0 cm a la izquierda de una lente divergente con una distancia focal de −6.00 cm. Una lente convergente con una distancia focal de 12.0 cm se coloca a una distancia d a la derecha de la lente divergente. Encuentre la distancia d, de manera que la imagen final quede en el infinito. Dibuje un diagrama de rayos para este caso.

62. Suponga que en una ubicación en particular, la intensidad de la luz solar es de 1.00 kW/m^2. Es necesario apuntar hacia el Sol un espejo cóncavo muy reflejante si se desea producir una potencia de por lo menos 350 W en la imagen. a) Determine el radio R_a requerido por el área de la cara circular del espejo. b) Ahora suponga que la intensidad luminosa debe ser de por lo menos 120 kW/m^2 en la imagen. Determine la correspondencia necesaria entre R_a y el radio de curvatura R del espejo. El disco del Sol subtiende un ángulo de 0.533° en la Tierra.

63. El disco solar subtiende un ángulo de 0.533° en la Tierra. ¿Cuál es la posición y el diámetro de la imagen solar formada por un espejo esférico cóncavo con un radio de curvatura de 3.00 m?

64. ● La figura P36.64 muestra una lente convergente delgada para la cual los radios de curvatura son R_1 = 9.00 cm y R_2 = −11.0 cm. La lente está frente a un espejo esférico cóncavo que tiene un radio de curvatura R = 8.00 cm. a) Suponga que sus focos F_1 y F_2 están a 5.00 cm del centro de la lente. Determine su índice de refracción. b) La lente y el espejo están separados 20.0 cm, y se coloca un objeto a 8.00 cm a la izquierda de la lente. Determine la posición y la amplificación de la imagen final como la ve el ojo en la figura. c) ¿La imagen final está invertida o hacia arriba? Explique su respuesta.

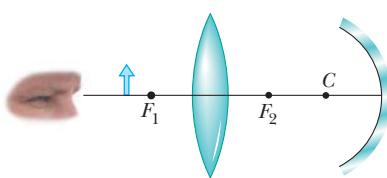
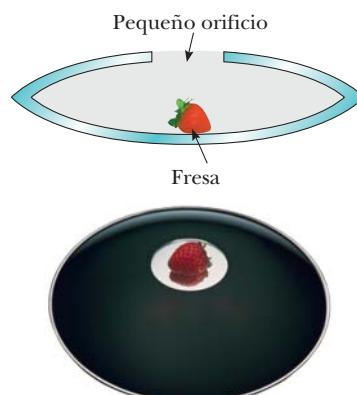
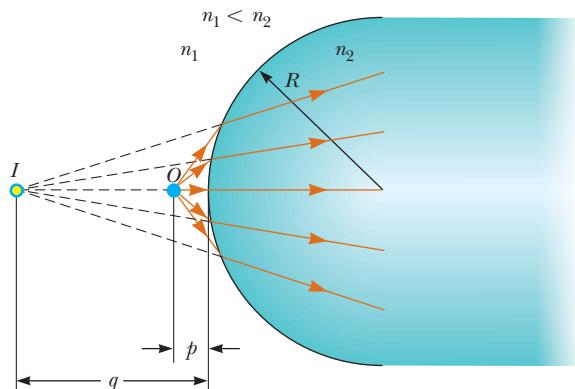



Figura P36.64

65. En un cuarto oscuro, se coloca una vela encendida a 1.50 m de una pared blanca. Entre la vela y la pared se coloca una lente en una posición tal que se forma una imagen mayor e invertida sobre la pared. Cuando la lente se mueve 90.0 cm hacia la pared, se forma otra imagen. Determine a) las dos distancias objeto que producen las imágenes dichas y b) la distancia focal de la lente. c) Proporcione las características de la segunda imagen.

66. ● Se consigue una ilusión óptica de una fresa flotando mediante dos espejos parabólicos, cada uno de ellos con una distancia focal de 7.50 cm, uno frente al otro de manera que sus centros quedan separados 7.50 cm. (figura P36.66). Si se coloca una fresa en el espejo inferior, se forma una imagen de la misma en el orificio pequeño que existe en el centro del espejo superior. Demuestre que la imagen final se forma en dicha posición y describa sus características. (*Nota:* un efecto muy impactante se consigue si se hace brillar el haz de una linterna sobre esta imagen. Incluso en un ángulo muy inclinado, ¡parecería que el haz de luz incidente se refleja sobre la imagen! ¿Comprende por qué?)

© Michael Levin/Opti-Gone Associates.
Figura P36.66

67. Un objeto de 2.00 cm de alto se coloca a 40.0 cm a la izquierda de una lente convergente de distancia focal de 30.0 cm. Una lente divergente con una distancia focal de −20.0 cm se coloca a 110 cm a la derecha de dicha lente. a) Determine la posición y la amplificación de la imagen final. b) ¿La imagen está hacia arriba o invertida? c) **¿Qué pasaría si?** Repita los incisos a) y b) para el caso en que la segunda lente sea convergente con una distancia focal de +20.0 cm.

68. Dos lentes hechas a partir de vidrios de diferentes índices de refracción n_1 y n_2 se colocan juntas para formar lo que se conoce como *un doblete óptico.* Estos dobletes se utilizan a menudo para corregir aberraciones cromáticas en dispositivos ópticos. La primera lente tiene un lado plano y un lado cóncavo de radio de curvatura R. La segunda tiene dos lados convexos de radios de curvatura R. Demuestre que este doblete puede representarse como una lente única delgada con una distancia focal expresada por

$$\frac{1}{f} = \frac{2n_2 - n_1 - 1}{R}$$

Respuestas a las preguntas rápidas

36.1 Falso. Las manchas de agua están a 2 m de distancia y su imagen está a 4 m. No es posible enfocar los ojos simultáneamente en ambos puntos.

36.2 b) Un espejo cóncavo enfocará la luz de un área grande del espejo en un área pequeña del papel, dando como resultado una potencia de entrada muy alta en el papel.

36.3 b) Un espejo convexo forma siempre una imagen con un aumento inferior a uno, por lo que el espejo debe ser cóncavo. En un espejo cóncavo, sólo las imágenes virtuales se ven hacia arriba. Esta fotografía corresponde al espejo primario del Telescopio Espacial Hubble.

36.4 d) Cuando O está lejos, los rayos se refractan en el material de índice n_2 y convergen para formar una imagen real, como se ve en la figura 36.18. Para ciertas combinaciones de R y de n_2, conforme O se mueve muy cerca de la superficie de refracción, el ángulo incidente de los rayos aumenta tanto que éstos ya no se refractan de regreso hacia el eje principal. Esto da como resultado una imagen virtual como la que se ve en la figura.

36.5 a) Independientemente de dónde esté O, los rayos se refractan hacia el aire alejándose de la normal y formando una imagen virtual entre O y la superficie.

36.6 b). Puesto que las superficies planas del plano tienen radios de curvatura infinitos, la ecuación 36.15 indica que la distancia focal también es infinita. Los rayos paralelos que inciden el plano se enfocan en el infinito, lo que significa que permanecen paralelos después de pasar a través del vidrio.

36.7 a) Si el objeto se coloca cerca de la lente, la imagen se aleja de la misma, por detrás del plano del CCD. A fin de volver a colocar la imagen en el CCD, la lente es movida hacia el objeto y se aleja del CCD.

36.8 c) Los rayos del Sol deben converger sobre el papel. Una persona hipermétrope utiliza anteojos de lentes convergentes.

Los colores en muchas de las plumas de un colibrí no se deben al pigmento. La *iridiscencia* que provoca los colores refulgentes que con frecuencia aparecen en la garganta y pecho del ave se debe a un efecto de interferencia causado por las estructuras de las plumas. Los colores varían dependiendo del ángulo de vista. (RO-MA/Index Stock Imagery)

37 Interferencia de ondas de luz

En el capítulo 36 se estudiaron los rayos de luz que pasan a través de una lente o se reflejan desde un espejo para formar imágenes. Con este análisis concluye el estudio sobre la *óptica geométrica*. En este capítulo y en el 38, revisará la *óptica de ondas* u *óptica física,* esto es, la interferencia, difracción y polarización de la luz; estos fenómenos no se explican en forma adecuada con la óptica de rayos empleada en los capítulos 35 y 36. Aquí aprenderá cómo al tratar la luz como ondas y no como rayos, logra una descripción satisfactoria de estos fenómenos.

37.1 Condiciones para la interferencia

En el capítulo 18 estudió el modelo interferencia de ondas y se dio cuenta de que la sobreposición de dos ondas mecánicas puede ser constructiva o destructiva. En la interferencia constructiva, la amplitud de la onda resultante es mayor que una u otra onda individual, mientras que en la interferencia destructiva, la amplitud resultante es menor que la onda más grande. Las ondas de luz también se interfieren entre ellas. Fundamentalmente, toda interferencia asociada con ondas de luz aparece cuando se combinan los campos electromagnéticos que constituyen las ondas individuales.

Si dos focos se colocan uno al lado del otro, no se observan efectos de interferencia porque las ondas de luz de cada uno se emiten independientemente de la otra. Las emisiones de los dos focos no mantienen una correspondencia de fase constante entre ellos con el tiempo. Las ondas de luz de una fuente ordinaria, como es un foco, se somete a cambios

de fase aleatorios en intervalos menores a un nanosegundo. Por lo tanto, las condiciones para interferencia constructiva, interferencia destructiva, o algún estado intermedio, se mantienen sólo durante estos intervalos de tiempo. Puesto que el ojo humano no puede seguir cambios tan rápidos, no se observan efectos de interferencia. Se dice que estas fuentes de luz son **incoherentes.**

Para observar interferencia en ondas de dos fuentes, debe cumplir las siguientes condiciones:

Condiciones para la interferencia

- Las fuentes deben ser **coherentes,** es decir, **deben mantener una fase constante respecto de otra.**
- Las fuentes deben ser **monocromáticas,** es decir, de una sola longitud de onda.

Por ejemplo, las ondas de sonido de una sola frecuencia emitidas por dos altavoces colocados uno al lado del otro y activados por un solo amplificador pueden interferir entre sí porque los dos altavoces son coherentes, es decir, responden al amplificador de la misma forma en el mismo tiempo.

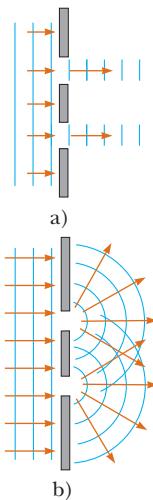
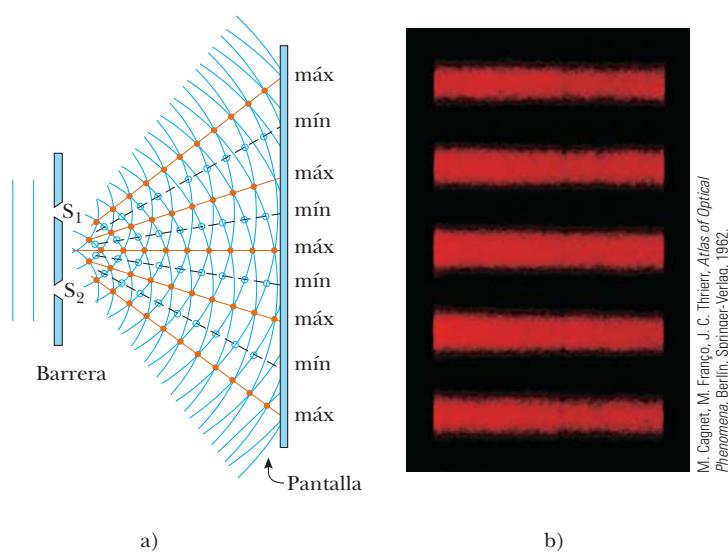



Figura 37.1 a) Si las ondas de luz no se extendieran después de pasar por las ranuras, no ocurriría interferencia. b) Las ondas de luz de las dos ranuras se traslapan cuando se extienden y llenan regiones sombreadas con luz y producen franjas de interferencia en una pantalla colocada a la derecha de las ranuras.

37.2 Experimento de doble ranura de Young

Un método común para producir dos fuentes de luz coherentes consiste en usar una fuente monocromática para iluminar una barrera que contenga dos pequeñas aberturas, por lo general en forma de ranuras. La luz que sale de las dos ranuras es coherente porque una sola fuente produce el rayo de luz original y las dos ranuras sirven sólo para separar el rayo original en dos partes (que, después de todo, es lo que sucede con la señal de sonido desde los dos altavoces anteriores). Cualquier cambio aleatorio en la luz emitida por la fuente se presenta en ambos rayos al mismo tiempo y, en consecuencia, se observan efectos de interferencia cuando la luz de las dos ranuras llega a una pantalla de observación.

Si la luz se mueve sólo en su dirección original después de pasar por las ranuras, como se muestra en la figura 37.1a, las ondas no se traslaparían y no se vería patrón de interferencia alguna. En lugar de ello, como se explicó en el análisis del principio de Huygens (sección 35.6), las ondas se extienden desde las ranuras, como se ve en la figura 37.1b. En otras palabras, la luz se desvía de una trayectoria recta y penetra en la región que de otro modo estaría sombreada. Como se observó en la sección 36.3, esta divergencia de luz a partir de su línea inicial de recorrido se denomina **difracción.**

Figura 37.2
a) Diagrama esquemático del experimento de doble ranura de Young. Las ranuras S_1 y S_2 se comportan como fuentes coherentes de ondas de luz que producen un patrón de interferencia en la pantalla (el dibujo no está a escala). b) Amplificación del centro de un patrón de franjas formado en la pantalla.

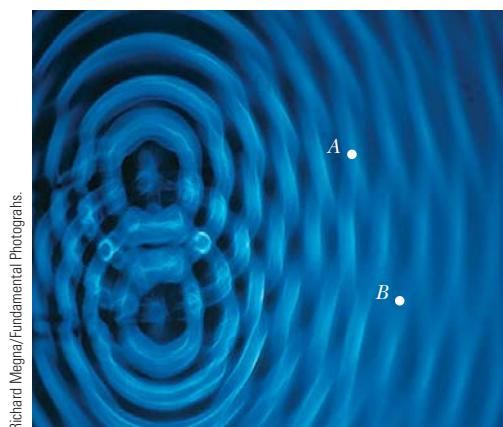



Figura 37.3 Se produce un patrón de interferencia que incluye ondas de agua mediante dos fuentes vibrantes en la superficie del agua. La configuración es similar a la que se observa en el experimento de doble ranura de Young. Observe las regiones de interferencia constructiva *A* y destructiva *B*.

La interferencia en ondas de luz de dos fuentes fue demostrada primero por Thomas Young en 1801. En la figura 37.2a se ilustra un diagrama del aparato que utilizó Young. Las ondas planas llegan a una barrera que contiene dos ranuras paralelas S_1 y S_2. La luz de S_1 y S_2 produce, en una pantalla, una configuración visible de bandas brillantes y oscuras paralelas llamadas **franjas** (figura 37.2b). Cuando la luz desde S_1 y desde S_2 llega a un punto tal en la pantalla que ocurre interferencia constructiva en ese lugar, aparece una franja brillante. Cuando la luz de las dos ranuras se combina destructivamente en cualquier lugar sobre la pantalla, resulta una franja oscura. La figura 37.3 es la fotografía de una configuración de interferencia producida por dos fuentes vibratorias coherentes en un tanque de agua.

La figura 37.4 muestra algunas de las formas en que dos ondas se pueden combinar en la pantalla. En la figura 37.4a, las dos ondas, que salen de las dos ranuras en fase, inciden en la pantalla en el punto central *O*. Porque ambas ondas recorren la misma distancia, llegan a *O* en fase. En consecuencia, se presenta interferencia constructiva en este lugar y se observa una franja brillante. En la figura 37.4b las dos ondas también inician en fase, pero en este caso la onda inferior tiene que recorrer una longitud de onda más que la onda superior para llegar al punto *P*. Ya que la onda inferior cae detrás de la superior en exactamente una longitud de onda, todavía llegan en fase en *P*, y aparece una segunda franja brillante en este lugar. De cualquier modo, en el punto *R* de la figura 37.4c, entre los puntos *O* y *P*, la onda inferior ha caído media longitud de onda detrás de la onda superior y un valle de la onda superior se traslapa con una cresta de la inferior, lo que da lugar a interferencia destructiva en el punto *R*. Por esta razón se observa una franja oscura en este lugar.

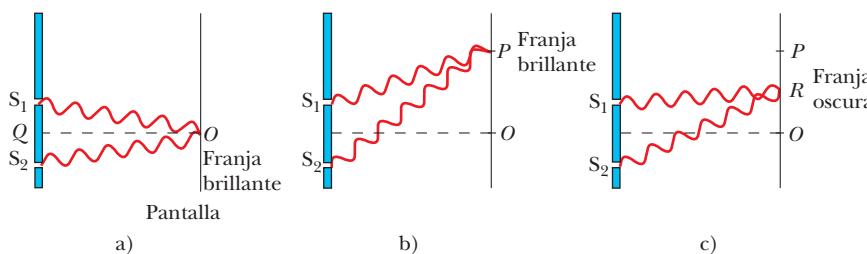



Figura 37.4 a) Se presenta interferencia constructiva en el punto *O* cuando las ondas se combinan. b) También se presenta interferencia constructiva en el punto *P*. c) Existe interferencia destructiva en *R* cuando las dos ondas se combinan porque la onda inferior cae media longitud de onda detrás de la onda superior. (Las figuras no están a escala.)

37.3 Ondas luminosas en interferencia

La figura 37.5 ayuda a describir cuantitativamente el experimento de Young. La pantalla se coloca a una distancia perpendicular L de la barrera que contiene dos ranuras, S_1 y S_2. Las ranuras están separadas por una distancia d, y la fuente es monocromática. Para llegar a cualquier punto arbitrario P en la mitad superior de la pantalla, una onda de la ranura inferior debe recorrer más que una onda de la ranura superior en una distancia $d \operatorname{sen} \theta$ (figura 37.5b). Esta distancia se llama **diferencia de trayectoria** δ. Si supone que los rayos etiquetados r_1 y r_2 son paralelos, lo que es aproximadamente cierto si L es mucho mayor que d, entonces δ se conoce por

Diferencia de trayectoria ▶

$$\delta = r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(37.1)}$$

El valor de δ determina si las dos ondas están en fase cuando llegan al punto P. Si δ es cero o algún entero múltiplo de la longitud de onda, las dos ondas están en fase en el punto P y se obtiene interferencia constructiva. Por lo tanto, la condición para franjas brillantes, o **interferencia constructiva,** en el punto P es

Condiciones para la interferencia constructiva ▶

$$d \operatorname{sen} \theta_{\text{brillante}} = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad \textbf{(37.2)}$$

El número m se denomina **número de orden.** Para la interferencia constructiva, el número de orden es el mismo que el de longitudes de onda que representa la diferencia de trayectoria entre las ondas desde las dos ranuras. La franja central brillante en $\theta_{\text{brillante}} = 0$ se llama *máximo de orden cero*. El primer máximo en cualquiera de los lados, donde $m = \pm 1$, se llama *máximo de primer orden,* y así sucesivamente.

Cuando δ es múltiplo impar de $\lambda/2$, las dos ondas que lleguen al punto P están 180° fuera de fase y dan lugar a una interferencia destructiva. Por lo tanto, la condición para franjas oscuras, o **interferencia destructiva,** en el punto P es

Condiciones para la interferencia destructiva ▶

$$d \operatorname{sen} \theta_{\text{oscuro}} = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad \textbf{(37.3)}$$

Estas ecuaciones proporcionan las posiciones angulares de las franjas. También es útil obtener expresiones para las posiciones lineales observadas a lo largo de la pantalla desde O hasta P. A partir del triángulo OPQ de la figura 37.5a, se ve que

$$\tan \theta = \frac{y}{L} \qquad \textbf{(37.4)}$$

Al usar este resultado, las posiciones lineales de las franjas brillante y oscura se proporcionan por

$$y_{\text{brillante}} = L \tan \theta_{\text{brillante}} \qquad \textbf{(37.5)}$$

$$y_{\text{oscura}} = L \tan \theta_{\text{oscura}} \qquad \textbf{(37.6)}$$

donde $\theta_{\text{brillante}}$ y θ_{oscura} se conocen por las ecuaciones 37.2 y 37.3.

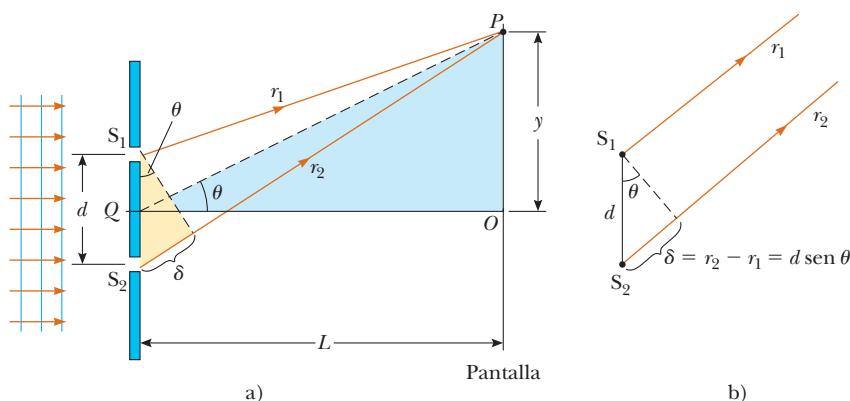



Figura 37.5 a) Construcción geométrica para describir el experimento de doble ranura de Young (que no está a escala). b) Cuando supone que r_1 es paralelo a r_2, la diferencia de trayectoria entre los dos rayos es $r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta$. Para que esta aproximación sea válida, es esencial que $L \gg d$.

Cuando los ángulos a las franjas son pequeños, las posiciones de las franjas son lineales cerca del centro de la configuración. Esto se puede verificar observando que, para ángulos pequeños, tan $\theta \approx$ sen θ, de modo que la ecuación 37.5 da las posiciones de las franjas brillantes como $y_{\text{brillante}} = L \operatorname{sen} \theta_{\text{brillante}}$. Al incorporar la ecuación 37.2 se obtiene

$$y_{\text{brillante}} = L\left(\frac{m\lambda}{d}\right) \quad \text{(ángulos pequeños)} \tag{37.7}$$

Este resultado muestra que $y_{\text{brillante}}$ es lineal en el número de orden m, de modo que las franjas están igualmente espaciadas.

Como se demostró en el ejemplo 37.1, el experimento de la doble rendija de Young proporciona un método para medir la longitud de onda de la luz. De hecho, Young usó esta técnica para hacer precisamente esto. Además, su experimento dio al modelo ondulatorio de la luz una mayor credibilidad. No era concebible que las partículas de luz provenientes a través de las rendijas se pudieran cancelar mutuamente en una forma que explicaría las franjas oscuras.

Los principios que se han explicado en esta sección son la base del modelo de análisis de **ondas en interferencia**. Este modelo se aplicó en el capítulo 18 a las ondas mecánicas en una dimensión. Aquí se ven los detalles de aplicar este modelo en tres dimensiones a la luz.

John W. Jewett Jr.

Los arcos tenues color pastel detrás del arco iris principal se llaman *arcos suplementarios*. Se forman por la interferencia entre los rayos de luz que dejan las gotas de lluvia en ángulos ligeramente menores que el ángulo de máxima intensidad. (Vea la sección 35.7 para una explicación del arco iris.)

Pregunta rápida 37.1 De lo siguiente ¿qué provoca que las franjas en una configuración de interferencia de dos ranuras se separen? a) Reducir la longitud de onda de la luz, b) reducir la distancia L de pantalla, c) reducir la separación d de ranuras, o d) sumergir en agua todo el aparato.

EJEMPLO 37.1 Medición de la longitud de onda de una fuente de luz

Una pantalla de visualización está separada de una doble rendija por 1.2 m. La distancia entre las dos rendijas es 0.030 mm. Hacia la doble rendija se dirige luz monocromática y forma una configuración de interferencia sobre la pantalla. La franja brillante de segundo orden ($m = 2$) está a 4.5 cm de la línea central sobre la pantalla.

A) Determine la longitud de onda de la luz.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 37.5 para asegurarse de que entiende el fenómeno de la interferencia de ondas luminosas.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 37.7 para la longitud de onda y sustituya valores numéricos:

$$\lambda = \frac{y_{\text{brillante}}d}{mL} = \frac{(4.5 \times 10^{-2}\text{ m})(3.0 \times 10^{-5}\text{ m})}{2(1.2\text{ m})}$$

$$= 5.6 \times 10^{-7}\text{ m} = 560\text{ nm}$$

B) Calcule la distancia entre franjas brillantes adyacentes.

SOLUCIÓN

Encuentre la distancia entre franjas brillantes adyacentes a partir de la ecuación 37.7 y los resultados de la parte A):

$$y_{m+1} - y_m = L\frac{(m+1)\lambda}{d} - L\left(\frac{m\lambda}{d}\right)$$

$$= L\left(\frac{\lambda}{d}\right) = 1.2\text{ m}\left(\frac{5.6 \times 10^{-7}\text{ m}}{3.0 \times 10^{-5}\text{ m}}\right)$$

$$= 2.2 \times 10^{-2}\text{ m} = 2.2\text{ cm}$$

EJEMPLO 37.2 **Separación de dos longitudes de onda en doble rendija**

Una fuente de luz emite luz visible de dos longitudes de onda: $\lambda = 430$ nm y $\lambda' = 510$ nm. La fuente se usa en un experimento de interferencia de doble rendija en el que $L = 1.50$ m y $d = 0.025\,0$ mm. Encuentre la distancia de separación entre las franjas brillantes de tercer orden para las dos longitudes de onda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 37.5a, imagine que la luz de dos longitudes de onda incide en las rendijas y forma dos configuraciones de interferencia sobre la pantalla.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 37.7, con $m = 3$, para encontrar las posiciones de franja correspondientes a estas dos longitudes de onda:

$$y_{\text{brillante}} = L\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = L\left(\frac{3\lambda}{d}\right) = 1.50\text{ m}\left[\frac{3(430 \times 10^{-9}\text{ m})}{0.025\,0 \times 10^{-3}\text{ m}}\right]$$

$$= 7.74 \times 10^{-2}\text{ m}$$

$$y'_{\text{brillante}} = L\left(\frac{m\lambda'}{d}\right) = L\left(\frac{3\lambda'}{d}\right) = 1.50\text{ m}\left[\frac{3(510 \times 10^{-9}\text{ m})}{0.025\,0 \times 10^{-3}\text{ m}}\right]$$

$$= 9.18 \times 10^{-2}\text{ m}$$

Evalúe la distancia de separación entre las dos franjas:

$$\Delta y = 9.18 \times 10^{-2}\text{ m} - 7.74 \times 10^{-2}\text{ m}$$

$$= 1.44 \times 10^{-2}\text{ m} = 1.44\text{ cm}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si se examina toda la configuración de interferencia debido a las dos longitudes de onda y se observa traslape de franjas? ¿Habrá algunas ubicaciones en la pantalla donde las franjas brillantes de las dos longitudes de onda se traslapen exactamente?

Respuesta Encuentre tales ubicaciones al igualar la ubicación de cualquier franja brillante debida a λ, a una debida a λ', con la ecuación 37.7:

$$L\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = L\left(\frac{m'\lambda'}{d}\right) \rightarrow \frac{m'}{m} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

Sustituya las longitudes de onda:

$$\frac{m'}{m} = \frac{430\text{ nm}}{510\text{ nm}} = \frac{43}{51}$$

Use la ecuación 37.7 para encontrar el valor de y para estas franjas:

$$y = 1.50\text{ m}\left[\frac{51(430 \times 10^{-9}\text{ m})}{0.025\,0 \times 10^{-3}\text{ m}}\right] = 1.32\text{ m}$$

Este valor de y es comparable con L, así que la aproximación de ángulo pequeño aplicada para la ecuación 37.7 *no* es válida. Esta conclusión sugiere que no se debe esperar que la ecuación 37.7 dé el resultado correcto. Si usa la ecuación 37.5, puede demostrar que las franjas brillantes de hecho se traslapan cuando se satisface la misma condición, $m'/m = \lambda/\lambda'$ (véase el problema 38). Por tanto, la 51a franja de la luz de 430 nm se traslapa con la 43a. franja de la luz de 510 nm, pero no en la ubicación de 1.32 m. Se le pide encontrar la ubicación correcta como parte del problema 38.

37.4 Distribución de intensidad de la configuración de interferencia de doble ranura

Observe que los bordes de las franjas brillantes de la figura 37.2b no son nítidos; hay un cambio gradual de brillante a oscuro. Hasta este punto se han explicado las ubicaciones de los centros de las franjas brillantes y oscuras en una pantalla distante. Ahora veamos la intensidad de la luz en otros puntos entre las posiciones de máxima interferencia constructiva y destructiva. En otras

palabras, calcule ahora la distribución de intensidad de luz asociada con la configuración de interferencia de doble ranura.

De nuevo, suponga que las dos ranuras representan fuentes coherentes de ondas sinusoidales, de modo que las dos ondas que salen de las ranuras tienen la misma frecuencia angular ω y están en fase. La magnitud total del campo eléctrico en el punto P en la pantalla en la figura 37.6 es la sobreposición de las dos ondas. Si supone que las dos ondas tienen la misma amplitud E_0, escriba la magnitud del campo eléctrico en el punto P debido a cada onda por separado como

Figura 37.6 Construcción para analizar la configuración de interferencia de doble ranura. Una franja brillante, o intensidad máxima, se observa en O.

$$E_1 = E_0 \operatorname{sen} \omega t \quad \text{y} \quad E_2 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{37.8}$$

Aun cuando las ondas están en fase en las ranuras, *su diferencia de fase ϕ en P depende de la diferencia de trayectoria* $\delta = r_2 - r_1 = d \operatorname{sen}\theta$. Una diferencia de trayectoria de λ (para interferencia constructiva) corresponde a una diferencia de fase de 2π rad. Una diferencia de trayectoria de δ es la misma fracción de λ que la diferencia de fase ϕ lo es de 2π. La expresión matemática es

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi}$$

que da

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta \tag{37.9}$$

◀ Diferencia de fase

Esta ecuación muestra cómo la diferencia de fase ϕ depende del ángulo θ en la figura 37.5.

Si usa el principio de sobreposición y ecuación 37.8, obtiene la siguiente expresión para magnitud del campo eléctrico resultante en el punto P:

$$E_P = E_1 + E_2 = E_0[\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}(\omega t + \phi)] \tag{37.10}$$

Para simplificar esta expresión, aplique la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Considerando $A = \omega t + \phi$ y $B = \omega t$, escriba la ecuación 37.10 en la forma

$$E_P = 2E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \tag{37.11}$$

Este resultado indica que el campo eléctrico en el punto P tiene la misma frecuencia ω que la luz en las ranuras, pero que la amplitud del campo se multiplica por el factor $2\cos(\phi/2)$. Para comprobar la consistencia de este resultado, observe que si $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, la magnitud del campo eléctrico en el punto P es $2E_0$, lo que corresponde a la condición para una interferencia constructiva máxima. Estos valores de ϕ son consistentes con la ecuación 37.2 para la interferencia constructiva. Del mismo modo, si $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, la magnitud del campo eléctrico en el punto P es cero; consistente con la ecuación 37.3 para la interferencia destructiva total.

Por último, para obtener una expresión para la intensidad de luz en el punto P, recuerde de la sección 34.4 que *la intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico resultante en ese punto* (ecuación 34.24). Con la ecuación 37.11, por lo tanto, exprese la intensidad de luz en el punto P como

$$I \propto E_P{}^2 = 4E_0{}^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Casi todos los instrumentos que detectan luz miden la intensidad de luz promediada en el tiempo, y el valor promedio en el tiempo de $\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi/2)$ en un ciclo es $\frac{1}{2}$. (Véase la figura 33.5.) Por lo tanto, el promedio de intensidad de luz en el punto P se escribe

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \tag{37.12}$$

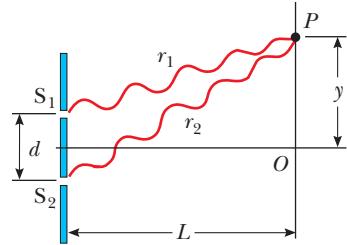
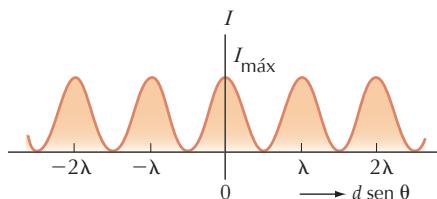
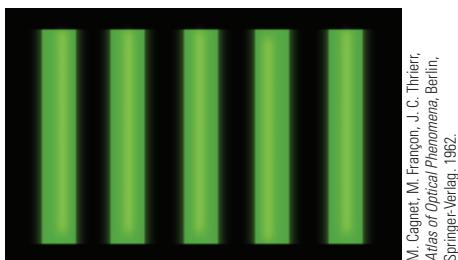



Figura 37.7 Intensidad de luz en función d sen θ para una configuración de interferencia de doble ranura cuando la pantalla está lejos de las dos ranuras ($L >> d$).

donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad máxima en la pantalla y la expresión representa el tiempo promedio. Al sustituir el valor de ϕ, conocido por la ecuación 37.9 en esta expresión, encuentre que

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2\left(\frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right) \qquad \textbf{(37.13)}$$

Alternativamente, porque sen $\theta \approx y/L$ para pequeños valores de θ en la figura 37.5, puede escribir la ecuación 37.13 en la forma

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L}\, y\right) \qquad \textbf{(37.14)}$$

La interferencia constructiva, que produce intensidad de luz máxima, se presenta cuando la cantidad $\pi\, dy/\lambda L$ es una integral múltiple de π, correspondiente a $y = (\lambda L/d)\, m$. Esto es consistente con la ecuación 37.7.

En la figura 37.7 se presenta una gráfica de intensidad de luz con d sen θ. La configuración de interferencia está formada por franjas igualmente espaciadas de la misma intensidad. Sin embargo, recuerde, que este resultado es válido sólo si la distancia L de la ranura a la pantalla es mucho mayor que la separación de ranuras, y sólo para pequeños valores de θ.

La figura 37.8 muestra gráficas similares de intensidad luminosa con d sen θ para luz que pasa a través de varias rendijas. Para más de dos rendijas, la configuración contiene máximos primario y secundario. Para tres rendijas, note que los máximos primarios son nueve veces más intensos que los máximos secundarios observados por la altura de la curva, porque la intensidad varía como E^2. Para N rendijas, la intensidad de los máximos primarios es N^2 veces mayor que la debida a una sola rendija. Conforme el número de rendijas aumenta, los máximos primarios aumentan en intensidad y se vuelven más estrechos, mientras que los máximos secundarios disminuyen en intensidad en relación con los máximos primarios. La figura 37.8 también muestra que, conforme aumenta el número de rendijas, también aumenta el número de máximos secundarios. De hecho, el número de máximos secundarios siempre es $N - 2$, donde N es el número de rendijas. En la sección 38.4 se investigará la configuración para un número muy grande de rendijas, en un dispositivo llamado *rejilla de difracción*.

Pregunta rápida 37.2 Con la figura 37.8 como modelo, bosqueje la configuración de interferencia de seis rendijas.

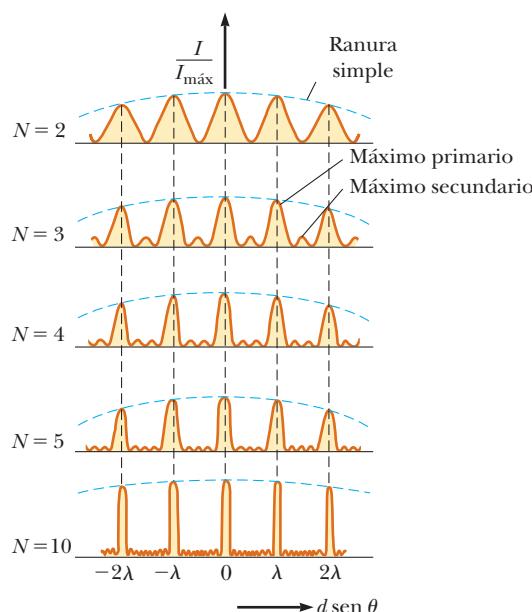



Figura 37.8 Configuraciones de interferencia de varias ranuras. Cuando aumenta *N*, el número de ranuras, los máximos primarios (los picos más altos de cada gráfica) se vuelven más angostos pero permanecen fijos en posición y aumenta el número de máximos secundarios. Para cualquier valor de *N*, la disminución en intensidad en máximos a la izquierda y derecha del máximo central, indicada por los arcos azules de líneas discontinuas, se debe a *patrones de difracción* de las ranuras individuales, que se estudian en el capítulo 38.

37.5 Cambio de fase debido a reflexión

El método de Young para producir dos fuentes de luz coherente consiste en iluminar un par de ranuras con una sola fuente. Otro montaje sencillo, pero ingenioso, para producir una configuración de interferencia con una sola fuente de luz se conoce como *espejo de Lloyd*[1] (figura 37.9). Se coloca una fuente puntual de luz en el punto S cerca de un espejo, así como una pantalla a cierta distancia y perpendicular a éste. Las ondas de luz pueden llegar al punto *P* en la pantalla ya sea directamente de S a *P* o por la ruta que implica reflexión desde el espejo. El rayo reflejado puede considerarse un rayo originado por una fuente virtual en el punto S′, por lo que este montaje es como una fuente de doble ranura con la distancia entre las fuentes S y S′ comparable a la longitud *d* en la figura 37.5. Por tanto, en los puntos de observación lejos de la fuente ($L >> d$) se esperan ondas desde S y S′ para formar una configuración de interferencia exactamente parecida a la que se forma por dos fuentes coherentes reales. Se ve en realidad una configuración de interferencia, pero las posiciones de las franjas oscuras y brillantes están invertidas respecto a la configuración producida por dos fuentes coherentes reales (experimento de Young). Esto sólo puede presentarse si las fuentes coherentes en los puntos S y S′ difieren en fase en 180°.

Para ilustrar esto con más detalle, considere el punto *P*′, el punto en el cual el espejo se cruza con la pantalla. Este punto está equidistante de los puntos S y S′. Si la diferencia de trayectoria fuera la única responsable de la diferencia de fase, habría una franja brillante en el punto *P*′ (porque la diferencia de trayectoria es cero para este punto), que corresponde a la franja brillante central de la configuración de interferencia de dos ranuras. En lugar de ello, aparece una franja oscura en el punto *P*′; por lo que es necesario que se produzca un cambio de fase de 180° por reflexión desde el espejo. En general, **una onda electromagnética se somete a un cambio de fase de 180° al reflejarse desde un medio que tiene un índice de refracción mayor que aquel en el que la onda se propague.**

Es útil representar la analogía entre las ondas de luz reflejadas y las reflexiones de un pulso transversal de onda en una cuerda estirada (sección 16.4). El pulso reflejado en una cuerda se somete a un cambio de fase de 180° cuando se refleja desde la frontera de un

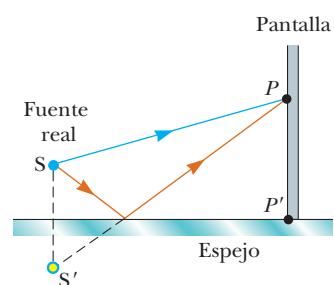
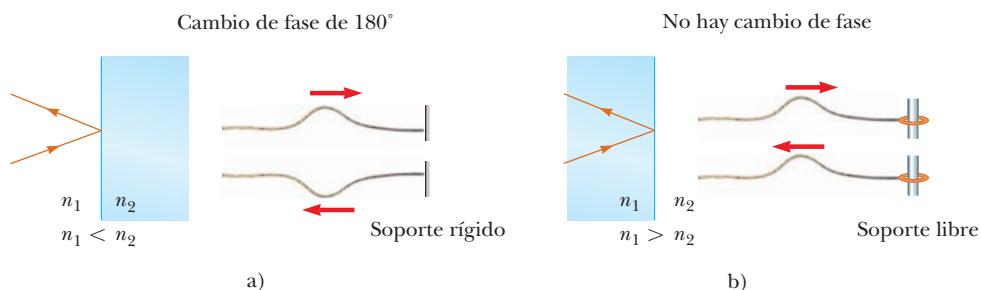



Figura 37.9 Espejo de Lloyd. Una configuración de interferencia se produce en el punto *P* en la pantalla como resultado de la combinación del rayo directo (azul) y el rayo reflejado (café). El rayo reflejado se somete a un cambio de fase de 180°.

[1] Creado en 1834 por Humprey Lloyd (1800-1881), profesor de Filosofía Natural y Experimental, Trinity College, Dublín.

Figura 37.10 a) Para $n_1 < n_2$, un rayo de luz que se propaga en el medio 1 cuando se refleja desde una superficie del medio 2 sometido a un cambio de fase de 180°. Lo mismo pasa con un pulso reflejado que se propaga a lo largo de una cuerda fija en un extremo. b) Para $n_1 > n_2$, un rayo de luz que se propaga en el medio 1 no se somete a cambio de fase cuando se refleja desde la superficie del medio 2. Lo mismo es cierto para un pulso de onda reflejado en una cuerda cuyo extremo de soporte es libre de moverse.

medio más denso, pero no se presenta cambio de fase alguno cuando el pulso se refleja desde la frontera de un medio menos denso. Del mismo modo, una onda electromagnética se somete a un cambio de fase de 180° cuando se refleja desde una frontera que lleva a un medio ópticamente más denso (definido como un medio con un índice de refracción más alto), pero no se presenta cambio de fase cuando la onda se refleja desde una frontera que lleva a un medio menos denso. Estas reglas, resumidas en la figura 37.10, se pueden deducir de las ecuaciones de Maxwell, pero el tratamiento está fuera del alcance de este texto.

37.6 Interferencia en películas delgadas

Los efectos de interferencia se observan por lo general en películas delgadas, por ejemplo en capas finas de petróleo sobre agua o en la delgada superficie de una burbuja de jabón. Los diversos colores que se observan cuando incide luz blanca sobre estas películas resultan por la interferencia de ondas que se reflejan desde las dos superficies de la película.

Considere una película de grosor uniforme t e índice de refracción n, como se muestra en la figura 37.11. Suponga que los rayos de luz que se propagan en el aire son casi normales a las dos superficies de la película. La longitud de onda de luz λ_n en la película (véase la sección 35.5) es

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz en espacio libre y n es el índice de refracción del material de la película.

Figura 37.11 La interferencia en la luz reflejada desde una película delgada se debe a una combinación de los rayos 1 y 2 reflejados desde las superficies superior e inferior de la película. Los rayos 3 y 4 provocan efectos de interferencia para la luz que se transmite a través de la película.

El rayo reflejado 1, que se refleja desde la superficie superior A) en la figura 37.11, se somete a un cambio de fase de 180° respecto a la onda incidente. El rayo reflejado 2, que se refleja desde la superficie inferior de la película B), no pasa por el cambio de fase porque se refleja desde un medio (aire) que tiene un índice de refracción menor. Por lo tanto, el rayo 1 está 180° fuera de fase en relación con el rayo 2, que es equivalente a una diferencia de trayectoria de $\lambda_n/2$. No obstante, también debe considerar que el rayo 2 se desplaza una distancia extra $2t$ antes de que las ondas se recombinen en el aire sobre la superficie A. (Recuerde que considera rayos de luz que están cerca de la normal a la superficie. Si los rayos no estuvieran cerca de la normal, la diferencia de trayectoria sería mayor a $2t$.) Si $2t = \lambda_n/2$, entonces los rayos 1 y 2 se recombinan en fase, y el resultado es interferencia constructiva. En general, la condición para la interferencia *constructiva* en películas delgadas es[2]

$$2t = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_n \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \qquad \textbf{(37.15)}$$

Esta condición toma en cuenta dos factores: 1) la diferencia en la distancia de trayectoria para los dos rayos (el término $m\lambda_n$) y 2) el cambio de fase de 180° por reflexión (el término $\frac{1}{2}\lambda_n$). Como $\lambda_n = \lambda/n$, podemos escribir la ecuación 37.15 como

Condiciones para la interferencia constructiva en películas delgadas ▶

$$2nt = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \qquad \textbf{(37.16)}$$

[2] El efecto completo de la interferencia en una película delgada exige el análisis de un número infinito de reflexiones en uno y otro sentido entre las superficies superior e inferior de la película. En este caso se concentra únicamente en una reflexión sencilla desde la parte inferior de la película, que da la contribución máxima al efecto de interferencia.

Si la distancia extra $2t$ recorrida por el rayo 2 corresponde a un múltiplo de λ_n, las dos ondas se combinan fuera de fase, y el resultado es interferencia destructiva. La ecuación general para la interferencia *destructiva* en películas delgadas es

$$2nt = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \qquad \textbf{(37.17)}$$

◀ Condiciones para la interferencia destructiva en las películas delgadas

Las anteriores condiciones para las interferencias constructiva y destructiva son válidas cuando el medio que está por encima de la superficie superior de la película es el mismo que el medio por debajo de la superficie inferior o, si existen medios diferentes arriba y abajo de la película, el índice de refracción de ambos es menor a n. Si la película se coloca entre dos medios diferentes, uno con $n < n_{\text{película}}$ y el otro con $n > n_{\text{película}}$, las condiciones para las interferencias constructiva y destructiva se invierten. En este caso, o bien existe un cambio de fase de 180° para el rayo 1 que se refleja desde la superficie A y el rayo 2 que se refleja desde la superficie B, o bien no existe cambio de fase para ninguno de ellos; por tanto, el cambio neto en fase relativa debido a las reflexiones es cero.

Los rayos 3 y 4 de la figura 37.11 llevan a efectos de interferencia en la luz transmitida a través de la película delgada. El análisis de estos efectos es semejante al de la luz reflejada. Explore la luz transmitida en los problemas 23, 29 y 30.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 37.1

Tenga cuidado con películas delgadas

Cerciórese de incluir *ambos* efectos —distancia de trayectoria y cambio de fase— cuando analice una configuración de interferencia que resulte de una película delgada. El posible cambio de fase es una característica nueva que no había necesitado considerar para la interferencia de doble ranura. También piense acerca del material presente en ambos lados de la película. Puede haber situaciones en las que exista un cambio de fase de 180° en *ambas* superficies o en *ninguna* superficie, dependiendo de si hay diferentes materiales en cualquier lado de la película.

Pregunta rápida 37.3 Un portaobjetos de microscopio se coloca encima de otro con sus bordes izquierdos en contacto y un cabello humano bajo el borde derecho del portaobjetos superior. En consecuencia, existe una cuña de aire entre los portaobjetos. Cuando se hace incidir luz monocromática en la cuña se genera una configuración de interferencia. ¿Qué hay en los bordes izquierdos de los portaobjetos? a) Una franja oscura, b) una franja brillante o c) imposible de determinar.

Anillos de Newton

Otro método para observar interferencia en ondas de luz es colocar una lente planoconvexa en la parte superior de una superficie plana de vidrio, como se indica en la figura 37.12a. Con este arreglo, la película de aire entre las superficies de vidrio varía en grosor desde cero en el punto de contacto hasta algún valor t en el punto P. Si el radio de curvatura R de la lente es mucho mayor que la distancia r, y si el sistema se ve desde arriba, se puede observar una configuración de anillos luminosos y oscuros como en la figura 37.12b. Estas franjas circulares, descubiertas por Newton, se denominan **anillos de Newton.**

El efecto de interferencia se debe a la combinación del rayo 1, reflejado desde la placa plana, con el rayo 2, reflejado desde la superficie curva de la lente. El rayo 1 pasa por un cambio de fase de 180° al reflejarse (porque se refleja desde un medio con un índice de refracción más alto), mientras que el rayo 2 no pasa por cambio de fase (porque se refleja desde un medio con un índice refractivo más bajo). En consecuencia, las condiciones para las interferencias constructiva y destructiva se conocen por las ecuaciones 37.16 y 37.17, respectivamente, con $n = 1$ porque la película es el aire. El punto de contacto en O es os-

a)

b)

Figura 37.12 a) La combinación de rayos reflejados desde la placa plana y la superficie curva de la lente da lugar a una configuración de interferencia conocida como anillos de Newton. b) Fotografía de anillos de Newton.

a)

b)

a) Una película delgada de petróleo sobre agua muestra interferencia, como se observa en la configuración de colores cuando se hace incidir luz blanca sobre la película. Variaciones en el grosor de la película producen una interesante configuración de colores. La hoja de afeitar da una idea del tamaño de las franjas de colores. *b*) Interferencia en burbujas de jabón. Los colores se deben a la interferencia entre rayos de luz reflejados desde las superficies anterior y posterior de la delgada película de jabón que da lugar a la burbuja. El color depende del grosor de la película, que va de negro donde la película es más delgada hasta magenta donde es más gruesa.

curo, como se ve en la figura 37.12b, porque no hay diferencia de trayectoria y el cambio total de fase se debe al cambio de fase de 180° por reflexión.

Con el uso de la geometría, como se ilustra en la figura 37.12a, se obtienen expresiones para los radios de bandas brillantes y oscuras en términos del radio de curvatura R y la longitud de onda λ. Por ejemplo, los anillos oscuros tienen radios determinados por la expresión $r \approx \sqrt{m\lambda R/n}$. Para conocer los detalles, se le deja el problema 60 para que lo resuelva. Es posible calcular la longitud de onda de la luz que causa la configuración de interferencia si mide los radios de los anillos, siempre que R se conozca. A la inversa, use una longitud de onda conocida para obtener R.

Un importante uso de los anillos de Newton está en la prueba de lentes ópticas. Se obtiene una configuración circular como la de la figura 37.12b sólo cuando las lentes están esmeriladas a una curvatura perfectamente simétrica. Variaciones desde esta simetría podrían producir una configuración con franjas que varían a causa de una forma circular uniforme. Estas variaciones indican cómo es que las lentes deben volver a esmerilarse y pulirse para eliminar imperfecciones.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Interferencia de película delgada**

Cuando trabaje con problemas de interferencia de película delgada, debe tener en mente las siguientes características.

1. *Conceptualizar.* Piense qué ocurre físicamente en el problema. Identifique la fuente de luz y la posición del observador.
2. *Categorizar.* Confirme que debe usar las técnicas para interferencia de película delgada al identificar la película delgada causante de la interferencia.
3. *Analizar.* El tipo de interferencia que se presenta se determina mediante la relación de fase entre la porción de la onda reflejada en la superficie superior de la película y la porción reflejada en la superficie inferior. Las diferencias de fase entre las dos porciones de la onda tienen dos causas: diferencias en las distancias recorridas por las dos porciones y cambios de fase que se presentan en la reflexión. Debe considerar *ambas* causas cuando determine cuál tipo de interferencia se presenta. Si los medios arriba y abajo de la película tienen índices de refracción mayores que el de la película, o si ambos índices son menores, use la ecuación 37.16 para interferencia constructiva y la ecuación 37.17 para interferencia destructiva. Si la película se ubica entre dos medios diferentes, uno con $n < n_{\text{película}}$ y el otro con $n > n_{\text{película}}$, invierta estas dos ecuaciones para interferencia constructiva y destructiva.
4. *Finalizar.* Inspeccione sus resultados finales para ver si físicamente tienen sentido y son de un tamaño adecuado.

EJEMPLO 37.3 Interferencia en una película de jabón

Calcule el grosor mínimo de la película de una burbuja de jabón que resulta en interferencia constructiva en la luz reflejada, si la película se ilumina con luz cuya longitud de onda en el espacio libre es $\lambda = 600$ nm. El índice de refracción de la película de jabón es 1.33.

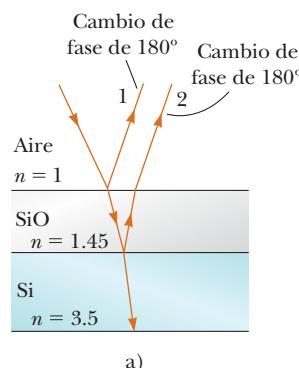
SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que la película en la figura 37.11 es jabón, con aire en ambos lados.

Categorizar El resultado se evalúa con una ecuación de esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

El grosor de película mínimo para interferencia constructiva en la luz reflejada corresponde a $m = 0$ en la ecuación 37.16. Resuelva esta ecuación para t y sustituya valores numéricos:

$$t = \frac{(0 + \frac{1}{2})\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{(600 \text{ nm})}{4(1.33)} = 113 \text{ nm}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si la película es el doble de gruesa? ¿La situación produce interferencia constructiva?

Respuesta Con la ecuación 37.16, puede resolver para el grosor al que se presenta la interferencia constructiva:

$$t = (m + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda}{2n} = (2m + 1)\frac{\lambda}{4n} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Los valores permitidos de m muestran que la interferencia constructiva se presenta para múltiplos *nones* del grosor correspondiente a $m = 0$, $t = 113$ nm. Por lo tanto, la interferencia constructiva *no* se presenta para una película que es el doble de grueso.

EJEMPLO 37.4 Recubrimientos que no reflejan para celdas solares

Con frecuencia, las celdas solares (dispositivos que generan electricidad cuando se exponen a la luz solar) están recubiertas con una delgada película transparente de monóxido de silicio (SiO, $n = 1.45$) para minimizar las pérdidas por reflejo de la superficie. Suponga que una celda solar de silicio ($n = 3.5$) está recubierta con una delgada película de monóxido de silicio para este propósito (figura 37.13a). Determine el mínimo grosor de película que produce la menor reflexión a una longitud de onda de 550 nm, cerca del centro del espectro visible.

Figura 37.13 (Ejemplo 37.4) a) Las pérdidas por reflejo de una celda solar de silicio se minimizan al recubrir la superficie de la celda con una película delgada de monóxido de silicio. b) La luz reflejada de una lente de cámara recubierta con frecuencia tiene una apariencia violeta rojiza.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 37.13a ayuda a visualizar la trayectoria de los rayos en la película de SiO que resultan de la interferencia en la luz reflejada.

Categorizar Con la geometría de la capa de SiO, este ejemplo se clasifica como un problema de interferencia de película delgada.

Analizar La luz reflejada es un mínimo cuando los rayos 1 y 2 en la figura 37.13a satisfacen la condición de interferencia destructiva. En esta situación, *ambos* rayos pasan por un cambio de fase de 180° por reflexión: el rayo 1 de la superficie superior de SiO y el rayo 2 de la superficie inferior de SiO. Por tanto, el cambio neto en fase debido a reflexión es cero, y la condición para un mínimo de reflexión requiere una diferencia de trayectoria de $\lambda_n/2$, donde λ_n es la longitud de onda de la luz en SiO. Por esto, $2nt = \lambda/2$, donde λ es la longitud de onda en aire y n es el índice de refracción de SiO.

Resuelva la ecuación $2nt = \lambda/2$ para t y sustituya valores numéricos:

$$t = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550 \text{ nm}}{4(1.45)} = 94.8 \text{ nm}$$

Finalizar Una celda solar no recubierta representativa tiene pérdidas por reflexión tan altas como 30%, pero un recubrimiento de SiO puede reducir este valor a casi 10%. Esta disminución significativa en pérdidas por reflexión aumenta la eficiencia de la celda, pues menos reflexión significa que más luz solar entra al silicio para crear portadores de carga en la celda. Ningún recubrimiento jamás puede ser perfectamente no reflector porque el grosor requerido depende de la longitud de onda y la luz incidente cubre una gama amplia de longitudes de onda.

Las lentes de vidrio usadas en las cámaras y otros instrumentos ópticos por lo general están recubiertos con una delgada película transparente para reducir o eliminar la reflexión indeseada y mejorar la transmisión de luz a través de la lente. La lente de la cámara de la figura 37.13b tiene varios recubrimientos (de diferentes grosores) para minimizar la reflexión de las ondas de luz que tienen longitudes de onda cerca del centro del espectro visible. Como resultado, la pequeña cantidad de luz que refleja la lente tiene una mayor proporción de los extremos lejanos del espectro y con frecuencia parece violeta rojizo.

37.7 El interferómetro de Michelson

El **interferómetro,** inventado por el físico estadounidense A. A. Michelson (1852-1931), divide un rayo de luz en dos partes y luego los recombina para que formen una configuración de interferencia. El aparato se puede usar para medir longitudes de onda u otras longitudes con gran precisión, porque un desplazamiento grande y medido en forma muy precisa de uno de los espejos está relacionado con un número contable exacto de longitudes de onda de luz.

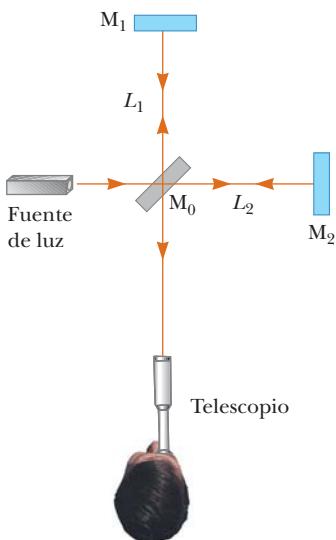



Figura 37.14 Diagrama del interferómetro de Michelson. Un rayo de luz se divide en dos rayos en el espejo M_0, denominado divisor de rayo. La diferencia de trayectoria entre dos rayos se hace variar con el espejo ajustable M_1. Cuando M_1 se mueve, la configuración de interferencia cambia en el campo de visión.

En la figura 37.14 se muestra un esquema del interferómetro. Un rayo de luz procedente de una fuente monocromática es dividido en dos rayos por el espejo M_0, que está inclinado 45° respecto al rayo de luz incidente. El espejo M_0, denominado *divisor de rayo,* transmite la mitad de la luz incidente en él y refleja el resto. Un rayo se refleja de M_0 verticalmente hacia arriba al espejo M_1, y el segundo rayo es transmitido horizontalmente por medio del espejo M_0 hacia el espejo M_2. Por esto, los dos rayos recorren trayectorias separadas L_1 y L_2. Después de reflejarse desde M_1 y M_2, por último los dos rayos se recombinan en M_0 para producir una configuración de interferencia, que se puede ver a través de un telescopio.

La condición de interferencia para los dos rayos está determinada por sus diferencias de distancia de trayectoria. Cuando los dos espejos están exactamente perpendiculares entre sí, la configuración de interferencia es una configuración objetivo de franjas circulares brillantes y oscuras, semejante a los anillos de Newton. Cuando M_1 se mueve, el modelo de franjas colapsa o se expande, dependiendo de la dirección en que se mueve M_1. Por ejemplo, si un círculo oscuro aparece en el centro la configuración objetivo (correspondiente a interferencia destructiva) y después M_1 se mueve una distancia $\lambda/4$ hacia M_0, la diferencia en la trayectoria cambia en $\lambda/2$. Lo que era un círculo oscuro en el centro se convierte ahora en un círculo brillante. Cuando M_1 se mueve una distancia adicional $\lambda/4$ hacia M_0, el círculo brillante se convierte de nuevo en círculo oscuro. En esta forma, el modelo de franjas se desplaza media franja cada vez que M_1 se mueve una distancia $\lambda/4$. En tal caso la longitud de onda de luz se mide contando el número de cambios de franja para un cierto desplazamiento dado de M_1. Si la longitud de onda se conoce con precisión, los desplazamientos del espejo se pueden medir con una tolerancia de una fracción de la longitud de onda.

En la explicación sobre relatividad en el capítulo 39 se describe un importante e histórico uso del interferómetro de Michelson. Los usos modernos incluyen las siguientes dos aplicaciones.

Transformada de Fourier en espectroscopia en infrarrojo y el interferometro láser en el observatorio de onda gravitacional.

Transformada de Fourier en espectroscopia en infrarrojo

La espectroscopia es el estudio de la distribución de radiación de longitud de onda desde una muestra que se puede usar para identificar las características de átomos o moléculas en la muestra. La espectroscopia infrarroja es particularmente importante para especialistas en química orgánica para analizar moléculas orgánicas. La espectroscopia tradicional comprende el uso de un elemento óptico, como el prisma (sección 35.5) o una rejilla de difracción (sección 38.4), la cual dispersa varias longitudes de onda de una compleja señal óptica desde la muestra en diferentes ángulos. En esta forma se pueden determinar las diversas longitudes de onda de radiación y sus intensidades en la señal. Esta clase de

aparatos son limitados en su resolución y efectividad porque deben ser explorados por medio de diferentes desviaciones angulares de la radiación.

La técnica de la *trnasformada de Fourier en espectroscopia infrarroja* (FTIR, *Fourier transform infrarred spectroscopy*), se emplea para crear un espectro de alta resolución en un intervalo de un segundo, procedimiento que con un espectrómetro estándar pudo haber requerido 30 minutos. Con esta técnica, la radiación de una muestra penetra en un interferómetro de Michelson. El espejo movible pasa a través de la condición de cero diferencia de trayectoria y la intensidad de radiación se registra de la posición de observación. El resultado es un complejo conjunto de datos que relacionan la intensidad de luz como función de la posición del espejo, llamado *interferógramo*. Ya que existe una correspondencia entre la posición del espejo y la intensidad de luz para una longitud de onda determinada, el interferógramo contiene información acerca de todas las longitudes de onda de la señal.

En la sección 18.8 se explicó el análisis de Fourier de una onda. La onda es una función que contiene información acerca de todos los componentes individuales de frecuencia que conforman la onda.[3] La ecuación 18.13 muestra la forma en que se genera la onda a partir de componentes individuales de frecuencia. Del mismo modo, el interferógramo se puede analizar por computadora, en un proceso denominado *transformada de Fourier,* para obtener todos los componentes de longitud de onda. Esta es la misma información generada por espectroscopia tradicional, pero la resolución FTIR es más alta.

Interferómetro láser en el observatorio de onda gravitacional

La teoría general de la relatividad de Einstein (sección 39.10) pronostica la existencia de *ondas gravitacionales*. Estas ondas se propagan desde el sitio de cualquier perturbación gravitacional, que podría ser periódica y predecible, como la rotación de una estrella doble alrededor de un centro de masa, o no predecible, como la explosión supernova de una estrella gigante.

En la teoría de Einstein, la gravedad es equivalente a una distorsión del espacio. Debido a eso, una perturbación gravitacional produce una distorsión adicional que se propaga en el espacio de un modo semejante a como lo hacen las ondas mecánicas o electromagnéticas. Cuando las ondas gravitacionales de una perturbación pasan por la Tierra, crean una distorsión del espacio local. El aparato LIGO (*laser interferometer gravitational-wave observatory*) está diseñado para detectar esta distorsión. Utiliza un interferómetro de Michelson que emplea rayos láser con una distancia efectiva de trayectoria de varios kilómetros. Al final de uno de los brazos del interferómetro, se monta un espejo sobre un péndulo pesado. Cuando pasa una onda gravitacional, el péndulo y el espejo montado sobre él se mueven y la configuración de interferencia cambia debido a los rayos láser provenientes de los dos brazos.

En Estados Unidos se han creado dos sitios con interferómetros para permitir estudios de coincidencia sobre ondas gravitacionales. Estos sitios se encuentran en Richland, Washington, y Livingston, Louisiana. En la figura 37.15 aparece el de Washington. Los

LIGO Hanford Observatory.

Figura 37.15 Interferómetro de Láser en el observatorio de Ondas Gravitacionales de (LIGO) cerca de Richland, Washington. Observe los dos brazos perpendiculares del interferómetro de Michelson.

[3] En acústica, es común hablar de los componentes de una señal compleja en términos de frecuencia; en óptica, en términos de longitud de onda.

dos brazos del interferómetro de Michelson son evidentes en la fotografía. Hasta 2007 se habían realizado cinco series de experimentos coordinados con otros detectores, como GEO en Hannover, Alemania; TAMA en Mitaka, Japón y Virgo en Cascina, Italia. Hasta ahora, aún no se han detectado ondas gravitacionales.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

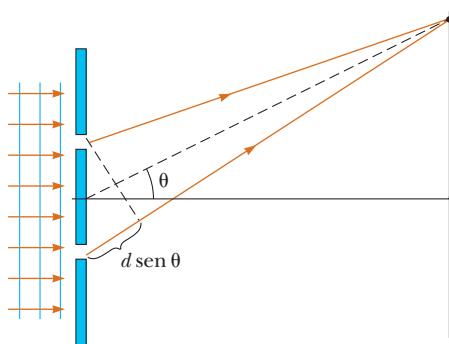
La **interferencia** en ondas de luz se presentan siempre que dos o más ondas se traslapan en un punto determinado. Se observa una configuración de interferencia si 1) las fuentes son coherentes y 2) las fuentes tienen longitudes de onda idénticas.

La **intensidad** en un punto en una configuración de interferencia de doble rendija es

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2\left(\frac{\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right) \quad \textbf{(37.13)}$$

donde $I_{\text{máx}}$ es la máxima intensidad sobre la pantalla y la expresión representa el tiempo promedio.

Una onda que viaja de un medio con índice de refracción n_1 hacia un medio con índice de refracción n_2 experimenta un cambio de fase de 180° en la reflexión cuando $n_2 > n_1$ y no experimenta cambio de fase cuando $n_2 < n_1$.

La condición para interferencia constructiva en una película de grosor t e índice de refracción n rodeado por aire es

$$2nt = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \textbf{(37.16)}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz en el espacio libre.

De igual modo, la condición para interferencia destructiva en una película delgada rodeada por aire es

$$2nt = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \textbf{(37.17)}$$

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ondas en Interferencia. El experimento de doble rendija de Young sirve como prototipo para fenómenos de interferencia que involucran radiación electromagnética. En este experimento, dos rendijas separadas por una distancia d se iluminan mediante una fuente de luz de una sola longitud de onda. La condición para franjas brillantes **(interferencia constructiva)** es

$$d \operatorname{sen}\theta_{\text{brillante}} = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \textbf{(37.2)}$$

La condición para franjas oscuras **(interferencia destructiva)** es

$$d \operatorname{sen}\theta_{\text{oscuro}} = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \textbf{(37.3)}$$

El número m es el **número de orden** de la franja.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

La pregunta 4 del capítulo 18 se puede asignar con este capítulo.

1. ¿Cuál es la condición necesaria en la diferencia de distancia de trayectoria entre dos ondas que se interfieren a) constructivamente y b) destructivamente?

2. Explique por qué dos linternas sostenidas juntas no producen configuración de interferencia alguna en una pantalla distante.

3. **O** Cuatro ensayos conducidos del experimento de doble rendija de Young: a) En el primer intento, pasa luz azul a través de dos ranuras finas separadas 400 μm y forma una configuración de interferencia sobre una pantalla a 4 m de distancia. b) En un segundo intento, pasa luz roja a través de las mismas ranuras y cae sobre la misma pantalla. c) Un tercer intento es con luz roja y la misma pantalla, pero con ranuras separadas 800 μm. d) Un intento final es con luz roja, ranuras separadas 800 μm y una pantalla a 8 m de distancia. **i)** Clasifique los intentos de a) a d), de mayor a menor valor del ángulo entre el máximo central y el máximo lateral de primer orden. En su clasificación, observe cualquier caso de igualdad. **ii)** Clasifique los mismos ensayos de acuerdo con la distancia entre el máximo central y el máximo lateral de primer orden sobre la pantalla.

4. Suponga que sopla humo en el espacio entre la barrera y la pantalla de visión en el experimento de doble ranuras de Young, que se muestra en la figura 37.2a. ¿El humo mostraría evidencia de interferencia dentro de este espacio? Explique su respuesta.

5. **O** Suponga que el experimento de doble rendija de Young se realiza en aire con luz roja y luego el aparto se sumerge en agua. ¿Qué sucede con la configuración de interferencia sobre la pantalla? a) Desaparece. b) Las franjas brillantes y oscuras permanecen en las mismas posiciones, pero el contraste se reduce. c) Las franjas brillantes están más cercanas. d) El color se corre al azul. e) Las franjas brillantes están más separadas. f) Las franjas brillantes están en movimiento continuo. g) No suceden cambios en la configuración de interferencia.

6. En el experimento de doble ranura de Young, ¿por qué se usa luz monocromática? Si se usara luz blanca, ¿cómo cambiaría la configuración?

7. **O** Suponga que realiza el experimento de doble ranuras de Young con la separación de ranuras ligeramente menor que la longitud de onda de la luz. Como pantalla usa la mitad de un gran cilindro con su eje a lo largo de la línea media entre las ranuras. ¿Qué configuración de interferencia verá en la superficie interior del cilindro? a) franjas brillantes y oscuras estrechamente espaciadas de tal manera que sean imperceptibles, b) únicamente una franja brillante central y dos franjas oscuras, c) una pantalla completamente brillante sin franjas oscuras, d) únicamente una franja oscura central y dos franjas brillantes, e) una pantalla completamente oscura sin franjas brillantes.

8. Cuando se evapora una burbuja de jabón, parece negra justo antes de reventarse como en la parte superior de la película circular que se muestra en la figura P37.8. Explique este fenómeno en términos de los cambios de fase que se presentan en el reflejo desde las dos superficies de la película de jabón.

Richard Megna/Fundamental Photographs.

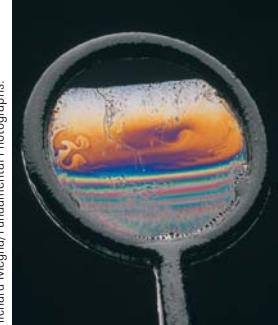



Figura P37.8 Pregunta 8 y problema 63.

9. **O** Una película de aceite sobre un charco en un estacionamiento muestra una variedad de colores brillantes en parches arremolinados. ¿Qué puede decir acerca del grosor de la película de aceite? a) Es mucho menor que la longitud de onda de la luz visible. b) Es del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de la luz visible. c) Es mucho mayor que la longitud de onda de la luz visible. d) Puede tener cualquier correspondencia con la longitud de onda de la luz visible.

10. **O** Suponga que el índice de refracción del vidrio con plomo es 1.66 y que el índice de refracción del vidrio sin plomo es 1.52. **i)** Una película formada por una gota de aceite de sasafrás, sobre una superficie horizontal de un bloque de vidrio flint, se ve mediante luz reflejada. La película parece más brillante en su margen exterior, donde es más delgada. Una película del mismo aceite sobre vidrio sin plomo parece oscura en su margen exterior. ¿Qué puede decir acerca del índice de refracción del aceite? a) Debe ser menor que 1.52. b) Debe estar entre 1.52 y 1.66. c) Debe ser mayor que 1.66. d) Ninguno de los enunciados de a) a c) es necesariamente verdadero. **ii)** ¿Una película muy delgada de algún otro líquido podría parecer brillante por luz reflejada sobre ambos bloques de vidrio? **iii)** ¿Podría parecer oscura en ambos?

iv) ¿Podría parecer oscura en vidrio sin plomo y brillante en vidrio con plomo? Los experimentos descritos por Thomas Young sugirieron esta pregunta.

11. Una lente con radio exterior de curvatura R e índice de refracción n está apoyada sobre una placa plana de vidrio sin plomo. La combinación está iluminada con luz blanca desde arriba y se observa desde arriba. ¿Existe un punto oscuro o un punto luminoso en el centro de la lente? ¿Qué significa si los anillos observados no son circulares?

12. ¿Por qué la lente de una cámara de buena calidad está recubierta con una película delgada?

13. O La luz verde tiene una longitud de onda de 500 nm en aire. **i)** Suponga que hay luz verde que se refleja desde un espejo con ángulo de incidencia 0°. Las ondas incidente y reflejada juntas constituyen una onda estacionaria, ¿con qué distancia, desde un nodo hasta el siguiente antinodo? a) 1000 nm, b) 500 nm, c) 250 nm, d) 125 nm, e) 62.5 nm. **ii)** La luz verde se envía a un interferómetro Michelson que se ajusta para producir un círculo brillante central. ¿A qué distancia se debe desplazar el espejo móvil del interferómetro para cambiar el centro de la configuración en un círculo oscuro? Elija entre las mismas posibilidades. **iii)** La luz se refleja perpendicular desde la película delgada de un plástico con índice de refracción 2.00. La película parece brillante en la luz reflejada. ¿Cuánto grosor adicional haría que la película pareciera oscura?

14. O Con el interferómetro Michelson que se muestra en la figura 37.14, ve un círculo oscuro en el centro de la configuración de interferencia. Conforme usted mueve gradualmente la fuente de luz hacia el espejo central M_0, a través de una distancia $\lambda/2$, ¿qué ve? a) No hay cambio en la configuración. b) El círculo oscuro cambia en un círculo brillante. c) El círculo oscuro cambia en un círculo brillante y luego de regreso en un círculo oscuro. d) El círculo oscuro cambia en un círculo brillante, luego en un círculo oscuro y después en un círculo brillante.

Problemas

Sección 37.1 Condiciones para la interferencia

Sección 37.2 Experimento de doble ranura de Young

Sección 37.3 Ondas luminosas en interferencia

Nota: Los problemas 4, 5, 6, 7, 8 y 10 del capítulo 18, se pueden asignar con estas secciones.

1. Un rayo láser (λ = 632.8 nm) incide en dos ranuras separadas 0.200 mm. ¿Qué distancia están separadas las franjas brillantes de interferencia en una pantalla a 5.00 m de distancia de las dobles ranuras?

2. Un experimento de interferencia de Young se realiza con luz monocromática. La separación entre las ranuras es 0.500 mm y la configuración de interferencia en una pantalla a 3.30 m de distancia muestra el primer máximo lateral de 3.40 mm desde el centro del patrón. ¿Cuál es la longitud de onda?

3. Dos antenas de radio separadas 300 m, como se muestra en la figura P37.3, transmiten simultáneamente señales idénticas a la misma longitud de onda. El radio en un automóvil que se desplaza al norte recibe estas señales. a) Si el vehículo se encuentra en la posición del segundo máximo, ¿cuál es la longitud de onda de las señales? b) ¿Cuánto más lejos debe viajar el auto para encontrar el siguiente mínimo en recepción? (*Nota:* No utilice la aproximación de ángulo pequeño en este problema.)

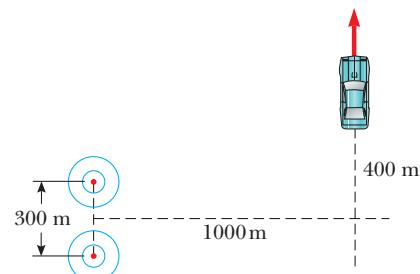



Figura P37.3

4. En un lugar donde la rapidez del sonido es 354 m/s, una onda de sonido de 2000 Hz incide en dos ranuras que están a 30.0 cm una de otra. a) ¿A qué ángulo está situado el primer máximo? b) **¿Qué pasaría si?** La onda de sonido es sustituida por microon-

das de 3.00 cm, ¿qué separación de ranura da el mismo ángulo que para el primer máximo? c) **¿Qué pasaría si?** La separación de ranura es de 1.00 μm, ¿qué frecuencia de luz da el mismo ángulo que para el primer máximo?

5. El experimento de doble ranura de Young se realiza con luz de 589 nm y a una distancia de 2.00 m entre las ranuras y la pantalla. El décimo mínimo de interferencia se observa a 7.26 mm del máximo central. Determine la separación de las ranuras.

6. ● Escriba el enunciado de un problema, incluyendo datos, para el que las siguientes ecuaciones aparezcan en la solución.

$$\lambda = \frac{343 \text{ m/s}}{1620/\text{s}} \qquad (35.0 \text{ cm}) \text{ sen } \theta_0 = 0\lambda$$

$$(35.0 \text{ cm}) \text{ sen } \theta_{1 \text{ suave}} = 0.5\lambda \qquad (35.0 \text{ cm}) \text{ sen } \theta_{1 \text{ fuerte}} = 1\lambda$$

$$(35.0 \text{ cm}) \text{ sen } \theta_{2 \text{ suave}} = 1.5\lambda \qquad (35.0 \text{ cm}) \text{ sen } \theta_{2 \text{ fuerte}} = 2\lambda$$

Establezca la solución al problema, incluidos los valores para cada cantidad que aparezca como incógnita. ¿Qué puede concluir a partir de la última del conjunto de seis ecuaciones? ¿Esta ecuación describe un ángulo $\theta_{2 \text{ fuerte}}$ que sea mayor que 90°?

7. Dos ranuras angostas y paralelas, separadas por 0.250 mm, son iluminadas por luz verde (λ = 546.1 nm). La configuración de interferencia se observa en una pantalla a 1.20 m de distancia del plano de las ranuras. Calcule la distancia a) desde el máximo central a la primera región brillante a cualquiera de los lados del máximo central y b) entre la primera y segunda bandas oscuras.

8. Un almacén junto a un río tiene dos puertas abiertas, como se ve en la figura P37.8. Sus paredes están forradas de material para absorber el sonido. Un bote en el río hace sonar su claxon. Para la persona A el sonido es fuerte y claro. Para la persona B el sonido es apenas perceptible. La longitud de onda principal de las ondas de sonido es de 3.00 m. Si se supone que la persona B está en la posición del primer mínimo, determine la distancia entre las puertas, de centro a centro.

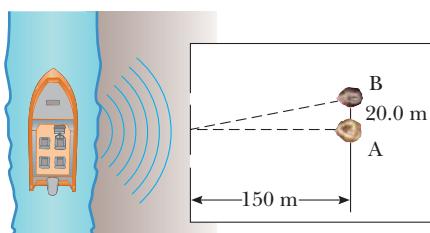



Figura P37.8

9. Por un sistema de doble ranura que tiene una separación entre ranuras d = 0.400 mm pasa luz de 442 nm de longitud de onda. Determine a qué distancia debe ponerse una pantalla para que aparezca una franja oscura directamente opuesta a ambas ranuras, con sólo un franja brillante entre ellas.

10. Dos ranuras están separadas 0.320 mm. Un rayo de luz de 500 nm incide en ellas, produciendo una configuración de interferencia. Determine el número de máximos observados en el intervalo angular $-30.0° < \theta < 30.0°$.

11. ● El experimento de doble ranura de Young es la base del *sistema de aterrizaje por instrumentos* que se emplea para guiar aviones a aterrizajes seguros cuando hay mala visibilidad. Aun cuando los sistemas reales son más complicados que el ejemplo aquí descrito, funcionan con los mismos principios. Un piloto intenta alinear su avión con una pista, como se sugiere en la figura P37.11a. Dos antenas de radio A_1 y A_2 están colocadas adyacentes a la pista, separadas 40.0 m. Las antenas transmiten ondas de radio coherentes no moduladas a 30.0 MHz. a) Encuentre la longitud de onda de las ondas. El piloto "enlaza" en la señal intensa radiada en conformidad con un máximo de interferencia, y dirige el avión para mantener intensa la señal recibida. Si encuentra el máximo central, el avión tendrá justo el rumbo correcto para aterrizar cuando llegue a la pista. b) **¿Qué pasaría si?** Suponga más bien que el avión vuela en conformidad con el primer máximo lateral (figura P37.11b). ¿A qué distancia de la lateral de la línea de centro de la pista estará el avión cuando esté a 2.00 km de las antenas? c) Es posible avisarle al piloto que está en el máximo

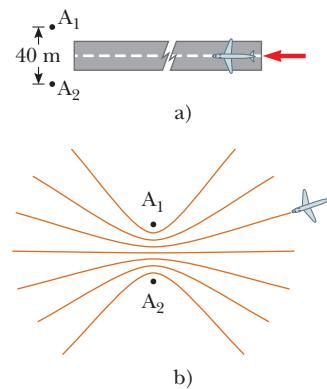



Figura P37.11

equivocado si se le envían dos señales desde cada antena y se equipa al avión con un receptor de dos canales. La relación entre las dos frecuencias no debe ser la relación entre enteros pequeños (por ejemplo, $\frac{3}{4}$). Explique la forma en que funcionaría este sistema de dos frecuencias y por qué no necesariamente daría resultado si las frecuencias estuvieran relacionadas por una relación de enteros.

12. Un estudiante sostiene un láser que emite luz de 633 nm de longitud de onda. El rayo pasa por un par de ranuras separadas 0.300 mm, en una placa de vidrio unida al frente del láser. Después el rayo cae perpendicular en una pantalla, produciendo una configuración de interferencia en ella. El estudiante empieza a caminar directamente hacia la pantalla a 3.00 m/s. El máximo central en la pantalla es inmóvil. Encuentre la rapidez de los máximos de primer orden en la pantalla.

13. En la figura 37.5, sea $L = 1.20$ m y $d = 0.120$ mm, y suponga que el sistema de ranuras está iluminado con luz monocromática de 500 nm. Calcule la diferencia de fase entre los dos frentes de onda que llegan a P cuando a) $\theta = 0.500°$ y b) $y = 5.00$ mm. c) ¿Cuál es el valor de θ en el que la diferencia de fase es 0.333 rad? d) ¿Cuál es el valor de θ en el que la diferencia de trayectoria es $\lambda/4$?

14. Rayos de luz coherente de longitud de onda λ inciden en un par de ranuras separadas por una distancia d a un ángulo θ_1, como se muestra en la figura P37.14. Suponga que se forma un máximo de interferencia en un ángulo θ_2 a una gran distancia de las ranuras. Demuestre que $d(\text{sen}\,\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1) = m\lambda$, donde m es un entero.

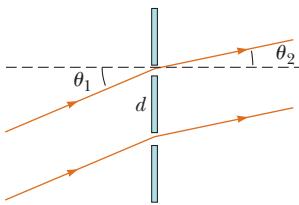



Figura P37.14

15. ● En un arreglo de doble ranura de la figura 37.5, $d = 0.150$ mm, $L = 140$ cm, $\lambda = 643$ nm y $y = 1.80$ cm. a) ¿Cuál es la diferencia de trayectoria δ para los rayos de las dos ranuras que llegan a P? b) Exprese esta diferencia de trayectoria en términos de λ. c) ¿Corresponde P a un máximo, un mínimo, o a una condición intermedia? Proporcione evidencia a su respuesta.

Sección 37.4 Distribución de intensidad de la configuración de interferencia de doble ranura

16. La intensidad sobre la pantalla en cierto punto en una configuración de interferencia de doble ranura es 64.0% del valor máximo. a) ¿Cuál diferencia de fase mínima (en radianes) entre las fuentes produce este resultado? b) Exprese esta diferencia de fase como diferencia de trayectoria para luz de 486.1 nm.

17. En la figura 37.5, sea $L = 120$ cm y $d = 0.250$ cm. Las ranuras están iluminadas con luz coherente de 600 nm. Calcule la distancia y arriba del máximo central a la cual la intensidad promedio en la pantalla sea 75.0% del máximo.

18. Dos ranuras están separadas 0.180 mm. Una configuración de interferencia se forma en una pantalla a 80.0 cm de distancia por una luz de 656.3 nm. Calcule la fracción de la intensidad máxima a 0.600 cm por encima del máximo central.

19. Demuestre que las dos ondas con funciones $E_1 = 6.00 \text{ sen } (100\pi t)$ y $E_2 = 8.00 \text{ sen } (100\pi t + \pi/2)$ se suman para dar una onda con la función $E_R \text{ sen } (100\pi t + \phi)$. Encuentre los valores requeridos para E_R y ϕ.

20. Elabore una gráfica de $I/I_{\text{máx}}$ como función de θ para la configuración de interferencia producida por el ordenamiento descrito en el problema 7. Sea θ en el intervalo de $-0.3°$ a $+0.3°$.

21. Dos ranuras paralelas, angostas, separadas 0.850 mm, están iluminadas por una luz de 600 nm y la pantalla de observación está a 2.80 m de distancia de las ranuras. a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas que interfieren en una pantalla en un punto situado a 2.50 mm de la franja central brillante? b) ¿Cuál es la relación entre la intensidad en este punto y la intensidad en el centro de la franja brillante?

22. ● Luz monocromática coherente de amplitud E_0 y frecuencia angular ω pasa a través de tres ranuras paralelas, cada una separada por una distancia d de su vecina. a) Demuestre que la intensidad promedio en el tiempo como función del ángulo θ es

$$I(\theta) = I_{\text{máx}}\left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi d \text{ sen } \theta}{\lambda}\right)\right]^2$$

Explique como describe esta expresión tanto los máximos primarios y los máximos secundarios.
b) Determine la relación entre las intensidades de los máximos primario y secundario.

Sección 37.5 Cambio de fase debido a reflexión

Sección 37.6 Interferencia en películas delgadas

23. ● Una película de aceite ($n = 1.45$) que flota sobre agua es iluminada por luz blanca a incidencia normal. La película es de

280 nm de grosor. Encuentre a) el color de la luz del espectro visible que se refleja más intenso y b) el color de la luz del espectro que se transmite con más intensidad. Explique su razonamiento.

24. Una burbuja de jabón (n = 1.33) flotando en el aire. Si el grosor de la pared de la burbuja es 115 nm, ¿cuál es la longitud de onda de la luz que es reflejada más fuertemente?

25. Una película delgada de aceite (n = 1.25) está ubicada sobre pavimento húmedo y uniforme. Cuando se observa perpendicular al pavimento, la película refleja con más fuerza la luz roja a 640 nm y no refleja luz verde a 512 nm. ¿De qué grosor es la película de aceite?

26. Un medio posible para hacer que un avión sea invisible al radar es cubrirlo con un polímero antirreflejante. Si las ondas de radar tienen una longitud de 3.00 cm y el índice de refracción del polímero es n = 1.50, ¿qué tan grueso debe ser el recubrimiento?

27. Un material que tiene un índice de refracción de 1.30 se emplea como recubrimiento antirreflejante en una pieza de vidrio (n = 1.50). ¿Cuál debe ser el grosor mínimo de esta película para reducir al mínimo una reflexión de luz de 500 nm?

28. Una película de MgF_2 (n = 1.38) de un grueso de 1.00×10^{-5} cm se usa para recubrir una lente de cámara. ¿Hay longitudes de onda del espectro visible intensificadas en la luz reflejada?

29. ● Unos astrónomos observan la cromosfera del Sol con un filtro que pasa la línea espectral roja del hidrógeno de longitud 656.3 nm, llamada línea H_α. El filtro está formado por un dieléctrico transparente de grosor d sostenido entre dos placas de vidrio parcialmente aluminizadas. El filtro se mantiene a temperatura constante. a) Encuentre el valor mínimo de d que produzca una transmisión máxima de luz perpendicular H_α, si el dieléctrico tiene un índice de refracción de 1.378. b) **¿Qué pasaría si?** Si aumenta la temperatura del filtro por encima del valor normal, ¿qué le ocurre a la longitud de onda transmitida? (Su índice de refracción no cambia en forma considerable.) c) ¿Qué longitud de onda casi visible pasará también el dieléctrico? Una de las placas de vidrio es de color rojo para absorber esta luz.

30. Un rayo de luz de 580 nm pasa por dos placas de vidrio estrechamente separadas, como se muestra en la figura P37.30. ¿Con qué valor mínimo diferente de cero de la separación de placas d es brillante la luz transmitida?

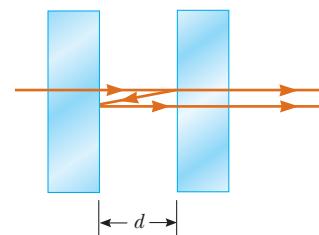



Figura P37.30

31. Una cuña de aire se forma entre dos placas de vidrio separadas por un alambre muy fino, como se muestra en la figura P37.31. Cuando la cuña es iluminada desde arriba por una luz de 600 nm y se observa desde arriba, aparecen 30 franjas oscuras. Calcule el radio del alambre.

Figura P37.31. Problemas 31 y 33.

32. Cuando se introduce un líquido en el espacio de aire entre las lentes y la placa en un aparato de anillos de Newton, el diámetro del décimo anillo cambia de 1.50 a 1.31 cm. Encuentre el índice de refracción del líquido.

33. Dos placas de vidrio de 10.0 cm de largo están en contacto en un extremo y separadas en el otro por un hilo de 0.050 0 mm de diámetro (figura P37.31). Una luz que contiene dos longitudes de onda de 400 nm y 600 nm incide perpendicularmente y es vista por reflexión. ¿A qué distancia del punto de contacto está la siguiente franja oscura?

Sección 37.7 El interferómetro de Michelson

34. Una luz monocromática se hace incidir en el interferómetro de Michelson. El espejo movible se desplaza 0.382 mm, haciendo que el patrón del interferómetro se reproduzca 1700 veces. Determine la longitud de onda de la luz. ¿Qué colores tiene?

35. El espejo M_1 de la figura 37.14 se mueve una distancia ΔL. Durante este desplazamiento, se cuentan 250 inversiones de franja

(formación sucesiva de bandas oscuras a brillantes y viceversa). La luz que se usa tiene una longitud de onda de 632.8 nm. Calcule el desplazamiento ΔL.

36. Una pata del interferómetro de Michelson contiene un cilindro al vacío de longitud L, con placas de vidrio en cada extremo. Un gas se fuga lentamente hacia el cilindro hasta alcanzar una presión de 1 atm. Si N franjas brillantes pasan por la pantalla cuando se usa luz de longitud de onda λ, ¿cuál es el índice de refracción del gas?

Problemas adicionales

37. En un experimento similar al del ejemplo 37.1, una luz verde con longitud de onda de 560 nm, enviada a través de un par de ranuras separadas 30.0 μm, produce franjas brillantes separadas 2.24 cm sobre una pantalla a 1.20 m de distancia. Calcule la separación de franja para este mismo arreglo y suponga que el aparato se sumerge en un tanque que contiene una solución azucarada con índice de refracción 1.38.

38. En la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 37.2, se indicó que las franjas que se traslapan en una configuración de interferencia de dos ranuras, para dos longitudes de onda, obedecen la siguiente correspondencia, incluso para valores grandes del ángulo θ:

$$\frac{m'}{m} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

a) Demuestre esta aseveración. b) Con los datos del ejemplo 37.2, encuentre el valor diferente de cero de y en la pantalla en la que coinciden primero las franjas de las dos longitudes de onda.

39. Un radio transmisor A que opera a 60.0 MHz está a 10.0 m de otro transmisor B similar que se encuentra 180° fuera de fase en relación con A. ¿Qué tan lejos deberá moverse un observador de A a B a lo largo de la línea que los conecta para llegar al punto más cercano donde los dos rayos están en fase?

40. **Problema de repaso.** Este problema es una extensión del resultado del problema 10 del capítulo 18. La figura P37.40 muestra dos esferas vibratorias adyacentes sumergidas en un tanque de agua. En puntos distantes producen una configuración de interferencia de ondas de agua, como se muestra en la figura 37.3. Represente con λ la longitud de onda de los rizos. Demuestre que las dos fuentes producen una onda estacionaria a lo largo del segmento de línea, de longitud d, entre ellas. En términos de λ y d, encuentre el número de nodos y el número de antinodos de la onda estacionaria. Encuentre el número de zonas de interferencia constructiva y destructiva de la configuración de interferencia alejada de las fuentes. Cada línea de interferencia destructiva surge de un nodo en la onda estacionaria y cada línea de interferencia constructiva surge desde un antinodo.

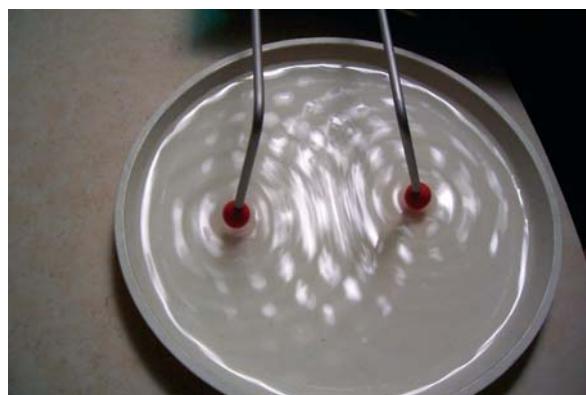



Figura P37.40

41. Levante una mano y manténgala extendida. Considere el espacio entre sus dedos índice y medio como una ranura, y el espacio entre sus dedos medio y anular como una segunda ranura. a) Considere la interferencia que resulta de enviar luz visible coherente perpendicular a través de este par de aberturas. Calcule un orden estimado de magnitud para el ángulo entre zonas adyacentes de interferencia constructiva. b) Para hacer que los ángulos de la configuración de interferencia sean fáciles de medir con un transportador de plástico, ¿de qué orden de magnitud debe ser la onda electromagnética usada? ¿Cómo se clasifica esta onda en el espectro electromagnético?

42. Dos ondas coherentes, provenientes de fuentes en diferentes ubicaciones, se mueven a lo largo del eje x. Sus funciones de onda son

$$E_1 = (860 \text{ V/m}) \text{ sen}\left[\frac{2\pi x_1}{650 \text{ nm}} - 2\pi(462 \text{ THz})t + \frac{\pi}{6}\right]$$

y bien

$$E_2 = (860 \text{ V/m}) \text{ sen}\left[\frac{2\pi x_2}{650 \text{ nm}} - 2\pi(462 \text{ THz})t + \frac{\pi}{8}\right]$$

Determine la correspondencia entre x_1 y x_2 que produce interferencia constructiva cuando las dos ondas se superponen.

43. En un experimento de interferencia de Young, las dos ranuras están separadas 0.150 mm y la luz incidente incluye dos longitudes de onda: $\lambda_1 = 540$ nm (verde) y $\lambda_2 = 450$ nm (azul). Las configuraciones de interferencia que se traslapan se observan en una pantalla a 1.40 m las ranuras. Calcule la distancia mínima desde el centro de la pantalla a un punto donde una franja brillante de luz verde coincide con una franja brillante de luz azul.

44. En un experimento de doble ranura de Young con una luz de longitud de onda λ, una delgada pieza de acrílico con un índice de refracción n cubre una de las ranuras. Si el punto central de

la pantalla es un punto oscuro en lugar de un punto brillante, ¿cuál es el grosor mínimo del acrílico?

45. **Problema de repaso.** Una pieza plana de vidrio se mantiene inmóvil y horizontal arriba del extremo superior plano de una varilla metálica vertical que tiene su extremo inferior de 10 cm de longitud sujeto rígidamente. Se observa que la película delgada de aire entre la varilla y el vidrio está brillante por la luz reflejada cuando es iluminada por luz de 500 nm de longitud de onda. Cuando la temperatura aumenta lentamente en 25.0°C, la película cambia 200 veces de brillante a oscura y de oscura a brillante. ¿Cuál es el coeficiente de expansión lineal del metal?

46. Cierto petróleo crudo tiene un índice de refracción de 1.25. Un barco descarga 1.00 m^3 de este petróleo en el océano y se extiende en una capa delgada y uniforme. Si la película produce un máximo de primer orden de luz con longitud de onda de 500 nm que incide normalmente en ella, ¿cuánta área superficial del océano cubre la capa de petróleo? Suponga que el índice de refracción del agua del océano es 1.34.

47. Unos astrónomos observan una fuente de radio de 60.0 MHz directamente y por reflexión del mar. Si el disco receptor está a 20.0 m sobre el nivel del mar, ¿cuál es el ángulo de la fuente de radio sobre el horizonte en el primer máximo?

48. Se producen efectos en interferencia en el punto P en una pantalla como resultado de rayos directos de una fuente de 500 nm y rayos reflejados desde el espejo, como se muestra en la figura P37.48. Suponga que la fuente está 100 m a la izquierda de la pantalla y 1.00 cm arriba del espejo. Encuentre la distancia y a la primera banda oscura por encima del espejo.

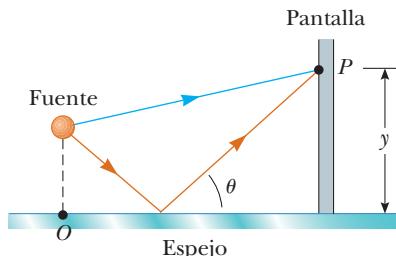



Figura P37.48

49. Las ondas de una estación de radio pueden llegar a un receptor doméstico por dos trayectorias. Una es en línea recta desde el transmisor a la casa, una distancia de 30.0 km. La segunda es por reflexión desde la ionosfera (una capa de moléculas ionizadas de aire a grandes alturas de la atmósfera). Suponga que esta reflexión ocurre en un punto a media distancia entre el receptor y el transmisor, y que la longitud de onda transmitida por la estación de radio es de 350 m. Encuentre la altura mínima de la capa ionosférica que podría generar interferencia destructiva entre los rayos directo y reflejado. (Suponga que no se presenta cambio de fase en la reflexión.)

50. Muchas células son transparentes e incoloras. Las estructuras pueden ser prácticamente invisibles a un microscopio ordinario. Un *microscopio de interferencia* permite ver una diferencia en el índice de refracción como un cambio en las franjas de interferencia, para indicar el tamaño y forma de las estructuras celulares. Esta idea se ejemplifica en el siguiente problema: una cuña de aire se forma entre dos placas de vidrio que están en contacto a lo largo de un borde, y ligeramente separadas en la cuña opuesta. Cuando las placas son iluminadas con luz monocromática desde arriba, la luz reflejada tiene 85 franjas oscuras. Calcule el número de franjas oscuras que aparecen si el agua (n = 1.33) sustituye el aire entre las placas.

51. Se hacen mediciones en la distribución de intensidad dentro de la franja central brillante en una configuración de interferencia de Young (véase la figura 37.7). En un valor particular de y, se encuentra que $I/I_{\text{máx}} = 0.810$ cuando se emplea luz de 600 nm. ¿Qué longitud de onda de luz debe usarse para reducir la intensidad relativa en el mismo lugar a 64.0% de la intensidad máxima?

52. La explicación de las técnicas para determinar las interferencias constructiva y destructiva por reflexión desde una película delgada en el aire ha sido confinada a rayos que inciden en la película con una incidencia casi normal. **¿Qué pasaría si?** Un rayo incide a un ángulo de 30.0° (respecto de la normal) sobre una película con índice de refracción de 1.38. Calcule el grosor mínimo para que se dé interferencia constructiva de luz de sodio con una longitud de onda de 590 nm.

53. La condición para obtener interferencia constructiva por reflexión desde una película delgada en el aire, como se desarrolló en la sección 37.6, supone incidencia casi normal. **¿Qué pasaría si?** Demuestre que si la luz incide sobre la película a un ángulo ϕ_1 diferente de cero (respecto a la normal), la condición para la interferencia constructiva es $2nt \cos \theta_2 = (m + \frac{1}{2})\lambda$, donde θ_2 es el ángulo de refracción.

54. ● La cantidad δ en la ecuación 37.1 se llama diferencia de trayectoria. Su tamaño en comparación con la longitud de onda controla el carácter de la interferencia entre dos haces en el vacío al controlar la diferencia de fase entre los haces. La cantidad análoga nt en las ecuaciones 37.16 y 37.17 se llama *distancia de trayectoria óptica* que corresponde a la distancia geométrica t. La distancia de trayectoria óptica es proporcional a n porque un

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

índice de refracción más grande acorta la longitud de onda, así que más ciclos de una onda se ajustan en una distancia geométrica particular. a) Suponga que una mezcla de jarabe de maíz y agua se prepara en un tanque, con su índice de refracción n aumentando uniformemente de 1.33 en y = 20.0 cm en la parte superior, a 1.90 en y = 0. Escriba el índice de refracción $n(y)$ como función de y. b) Calcule la distancia de trayectoria óptica correspondiente a la altura de 20 cm del tanque al calcular

$$\int_0^{20\text{ cm}} n(y)\,dy$$

c) Suponga que un haz estrecho de luz se dirige a la mezcla con su dirección original entre la horizontal y la vertical hacia arriba. Describa cualitativamente su trayectoria.

55. a) Ambos lados de una película uniforme que tiene un índice de refracción n y un grosor d están en contacto con el aire: con incidencia normal de luz, se observa una intensidad mínima en la luz reflejada en λ_2 y una intensidad máxima en λ_1, donde $\lambda_1 > \lambda_2$. Si se supone que no se observan mínimos de intensidad entre λ_1 y λ_2, demuestre que el entero m en las ecuaciones 37.16 y 37.17 se conocen por $m = \lambda_1/2(\lambda_1 - \lambda_2)$. b) Determine el grosor de la película, suponiendo n = 1.40, λ_1 = 500 nm y λ_2 = 370 nm.

56. La figura P37.56 muestra un transmisor de ondas de radio y un receptor separados una distancia d y ambos a una distancia h sobre el terreno. El receptor puede recibir señales directas del transmisor e indirectas, de las que se reflejan del suelo. Suponga que el suelo está nivelado entre el transmisor y el receptor y que existe un cambio de fase de 180° en la reflexión. Determine las longitudes de onda más largas que interfieren a) constructivamente y b) destructivamente.

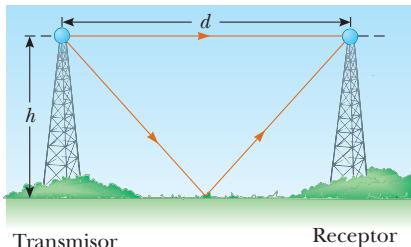



Figura P37.56

57. Considere la distribución de doble ranura que se observa en la figura P37.57, donde la separación de ranuras es d y la distancia entre la ranura y la pantalla es L. Una hoja de plástico transparente que tiene un índice de refracción n y un grosor t se coloca sobre la ranura superior. En consecuencia, el máximo central del patrón de interferencia se mueve hacia arriba una distancia y'. Encuentre y'.

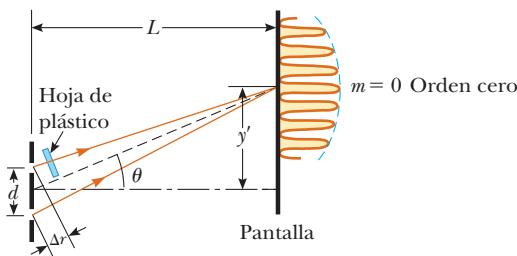



Figura P37.57

58. Una pieza de material transparente que tiene un índice de refracción n se corta en forma de cuña, como se muestra en la figura P37.58. El ángulo de la cuña es pequeño. Luz monocromática de longitud de onda λ incide normalmente desde arriba y se ve desde arriba. Represente con h la altura de la cuña y con ℓ su ancho. Demuestre que hay franjas brillantes presentes en las posiciones $x = \lambda\ell(m + \frac{1}{2})/2hn$ y franjas oscuras en las posiciones $x = \lambda\ell m/2hn$, donde m = 0, 1, 2, . . . y x se mide como se indica.

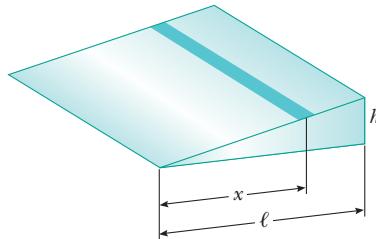



Figura P37.58

59. En un experimento de anillos de Newton, un vidrio plano convexo (n = 1.52) que tiene un diámetro de 10.0 cm se coloca sobre una placa plana, como se muestra en la figura 37.12a. Cuando incide normal luz de 650 nm, se observan 55 anillos brillantes, el último exactamente en el borde de la lente. a) ¿Cuál es el radio de curvatura de la superficie convexa de la lente? b) ¿Cuál es su distancia focal?

60. Una lente plana convexa tiene un índice de refracción n. El lado curvo de la lente tiene un radio de curvatura R y se apoya sobre una superficie plana de vidrio con el mismo índice de refracción, con una película de índice $n_{\text{película}}$ entre ellas, como se ve en la figura 37.12a. La lente se ilumina desde arriba por una luz de longitud de onda λ. Demuestre que los anillos oscuros de Newton tienen radios conocidos aproximadamente por

$$r \approx \sqrt{\frac{m\lambda R}{n_{\text{película}}}}$$

donde m es un entero y r es mucho menor que R.

61. Una lente plana convexa que tiene un índice de refracción de 1.50 se coloca sobre una placa plana de vidrio, como se muestra en la figura P37.61. Su superficie curva, que tiene un radio de curvatura de 8.00 m, está sobre el fondo. La lente se ilumina desde arriba con luz amarilla de sodio con una longitud de onda de 589 nm, y por reflexión se observa una serie de anillos concéntricos brillantes y oscuros. El patrón de interferencia tiene un punto oscuro en el centro, rodeado por 50 franjas oscuras, de las cuales la mayor se encuentra en el borde exterior de la lente. a) ¿Cuál es el grosor de la capa de aire en el centro del patrón de interferencia? b) Calcule el radio del anillo oscuro más exterior. c) Encuentre la distancia focal de la lente.

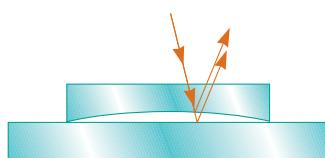



Figura P37.61

62. Una lente plana convexa que tiene un radio de curvatura de $r = 4.00$ m se coloca sobre una superficie cóncava de vidrio cuyo radio de curvatura es $R = 12.0$ m, como se ve en la figura P37.62. Determine el radio del centésimo anillo brillante, suponiendo que luz de 500 nm incide normal a la superficie plana de la lente.

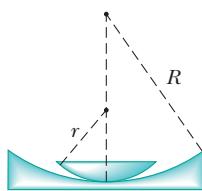



Figura P37.62

63. La figura P37.8 muestra una burbuja de jabón sin romper, en un marco circular. El espesor de la película se incrementa desde la parte superior hacia la parte inferior al principio lentamente y después rápidamente. Como un modelo muy simple, considere una película de jabón ($n = 1.33$) que está contenida dentro de un marco rectangular de alambre. El marco se sostiene verticalmente, de modo que la película se escurre hacia abajo, formando una cuña con caras planas. El grosor de la película en la parte superior es esencialmente cero. La película se ve en luz blanca reflejada con incidencia casi normal, y la primera banda de interferencia violeta ($\lambda = 420$ nm) se observa a 3.00 cm del borde superior de la película. a) Localice la primera banda de interferencia roja ($\lambda = 680$ nm). b) Determine el grosor de la película en las posiciones de las bandas violeta y roja. c) ¿Cuál es el ángulo de cuña de la película?

64. Los aparatos reproductores de discos compactos (CD) y de discos de video digital (DVD) usan interferencia para generar una señal intensa desde una diminuta protuberancia o elevación, como se muestra en la figura P35.40. La profundidad de un hueco o depresión se escoge de un cuarto la longitud de onda de la luz láser empleada para leer el disco. Enseguida, las luces reflejadas del hueco y del plano adjunto difieren en distancia de trayectoria recorrida por media longitud de onda, para interferir destructivamente en el detector. Cuando el disco gira, la intensidad de la luz se reduce de manera considerable cada vez que ésta se refleja cerca del borde de un hueco. El espacio entre los bordes anterior y posterior de un hueco determina el intervalo de tiempo entre las fluctuaciones. La serie de intervalos de tiempo es decodificada en una serie de ceros y unos que lleva la información almacenada. Suponga que en un reproductor de CD se utiliza luz infrarroja con longitud de onda de 780 nm en el vacío. El disco está cubierto con plástico que tiene un índice de refracción de 1.50. ¿Cuál debe ser la profundidad de cada hueco? Un reproductor de DVD emplea luz de longitud de onda más corta y las dimensiones de los huecos son más pequeñas. Este es un factor que resulta en mayor capacidad de almacenamiento en un DVD en comparación con un CD.

65. Las franjas de interferencia se producen con el uso de un espejo de Lloyd y una fuente de 606 nm, como se muestra en la figura 37.9. En una pantalla a 2.00 m de la fuente real S se forman franjas situadas a 1.20 mm de distancia. Encuentre la distancia vertical h de la fuente sobre la superficie reflectora.

66. En una ranura doble, la 1 es más ancha que la 2, de modo que la luz de 1 tiene una amplitud 3.00 veces mayor que la luz de la ranura 2. Demuestre que, para esta situación, la ecuación 37.12 puede sustituirse con la ecuación $I = (4I_{\text{máx}}/9)(1 + 3\cos^2 \phi/2)$.

67. Luz monocromática de 620 nm de longitud de onda pasa por una ranura S muy estrecha, e incide luego en una pantalla en donde hay dos ranuras paralelas, S_1 y S_2, como se ve en la figura P37.67. La ranura S_1 está directamente en línea con S y a una distancia de $L = 1.20$ m de S, mientras que S_2 está desplazada a una distancia d a un lado. La luz se detecta en el punto P en una segunda pantalla, equidistante de S_1 y S_2. Cuando cualquiera de las ranuras S_1 y S_2 está abierta, las intensidades de luz que se observan en el punto P son iguales. Cuando ambas están abiertas, la intensidad es tres veces mayor. Encuentre el valor mínimo posible para la separación de ranuras d.

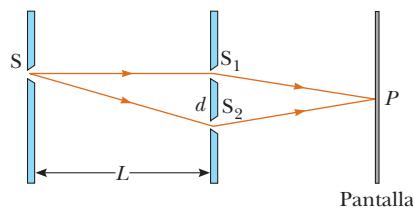
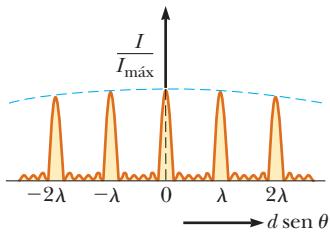



Figura P37.67

Respuestas a las preguntas rápidas

37.1 c) La ecuación 37.7 muestra que la reducción de λ o de L colocará las franjas más cerca. Sumergir el aparato en agua reduce la longitud de onda, de modo que las franjas se acercan más.

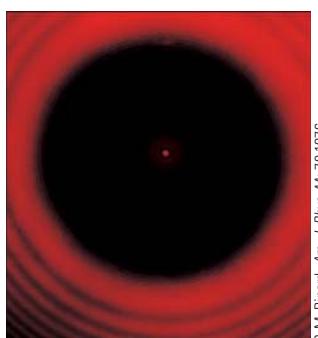
37.2 La gráfica se muestra a continuación. El ancho de los máximos primarios es ligeramente más angosto que el ancho primario $N = 5$, pero más ancho que el ancho primario $N = 10$. Debido a que $N = 6$, los máximos secundarios son $\frac{1}{36}$ tan intensos como los máximos primarios.

37.3 a) En el borde izquierdo, la cuña de aire tiene un grosor igual a cero y la única contribución a la interferencia es el cambio de fase de 180°, cuando se refleja luz de la superficcie superior del portaobjetos de vidrio.

El telescopio espacial Hubble efectúa sus observaciones por encima de la atmósfera terrestre y no sufre de visibilidad borrosa por la atmósfera, causada por la turbulencia del aire, que es como una plaga para los telescopios terrestres. A pesar de esta ventaja, tiene limitaciones debidas a efectos de difracción. En este capítulo se muestra cómo la naturaleza ondulatoria de la luz limita la capacidad de cualquier sistema óptico para distinguir entre dos objetos muy cercanos entre sí. (© Denis Scott/ CORBIS)

38 Patrones de difracción y polarización

Cuando ondas de luz plana pasan a través de una pequeña abertura en una barrera opaca, esta abertura actúa como una fuente puntual de luz, con las ondas ingresando en la región oscura por detrás de la barrera. Este fenómeno, conocido como difracción, sólo puede describirse con el modelo ondulatorio para la luz, como se explicó en la sección 35.3. En este capítulo descubrirá las características del *patrón de difracción* que se presenta cuando la luz desde la abertura se hace incidir sobre una pantalla.

En el capítulo 34 aprendió que las ondas electromagnéticas son transversales. Es decir, los vectores de los campos magnético y eléctrico asociados con las ondas electromagnéticas son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. En este capítulo aprenderá que bajo ciertas condiciones estas ondas transversales con vectores de campo eléctrico en todas las direcciones transversales posibles pueden ser *polarizadas* de diversas formas. Esto quiere decir que sólo ciertas orientaciones de los vectores de campo eléctrico están presentes en la onda polarizada.

38.1 Introducción a los patrones de difracción

En la sección 35.3 analizó cómo luz de una longitud de onda comparable o mayor que el ancho de una rendija se dispersa en todas las direcciones hacia adelante después de pasar a través de la rendija. A este fenómeno le llamamos *difracción*. Este comportamiento indica que la luz, una vez que ha pasado por una rendija angosta, se esparce más allá de la trayectoria definida por ésta en regiones que quedarían en la sombra si la luz se desplazara en línea

Figura 38.1 Patrón de difracción que aparece sobre una pantalla cuando pasa luz a través de una rendija vertical angosta. El patrón está constituido por una franja central ancha y una serie de franjas laterales menos intensas y más angostas.

Figura 38.2 La luz de una fuente pequeña pasa por el borde de un objeto opaco y continúa hacia una pantalla. En la pantalla aparece en la región sobre el borde del objeto un patrón de difracción formado por franjas brillantes y oscuras.

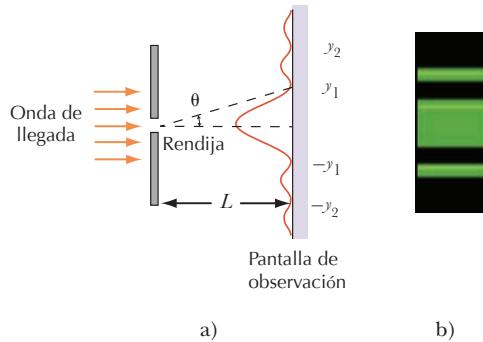
Figura 38.3 Patrón de difracción creado por la iluminación de una moneda colocada entre la pantalla y la fuente luminosa. Observe el punto brillante en el centro.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.1
Difracción y patrón de difracción

La *difracción* se refiere al comportamiento general de las ondas al dispersarse cuando pasan a través de una rendija. En el capítulo 37 utilizó la difracción para explicar la existencia de un patrón de interferencia. Un *patrón de difracción* es de hecho una manera errónea de designarlo, pero está arraigado muy profundamente en el lenguaje de la física. El patrón de difracción que se ve en una pantalla cuando se ilumina una sola rendija, es realmente otra patrón de interferencia. La interferencia ocurre entre fracciones de la luz incidente que ilumina diferentes regiones de la rendija.

recta. Otras ondas, como las sonoras y las que se producen en el agua, también tienen esta propiedad de dispersión cuando pasan por aberturas o bordes agudos.

Sería de esperar que la luz que cruza por una abertura pequeña dé como resultado simplemente una amplia región de luz en la pantalla, debido a la dispersión de la luz al pasar por la abertura. Sin embargo, hay algo más interesante. Se observa un **patrón de difracción** formado por áreas iluminadas y áreas oscuras, algo similar a lo que ocurre con los patrones de interferencia ya explicados. Por ejemplo, cuando se coloca una rendija angosta entre una fuente distante de luz (o un rayo láser) y una pantalla, la luz produce un patrón de difracción parecido al de la figura 38.1. El patrón está constituido por una banda central ancha y bien iluminada (conocida como **máxima central**) flanqueada por una serie de bandas adicionales, menos intensas y cercanas (llamadas **máximo laterales** o **máximos secundarios**)y una serie de bandas oscuras intermedias (o **mínimas**). La figura 38.2 muestra un patrón de difracción que se asocia con luz que pasa por el borde de un objeto. De nuevo, franjas brillantes y oscuras, una reminiscencia del patrón de interferencia.

La figura 38.3 muestra un patrón de difracción asociado con la sombra de un centavo. En el centro aparece un punto brillante, con franjas circulares extendiéndose hacia afuera a partir del borde de la sombra. Es posible explicar el punto brillante central sólo si utiliza la teoría ondulatoria de la luz, que pronostica una interferencia constructiva en este punto. Desde el punto de vista de la óptica geométrica (en la cual se considera que la luz está formada por rayos que se desplazan en línea recta), sería de esperar que el centro de la sombra se mantuviera oscura, ya que una parte de la pantalla visual está totalmente cubierta por el centavo.

Un poco antes de que se observara por primera vez este punto brillante central, uno de los defensores de la óptica geométrica, Simeon Poisson, argumentaba que, de ser válida la teoría ondulatoria de la luz expresada por Augustin Fresnel, tendría que observarse un punto brillante central en la sombra de un objeto circular iluminado por una fuente puntual de luz. Para asombro de Poisson, este punto brillante fue observado poco tiempo después por Dominique Arago. Por lo tanto, la predicción hecha por Poisson reforzó la teoría ondulatoria en vez de desacreditarla.

38.2 Patrones de difracción provenientes de rendijas angostas

Considere una situación común, en donde a través de una abertura angosta, representada como una rendija, pasa luz que posteriormente se proyecta en una pantalla. Para simplificar el análisis, suponga que la pantalla de observación está lejos de la rendija, de manera que los rayos que llegan a la pantalla son aproximadamente paralelos entre sí. (Lo anterior se puede lograr experimentalmente utilizando una lente convergente para enfocar los rayos paralelos sobre una pantalla cercana.) En este modelo, el patrón que aparece sobre la pantalla se conoce como **patrón de difracción Fraunhofer.**[1]

La figura 38.4a muestra luz que entra por una sola rendija desde el lado izquierdo y se difracta conforme se propaga hacia la pantalla. La figura 38.4b es una fotografía de un

[1] Si se acerca la pantalla a la rendija (sin utilizar lente alguna), el patrón resultante es un patrón de difracción *Fresnel*. Este patrón es más difícil de analizar, por lo que restringiremos nuestra explicación a la difracción Fraunhofer.

Figura activa 38.4

a) Patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija. El patrón está constituido por una banda central brillante flanqueada por máximos mucho más tenues que alternan con franjas oscuras. (El dibujo no está a escala.) Las señales *y* indican posiciones de franjas oscuras en la pantalla. b) Fotografía de un patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija.

patrón de difracción Fraunhofer. A lo largo del eje en $\theta = 0$ se observa una franja brillante, con franjas oscuras y brillantes alternadas a cada lado de la franja central.

Hasta ahora ha supuesto que las rendijas son fuentes puntuales de luz. En esta sección, se abandona esta suposición para ver cómo el ancho finito de las rendijas es la base para la comprensión de la difracción de Fraunhofer. Es posible explicar algunas características de importancia a partir de este fenómeno si examina las ondas que llegan desde varias partes de la rendija, como se observa en la figura 38.5. De acuerdo con el principio de Huygens, **cada parte de la rendija actúa como una fuente de ondas luminosas**. Por esto, la luz desde una sección de la rendija puede interferir con la luz desde otra parte, y la intensidad de la luz resultante sobre la pantalla de observación dependerá de la dirección θ. Según este análisis, reconocerá que un patrón de difracción es realmente un patrón de interferencia, en el cual ¡las diferentes fuentes de luz son porciones diferentes de una misma rendija!

Figura 38.5 Trayectorias seguidas por los rayos luminosos que se encuentran en una rendija angosta de ancho a y que se difractan hacia una pantalla en la dirección indicada por el ángulo θ. Cada parte de la rendija actúa como una fuente puntual de ondas luminosas. La diferencia de trayectoria entre los rayos 1 y 3, rayos 2 y 4 o rayos 3 y 5, es $(a/2)$ sen θ. (El dibujo no está a escala.)

Con la finalidad de analizar el patrón de difracción, resulta conveniente dividir la rendija en dos mitades, como se muestra en la figura 38.5. Recordando que todas las ondas estarán en fase cuando salgan de la rendija, consideremos los rayos 1 y 3. Conforme esos dos rayos se desplazan a la derecha de la figura hacia una pantalla de observación lejana, el rayo 1 se desplaza más lejos que el rayo 3 en una cantidad igual a la diferencia de trayectoria $(a/2)$ sen θ, siendo a el ancho de la rendija. De manera similar, la diferencia en trayectoria entre los rayos 2 y 4 es también $(a/2)$ sen θ, al igual que como ocurre con los rayos 3 y 5. Si esta diferencia de trayectoria es exactamente la mitad de una longitud de onda (lo que corresponde a una diferencia de fase de 180°), las dos ondas se cancelan entre sí, lo que da como resultado interferencia destructiva. Si esto es válido para dos rayos de este tipo, también es válido para dos rayos cualesquiera que se originen en puntos separados a la mitad del ancho de la rendija, porque la diferencia de fase entre esos dos puntos es de 180°. Por lo tanto, las ondas provenientes de la mitad superior de la rendija interfieren destructivamente con ondas desde la mitad inferior cuando

$$\frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\lambda}{2}$$

o si no cuando

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\lambda}{a}$$

Si divide la rendija en cuatro partes iguales y utiliza un razonamiento similar, encontramos que la pantalla de observación también quedará oscura cuando

$$\operatorname{sen} \theta = \pm 2 \frac{\lambda}{a}$$

De igual manera, si divide la rendija en seis partes iguales demuestra que se obtienen franjas oscuras en la pantalla cuando

$$\operatorname{sen} \theta = \pm 3 \frac{\lambda}{a}$$

Condición para la interferencia destructiva en una rendija sencilla ▶

Debido a eso, la condición general para la interferencia destructiva es

$$\text{sen}\ \theta_{\text{oscuro}} = m\frac{\lambda}{a} \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{38.1}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.2

¡Ojo ecuaciones iguales!

La ecuación 38.1 tiene exactamente la misma forma que la ecuación 37.2, en la cual se usa d como la separación de la rendija y el ancho de la rendija a en la ecuación 38.1. Sin embargo, la ecuación 37.2 se refiere a las regiones *brillantes* en un patrón de interferencia de dos rendijas, en tanto que la ecuación 38.1 se refiere a las regiones *oscuras* en un patrón de difracción de una sola rendija. De hecho, en el patrón de difracción, $m = 0$ no representa una franja oscura.

Esta ecuación proporciona los valores de θ_{oscuro} para los cuales el patrón de difracción tiene una intensidad luminosa igual a cero; es decir cuando se forma una franja oscura. Sin embargo, no dice nada respecto a las variaciones de la intensidad de la luz a lo largo de la pantalla. Las características generales de la distribución de intensidad se muestran en la figura 38.4, en donde se observa una franja central brillante y ancha. Esta franja está flanqueada por franjas de brillo tenues que se alternan con franjas oscuras. Las diversas franjas oscuras se presentan en los valores de θ_{oscuro} que satisfacen la ecuación 38.1. Cada pico de franja brillante yace aproximadamente a la mitad del camino entre las franjas oscuras mínimas limitantes. Observe que el brillo central máximo tiene el doble de ancho que los máximos secundarios.

Pregunta rápida 38.1 Suponga que el ancho de la rendija de la figura 38.4 se divide a la mitad. La franja central brillante a) se ensancha, b) queda igual, o c) se estrecha.

EJEMPLO 38.1 ¿Dónde están las franjas oscuras?

Una luz con una longitud de onda de 580 mm incide sobre una rendija con un ancho de 0.300 mm. La pantalla de observación está a 2.00 m de la rendija. Determine las posiciones de las primeras franjas oscuras, así como el ancho de la franja central brillante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El enunciado del problema invita a visualizar un patrón de difracción de una sola rendija similar al de la figura 38.4.

Categorizar Clasifique esto como una aplicación directa de la explicación de los patrones de difracción de una sola rendija.

Analizar Evalúe numéricamente la ecuación 38.1 para las dos franjas oscuras laterales a la franja central brillante, que corresponde a $m = \pm 1$.

$$\text{sen}\ \theta_{\text{oscuro}} = \pm\frac{\lambda}{a} = \pm\frac{5.80 \times 10^{-7}\ \text{m}}{0.300 \times 10^{-3}\ \text{m}} = \pm 1.933 \times 10^{-3}$$

En el triángulo de la figura 38.4a observe que tan $\theta_{\text{oscuro}} = y_1/L$. Porque θ_{oscuro} es muy pequeña, es posible utilizar la aproximación sen $\theta_{\text{oscuro}} \approx$ tan θ_{oscuro}; por lo tanto, sen $\theta_{\text{oscuro}} \approx y_1/L$.

Aplique este resultado para hallar las posiciones de los primeros mínimos observados a partir del eje central:

$$y_1 \approx L\ \text{sen}\ \theta_{\text{oscuro}} = (2.00\ \text{m})(\pm 1.933 \times 10^{-3}) = \pm 3.866 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

Hallar, el ancho de la franja central brillante:

$$2|y_1| = 7.73 \times 10^{-3}\ \text{m} = 7.73\ \text{mm}$$

Finalizar Observe que este valor es mucho mayor que el ancho de la rendija. Examine qué sucede en el caso de que modifique el ancho de la rendija.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasaría si se incrementara el ancho de la rendija en un orden de magnitud hasta 3.00 mm? ¿Qué le ocurre al patrón de difracción?

Respuesta A partir de la ecuación 38.1, se espera que disminuyan los ángulos en los que aparecen las bandas oscuras conforme a aumenta. Debido a eso, el patrón de difracción se hace más angosto.

A partir de la ecuación 38.1 hallar los senos de los ángulos θ_{oscuro} para las franjas oscuras $m = \pm 1$

$$\text{sen}\ \theta_{\text{oscuro}} = \pm\frac{\lambda}{a} = \pm\frac{5.80 \times 10^{-7}\ \text{m}}{3.00 \times 10^{-3}\ \text{m}} = \pm 1.933 \times 10^{-4}$$

Use este resultado para hallar las posiciones de los primeros mínimos observados a partir del eje central:

$$y_1 \approx L\text{sen } \theta_{\text{oscuro}} = (2.00 \text{ m})(\pm 1.933 \times 10^{-4})$$
$$= \pm 3.866 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Halle el ancho de la franja central brillante:

$$2|y_1| = 7.73 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.773 \text{ mm}$$

Observe que esta distancia es *menor* que el ancho de la rendija. En general, para grandes valores de a, los diversos máximos y mínimos están tan cerca unos de otros que sólo se observa el área central brillante similar a la imagen geométrica de la rendija. Este concepto es muy importante para el desempeño de instrumentos ópticos como los telescopios.

Intensidad de patrones de difracción de una sola rendija

El análisis de la variación de intensidad en un patrón de difracción de una sola rendija de ancho a muestra que la intensidad se conoce por

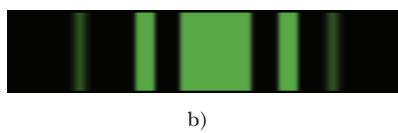
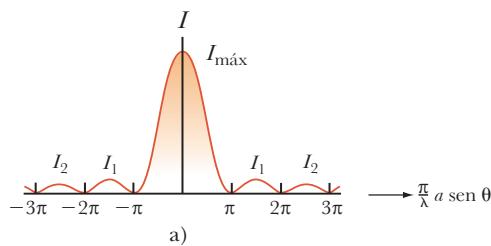
$$I = I_{\text{máx}}\left[\frac{\text{sen } (\pi a \text{ sen } \theta/\lambda)}{\pi a \text{ sen } \theta/\lambda}\right]^2 \quad \textbf{(38.2)}$$

◄ Intensidad de un patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija

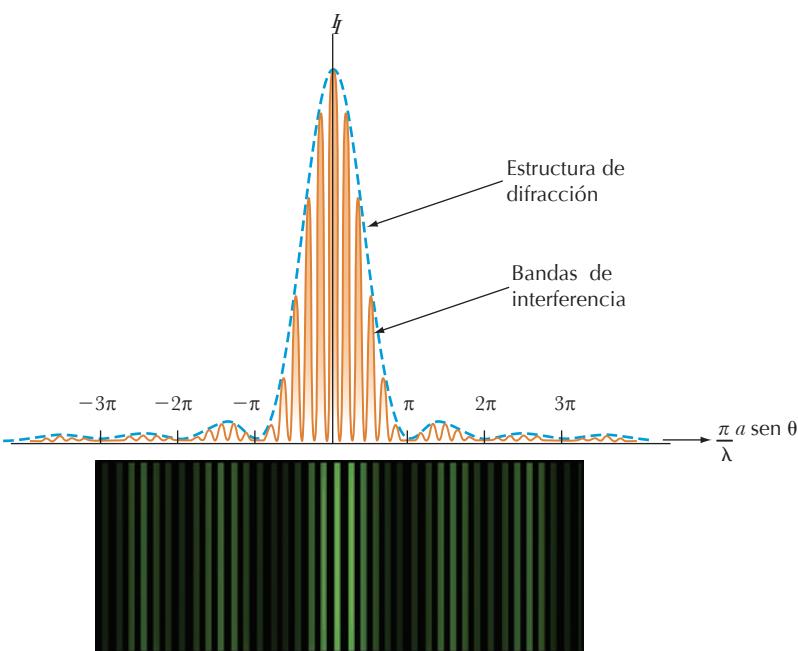
donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad en $\theta = 0$ (el máximo central) y λ es la longitud de onda de la luz par iluminar la rendija. Esta expresión demuestra que los *mínimos* se presentan cuando

$$\frac{\pi a \text{ sen } \theta_{\text{oscuro}}}{\lambda} = m\pi$$

o bien

$$\text{sen } \theta_{\text{oscuro}} = m\frac{\lambda}{a} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

◄ Condición para intensidad mínima para una sola rendija

en concordancia con la ecuación 38.1.

La figura 38.6a representa una gráfica de la ecuación 38.2, y la figura 38.6b es una fotografía de un patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija. Observe que la mayor parte de la intensidad luminosa se concentra en la franja brillante.

Intensidad de los patrones de difracción de dos rendijas

Cuando se tiene más de una rendija, es necesario considerar no sólo patrones de difracción debido a las rendijas individuales, sino también los patrones de interferencia debidos a las ondas desde rendijas diferentes. Observe las líneas discontinuas curvas de la figura 37.8 del cap. 37, que indican una disminución en la intensidad de los máximos de interferencia conforme θ se incrementa. Esta disminución se debe a un patrón de difracción. A fin de

Figura 38.6 a) Gráfica de la intensidad de la luz I en función de (π/λ) a sen θ para el patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija. b) Fotografía de un patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija.

Figura 38.7

Efectos combinados de interferencias debidas a dos rendijas y a una sola rendija. Este es el patrón producido cuando pasan ondas luminosas de 650 nm a través de dos rendijas de 3.0 μm, separadas 18 μm. Observe cómo el patrón de difracción actúa como "envolvente" y controla la intensidad de los máximos de interferencia regularmente espaciados.

determinar los efectos de cada rendija de interferencia y el patrón de difracción de una sola rendija, combine las ecuaciones 37.12 y 38.2:

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2\left(\frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi a \operatorname{sen} \theta/\lambda)}{\pi a \operatorname{sen} \theta/\lambda}\right]^2 \quad \textbf{(38.3)}$$

A pesar de que esta expresión parece complicada, simplemente representa el patrón de difracción de una sola rendija (el factor incluido en paréntesis cuadrados) que actúa como una "envolvente" para un patrón de interferencia de dos rendijas (el factor coseno cuadrado) como se puede observar en la figura 38.7. La curva interrumpida de color azul de la figura 38.7 representa el factor entre corchetes de la ecuación 38.3. El factor que incluye coseno cuadrado daría por sí mismo una serie de picos, todos de la misma altura, como el pico más elevado de la curva café de la figura 38.7. De cualquier modo, debido al efecto del factor entre corchetes, estos picos varían en altura como se muestra en la figura.

La ecuación 37.2 ofrece las condiciones para los máximos de interferencia de la forma $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$, donde d es la distancia entre las dos rendijas. La ecuación 38.1 especifica que el primer mínimo de difracción se presenta cuando $a \operatorname{sen} \theta = \lambda$, siendo a el ancho de la rendija. Al dividir la ecuación 37.2 entre la ecuación 38.1 (con $m = 1$) permite determinar qué máximo de interferencia coincide con el primer mínimo de difracción.

$$\frac{d \operatorname{sen} \theta}{a \operatorname{sen} \theta} = \frac{m\lambda}{\lambda}$$

$$\frac{d}{a} = m \quad \textbf{(38.4)}$$

En la figura 38.7, $d/a = 18\ \mu\text{m}/3.0\ \mu\text{m} = 6$. Por lo tanto, el sexto máximo de interferencia (si se tiene en cuenta el máximo central como $m = 0$) queda alineado con el primer mínimo de difracción y no resulta visible.

Pregunta rápida 38.2 Considere el pico central en la envolvente de difracción de la figura 38.7. Suponga que se modifica la longitud de onda de la luz a 450 nm. ¿Qué le ocurre a este pico central? a) Se reduce el ancho del pico y el número de franjas de interferencia que en-

cierra también disminuye. b) El ancho del pico se reduce y aumenta el número de franjas de interferencia que encierra. c) El ancho del pico se reduce y se mantiene igual el número de franjas de interferencia que encierra. d) Aumenta el ancho del pico y se reduce el número de franjas de interferencia que encierra. e) Aumenta el ancho del pico, así como el número de franjas de interferencia que encierra. f) El ancho del pico aumenta y se mantiene igual el número de franjas de interferencia que encierra. g) El ancho del pico es el mismo y disminuye el número de franjas de interferencia que encierra. h) El ancho de pico es el mismo y se incrementa el número de franjas de interferencia que encierran. i) El ancho del pico es el mismo y también el número de franjas de interferencia que encierra.

38.3 Resolución de una sola rendija y aberturas circulares

La capacidad que tienen los sistemas ópticos para distinguir entre objetos muy cercanos entre sí, está limitada debido a la naturaleza ondulatoria de la luz. Para comprender esta dificultad, observe la figura 38.8 que muestra dos fuentes de luz alejadas desde una rendija angosta de ancho a. Las fuentes pueden ser dos fuentes puntuales no coherentes S_1 y S_2; por ejemplo, podría ser de dos estrellas lejanas. De no presentarse interferencia al pasar la luz por diferentes partes de la rendija, en la pantalla se observarían dos puntos brillantes distintos (o dos imágenes). Sin embargo, debido a dicha interferencia, cada fuente aparece como una región central brillante flanqueada por franjas brillantes tenues y franjas oscuras, es decir, un patrón de difracción. Lo que se observa en la pantalla es la suma de dos patrones de difracción: uno desde S_1 y el otro desde S_2.

Si las dos fuentes están suficientemente separadas entre sí de manera que sus máximos centrales no se traslapen, como en la figura 38.8a, se podrán distinguir sus imágenes, y se dice que están *resueltas*. Sin embargo, si las fuentes están muy cercanas entre sí, como en el caso de la figura 38.8b, los dos máximos centrales se sobreponen, y las imágenes no quedan resueltas. Para determinar si dos imágenes están resueltas, a menudo se utiliza la condición siguiente:

> Cuando el máximo central de una imagen coincide con el primer mínimo de otra imagen, se dice que las imágenes están apenas resueltas. Esta condición límite de resolución se conoce como **criterio de Rayleigh**.

A partir del criterio de Rayleigh, es posible determinar la separación angular mínima $\theta_{\text{mín}}$ subtendida por las fuentes en la rendija en la figura 38.8, para la cual las imágenes quedan apenas resueltas. La ecuación 38.1 indica que el primer mínimo en un patrón de difracción de una sola rendija se presenta en el ángulo para el cual

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\lambda}{a}$$

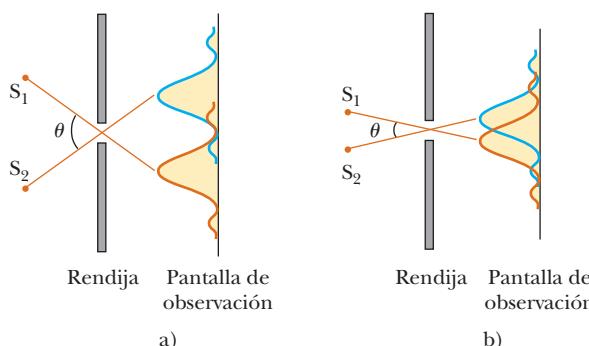



Figura 38.8 Dos fuentes puntuales lejos de una rendija angosta producen cada una un patrón de difracción. a) El ángulo subtendido por las fuentes en la rendija es lo suficientemente grande para que sean distinguibles los patrones de difracción. b) El ángulo subtendido es tan reducido que sus patrones de difracción se traslapan y las imágenes no están bien resueltas. (Observe que los ángulos están muy exagerados. El dibujo no está a escala.)

a) b) c)

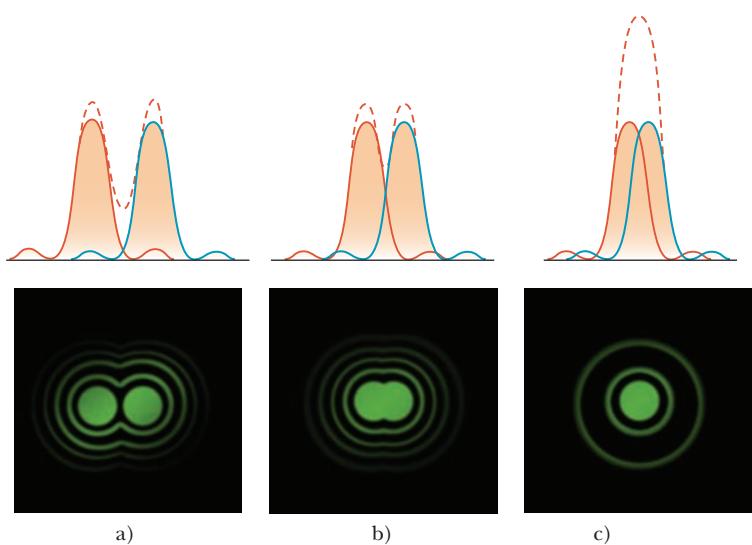



Figura 38.9 Patrones de difracción individuales correspondientes a dos fuentes puntuales (curvas sólidas) y los patrones resultantes (curvas discontinuas) para diferentes separaciones angulares de las fuentes, como la luz que pasa a través de una abertura circular. En cada caso la curva discontinua es la suma de las dos curvas sólidas. a) Las fuentes están lejos una de la otra y los patrones están bien resueltos. b) Las fuentes se encuentran a un distancia tal que la separación angular justo satisface el criterio de Rayleigh, y los patrones están resueltos. c) Las fuentes están tan cerca una de la otra que los patrones no están resueltos.

donde a es el ancho de la rendija. Según el criterio de Rayleigh, esta expresión proporciona la separación angular más pequeña en la cual se resuelven dos imágenes. Porque en la mayoría de las ocasiones $\lambda \ll a$, sen θ es pequeño y es posible utilizar la aproximación sen $\theta \approx \theta$. Debido a eso, el ángulo de resolución limitante para una rendija de ancho a es

$$\theta_{\text{mín}} = \frac{\lambda}{a} \qquad \textbf{(38.5)}$$

donde $\theta_{\text{mín}}$ está en radianes. Por esto, el ángulo subtendido por las dos fuentes en la rendija debe ser mayor a λ/a si las imágenes quedan resueltas.

Muchos sistemas ópticos utilizan aberturas circulares en vez de rendijas. El patrón de difracción de una abertura circular, como se muestra en las fotografías de la figura 38.9, está constituido por un disco circular brillante central rodeado por anillos luminosos y oscuros progresivamente más tenues. La figura 38.9 muestra patrones de difracción para tres situaciones en las cuales pasa luz desde dos fuentes puntuales a través de una abertura circular. Cuando las fuentes están alejadas, sus imágenes están bien resueltas (figura 38.9a). Cuando la separación angular de las fuentes satisface el criterio de Rayleigh, las imágenes están resueltas (figura 38.9b). Por último, cuando las fuentes están cerca una de la otra, se dice que las imágenes no están resueltas (figura 38.9c).

El análisis muestra que el ángulo de resolución limitante para una abertura circular es

Ángulo de resolución limitante para una apertura circular ▶

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \qquad \textbf{(38.6)}$$

donde D es el diámetro de la abertura. Observe que esta expresión es similar a la ecuación 38.5, excepto por el factor 1.22, que resulta de un análisis matemático de la difracción desde una abertura circular.

Pregunta rápida 38.3 Los ojos de los gatos tienen pupilas que pueden modelarse como rendijas verticales. De noche, ¿tendrán los gatos más éxito en ver a) los faros de un automóvil lejano o b) las luces verticalmente separadas sobre el mástil de un barco a la distancia?

Pregunta rápida 38.4 Suponga que observa una estrella binaria a través de un telescopio y que encuentra dificultad para definir ambas estrellas. Decide utilizar un filtro de color para maximizar la resolución. (Un filtro de un color específico sólo transmite dicho color presente en la luz.) ¿Qué color de filtro elegiría? a) Azul, b) verde, c) amarillo, d) rojo.

EJEMPLO 38.2 Resolución del ojo

Luz de 500 nm de longitud de onda, cerca del centro del espectro visible, entra a un ojo humano. Aunque el diámetro de la pupila varía de persona a persona, estime un diámetro diurno de 2 mm.

A) Estime el ángulo de resolución límite para este ojo, si supone que su resolución está limitada sólo por difracción.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 38.9, identifique la abertura a través de la cual viaja la luz como en la pupila del ojo. La luz que pasa a través de esta pequeña abertura hace que en la retina se presenten patrones de difracción.

Categorizar El resultado se evalúa con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 38.6, sea $\lambda = 500$ nm y $D = 2$mm:

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\left(\frac{5.00 \times 10^{-7}\text{ m}}{2 \times 10^{-3}\text{ m}}\right)$$

$$\approx 3 \times 10^{-4}\text{ rad} \approx 1\text{ min de arco}$$

B) Determine la distancia de separación mínima d entre dos fuentes puntuales que el ojo puede distinguir, si las fuentes puntuales están a una distancia $L = 25$ cm del observador (figura 38.10).

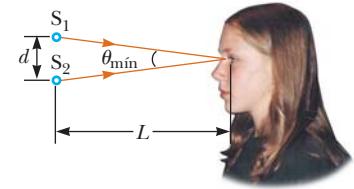



Figura 38.10 (Ejemplo 38.2) dos fuentes puntuales separadas por una distancia d, según observa el ojo.

SOLUCIÓN

Al notar que $\theta_{\text{mín}}$ es pequeño, encuentre d:

$$\text{sen } \theta_{\text{mín}} \approx \theta_{\text{mín}} \approx \frac{d}{L} \quad \rightarrow \quad d = L\theta_{\text{mín}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$d = (25\text{ cm})(3 \times 10^{-4}\text{ rad}) = 8 \times 10^{-3}\text{ cm}$$

Este resultado es aproximadamente igual al grosor de un cabello humano.

EJEMPLO 38.3 Resolución de un telescopio

El telescopio Keck en Mauna Kea, Hawai, tiene un diámetro efectivo de 10 m. ¿Cuál es su ángulo de resolución límite para luz de 600 nm?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 38.9, identifique la abertura a través de la cual viaja la luz como la abertura del telescopio. La luz que pasa a través de esta abertura hace que se presenten patrones de difracción en la imagen final.

Categorizar El resultado se evalúa con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 38.6, sea $\lambda = 6.00 \times 10^{-7}$ m y $D = 10$ m:

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\left(\frac{6.00 \times 10^{-7}\text{ m}}{10\text{ m}}\right)$$

$$= 7.3 \times 10^{-8}\text{ rad} \approx 0.015\text{ s de arco}$$

Cualesquiera dos estrellas que subtiendan un ángulo mayor que o igual a este valor están resueltas (si las condiciones atmosféricas son ideales).

¿Qué pasaría si? ¿Y si considera radiotelescopios? Éstos son mucho más grandes en diámetro que los telescopios ópticos, ¿pero tienen resoluciones angulares mejores que los telescopios ópticos? Por ejemplo, el radiotelescopio en Arecibo, Puerto Rico, tiene un diámetro de 305 m y está diseñado para detectar longitudes de onda de radio de 0.75 m. ¿Cómo se compara esta resolución con la del telescopio Keck?

Respuesta El aumento en diámetro puede sugerir que los radiotelescopios tendrían mejor resolución que el telescopio Keck, pero la ecuación 38.6 muestra que $\theta_{\text{mín}}$ depende *tanto* del diámetro *como* de la longitud de onda. Al calcular el ángulo de resolución mínimo para el radiotelescopio, se encuentra

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\,\frac{\lambda}{D} = 1.22\left(\frac{0.75\text{ m}}{305\text{ m}}\right)$$

$$= 3.0 \times 10^{-3}\text{ rad} \approx 10\text{ min de arco}$$

Este ángulo de resolución límite se mide en *minutos* de arco en lugar de *segundos* de arco para el telescopio óptico. Por lo tanto, el cambio en longitud de onda compensa el aumento en diámetro. El ángulo de resolución límite para el radiotelescopio de Arecibo es más de 40 000 veces mayor (esto es, *peor*) que el mínimo Keck.

El telescopio Keck explicado en el ejemplo 38.3 nunca puede alcanzar su límite de difracción porque el ángulo de resolución límite siempre se ajusta por desenfoque atmosférico en longitudes de onda ópticas. Este límite en la visualización usualmente es de más o menos 1 s de arco y nunca es menor que casi 0.1 s de arco. El desenfoque atmosférico es causado por variaciones en el índice de refracción con las variaciones de temperatura en el aire. Este desenfoque es una causa de la superioridad de las fotografías del Telescopio Espacial Hubble, que ve los objetos celestes desde una posición orbital arriba de la atmósfera.

Como ejemplo de los efectos de visión atmosférica borrosa mencionados considere las imágenes telescópicas de Plutón y de su satélite Caronte. La figura 38.11a muestra la imagen tomada en el año de 1978 cuando fue descubierto Caronte. En esta fotografía, tomada desde un telescopio terrestre, la turbulencia atmosférica provoca que la imagen de Caronte aparezca como sólo una protuberancia en el borde de Plutón. En comparación, la figura 38.11b muestra una fotografía tomada por el telescopio espacial Hubble. En ausencia de problemas de turbulencia atmosférica, Plutón y su satélite se observan claramente.

38.4 Rejilla de difracción

La **rejilla de difracción**, un útil aparato para el análisis de las fuentes luminosas, está constituida por un elevado número de rendijas paralelas separadas entre sí a una misma distancia. También es posible fabricar una *rejilla de transmisión* tallando ranuras paralelas en la placa de vidrio utilizando una máquina rayadora de precisión. Los espacios entre surcos son transparentes para la luz y, por esto, actúan como rendijas independientes. Se puede construir una *rejilla de reflexión* tallando ranuras paralelas sobre la superficie de un material

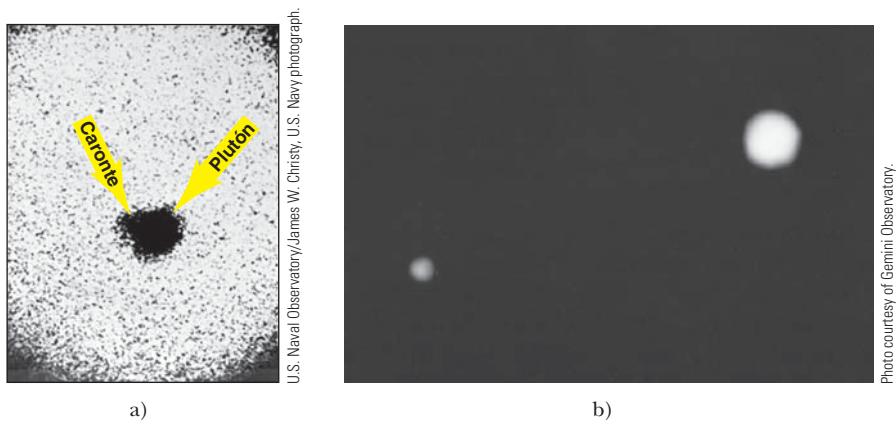



Figura 38.11 a) Fotografía con la cual se descubrió en el año de 1978 a Caronte, el satélite de Plutón, tomada por un telescopio terrestre. La visión borrosa atmosférica hace que Caronte aparezca sólo como una pequeña protuberancia en el borde de Plutón. b) Fotografía de Plutón y de Caronte tomada desde el telescopio espacial Hubble, donde aparecen los dos objetos claramente definidos.

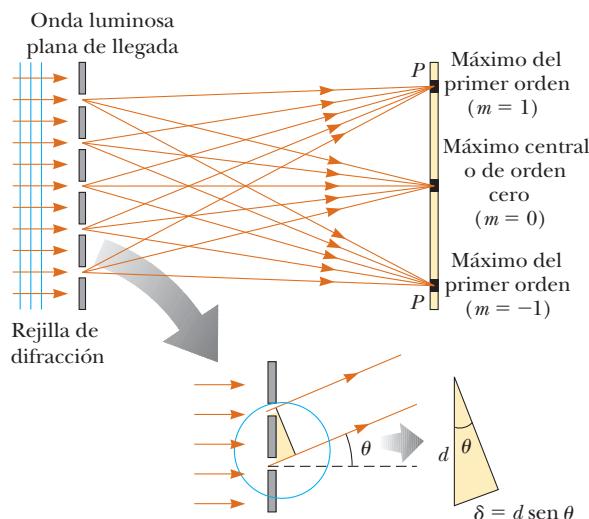



Figura 38.12 Vista lateral de una rejilla de difracción. La separación entre rendijas es d, y la diferencia en trayectorias entre rendijas adyacentes es igual a d sen θ.

que refleja. La reflexión de la luz de los espacios entre las ranuras es especular, y la reflexión de las ranuras cortadas en el material son difusas. Por lo tanto, los espacios entre ranuras actúan como fuentes paralelas de luz reflejada, al igual que las rendijas en una rejilla de transmisión. La tecnología actual puede producir rejillas con espaciamientos de rendija muy pequeños. Por ejemplo, una rejilla típica rayada con 5000 ranuras por centímetro tiene un espaciamiento entre rendijas $d = (1/5000)$ cm, lo que es igual a 2.00×10^{-4} cm.

En la figura 38.12 se ilustra una sección de una rejilla de difracción. Desde el lado izquierdo incide una onda plana, normal al plano de la rejilla. El patrón observado sobre la pantalla en el extremo derecho de la rejilla es el resultado de los efectos combinados de la interferencia y de la difracción. Cada rendija produce difracción, y los rayos difractados interfieren entre sí para producir la configuración final.

Las ondas de todas las rendijas están en fase al salir de las mismas. Sin embargo, para alguna dirección arbitraria θ observada desde la horizontal, las ondas deben viajar diferentes distancias de trayectoria antes de llegar a la pantalla. Observe en la figura 38.12 que la diferencia de trayectorias δ entre rayos desde dos rendijas adyacentes cualesquiera es igual a d sen θ. Si esta diferencia en la trayectoria resulta igual a una longitud de onda o a algún múltiplo entero de una longitud de onda, se observan las ondas de todas las rendijas en fase en la pantalla y una franja brillante. Por lo tanto, la condición para los *máximos* en el patrón de interferencia en el ángulo $\theta_{\text{brillante}}$ es

$$d \operatorname{sen} \theta_{\text{brillante}} = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{38.7}$$

◀ Condición para máximos de interferencia en una rejilla

Es posible utilizar esta expresión para calcular la longitud de onda si se sabe cuál es el espaciamiento d y el ángulo $\theta_{\text{brillante}}$. Si la radiación incidente contiene varias longitudes de onda, el máximo de orden m para cada longitud de onda se presenta en un ángulo específico. Todas las longitudes de onda son visibles en $\theta = 0$, lo que corresponde a $m = 0$, que es el máximo de orden cero. El máximo de primer orden ($m = 1$) se observará en un ángulo que satisfaga la relación sen $\theta_{\text{brillante}} = \lambda/d$; el máximo de segundo orden ($m = 2$) será visto en un ángulo más grande $\theta_{\text{brillante}}$, y así sucesivamente. Para valores más pequeños representativos de d en una rejilla de difracción, los ángulos $\theta_{\text{brillante}}$ son grandes, como se ve en el ejemplo 38.5.

La distribución de intensidad de una rejilla de difracción obtenida utilizando una fuente monocromática aparece en la figura 38.13. Advierta la nitidez de los máximos principales y la anchura de las áreas oscuras comparadas con las anchas franjas brillantes del patrón de interferencia causado por dos rendijas (véase la figura 37.7). También merece la pena observar de nuevo la figura 37.8, que muestra que el ancho de los máximos de intensidad disminuyen conforme aumenta el número de rendijas. Porque los máximos principales son tan nítidos, resultan mucho más brillantes que los máximos de interferencia causados por dos rendijas.

Pregunta rápida 38.5 Una luz ultravioleta de longitud de onda de 350 nm incide en una rejilla de difracción con un espaciamiento d entre rendijas, forma un patrón de interferencia

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.3

Una rejilla de difracción es una rejilla de interferencia

Al igual que en el caso del *patrón de difracción*, la *rejilla de difracción* es un nombre incorrecto, pero está profundamente arraigado en el lenguaje de los físicos. La rejilla de difracción se basa en la difracción de la misma forma que la doble rendija, dispersando la luz de forma que la luz desde rendijas diferentes puede interferir. Sería más correcto identificarla como una *rejilla de interferencia*, pero el nombre que se usa es *rejilla de difracción*.

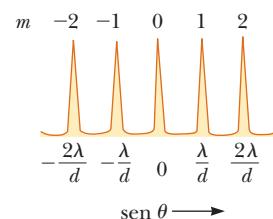



Figura 38.13 Intensidad en función de sen θ para una rejilla de difracción. También se muestran los máximos de orden cero, primero y segundo.

sobre una pantalla que está a una distancia L. Las posiciones angulares $\theta_{\text{brillante}}$ de los máximos de interferencia son numerosas. La localización de las franjas brillantes se marcan en la pantalla. Acto seguido se utiliza una luz roja con una longitud de onda de 700 nm con una rejilla de difracción para formar otro patrón de difracción sobre la pantalla. Las franjas brillantes de este patrón se harán de forma tal que se localicen en las marcas en la pantalla a) moviendo la pantalla a una distancia $2L$ de la rejilla, b) moviendo la pantalla a una distancia $L/2$ de la rejilla, c) reemplazando la rejilla por otra con un espaciamiento entre rendijas de $2d$, d) reemplazando la rejilla por otra que tenga un espaciamiento entre rejillas de $d/2$, o e) si no se cambia nada.

EJEMPLO CONCEPTUAL 38.4 Un disco compacto es una rejilla de difracción

La luz reflejada desde la superficie de un disco compacto es multicolorida, como muestra la figura 38.14. Los colores y sus intensidades dependen de la orientación del CD en relación con el ojo y en relación con la fuente de luz. Explique cómo funciona esto.

© Kristen Brochman/Fundamental Photographs.

Figura 38.14 (Ejemplo conceptual 38.4) Disco compacto observado bajo luz blanca. Los colores observados en la luz reflejada y sus intensidades dependen de la orientación del CD en relación con el ojo y con la fuente de luz.

SOLUCIÓN

La superficie de un CD tiene una pista ranurada en espiral (con ranuras adyacentes que tienen una separación del orden de 1 μm). Por lo tanto, la superficie actúa como una rejilla de reflexión. La luz reflejada desde las regiones entre estas ranuras cercanamente espaciadas interfiere de manera constructiva sólo en ciertas direcciones que dependen de la longitud de onda y la dirección de la luz incidente. Cualquier sección del CD sirve como rejilla de difracción para luz blanca, enviando colores distintos en diferentes direcciones. Los diferentes colores que se ven al observar una sección cambian cuando la fuente de luz, el CD o usted cambian de posición. Este cambio en posición hace que se alteren el ángulo de incidencia o el ángulo de luz difractada.

EJEMPLO 38.5 Órdenes de una rejilla de difracción

Luz monocromática de un láser helio-neón ($\lambda = 632.8$ nm) incide de manera normal sobre una rejilla de difracción que contiene 6000 ranuras por centímetro. Encuentre los ángulos a los que se observan los máximos de primero y segundo orden.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 38.12 e imagine que la luz que viene desde la izquierda se origina en el láser helio-neón.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Calcule la separación de rendija como el inverso del número de ranuras por centímetro:

$$d = \frac{1}{6000}\text{ cm} = 1.667 \times 10^{-4}\text{ cm} = 1667\text{ nm}$$

Resuelva la ecuación 38.7 para sen θ y sustituya valores numéricos par el máximo de primer orden ($m = 1$) para encontrar θ_1:

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{(1)\lambda}{d} = \frac{632.8\text{ nm}}{1667\text{ nm}} = 0.379\,7$$

$$\theta_1 = \boxed{22.31°}$$

Repita para el máximo de segundo orden ($m = 2$):

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{(2)\lambda}{d} = \frac{2(632.8\text{ nm})}{1667\text{ nm}} = 0.759\,4$$

$$\theta_2 = \boxed{49.41°}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si usted busca el máximo de tercer orden? ¿Lo encontraría?

Respuesta Para $m = 3$, se encuentra sen $\theta_3 = 1.139$. Ya que sen θ no puede exceder la unidad, este resultado no representa una solución real. Así, para esta situación sólo se observan máximos de orden cero, primero y segundo.

Aplicaciones de las rejillas de difracción

En la figura 38.15 se muestra un dibujo esquemático de un aparato simple que se usa para medir ángulos en un patrón de difracción. Este aparato es una *espectrómetro de rejilla de difracción*. La luz a analizar pasa a través de una rendija, y un haz colimado de luz incide sobre la rejilla. La luz difractada deja la rejilla a ángulos que satisfacen la ecuación 38.7, y se usa un telescopio para ver la imagen de la rendija. La longitud de onda se puede determinar al medir los ángulos precisos a los que aparecen las imágenes de la rendija para los diferentes órdenes.

El espectrómetro es una herramienta útil en la *espectroscopia atómica*, en la que se analiza la luz de un átomo para encontrar las longitudes de onda componentes. Dichas longitudes de onda componentes se utilizan para identificar el átomo. En el capítulo 42 se investigarán los espectros atómicos.

Otra aplicación de las rejillas de difracción es la *válvula de luz de rejilla* (GLV, *grating light value*), que puede competir en el futuro cercano de la videoproyección con los dispositivos de microespejo digital (DMD) explicados en la sección 35.4. Un GLV es un microchip de silicio ajustado con un arreglo de cintas de nitruro de silicio paralelas recubiertas con una capa delgada de aluminio (figura 38.16). Cada cinta mide aproximadamente 20 μm de largo 5 μm de ancho, y está separada del sustrato de silicio mediante una brecha de aire del orden de 100 nm. Sin voltaje aplicado, todos las cintas están al mismo nivel. En esta situación, el arreglo de cintas actúa como una superficie plana, que refleja especularmente la luz incidente.

Cuando se aplica un voltaje entre una cinta y el electrodo en el sustrato de silicio, una fuerza eléctrica jala la cinta hacia abajo, más cerca del sustrato. Cintas alternas se pueden bajar, mientras que las que están en medio permanecen en una configuración elevada. Como resultado, el arreglo de cintas actúa como una rejilla de difracción tal que la interferencia constructiva para una longitud de onda particular de luz se puede dirigir hacia una pantalla u otro sistema de despliegue óptico. Al usar tres de tales dispositivos (cada uno para luz roja, azul y verde), es posible un despliegue a todo color.

Un GLV tiende a ser más simple de fabricar y a tener mayor resolución que un DMD comparables. Por otra parte, los DMD ya hicieron su entrada en el mercado. Será interesante observar esta competencia de tecnología en años futuros.

Otra interesante aplicación de las rejillas de difracción es la **holografía**, la producción de imágenes tridimensionales de objetos. La física de la holografía la desarrolló Dennis Gabor (1900-1979) en 1948 y resultó en el Premio Nobel de Física para Gabor en 1971. El

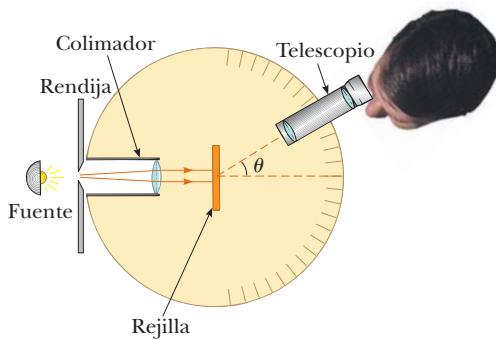



Figura 38.15

Diagrama de un espectrómetro de rejilla de difracción. El haz colimado incidente en la rejilla se dispersa en sus diferentes longitudes de onda componentes, con interferencia constructiva para una longitud de onda particular que se presenta con los ángulos $\theta_{\text{brillante}}$ que satisfacen la ecuación d sen $\theta_{\text{brillante}} = m\lambda$, donde $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

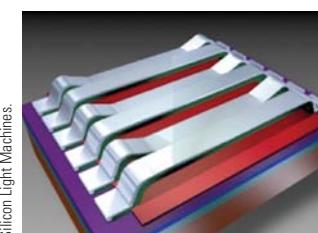
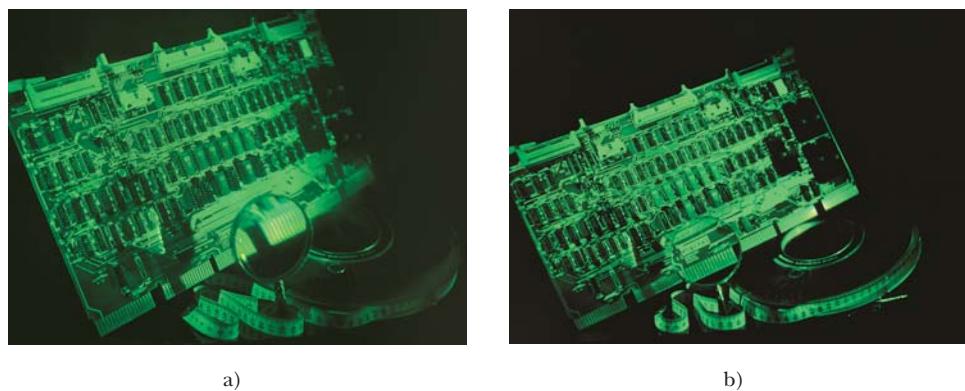



Figura 38.16 Una pequeña porción de una válvula de luz de rejilla. Las cintas reflectoras alternas a diferentes niveles actúan como una rejilla de difracción, que ofrece control de muy alta rapidez de la dirección de la luz hacia un dispositivo de despliegue digital.

Figura 38.17 En este holograma se muestran dos vistas diferentes de un tablero de circuito. Observe la diferencia en la apariencia de la cinta de medir y la vista a través de las lupas en a) y b).

requisito de luz coherente para la holografía demoró la realización de imágenes holográficas a partir del trabajo de Gabor hasta el desarrollo de los láser en la década de 1960. La figura 38.17 muestra un holograma y el carácter tridimensional de su imagen. Observe en particular la diferencia en la vista a través de la lupa en las figuras 38.17a y 38.17b.

La figura 38.18 muestra cómo se hace un holograma. La luz del láser se divide en dos partes mediante un espejo medio-plateado en *B*. Una parte del haz se refleja en el objeto a fotografiar e incide una película fotográfica ordinaria. La otra mitad del haz diverge mediante la lente L_2, se refleja de los espejos M_1 y M_2, y por último incide en la película. Los dos haces se traslapan para formar un patrón de interferencia extremadamente complicado sobre la película. Tal patrón de interferencia se puede producir sólo si la correspondencia de fase de las dos ondas es constante en todas las partes de la exposición de la película. Esta condición se satisface al iluminar la escena con luz que pasa a través del orificio de un alfiler o con radiación láser coherente. El holograma registra no sólo la intensidad de la luz dispersada del objeto (como en una fotografía convencional), sino también la diferencia de fase entre el haz de referencia y el haz dispersado del objeto. Debido a esta diferencia de fase, se forma un patrón de interferencia que produce una imagen en la que se guarda toda la información tridimensional disponible desde la perspectiva de cualquier punto en el holograma.

En una imagen fotográfica normal se usa una lente para enfocar la imagen de modo que cada punto en el objeto corresponda a un solo punto en la película. Observe que en la figura 38.18 no se usa lente para enfocar la luz en la película. Por lo tanto, la luz desde cada punto en el objeto alcanza *todos* los puntos en la película. Como resultado, cada región de la película fotográfica en la que se registra el holograma contiene información acerca de todos los puntos iluminados sobre el objeto, lo que conduce a un resultado notable: si una pequeña sección del holograma se corta de la película, ¡la imagen completa se puede formar a partir del pedazo pequeño! (La calidad de la imagen se reduce, pero toda la imagen está presente.)

Un holograma se ve mejor al permitir que luz coherente pase a través de la película revelada conforme uno mira atrás a lo largo de la dirección desde donde viene el haz. El patrón de interferencia en la película actúa como una rejilla de difracción. La figura 38.19 muestra dos rayos de luz que inciden y pasan a través de la película. Para

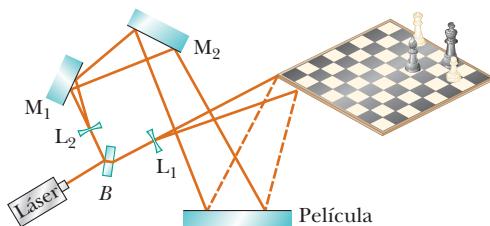



Figura 38.18 Arreglo experimental para producir un holograma.

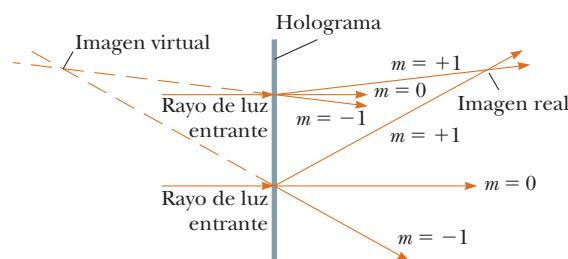



Figura 38.19 Dos rayos de luz golpean un holograma en incidencia normal. Para cada rayo se muestran los rayos salientes que corresponden a $m = 0$ y $m = \pm 1$. Si los rayos $m = -1$ se extienden hacia atrás, en el lado frontal del holograma existe una imagen virtual del objeto fotografiado en el holograma.

cada rayo, se muestran los rayos $m = 0$ y $m \pm 1$ en el patrón de difracción, que salen del lado derecho de la película. Los rayos $m = +1$ convergen para formar una imagen real de la escena, que no es la imagen que normalmente se ve. Al extender los rayos de luz que corresponden a $m = -1$ más allá de la película, se ve que hay una imagen virtual ubicada ahí, con luz que viene desde ella exactamente en la misma forma que la luz que viene del objeto real cuando se expuso la película. Esta imagen es lo que uno ve cuando observa a través de la película holográfica.

Los hologramas encuentran numerosas aplicaciones. Usted puede tener un holograma en su tarjeta de crédito. Este tipo especial de hologramas se llama *holograma arco iris* y está diseñado para verse en luz blanca reflejada.

38.5 Difracción de los rayos X mediante cristales

En principio, es posible determinar la longitud de onda de cualquier onda electromagnética, si se dispone de una rejilla con un espaciamiento entre rendijas adecuado (del orden de λ). Los rayos X, descubiertos en el año 1895 por Wilhelm Roentgen (1845-1923), son ondas electromagnéticas de una longitud de onda muy reducida (del orden de 0.1 nm). Sería imposible, utilizando el proceso de corte descrito al principio de la sección 38.4, construir una rejilla con un espaciamiento tan pequeño. Sin embargo, el espaciamiento atómico en un sólido es de aproximadamente 0.1 nm. En el año de 1913, Max von Laue (1879-1960) sugirió que la organización normal de los átomos en un cristal pudiera funcionar como una rejilla de difracción tridimensional para los rayos X. Experimentos consecutivos confirmaron esta predicción. Los patrones de difracción de cristales son complejos debido a la naturaleza tridimensional de la estructura cristalina. A pesar de esto, la difracción de los rayos X ha demostrado ser una técnica invaluable para aclarar estas estructuras y para un mejor discernimiento de la estructura de la materia.

La figura 38.20 muestra un arreglo experimental para la observación de la difracción de los rayos X mediante un cristal. Sobre el cristal incide un haz colimado de rayos X monocromáticos. Los rayos difractados son muy intensos en ciertas direcciones, que co-

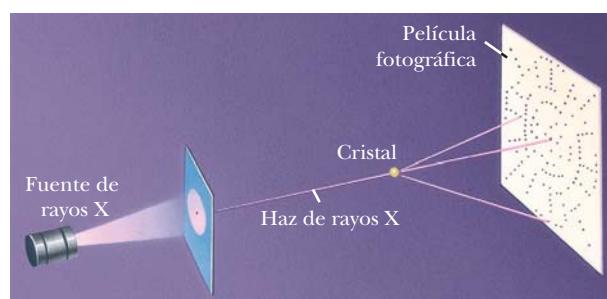



Figura 38.20 Diagrama esquemático de la técnica utilizada para observar la difracción de rayos X mediante un cristal. El arreglo de manchas formadas sobre la película se llama patrón de Laue.

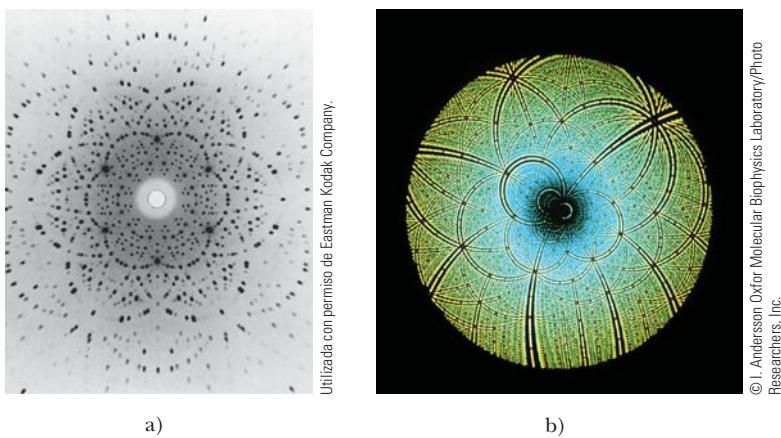



Figura 38.21 a) Un patrón Laue de un cristal simple del mineral berilio (aluminosilicato de berilio). Cada punto representa un lugar de interferencia constructiva. b) Patrón Laue de la enzima Rubisco, producida mediante un espectro de rayos X de banda ancha. Esta enzima está presente en las plantas y forma parte de la fotosíntesis. El patrón Laue es utilizado para determinar la estructura cristalina del Rubisco.

rresponden a la interferencia constructiva de ondas reflejadas de las capas de átomos del cristal. Los rayos difractados, que pueden ser detectados sobre una película fotográfica, forman un arreglo de puntos conocido como *patrón de Laue*, como en la figura 38.21a. Es posible deducir la estructura cristalina al analizar las posiciones relativas y las intensidades de los diversos puntos en el patrón. La figura 38.21b muestra un patrón de Laue correspondiente a una enzima cristalina, utilizando una amplia gama de longitudes de onda de manera que el resultado es un patrón en remolino.

En la figura 38.22 se muestra la organización de los átomos en un cristal de cloruro de sodio (NaCl). Cada celda unitaria (el sólido geométrico que se repite en todo el cristal) es un cubo de arista a. Un examen cuidadoso de la estructura del NaCl muestra que los iones yacen en planos discretos (las áreas sombreadas de la figura 38.22). Ahora suponga que un rayo X incidente forma un ángulo θ con uno de los planos, como en la figura 38.23. El rayo puede reflejarse tanto del plano superior como del inferior, sin embargo, el rayo reflejado del plano inferior se desplaza más que el rayo reflejado proveniente del plano superior. La diferencia en la trayectoria efectiva es igual a $2d$ sen θ. Los dos haces se refuerzan (interferencia constructiva) cuando esta diferencia de trayectoria es igual a algún múltiplo entero de λ. Lo mismo es también cierto para la reflexión de toda la familia de planos paralelos. De ahí que la condición para una interferencia *constructiva* (máximos en el rayo reflejado) es igual a

Ley de Bragg ▶

$$2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{38.8}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.4

Diferentes ángulos

Observe que en la figura 38.23 el ángulo θ se observa a partir de la superficie reflejante, antes que desde la normal, como en el caso de la ley de la reflexión del capítulo 35. En el caso de las rendijas y las rejillas de difracción, también el ángulo θ se midió a partir de la normal al arreglo de las rendijas. En la ley de Bragg de la difracción, por razones de tradición histórica, el ángulo se mide de una forma distinta, por lo que es necesario interpretar la ecuación 38.8 con mucho cuidado.

Figura 38.22 Estructura cristalina del cloruro de sodio (NaCl). Las esferas de color azul representan iones Cl^-, y las de color rojo iones Na^+. La longitud de la arista del cubo es igual a a = 0.562 737 nm.

Figura 38.23 Descripción en dos dimensiones de la reflexión de un haz de rayos X de dos planos cristalinos paralelos separados una distancia d. El haz reflejado por el plano inferior viaja más, una distancia igual a $2d$ sen θ, que el que se refleja por el plano superior.

Esta condición se conoce como **Ley de Bragg**, en honor a W. L. Bragg (1890-1971), quien fue el primero en deducir la relación. Si se mide la longitud de onda y el ángulo de difracción, es posible usar la ecuación 38.18 para calcular el espaciamiento entre los planos atómicos.

Figura 38.24 Diagrama esquemático de una onda electromagnética que se propaga con una velocidad $\vec{c}$ en la dirección x. El campo eléctrico vibra en el plano xy y el campo magnético vibra en el plano xz.

38.6 Polarización de las ondas luminosas

En el capítulo 34 se describió la naturaleza transversal de las ondas de luz y todas las demás ondas electromagnéticas. Una prueba firme de esta naturaleza transversal es la polarización de la luz, que es el tema de análisis de esta sección.

Un haz normal de luz está formado por un gran número de ondas emitidas por los átomos de la fuente luminosa. Cada átomo produce una onda que tiene una orientación particular del vector del campo eléctrico $\vec{E}$, correspondiente a la dirección de la vibración atómica. La *dirección de polarización* de cada una de las ondas individuales se define como la dirección en la que vibra su campo eléctrico. En la figura 38.24, esta dirección ocurre a lo largo del eje y. Sin embargo, una onda electromagnética individual podría tener su vector $\vec{E}$ sobre el plano yz, con lo que podría formarse cualquier ángulo posible con el eje y. Porque es factible cualquier dirección de vibración de la fuente de las ondas, la onda electromagnética resultante es una sobreposición de ondas que vibran en muchas direcciones distintas. El resultado es un rayo de luz **no polarizado**, como el que se ilustra en la figura 38.25a. La dirección de la propagación de las ondas en esta figura es perpendicular a la página. Las flechas muestran unas cuantas direcciones posibles de los vectores del campo eléctrico que conforman el haz resultante. En algún punto e instante en el tiempo, todos esos vectores individuales se suman para dar el vector de campo eléctrico resultante.

Figura 38.25 a) Representación de un haz de luz no polarizado, visto a lo largo de la dirección de propagación (perpendicular a la página). El campo eléctrico transversal puede vibrar con la misma probabilidad en cualquier dirección dentro del plano de la página. b) Rayo de luz linealmente polarizado con su campo eléctrico vibrando en dirección vertical.

Como se pudo observar en la sección 34.3, se dice que una onda está **linealmente polarizada** si *en todo momento* el campo eléctrico resultante $\vec{E}$ vibra en la misma dirección en un punto en particular, como se muestra en la figura 38.25b. (Algunas veces, a este tipo de onda se le llama *plana polarizada,* o simplemente *polarizada*.) El plano formado por $\vec{E}$ y la dirección de propagación se conoce como el *plano de polarización* de la onda. Si la onda de la figura 38.24 representara la resultante de todas las ondas individuales, el plano de polarización sería el plano xy.

Es posible obtener un haz linealmente polarizado, partiendo de un haz no polarizado, al retirar todas las ondas del haz con excepción de aquellas cuyos vectores de campo eléctrico oscilan en un solo plano. Ahora se explicarán cuatro procesos para la producción de luz polarizada a partir de luz no polarizada.

Polarización por absorción selectiva

La técnica más común para producir luz polarizada es usar material que transmita ondas cuyos campos eléctricos vibren en un plano paralelo a cierta dirección y que absorba las ondas cuyos campos eléctricos estén vibrando en todas las demás direcciones.

En el año de 1938, E. H. Land (1909-1991) descubrió un material, que llamó *polaroid*, que polariza la luz mediante la absorción selectiva. Este material se fabrica en hojas delgadas de hidrocarburos de cadena larga. Las láminas u hojas son estiradas durante su fabricación de forma que las moléculas de la cadena larga se alinean. Después de haber sumergido la hoja en una solución que contiene yodo, las moléculas se vuelven buenos conductores eléctricos. Esta conducción ocurre principalmente a lo largo de las cadenas de hidrocarburos, ya que los electrones se pueden desplazar con facilidad a lo largo de sus cadenas. Si la luz cuyo vector de campo eléctrico es paralelo a las cadenas incide en el material, el campo eléctrico acelera los electrones a lo largo de las cadenas y se absorbe energía a causa de la radiación. Debido a eso, la luz no pasa a través del material. La luz cuyo vector de campo eléctrico es perpendicular a las cadenas pasa a través del material porque los electrones no pueden moverse desde una molécula a la próxima. Como resultado, cuando incide luz no polarizada en el material, la luz que sale es polarizada perpendicular a las cadenas moleculares.

Es común referirse a la dirección perpendicular de las cadenas moleculares como el *eje de transmisión*. En un polarizador ideal, se transmite toda la luz cuya $\vec{E}$ sea paralela al eje de transmisión, y se absorbe toda la luz cuya $\vec{E}$ sea perpendicular al eje de transmisión.

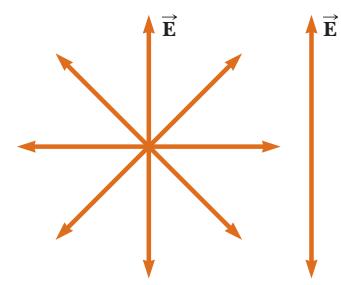
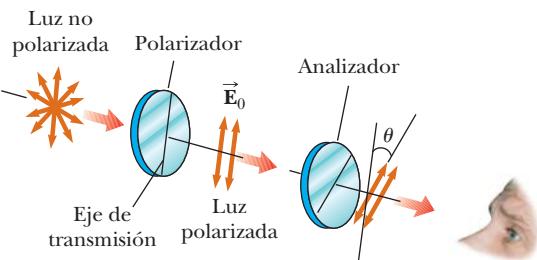
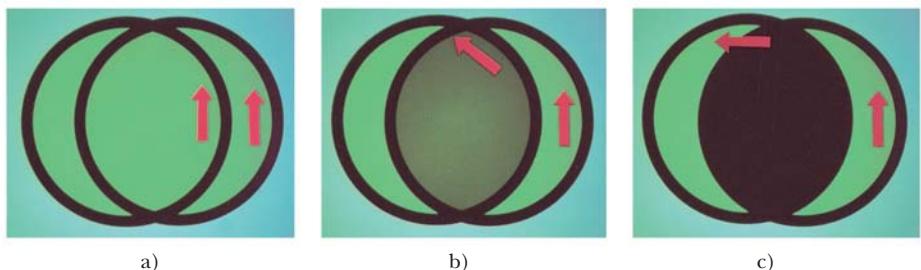



Figura 38.26

Dos láminas polarizadoras cuyos ejes de transmisión forman un ángulo θ. Sólo se transmite hacia el observador una fracción de la luz polarizada que incide sobre el analizador.

La figura 38.26 presenta un rayo de luz no polarizada que incide sobre una primera hoja polarizadora, conocida como *polarizador*. Porque en la figura el eje de transmisión está orientado en sentido vertical, la luz transmitida a través de esta hoja está polarizada verticalmente. Este rayo es interceptado por una segunda hoja polarizadora, el *analizador*. En la figura 38.26, el eje de transmisión del analizador se ajusta de manera que forma un ángulo θ en relación con el eje del polarizador. Se denomina $\vec{\mathbf{E}}_0$ al vector de campo eléctrico del primer rayo transmitido. La componente de $\vec{\mathbf{E}}_0$ perpendicular al eje del analizador es absorbida en su totalidad. La componente de $\vec{\mathbf{E}}_0$ paralela al eje del analizador, es decir, $E_0 \cos \theta$, pasa a través de este último. En vista de que la intensidad del rayo transmitido varía en función del cuadrado de su magnitud, se concluye que la intensidad I del rayo (polarizado) que se transmite través del analizador varía en función de

Ley de Malus ►

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \theta \qquad \textbf{(38.9)}$$

donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad del rayo polarizado que incide sobre el analizador. Esta expresión, conocida como **ley de Malus**,[2] es aplicable para cualquier par de materiales polarizantes cuyos ejes de transmisión formen entre sí un ángulo θ. Esta expresión muestra que la intensidad del rayo transmitida es máxima cuando los ejes de transmisión son paralelos ($\theta = 0$ o $180°$) y es igual a cero (absorción completa por el analizador) cuando los ejes son perpendiculares entre sí. En la figura 38.27 se ilustra la variación de la intensidad transmitida por un par de hojas polarizadoras.

Polarización por reflexión

Cuando un rayo de luz no polarizado se refleja desde una superficie, la luz reflejada puede estar totalmente polarizada, parcialmente polarizada, o no polarizada, dependiendo del ángulo de incidencia. Si el ángulo de incidencia es igual a 0°, el rayo reflejado no es un rayo polarizado. Para otros ángulos de incidencia, la luz reflejada estará polarizada hasta cierto grado, y para un ángulo particular de incidencia, la luz reflejada quedará totalmente polarizada. Analice ahora la reflexión en este ángulo especial.

Suponga que un rayo de luz no polarizado incide sobre una superficie, como en la figura 38.28a. Cada uno de los vectores de campo eléctrico individuales puede descomponerse en dos componentes: una paralela a la superficie (y perpendicular a la página en el caso de la figura 38.28, y que aparece representada mediante puntos), y la otra componente (repre-

Figura 38.27 La intensidad de la luz transmitida a través de dos materiales polarizadores depende de la orientación relativa de sus ejes de transmisión. a) La luz transmitida tiene una intensidad máxima cuando los ejes de transmisión están alineados uno con otro. b) La luz transmitida tiene menor intensidad cuando sus ejes de transmisión forman entre sí un ángulo de 45°. c) La intensidad de la luz transmitida pasa por un mínimo cuando los ejes de transmisión son perpendiculares entre sí.

[2] Llamado así en honor a su descubridor, E. I. Malus (1775-1812). Malus descubrió que la luz reflejada estaba polarizada al observarla a través de un cristal de calcita ($CaCO_3$).

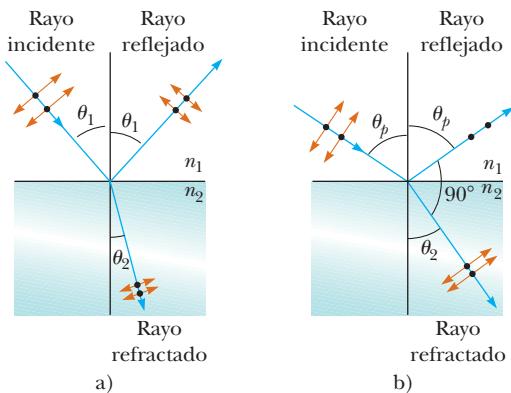



Figura 38.28 a) Cuando una luz no polarizada incide sobre una superficie reflejante, los rayos reflejados y refractados están parcialmente polarizados. b) El rayo reflejado está totalmente polarizado cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización θ_p, lo que satisface la ecuación $n = \tan\theta_p$. En este ángulo de incidencia, los rayos reflejados y refractados son perpendiculares entre sí.

sentada en la figura por las flechas color café) perpendicular tanto a la primera componente como a la dirección de propagación. Debido a eso, es posible describir la polarización de todo el rayo mediante dos componentes de campos eléctricos en esas direcciones. Se ha encontrado que la componente paralela se refleja con mayor intensidad que la componente perpendicular, y ello da como resultado un rayo reflejado parcialmente polarizado. Lo que es más, el rayo refractado también está parcialmente polarizado.

Ahora suponga que el ángulo de incidencia θ_1 se modifica hasta que el ángulo que se forma entre los rayos reflejado y refractado es de 90°, como en la figura 38.28b. En este ángulo de incidencia en particular, el rayo reflejado está totalmente polarizado (con su vector de campo eléctrico paralelo a la superficie), y el rayo refractado está todavía sólo parcialmente polarizado. El ángulo de incidencia en que se presenta la polarización se conoce como **ángulo de polarización** θ_p.

Mediante la figura 38.28b se obtiene una expresión que relacione el ángulo de polarización con el índice de refracción de la sustancia reflejante. A partir de esta figura observe que $\theta_p + 90° + \theta_2 = 180°$; por consiguiente $\theta_2 = 90° - \theta_p$. Con la ley de Snell para la refracción (ecuación 35.8) tiene

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\operatorname{sen}\ \theta_1}{\operatorname{sen}\ \theta_2} = \frac{\operatorname{sen}\ \theta_p}{\operatorname{sen}\ \theta_2}$$

Porque $\operatorname{sen}\theta_2 = \operatorname{sen}(90° - \theta_p) = \cos\theta_p$, escriba esta expresión de la forma $n_2/n_1 = \operatorname{sen}\ \theta_p/\cos\ \theta_p$, lo que quiere decir que

$$\tan\ \theta_p = \frac{n_2}{n_1} \qquad \textbf{(38.10)}$$

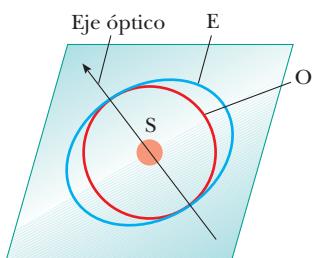
◀ Ley de Brewster

La expresión se conoce como **ley de Brewster**, y en ocasiones también al ángulo de polarización θ_p se le llama **ángulo de Brewster**, en honor a su descubridor, David Brewster (1781-1868). Porque para una sustancia específica n varía en función de la longitud de onda, el ángulo de Brewster es también una función de la longitud de onda.

Es posible lograr un discernimiento correcto de la polarización por reflexión si imagina que el campo eléctrico de la luz incidente pone en oscilación los electrones de la superficie del material de la figura 38.28b. Las direcciones de las componentes de la oscilación son: 1) paralelas a las flechas que se muestran en el rayo de luz refractado y 2) perpendiculares a la página. Los electrones en oscilación hacen el papel de antenas emitiendo luz con una polarización paralela a la dirección de oscilación. Para las oscilaciones en la dirección 1) no existe radiación en la dirección perpendicular, es decir, a lo largo del rayo reflejado (vea la dirección $\theta = 90°$ de la figura 34.10). Para las oscilaciones en la dirección 2), los electrones emiten luz con una polarización perpendicular a la página (la dirección $\theta = 0$ de la figura 34.10), por lo que la luz reflejada de la superficie en este ángulo es una luz totalmente polarizada paralela a la superficie.

La polarización por reflexión es un fenómeno común. La luz solar, cuando se refleja en el agua, en el vidrio y en la nieve es una luz parcialmente polarizada. Si la superficie es

horizontal, el vector del campo eléctrico de la luz reflejada tiene una componente horizontal intensa. Los anteojos de sol fabricados de un material polarizador reducen el brillo de la luz reflejada. Los ejes de transmisión de las lentes están orientados verticalmente de forma que absorben la componente horizontal intensa de la luz reflejada. Si gira sus anteojos de sol 90°, ya no resultarán tan efectivos para bloquear el brillo o resplandor desde superficies horizontales brillantes.

Figura 38.29 La luz no polarizada que incide en un ángulo al eje óptico en un cristal de calcita se divide en un rayo ordinario (O) y un rayo extraordinario (E). Estos dos rayos están polarizados en direcciones mutuamente perpendiculares. (El dibujo no está a escala.)

Polarización por refracción doble

Los sólidos pueden ser clasificados sobre la base de su estructura interna. Aquellos en los cuales los átomos están organizados con un orden específico se llaman *cristalinos*. La estructura del NaCl de la figura 38.22 es un ejemplo de un sólido cristalino. Aquellos sólidos en los cuales los átomos están distribuidos al azar se llaman *amorfos*. Cuando la luz se desplaza a través de un material amorfo, como por ejemplo el vidrio, se desplaza con una rapidez que es la misma en cualquier dirección. Es decir, el vidrio tiene un solo índice de refracción. No obstante, en ciertos materiales cristalinos, como por ejemplo la calcita y el cuarzo, la rapidez de luz no es la misma en todas direcciones. En estos materiales la rapidez de la luz depende de la dirección de propagación y del plano de polarización de la luz. Estos materiales se caracterizan por tener dos índices de refracción, por lo que a menudo se les llama materiales de **doble refracción o birrefringentes**.

Cuando la luz no polarizada entra en un material birrefringente, puede dividirse en un rayo ordinario (O) y un rayo extraordinario (E). Estos dos rayos tienen polarizaciones mutuamente perpendiculares y viajan con magnitudes de velocidades diferentes a través del material. Las dos magnitudes de velocidad corresponden a dos índices de refracción, n_O para el rayo ordinario y n_E para el rayo extraordinario.

Existe una dirección, denominada eje óptico, junto con los rayos ordinario y extraordinario que tienen la misma rapidez. De cualquier modo, si entra luz a un material birrefringente en un ángulo al eje óptico, los índices de refracción diferentes ocasionarán que los dos rayos polarizados se dividan y viajen en direcciones diferentes como se muestra en la figura 38.29.

Figura 38.30 Una fuente puntual S en el interior de un cristal de doble refracción produce un frente de onda esférico que corresponde al rayo ordinario (O) y un frente de onda elíptico que corresponde al rayo extraordinario (E). Las dos ondas se propagan a la misma velocidad a lo largo del eje óptico.

El índice de refracción n_O, para el rayo ordinario es el mismo en todas direcciones. Si se pudiera colocar una fuente puntual de luz dentro del cristal como en la figura 38.30, las ondas ordinarias se dispersarían desde la fuente como esferas. El índice de refracción n_E varía con la dirección de propagación. Una fuente puntual envía una onda extraordinaria que tiene frentes de onda elípticos de sección transversal. La diferencia en rapidez para los dos rayos es un máximo en la dirección perpendicular al eje óptico. Por ejemplo, en la calcita, n_O=1.658 con una longitud de onda de 589.3 nm y n_E varía desde 1.658 a lo largo del eje óptico hasta 1.486 perpendicular al eje óptico. Los valores para n_O y el valor extremo n_E de diferentes cristales de doble refracción se proporcionan en la tabla 38.1.

Si coloca una pieza de calcita sobre una hoja de papel y mira a través del cristal cualquier cosa escrita sobre papel, verá dos imágenes, como se muestra en la figura 38.31. Como puede observar de la figura 38.29, estas dos imágenes corresponden a una formada por el rayo ordinario y otra por el rayo extraordinario. Si las dos imágenes son observadas a través de una hoja de vidrio giratoria polarizante, estas imágenes aparecen y desaparecen de

Henry Leap y Jim Lehman.

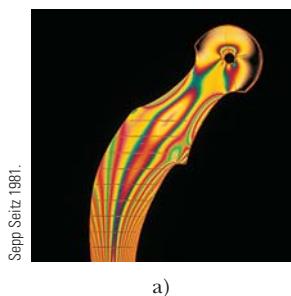



Figura 38.31 Un cristal de calcita produce una imagen doble debido a que se trata de un material birrefringente (de doble refracción).

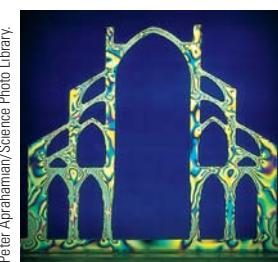



TABLA 38.1

Índices de refracción para algunos cristales de doble refracción a una longitud de onda de 589.3 nm.

Cristal	n_O	n_E	n_O/n_E
Calcita ($CaCO_3$)	1.658	1.486	1.116
Cuarzo (SiO_2)	1.544	1.553	0.994
Nitrato de sodio ($NaNO_3$)	1.587	1.336	1.188
Sulfito de sodio ($NaSO_3$)	1.565	1.515	1.033
Cloruro de zinc ($ZnCl_2$)	1.687	1.713	0.985
Sulfuro de zinc (ZnS)	2.356	2.378	0.991

a)

b)

Figura 38.32 a) Distribución de deformaciones en un modelo plástico de un reemplazo de cadera utilizado en un laboratorio de investigación médica. El patrón se produce cuando el modelo de plástico es observado entre un polarizador y un analizador con orientación perpendicular uno del otro. b) Modelo plástico de una estructura de arco bajo condiciones de carga, observado entre polarizadores perpendiculares. Estos patrones son de utilidad para el diseño óptimo de componentes arquitectónicas.

manera alterna porque los rayos ordinario y extraordinario están polarizados en un plano a lo largo de direcciones mutuamente perpendiculares.

Algunos materiales como el vidrio y el plástico se convierten en birrefringentes cuando son sometidos a un esfuerzo. Suponga que se coloca una pieza de plástico que no está sometida a esfuerzo entre un polarizador y un analizador de manera que la luz pase del polarizador al plástico y de ahí al analizador. Cuando el plástico no está sometido a esfuerzo y el eje del analizador es perpendicular al eje del polarizador, no pasa ningún rayo de luz polarizada a través del analizador. En otras palabras, el plástico que no está sometido a esfuerzo no causa ningún efecto sobre la luz que pasa a través de él. Sin embargo, si se somete el plástico a un esfuerzo, las regiones de mayor esfuerzo se hacen birrefringentes y cambia la polarización de la luz que pasa a través de él. Por esto se observa una serie de bandas brillantes y oscuras en la luz transmitida en donde las bandas brillantes corresponden a las regiones de mayor esfuerzo.

Los ingenieros utilizan a menudo esta técnica, conocida como *análisis de esfuerzo óptico,* para el diseño de estructuras que incluyen desde puentes hasta pequeñas herramientas. Construyen un modelo de plástico y lo analizan bajo diferentes condiciones de carga, a fin de determinar regiones de debilidad potencial o de falla bajo esfuerzo. En la figura 38.32 se muestran algunos ejemplos de modelos plásticos bajo esfuerzo.

Polarización por dispersión

Cuando incide la luz sobre cualquier material, los electrones del material absorben y vuelven a enviar parte de la luz. Esta absorción y rerradiación de la luz por los electrones de las moléculas de gas que forman el aire es lo que hace que la luz solar que llega hasta un observador sobre la Tierra esté parcialmente polarizada. Se puede observar este efecto —conocido como **dispersión—** mirando directamente hacia el cielo a través de anteojos de sol cuyas lentes estén fabricadas de un material polarizador. En ciertas orientaciones, pasa menos luz por las lentes que en otras.

La figura 38.33 ilustra la forma en que la luz solar se polariza al dispersarse. El fenómeno es similar al de la creación de una luz totalmente polarizada al reflejarse de una superficie en el ángulo de Brewster. Un haz de luz solar no polarizado que viaja en dirección horizontal (paralelo a la Tierra) incide sobre una molécula de uno de los gases que conforman el aire, originando la vibración de sus electrones. Estas cargas en vibración actúan como las cargas vibratorias de una antena. La componente horizontal del vector del campo eléctrico de la onda incidente crea una componente horizontal de la vibración de las cargas, y la componente vertical del vector da como resultado una componente vertical de la vibración. Si el observador de la figura 38.33 mira directo hacia arriba (perpendicularmente a la dirección original de propagación de la luz), las oscilaciones verticales de las cargas no emiten radiación alguna hacia él. Por lo tanto, esta persona verá una luz totalmente polarizada en la dirección horizontal, como lo indican las flechas cafés. Si mirara en otras direcciones, la luz estaría parcialmente polarizada en la dirección horizontal.

Figura 38.33 Dispersión de la luz solar no polarizada causada por las moléculas de aire. La luz dispersa que se desplaza perpendicular a la luz incidente es una luz polarizada en un plano porque las vibraciones verticales de las cargas en las moléculas de de aire no emiten luz en esa dirección.

Algunos de los fenómenos que suponen la dispersión de la luz en la atmósfera se pueden entender como sigue. Cuando incide luz de diversas longitudes de onda λ sobre moléculas de gas de diámetro d, donde $d \ll \lambda$, la intensidad relativa de la luz dispersa varía en función de $1/\lambda^4$. La condición $d \ll \lambda$ se cumple para la dispersión a causa de moléculas de oxígeno (O_2) y de nitrógeno (N_2) en la atmósfera, cuyos diámetros son

cercanos a 0.2 nm. Por esto las longitudes de onda corta (luz violeta) se dispersan con mayor eficiencia que las longitudes de onda larga (luz roja). En consecuencia, cuando la luz solar es dispersada por las moléculas de gas que existen en el aire, la radiación de longitud de onda corta (violeta) se dispersa con mayor intensidad que la radiación de longitud de onda larga (rojo).

Cuando mira hacia el cielo en una dirección que no sea hacia el Sol, lo que se ve es la luz dispersa, que es predominantemente violeta. De cualquier modo, sus ojos no son muy sensibles a la luz violeta. La luz del siguiente color en el espectro, azul, se dispersa con menos intensidad que el violeta, pero sus ojos son más sensibles a la luz azul que a la luz violeta. Por esto, observa un cielo azul. Si mira hacia el Sol en el ocaso (o hacia el este al amanecer), estará mirando en dirección hacia el Sol y viendo luz que ha pasado a través de una gran distancia de aire. La mayor parte de la luz azul ha sido dispersada por el aire entre el observador y el Sol. La luz que supera este recorrido a través del aire ha dispersado la mayor parte de su componente azul y, debido a eso dificilmente está cargado hacia el extremo rojo del espectro; como resultado, se ven los colores rojo y naranja en el ocaso.

Actividad óptica

Muchas aplicaciones de importancia de la luz polarizada incluyen materiales que despliegan una **actividad óptica**. Se dice que un material es ópticamente activo si hace girar el plano de polarización de cualquier luz transmitida a través del mismo. El ángulo a través del cual la luz se alterna en un material específico depende de la distancia de la trayectoria a través del material y de la concentración en el caso de que el material esté en solución. Un material ópticamente activo es una solución de azúcar de dextrosa común. Un método estándar para determinar la concentración de las soluciones de azúcar, es medir la rotación producida por una distancia fija de la solución.

La asimetría molecular determina la actividad óptica de un material. Por ejemplo, algunas proteínas son ópticamente activas debido a su forma en espiral.

El cristal líquido que se encuentra en la mayor parte de las calculadoras cambia su actividad óptica debido a la aplicación de un potencial eléctrico entre los diversos componentes de la pantalla. Pruebe utilizar anteojos polarizados para investigar la polarización utilizada en la pantalla de su calculadora.

Pregunta rápida 38.6 Es posible fabricar un polarizador para microondas utilizando una rejilla de alambres metálicos paralelos separados aproximadamente 1 cm. ¿El vector del campo eléctrico para las microondas transmitidas a través de este polarizador es a) paralelo o b) perpendicular a los alambres metálicos?

Pregunta rápida 38.7 Está caminando a través de un pasillo largo que tiene muchas lámparas en el techo y un piso muy brillante, recién encerado. En el piso puede ver la reflexión de todas las lámparas. Ahora, utilizando anteojos polarizados, ya no es posible ver algunas de las reflexiones de las lámparas. (¡Pruébelo!) Las reflexiones que desaparecen son aquellas que a) están más cerca del observador, b) más lejos del observador o c) a una distancia intermedia.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **difracción** es la desviación de la luz de una trayectoria en línea recta cuando la luz pasa a través de una abertura o alrededor de un obstáculo. La difracción se debe a la naturaleza ondulatoria de la luz.

El **patrón de difracción Fraunhofer** que se produce mediante una sola rendija de ancho a sobre una pantalla distante consiste en una franja brillante central y franjas brillantes y oscuras alternantes de mucho menor intensidad. Los ángulos θ_{oscuro} a los que el patrón de difracción tiene intensidad cero, que corresponden a interferencia destructiva, están dados por

$$\text{sen }\theta_{\text{oscuro}} = m\frac{\lambda}{a} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{38.1}$$

El **criterio de Rayleigh**, que es una condición límite de resolución, afirma que dos imágenes formadas por una abertura apenas son distinguibles si el máximo central del patrón de difracción para una imagen cae en el primer mínimo del patrón de difracción para la otra imagen. El ángulo de resolución límite para una rendija de ancho a es $\theta_{\text{mín}} = \lambda/a$, y el ángulo de resolución límite para una abertura circular de diámetro D está dado por $\theta_{\text{mín}} = 1.22\lambda/D$.

Una **rejilla de difracción** consiste en un gran número de rendijas idénticas igualmente espaciadas. La condición para máximos de intensidad en el patrón de interferencia de una rejilla de difracción para incidencia normal es

$$d\,\text{sen }\theta_{\text{brillante}} = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{38.7}$$

donde d es el espaciamiento entre rendijas adyacentes y m es el número de orden del máximo de intensidad.

Cuando un polarizador emite luz polarizada de intensidad $I_{\text{máx}}$ y luego incide sobre un analizador, la luz transmitida a través del analizador tiene una intensidad igual a $I_{\text{máx}} \cos^2 \theta$, donde θ es el ángulo entre los ejes de transmisión del polarizador y el analizador.

En general, la luz reflejada se polariza parcialmente. Sin embargo, la luz reflejada está completamente polarizada cuando el ángulo de incidencia es tal que el ángulo entre los haces reflejado y refractado es de 90°. Este ángulo de incidencia, llamado **ángulo de polarización** θ_p, satisface la **ley de Brewster**:

$$\tan \theta_p = \frac{n_2}{n_1} \tag{38.10}$$

donde n_1 es el índice de refracción del medio donde viaja inicialmente la luz y n_2 es el índice de refracción del medio reflector.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Por qué es posible escuchar sonidos a la vuelta de la esquina pero no se puede ver lo que ocurre en dicho punto?

2. Si estira el brazo, puede bloquear con facilidad la luz solar con la mano e impedir que llegue a sus ojos. ¿Por qué no es posible bloquear de la misma manera el sonido e impedir que llegue a los oídos?

3. **O** Considere una onda que pasa a través de una sola rendija. ¿Qué ocurre con el ancho del máximo central de su patrón de difracción conforme la rendija se reduce a la mitad? a) El máximo central tiene un cuarto de ancho. b) Tiene un medio de ancho. c) Su ancho no cambió. d) Duplica su ancho. e) Cuadruplica su ancho.

4. **O** Suponga que la figura 38.1 se fotografió con luz roja de una sola longitud de onda λ_0. La luz pasó a través de una sola rendija de ancho a y recorrió una distancia L hasta la pantalla donde se tomó la fotografía. Considere el ancho de la franja brillante central, medida entre las franjas oscuras a ambos lados de ella. Clasifique, de mayor a menor, los anchos de la franja central en las siguientes situaciones y distinga cualquier caso de igualdad. a) El experimento se realiza como se fotografió. b) El experimento se realiza con luz cuya frecuencia aumenta en 50%. c) El

experimento se realiza con luz cuya longitud de onda aumenta en 50%. (Su longitud de onda es $3\lambda_0/2$.) d) El experimento se realiza con la luz original y con una rendija de ancho $2a$. e) El experimento se realiza con la luz y la rendija originales, y con distancia $2L$ a la pantalla. f) El experimento se realiza con luz del doble de la intensidad original.

5. **O** En la figura 38.4, suponga que la rendija es una barrera opaca a los rayos X, así como a la luz visible. La fotografía en la figura 38.4b muestra el patrón de difracción producido con luz visible. ¿Qué ocurrirá si el experimento se repite con rayos X como la onda entrante y sin otros cambios? a) El patrón de difracción es similar. b) No hay patrón de difracción notable sino más bien una sombra proyectada de alta intensidad sobre la pantalla, que tiene el mismo ancho que la rendija. c) El máximo central es mucho más ancho y los mínimos ocurren a ángulos más grandes que con la luz visible. d) Los rayos X no llegan a la pantalla.

6. **O** A la distancia usted ve los faros de un automóvil, pero el faro único de una motocicleta no es distinguible. Suponga que los faros del automóvil ahora cambian de haz bajo a alto, de modo que la intensidad de la luz que usted recibe se vuelve tres veces mayor. ¿Qué ocurre en tal caso con su capacidad para definir las dos fuentes de luz? a) Aumenta en un factor de 9. b) Aumenta en un factor de 3. c) Permanece igual. d) Se vuelve casi un tercio. e) Se vuelve casi un noveno.

7. Un rayo láser incide con un ángulo bajo sobre una regla de mecánico que tiene una escala finamente calibrada. Las rayas grabadas sobre la escala generan un patrón de difracción sobre la pantalla. Analice cómo podría utilizarse esta técnica para obtener una medición de la longitud de onda de la luz láser.

8. **O** Cuando usted recibe rayos X de tórax en un hospital, los rayos X pasan a través de un conjunto de costillas paralelas en su pecho. ¿Sus costillas actúan como una rejilla de difracción para los rayos X? a) Sí. Producen haces difractados que se pueden observar por separado. b) No a una extensión mensurable. Las costillas están muy separadas. c) En esencia no. Las costillas están muy juntas. d) En esencia no. Las costillas son pocas. e) Absolutamente no. Los rayos X no se pueden difractar.

9. **O** Ciertas gafas para el sol usan un material polarizador para reducir la intensidad de la luz reflejada como resplandor del agua o de los automóviles. ¿Qué orientación deben tener los filtros polarizadores para ser más efectivos? a) Los polarizadores deben absorber luz con su campo eléctrico horizontal. b) Los polarizadores deben absorber luz con su campo eléctrico vertical. (c) Los polarizadores deben absorber campos eléctricos tanto horizontales como verticales. (d) Los polarizadores no absorben campos eléctricos horizontales ni verticales.

10. ¿Está polarizada la luz que viene del cielo? ¿Cuál es la razón por la cual las nubes vistas a través de anteojos Polaroid muestran un gran contraste en el cielo?

11. **O** Cuando luz no polarizada pasa recta a través de una rejilla de difracción, ¿se polariza? a) No, no lo hace. b) Sí lo hace, con el eje de transmisión paralelo a las rendijas o ranuras en la rejilla. c) Sí lo hace, con el eje de transmisión perpendicular a las rendijas o ranuras en la rejilla. d) Posiblemente lo hace porque un campo eléctrico sobre cierto umbral se bloquea por la rejilla si el campo es perpendicular a las rendijas.

12. Si se pega una moneda a una hoja de vidrio y este conjunto se coloca frente a un rayo láser, la sombra proyectada tendrá anillos de difracción alrededor de sus bordes y un punto brillante en el centro. ¿Cómo es posible esto?

13. ¿De qué manera es posible determinar el índice de refracción de una pieza plana de vidrio de obsidiana opaco?

14. Un láser produce un rayo de unos cuantos milímetros de ancho, con una intensidad uniforme a todo su ancho. Se coloca un cabello estirado verticalmente frente al láser para que intercepte al rayo. ¿De qué manera se relaciona el patrón de difracción que produce sobre una pantalla distante con el patrón de difracción de una rendija vertical de un ancho igual al del cabello? ¿De qué manera sería posible determinar el ancho del cabello a partir de su patrón de difracción?

15. Una estación de radio atiende al auditorio de una ciudad hacia el noreste de sus antenas difusoras. Transmite desde tres torres adyacentes sobre una cresta montañosa, en una línea que va del este al oeste. Demuestre que, si se introducen retrasos en el tiempo entre las señales que radían cada una de las torres, la estación puede maximizar la intensidad neta en dirección a la ciudad (y también en dirección opuesta), y minimizar la señal transmitida hacia otras direcciones. Las torres juntas se dice que forman un *arreglo en fase*.

16. John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), es considerado la última persona que ha entendido todo lo referente a la física y a las matemáticas. Inventó una sirena para niebla mejorada.

Para poder alertar a los buques de una costa, una sirena debe emitir sonido sobre una gran área horizontal en la superficie del océano; no debe desperdiciar energía difundiendo sonido hacia arriba; no debe emitir sonidos hacia abajo, ya que el agua frente a la sirena reflejaría dicho sonido hacia arriba. En la figura P38.16 se muestra la trompeta de la sirena de Rayleigh. ¿Está correctamente orientada? Decida si la dimensión larga de la abertura rectangular debe estar en dirección horizontal o vertical y defienda su decisión.

Figura P38.16

Problemas

Sección 38.2 Patrones de difracción provenientes de rendijas angostas

1. Una luz láser de helio-neón (λ = 632.8 nm) se envía a través de una sola rendija de 0.300 mm de ancho. ¿Cuál es el ancho del máximo central sobre una pantalla que está a 1.00 m de la rendija?

2. Un rayo de luz monocromática verde es difractado por una rendija con un ancho de 0.550 mm. El patrón de difracción se forma sobre una pared que está a 2.06 m más allá de la rendija. La distancia entre las posiciones de intensidad igual a cero a ambos lados de la franja brillante central es de 4.10 mm. Calcule la longitud de onda de la luz láser.

3. Una pantalla se coloca a 50.0 cm de una sola rendija, la cual está iluminada por una luz de 690 nm. Si la distancia entre el primer y el tercer mínimos del patrón de difracción es igual a 3.00 mm, ¿cuál es el ancho de la rendija?

4. En un edificio básicamente opaco a las microondas, entran microondas coherentes de 5.00 cm de longitud de onda a través de una ventana larga y angosta. Si la ventana tiene un acho de 36.0 cm, ¿cuál es la distancia del máximo central al mínimo de primer orden sobre una pared a 6.50 m de la ventana?

5. A través de una puerta de 1.10 m de ancho, colocada en una pared que absorbe el sonido, pasa sonido con una frecuencia de 650 Hz provenientes de una fuente lejana. Determine el número y las direcciones aproximadas de los rayos máximos de difracción que se difunden más allá de la puerta.

6. ● Un rayo láser de 632.8 nm de longitud de onda tiene una sección transversal circular de 2.00 mm de diámetro. Se debe colocar una abertura rectangular en el centro del rayo de manera que, cuando la luz incida de forma perpendicular sobre una pared que está a 4.50 m de distancia, el máximo central tenga un rectángulo de 110 mm de ancho y 6.00 mm de altura. Las dimensiones se observan entre los mínimos que están a cada lado del máximo central. a) Hallar el ancho y la altura que se requieren de la abertura. b) ¿ La dimensión más grande de la mancha central brillante en el patrón de difracción es horizontal o vertical? ¿La dimensión más grande de la abertura es horizontal o vertical? Explique la correspondencia entre estos dos rectángulos, usando un diagrama.

7. Un patrón de difracción se forma sobre una pantalla a 120 cm de distancia de una rendija de 0.400 mm de ancho. Se usa luz monocromática de 546.1 nm. Calcule la intensidad fraccionaria $I/I_{\text{máx}}$ en un punto en la pantalla a 4.10 mm del centro del máximo principal.

8. **¿Qué pasaría si?** La luz de la figura 38.5 llega a una rendija única en un ángulo β desde la dirección perpendicular. Demuestre que la ecuación 38.1, que es la condición de interferencia destructiva, deberá modificarse para que se lea

$$\text{sen } \theta_{\text{oscuro}} = m\left(\frac{\lambda}{a}\right) - \text{sen } \beta$$

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

9. Suponga que pasa luz con una longitud de onda de 650 nm a través de dos rendijas de 3.00 μm de ancho, con sus centros separados 9.00 μm. Elabore un bosquejo de los patrones de difracción e interferencia combinados en la forma de una gráfica de intensidad en función de $\phi = (\pi a \operatorname{sen} \theta)/\lambda$. Puede usar la figura 38.7 como punto de partida.

10. Se envió una luz coherente de 501.5 nm de longitud de onda a través de dos rendijas paralelas en una pared grande y plana. Cada rendija tiene 0.700 μm de ancho. Su centros están separados 2.80 μm. La luz incide sobre una pantalla semicilíndrica, con su eje en el punto medio entre las rendijas. a) Diga cuál es la dirección de cada máximo de interferencia sobre la pantalla, con un ángulo alejándose desde el bisector de las líneas que unen a las rendijas. b) Describa el patrón de luz sobre la pantalla, especificando el número de franjas brillantes y la localización de cada una de ellas. c) Determine la intensidad de la luz sobre la pantalla en el centro de cada franja brillante, expresada como una fracción de la intensidad de la luz $I_{\text{máx}}$ en el centro del patrón.

Sección 38.3 Resolución de una sola rendija y aberturas circulares

11. La pupila del ojo de un gato se reduce a una rendija vertical de un ancho de 0.500 mm a la luz del día. ¿Cuál es la resolución angular para ratones que se encuentran separados horizontalmente? Suponga que la longitud de onda promedio de la luz es de 500 nm.

12. ● Para ver un objeto bajo un microscopio se usa luz amarilla de 589 nm de longitud de onda. El diámetro del objetivo es 9.00 mm. a) ¿Cuál es el ángulo de resolución límite? b) Suponga que es posible usar luz visible de cualquier longitud de onda. ¿Qué color debe elegir para dar el menor ángulo de resolución posible, y cuál es este ángulo? c) Suponga que el espacio entre el objeto y el objetivo está lleno de agua. ¿Qué efecto tiene este cambio sobre la potencia resolutiva cuando se usa luz de 589 nm?

13. Un láser de helio-neón emite luz con una longitud de onda de 632.8 nm. La abertura circular por donde sale el rayo tiene un diámetro de 0.500 cm. Estime el diámetro del rayo a 10.0 km del láser.

14. ● Estrechos tubos brillantes, paralelos y llenos de gas en varios colores forman bloques de letras para presentar el nombre de un centro nocturno. Los tubos adyacentes están separados 2.80 cm. Los tubos que forman una letra están llenos con neón y emiten predominantemente luz roja con una longitud de onda de 640 nm. Para otra letra, los tubos emiten predominantemente luz azul a 440 nm. La pupila del ojo de una observadora, adaptada a la oscuridad, tiene 5.20 mm de diámetro. Si ella está alejada en cierto intervalo de distancias, la observadora puede definir los tubos separados de un color pero no los otros. ¿Cuál color es más fácil que defina? Establezca cómo decidir. ¿La distancia de la observadora debe estar en qué intervalo para que ella defina los tubos sólo de uno de estos dos colores?

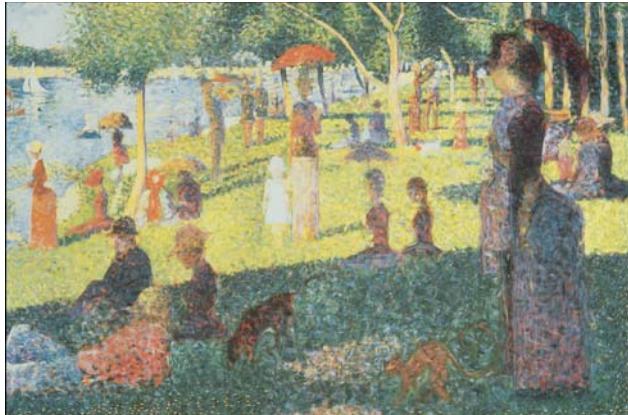
15. El pintor impresionista Georges Seurat creaba pinturas utilizando una enorme cantidad de puntos de pigmentos puros, cada uno de ellos con un diámetro de 2.00 mm, aproximadamente. La idea era poner colores adyacentes, como el rojo y el verde, para formar un lienzo centellante (figura P38.17). ¿Más allá de qué distancia ya no sería posible discernir puntos individuales sobre el lienzo? (Suponga que $\lambda = 500$ nm y que el diámetro de la pupila es de 4.00 mm.)

SuperStock.

Figura P38.15

16. ¿Cuáles son las dimensiones aproximadas del objeto más pequeño en la Tierra que los astronautas pueden definir a simple vista cuando orbitan a 250 km sobre la Tierra? Suponga $\lambda =$ 500 nm y un diámetro de pupila de 5.00 mm.

17. Un satélite espía está constituido esencialmente de un espejo cóncavo de gran diámetro que forma una imagen en un detector de cámara digital y envía, mediante ondas de radio, la imagen a un receptor en Tierra. En efecto, se trata de un telescopio astronómico en órbita, mirando hacia abajo y no hacia arriba. ¿Un satélite espía puede leer las placas de un vehículo?, ¿la fecha en una moneda? Para defender sus respuestas efectúe un cálculo del orden de magnitud y especifique la información que sea necesaria.

18. Una antena de radar circular montada sobre un navío de la Guardia Costera tiene un diámetro de 2.10 m y emite con una frecuencia de 15.0 GHz. A 9.00 kilómetros del barco están dos pequeños botes. ¿Qué tan cerca pueden estar el uno del otro y aún así ser detectados como dos objetos diferentes?

Sección 38.4 Rejilla de difracción

Nota: En los problemas que aparecen a continuación, suponga que la luz incide normalmente sobre las rejillas.

19. Mediante una rejilla de difracción se descompone la luz blanca en sus componentes espectrales. Si la rejilla tiene 2000 ranuras por cada centímetro, ¿en qué ángulo aparece en primer orden la luz roja de 640 nm de longitud de onda?

20. La luz desde un láser de argón incide sobre una rejilla de difracción que tiene 5310 ranuras por cada centímetro. Los máximos central y de primer orden aparecen separados 0.488 m sobre una pared a 1.72 m de la rejilla. Determine la longitud de onda de la luz láser.

21. El espectro del hidrógeno tiene una línea roja de 656 nm y una línea azul-violeta de 434 nm. ¿Cuáles son las separaciones angulares entre estas dos líneas espectrales obtenidas mediante una rejilla de difracción que tiene 4500 ranuras/cm?

22. Un láser de helio-neón ($\lambda = 632.8$ nm) es utilizado para calibrar una rejilla de difracción. Si el máximo de primer orden se presenta en 20.5°, ¿cuál es la distancia entre las ranuras adyacentes en la rejilla?

23. En el espectro de primer orden de un espectrómetro de rejilla se presentan tres líneas espectrales discretas en ángulos de 10.09°, 13.71° y 14.77°. a) Si la rejilla tiente 3660 rendijas por cm, ¿cuáles son las longitudes de onda de la luz? b) ¿En qué ángulos se encontrarán estas líneas en el espectro de segundo orden?

24. Demuestre que, sin importar qué luz blanca se hace pasar a través de una rejilla de difracción con cualquier tamaño de espaciamiento, el extremo violeta del espectro visible continuo en el tercer orden siempre se sobrepone con la luz roja del otro extremo del espectro de segundo orden.

25. Un anaquel de refrigerador es un arreglo de alambres paralelos con espaciamiento uniforme de 1.30 cm entre centros. En aire a 20°C, ultrasonido con una frecuencia de 37.2 kHz de una fuente distante cae perpendicularmente sobre el anaquel. Encuentre el número de haces difractados que salen por el otro lado del anaquel. Encuentre la dirección de cada haz.

26. El láser de un reproductor de CD debe seguir con precisión la pista en espiral, a lo largo de la cual la distancia entre una espira y la siguiente es de aproximadamente sólo 1.25 μm. Un mecanismo de realimentación informa al reproductor si el láser se ha salido de la pista, de forma que el reproductor pueda dirigirlo nuevamente de regreso. La figura P38.26 muestra la forma en que se utiliza una rejilla de difracción para dar información que mantenga el rayo en la pista. La luz del láser pasa a través de una rejilla de difracción justo antes de llegar al disco. Se utiliza el intenso central intenso del patrón de difracción para leer la información en la pista de perforaciones. Los dos máximos laterales de primer orden se utilizan para guiar. La rejilla está diseñada de forma que los máximos de primer orden se formen en superficies planas en ambos lados de la pista de información. Ambos rayos laterales se reflejan en sus propios detectores. Mientras ambos rayos se reflejan en superficies lisas sin perforaciones, se detectan con una intensidad alta constante. De cualquier modo si el rayo principal se sale de la pista uno de los rayos laterales empezará a incidir sobre las perforaciones de la pista de información y se reducirá la luz reflejada. Este cambio es utilizado mediante un circuito electrónico para guiar al rayo de vuelta a la ubicación deseada. Suponga que la luz del láser tiene una longitud de onda de 780 nm y que la rejilla de difracción está colocada a 6.90 μm del disco; también que los rayos de primer orden deben incidir sobre el disco a 0.400 μm a ambos lados de la pista de información. ¿Cuál debería ser la cantidad de ranuras por milímetro en la rejilla?.

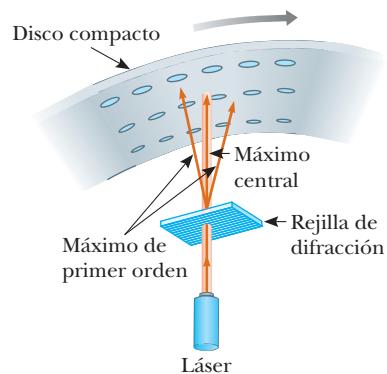



Figura P38.26

27. Una rejilla con 250 ranuras/mm se utiliza con una fuente de luz incandescente. Suponga que el espectro visible abarca un

intervalo en longitudes de onda de 400 a 700 nm. ¿En cuántos ordenes es posible ver a) la totalidad del espectro visible y b) la región de longitudes de onda cortas?

28. ● Un rayo ancho de luz láser con una longitud de onda de 632.8 nm está dirigido a través de varias rendijas paralelas y angostas, separadas 1.20 mm, e incide sobre una hoja de película fotográfica que está a 1.40 m de distancia. El tiempo de exposición se ha escogido de manera que la película se expone sólo en la región central de cada franja brillante. a) Determine la distancia entre estos máximos de interferencia. La película se imprime como transparencia; se ve opaca en toda su extensión excepto en las líneas expuestas. Posteriormente, el mismo rayo de luz láser se dirige a través de la transparencia, haciendo que incida sobre una pantalla que está a una distancia de 1.40 más allá. b) Compruebe que en la pantalla aparecerán varias regiones brillantes paralelas angostas, separadas 1.20 mm, como imágenes reales de las rendijas originales. Si se retira la pantalla, la luz divergirá de las imágenes de las rendijas originales con los mismos frentes de onda reconstruidos que produjeron las rendijas originales. *Sugerencia:* Quizás encuentre útil dibujar diagramas similares al de la figura 38.12. Un razonamiento semejante condujo a Dennis Gabor, en un juego de futbol soccer, a la invención de la holografía.

29. Una rejilla de difracción tiene 4200 ranuras/cm. Sobre una pantalla que está a 2.00 m de la rejilla, se ha determinado que, para un orden especial m, los máximos que corresponden a dos longitudes de onda de sodio muy cercanas (589.0 nm y 589.6 nm) que aparecen separadas 1.59 mm. Determine el valor de m.

Sección 38.5 Difracción de los rayos X mediante cristales

30. El yoduro de potasio (KI) tiene la misma estructura cristalina que el NaCl, con planos atómicos separados 0.353 nm. Un haz monocromático de rayos X muestra un máximo de difracción de primer orden cuando el ángulo rasante es de 7.60°. Calcule la longitud de onda de los rayos X.

31. Si el espaciamiento interplanar del NaCl es de 0.281 nm, ¿cuál es el ángulo previsible en el que los rayos X de 0.140 nm se difractan en un máximo de primer orden?

32. En una superficie de agua de una profundidad uniforme se soporta un muelle ancho sobre pilotes en varias hileras paralelas separadas 2.80 m. Proveniente del océano, se presenta un oleaje de una longitud de onda uniforme, que se desplaza en una dirección que forma un ángulo de 80.0° con las hileras de pilotes. Determine las tres longitudes de onda más largas de las olas que serán reflejadas con fuerza por los pilotes.

33. ● Los átomos en un cristal se encuentran en planos separados por algunas décimas de nanómetro. ¿Pueden producir un patrón de difracción para luz visible como lo hacen para rayos X? Explique su respuesta con referencia a la ley de Bragg.

Sección 38.6 Polarización de las ondas luminosas

El problema 36 del capítulo 34 puede asignarse a esta sección.

34. Una luz no polarizada pasa a través de dos hojas polaroid. El eje de la primera hoja es vertical y el eje de la segunda forma un ángulo de 30.0° con la vertical. ¿Cuál es la fracción transmitida de luz incidente?

35. Una luz polarizada en un plano incide sobre un disco polarizador simple con la dirección de $\vec{\mathbf{E}}_0$ paralela a la dirección del eje de transmisión. ¿Qué ángulo debe girar el disco para que la intensidad del rayo transmitido se vea reducido en un factor de a) 3.00, b) 5.00, c) 10.0?

36. El ángulo de incidencia de un rayo de luz sobre una superficie reflejante es continuamente variable. Se determina que el rayo reflejado es un rayo totalmente polarizado cuando el ángulo de incidencia es de 48°. ¿Cuál es el índice de refracción del material reflejante?

37. El ángulo crítico para la reflexión interna total para el zafiro rodeado por aire es de 34.4°. Calcule su ángulo de polarización.

38. Para un medio transparente específico rodeado por aire, demuestre que el ángulo crítico para la reflexión interna total y el ángulo de polarización están relacionados según la expresión $\cot \theta_p = \operatorname{sen} \theta_c$.

39. ● **Problema de repaso.** a) Una placa transparente con un índice de refracción n_2 está sumergida en un medio con un índice n_1. La luz que se desplaza en el medio que la rodea incide sobre la superficie superior de la placa en el ángulo de Brewster. Demuestre que si, y sólo si las superficies de la placa son paralelas, la luz refractada incidirá en la superficie inferior de la placa en el ángulo de Brewster correspondiente a dicha interfase. b) **¿Qué pasaría si?** En vez de una placa considere

un prisma con un índice de refracción n_2 que separa medios de índices de refracción diferentes n_1 y n_3. La luz se propaga en un plano, además contiene el ángulo de punta del prisma. ¿Existe algún ángulo de punta particular entre las superficies del prisma para el cual la luz pueda incidir en las dos de sus superficies en el ángulo de Brewster al pasar a través del prisma? De ser así, determínelo.

40. En la figura P38.40, suponga que los ejes de transmisión de los discos polarizadores de izquierda y derecha son mutuamente perpendiculares. Además, el disco central gira sobre el eje común con una rapidez angular ω. Demuestre que, si luz no polarizada incide sobre el disco izquierdo con una intensidad $I_{máx}$, la intensidad del haz que sale del disco derecho es

$$I = \frac{1}{16} I_{máx}(1 - \cos 4\omega t)$$

Este resultado significa que la intensidad del haz emergente se modula con una rapidez cuatro veces la rapidez de rotación del disco central. *Sugerencia:* Use las identidades trigonométricas $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ y $\text{sen}^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$, y recuerde que $\theta = \omega t$.

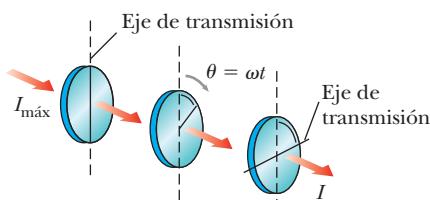



Figura P38.40

41. ● Un haz de luz no polarizada incide sobre una pila de filtros polarizadores ideales. El eje del primer filtro es perpendicular al eje del último filtro en la pila. Encuentre la fracción en la que se reduce la intensidad del haz transmitido en los siguientes tres casos. a) En la pila hay tres filtros cada uno con su eje de transmisión a 45.0° en relación con el filtro precedente. b) En la pila hay cuatro filtros, cada uno con su eje de transmisión a 30.0° en relación con el filtro precedente. c) En la pila hay siete filtros, cada uno con su eje a 15.0° en relación con el filtro precedente. d) Comente acerca de la comparación de los incisos a), b) y c).

Problemas adicionales

42. ● Luz láser con una longitud de onda de 632.8 nm se dirige a través de una rendija o dos rendijas y se le permite caer sobre una pantalla 2.60 m más allá. La figura P38.42 muestra el patrón sobre la pantalla, con una regla en centímetros bajo ella. ¿La luz pasa a través de una rendija o de dos rendijas? Explique cómo puede decirlo. Si una rendija, encuentre su ancho. Si dos rendijas, encuentre la distancia entre sus centros.

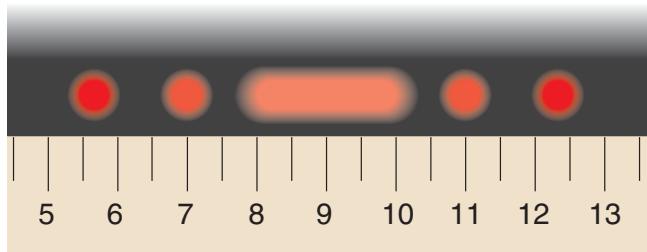



Figura P38.42

43. Utilice una secuencia de filtros de polarización ideales, cada uno con su eje en el mismo ángulo que el eje del filtro precedente, para girar 45° el plano de polarización de un haz luminoso polarizado. Sólo acepta 10% de reducción máxima en la intensidad. a) ¿Cuántos polarizadores necesita para lograr su objetivo? b) ¿Cuál es el ángulo entre polarizadores adyacentes?

44. ● La figura P38.44 muestra un megáfono en uso. Elabore una descripción teórica de cómo funciona un megáfono. Puede suponer que el sonido de su voz se emite justo a través de la abertura de su boca. La mayor parte de la información en la conversación es transportada no en una señal a la frecuencia fundamental, sino en ruidos y en armónicos, con frecuencias de unos cuantos miles de hertz. ¿Su teoría permite predecir algo que sea fácil de comprobar?

© Doug Pensigner/Getty Images.

Figura P38.44

45. En un patrón de difracción de una rendija, a) encuentre la relación de la intensidad del máximo lateral de primer orden a la intensidad del máximo central. b) Encuentre la razón de

la intensidad del máximo lateral de segundo orden a la intensidad del máximo central. Puede suponer que cada máximo lateral está a la mitad entre los mínimos adyacentes.

46. Considere una onda de luz que pasa a través de una rendija. Dé un argumento matemático de que más de 90% de la energía transmitida está en el máximo central del patrón de difracción. *Sugerencia:* Piense en la energía como representada por el área sombreada en la figura 38.6a. Resuelva el problema 45 como preparación para éste. No es necesario que calcule el porcentaje preciso, pero explique las etapas de su razonamiento. Puede usar la identificación

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

47. Sobre una rendija sencilla incide la luz de un láser helio-neón ($\lambda = 632.8$ nm). ¿Cuál es el máximo ancho de la rendija en el cual no se observan mínimos de difracción?

48. ● Dos motocicletas separadas lateralmente 2.3 m se están aproximando a un observador quien sostiene un "husmeador de campo" sensible a luz infraroja de longitud de onda de 885 nm ¿Qué diámetro de abertura se requiere si los faros delanteros de la motocicleta se definen a una distancia de 12.0 km. Suponga que la luz se propaga a través del aire uniforme y perfectamente estable. Comente qué tan real es esta consideración.

49. **Problema de repaso.** Un rayo de luz de 541 nm incide sobre una rejilla de difracción que tiene 400 ranuras/mm. a) Determine el ángulo del rayo de segundo orden. b) **¿Qué pasaría si?** Todo el aparato se sumerge en el agua, ¿cuál sería el nuevo ángulo de difracción de segundo orden? c) Demuestre que los dos rayos difractados de los incisos a) y b) están relacionados entre sí mediante la ley de la refracción.

50. El *Very Large Array* (VLA) es un conjunto de 27 antenas parabólicas que están dispuestas en los condados de Caton y de Socorro, en Nuevo México (figura P38.50). Las antenas pueden separarse utilizando rieles de ferrocarril y sus señales combinadas consiguen un poder de resolución correspondiente a una abertura sintética de 36.0 km de diámetro. a) Si los detectores están sintonizados a una frecuencia de 1.40 GHz, ¿cuál es la resolución angular del VLA? b) Las nubes de hidrógeno siderales emiten a esta frecuencia. ¿Cuál debe ser la distancia de separación de dos nubes que estén a 26 000 años luz de la Tierra en el centro de la galaxia, si es preciso definirlas? c) **¿Qué pasaría si?** Conforme un telescopio observa el cielo, un halcón acecha desde lo alto volando en círculos. Determine la resolución angular del ojo del halcón. Suponga que el halcón es altamente sensible a la luz verde de 500 nm de longitud de onda y que tiene un diámetro de pupila de 12.0 mm. d) En tierra, 30 m debajo, se encuentra un ratón. ¿Qué separación deben tener los bigotes del ratón para que los pueda definir el halcón?

Ricardo Giovanelli y Martha Haynes, Cornell University.

Figura P38.50

51. Un rayo luminoso de 750 nm incide sobre la superficie plana de cierto líquido, dividiéndose el rayo en un haz reflejado y un haz refractado. Si el rayo reflejado está totalmente polarizado a 36.0°, ¿cuál es la longitud de onda del rayo refractado?

52. ● En la figura P38.52a se muestran las plumas iridiscentes del pavo real. La superficie de una bárbula microscópica está constituida por una queratina transparente que soporta bastones de melanina café oscuro en una red cristalina regular, como se observa en la figura P38.52b. (Sus uñas están hechas de queratina, y la melanina es el pigmento oscuro que le da color a la piel humana.) En una sección de la pluma, que puede parecer color turquesa (azul-verde), suponga que los bastones de melanina están separados de manera uniforme 0.25 μm, con aire entre ellos. a) Explique cómo esta estructura puede

© Diane Schiumo 1988, Fundamental Photographs.

a) b)

Figura P38.52

verse de color azul verde si no contiene pigmentos de esos colores. b) Además explique cómo puede verse color violeta si la luz incide sobre la misma en una dirección distinta. c) Explique de qué forma puede presentar colores diferentes a la vista de manera simultánea, que es una característica de la iridiscencia. d) Un disco compacto puede verse de cualquiera de los colores del arco iris. Explique por qué esta porción de la pluma no puede verse ni color amarillo ni rojo. e) ¿Qué podría ser diferente respecto a la organización de bastones de melanina en alguna parte de la pluma que se minifiesta en rojo?

53. Sobre una rejilla de difracción incide normalmente una luz de 500 nm de longitud de onda. Si el máximo de tercer orden del patrón de difracción se observa a 32.0°, a) ¿cuál es el número de ranuras por centímetro de la rejilla? b) Determine el número total de máximos primarios que pueden observarse en esta situación.

54. ● La luz en el aire golpea una superficie de agua en el ángulo de polarización. La parte del haz refractada en el agua golpea una loza sumergida de material con índice refractivo n, como se muestra en la figura P38.54. La luz reflejada de la superficie superior de la loza es completamente polarizada. a) Encuentre el ángulo θ entre la superficie del agua y la superficie de la loza como función de n. b) Identifique el máximo valor imaginable de θ y describa la situación física a la que corresponde. c) Identifique el valor mínimo imaginable de θ y describa la situación física a la que corresponde.

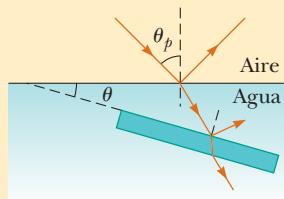



Figura P38.54

55. Una rayo de luz rojo brillante de 654 nm de longitud de onda pasa a través de una rejilla de difracción. Cerrando el espacio más allá de la rejilla está una pantalla grande que forma la mitad de un cilindro centrado sobre la rejilla con su eje paralelo a las rendijas en la rejilla. En la pantalla aparecen 15 puntos brillantes. Determine los valores máximo y mínimo posibles para la separación entre las rendijas de la rejilla de difracción.

56. Una *cámara de abertura mininuta sin lente* tiene una abertura circular pequeña de diámetro D. La luz desde los objetos distantes pasa a través de la abertura al interior de una caja oscura, e incide sobre una pantalla colocada a una distancia L. Si D es demasiado grande, el despliegue sobre la pantalla estará borroso, ya que un punto brillante en el campo de visión emitirá luz en un círculo de diámetro ligeramente mayor que D. Por otra parte, si D es demasiado pequeño, la difracción hará borroso el despliegue. La pantalla mostrará una imagen razonablemente nítida si el diámetro del disco central del patrón de difracción, especificado por la ecuación 38.6, es igual a D en la pantalla. a) Demuestre que para el caso de una luz monocromática con frentes de onda planos y $L \gg D$, la condición para una imagen nítida se cumple cuando $D^2 = 2.44\ \lambda L$. b) Determine el diámetro óptimo de la abertura para una luz de 500 nm proyectada en una pantalla a 15.0 cm.

57. Una imagen de televisión estándar está compuesta aproximadamente por 485 líneas horizontales de intensidades de luz variable. Suponga que su capacidad para definir las líneas está restringida únicamente por el criterio de Rayleigh y que sus pupilas tienen 5.00 mm de diámetro. Calcule la relación de la distancia de observación mínima en comparación con la dimensión vertical de la imagen de forma que no puedan definir las líneas. Suponga que la longitud de onda promedio de la luz que emite la pantalla es de 550 nm.

58. a) Una luz que viaja en un medio con un índice de refracción n_1 incide formando un ángulo θ con la superficie de un medio de índice n_2. El ángulo entre los rayos reflejado y refractado es igual a β. Demuestre que

$$\tan\theta = \frac{n_2 \operatorname{sen}\beta}{n_1 - n_2\cos\beta}$$

Sugerencia: Utilice la identidad sen $(A + B)$ = sen A cos B + cos A sen B. b) **¿Qué pasaría si?** Demuestre que esta expresión para tan θ se reduce a la ley de Brewster en el caso de que $\beta = 90°$, $n_1 = 1$ y $n_2 = n$.

59. Suponga que la rendija simple de la figura 38.4 tiene un ancho de 6.00 cm y que está frente a una fuente de microondas que opera a 7.50 GHz. a) Calcule el ángulo subtendido por el primer mínimo del patrón de difracción. b) ¿Cuál es la intensidad relativa $I/I_{máx}$ en $\theta = 15.0°$? c) Suponga que dos fuentes como ésta, separadas 20.0 cm lateralmente, están por detrás de la rendija. ¿Cuál deberá ser la distancia máxima entre el plano de las fuentes y la rendija si es necesario que los patrones de difracción se definan? En este caso, no resulta válida la aproximación sen $\theta \approx$ tan θ debido al valor relativamente pequeño de a/λ.

60. ● a) Dos hojas polarizadoras se colocan juntas con sus ejes de transmisión cruzados de modo que no se transmite luz. Una tercera hoja se inserta entre ellas con su eje de transmisión

en un ángulo de 45.0° respecto a cada uno de los otros ejes. Encuentre la fracción de la intensidad de la luz no polarizada incidente transmitida por la combinación de tres hojas. Suponga que cada hoja polarizadora es ideal. b) Una mujer busca en Internet una colección de recetas para platillos principales sencillos. Usa una computadora para eliminar todas las recetas que contengan carne y luego eliminar todas las restantes recetas que contengan queso. Después de estos dos procesos de ordenación no quedan recetas de la base de datos original. Con la misma base de datos, a continuación intenta una secuencia de tres rondas de selección: eliminar todas las recetas que contengan carne, eliminar las recetas restantes que contengan más de una pequeña porción de carne o queso, y eliminar las recetas restantes que contengan cualquier queso. Después de estos tres procesos de ordenamiento, ¿quedará alguna receta en la lista? Compare y contraste los resultados del experimento de ordenamiento de recetas con los resultados del experimento de polarización en el inciso a).

61. La escala de un mapa está dada en kilómetros por centímetro, especificando la distancia sobre la Tierra que representa cualquier distancia en el mapa. La escala de un espectro es su *dispersión,* dada en nanómetros por centímetro, que define el cambio en longitud de onda que representa una distancia en el espectro. Es necesario conocer cuál es la dispersión, a fin de poder comparar un espectro con otro y efectuar mediciones de (por ejemplo) un corrimiento Doppler. Haga que y represente la posición relativa con el centro de un patrón de difracción proyectado en una pantalla plana a una distancia L por una rejilla de difracción con un espaciamiento de rendijas d. La dispersión es igual a $d\lambda/dy$. a) Pruebe que la dispersión se conoce por

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{L^2 d}{m(L^2 + y^2)^{3/2}}$$

b) Calcule la dispersión en el primer orden para una luz con una longitud de onda media de 550 nm, analizada mediante una rejilla que tiene 8000 ranuras/cm y proyectada sobre una pantalla a 2.40 m de distancia.

62. Dos rayos de luz de longitud de onda muy próxima inciden sobre una rejilla de difracción. a) Partiendo de la ecuación 38.7, demuestre que la dispersión angular de la rejilla se conoce por

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

b) Una rejilla cuadrada de 2.00 cm de lado y que contiene 8000 rendijas uniformemente separadas, es utilizada para analizar el espectro del mercurio. Dos líneas muy próximas emitidas por este elemento tienen 579.065 nm y 576.959 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la separación angular de estas dos longitudes de onda en el espectro de segundo orden?

63. La figura P38.63a es un dibujo tridimensional de un cristal birrefringente. Las líneas discontinuas ilustran cómo una placa delgada de material colocada paralela se podría cortar del especimen más grande y que tenga el eje óptico del cristal paralelo a las caras de la placa. A la sección del cristal cortada de esta manera, se le conoce como *placa de retardo.* Cuando un rayo de luz incide sobre la placa perpendicular a la dirección del eje óptico, como se muestra en la figura P38.63b, el rayo O y el rayo E viajan a lo largo de una sola línea recta, pero con rapidez diferente. a) Suponga que d es el espesor de la placa y demuestre que la diferencia de fase entre los rayos O y E es igual a

$$\theta = \frac{2\pi d}{\lambda} |n_O - n_E|$$

donde λ es la longitud de onda en el aire. b) En un caso específico, la luz incidente tiene una longitud de onda de 550 nm. Determine el valor mínimo de d para una placa de cuarzo en la cual $\theta = \pi/2$. Este tipo de placa se conoce como *placa de cuarto de onda.* Use los valores de n_O y n_E de la tabla 38.1.

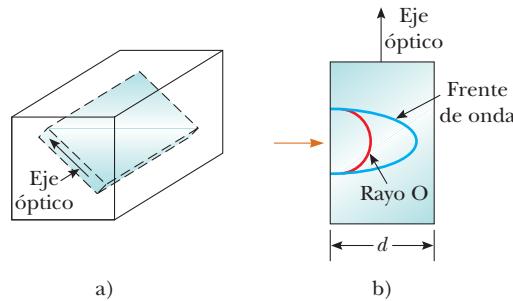



Figura P38.63

64. ¿Cuál es la separación que experimenta un haz de luz por difracción? Una respuesta cuantitativa es *todo el ancho a la mitad del máximo* del máximo central del patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija. Puede evaluar este ángulo de dispersión en este problema y en el siguiente. a) En la ecuación 38.2, defina πa sen $\theta/\lambda = \phi$ y demuestre que, en el punto donde $I = 0.5\ I_{máx}$, debe tener sen $\phi = \phi/\sqrt{2}$. b) Sea y_1 = sen ϕ y $y_2 = \phi/\sqrt{2}$. Grafique y_1 y y_2 sobre el mismo juego de ejes en un intervalo desde $\phi = 1$ rad hasta $\phi = \pi/2$ rad. Determine ϕ desde el punto de intersección de las dos curvas. c) Demuestre después que, si la fracción λ/a no es grande, todo el ancho angular a la mitad del máximo de difracción central es igual a $\Delta\theta = 0.886\ \lambda/a$.

65. Otro método para resolver la ecuación trascendental $\phi = \sqrt{2}$ sen ϕ del problema 64 es estimar un primer valor para ϕ, utilizando una computadora o una calculadora para ver cómo

coincide, y continuar la actualización de su estimación hasta que la ecuación se equilibre. ¿Cuántas etapas (iteraciones) serán necesarias?

66. El patrón de difracción de una sola rendija se describe mediante la ecuación

$$I_\theta = I_{\text{máx}} \frac{\text{sen}^2 \phi}{\phi^2}$$

donde $\phi = (\pi a \text{ sen } \theta)/\lambda$. El máximo central está en $\phi = 0$, y los máximos laterales están *aproximadamente* en $\phi = (m + \frac{1}{2})\pi$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$ Determine con más precisión a) la ubicación del primer máximo lateral, donde $m = 1$, y b) la ubicación del segundo máximo lateral. Observe en la figura 38.6a que la gráfica de intensidad con ϕ tiene una tangente horizontal en máximos y también en mínimos. Necesitará resolver una ecuación trascendental.

67. Un rayo de luz de 632.8 nm de longitud de onda ilumina una rendija sencilla, formando un patrón de difracción sobre una pantalla a un metro de la rendija. Con los datos de la siguiente tabla, trace la intensidad relativa en función de la posición. Escoja un valor apropiado para el ancho a de la rendija y, sobre la misma gráfica utilizada para los datos experimentales, trace la expresión teórica correspondiente a la intensidad relativa.

$$\frac{I_\theta}{I_{\text{máx}}} = \frac{\text{sen}^2 \phi}{\phi^2}$$

donde $\phi = (\pi a \text{ sen } \theta)/\lambda$. ¿Cuál es el valor de a que coincide mejor con la teoría y con el experimento?

Intensidad relativa	Posición relativa al máximo central (mm)	Intensidad relativa	Posición relativa al máximo central (mm)
1.00	0	0.029	10.5
0.95	0.8	0.013	11.3
0.80	1.6	0.002	12.1
0.60	2.4	0.000 3	12.9
0.39	3.2	0.005	13.7
0.21	4.0	0.012	14.5
0.079	4.8	0.016	15.3
0.014	5.6	0.015	16.1
0.003	6.5	0.010	16.9
0.015	7.3	0.004 4	17.7
0.036	8.1	0.000 6	18.5
0.047	8.9	0.000 3	19.3
0.043	9.7	0.003	20.2

Respuestas a las preguntas rápidas

38.1 a) La ecuación 38.1 muestra que una reducción en a da como resultado un incremento en los ángulos en los que aparecen las franjas oscuras.

38.2 i) En la ecuación 38.4, la relación d/a es independiente de la longitud de onda, por lo que el número de franjas del pico central del patrón de difracción sigue igual. La ecuación 38.1 indica que una reducción en la longitud de onda genera una reducción del ancho del pico central si se grafica I en términos de y como en la figura 38.4. De cualquier modo, se grafica I en función de $(\pi/\lambda)\ a \text{ sen } \theta$ como en la figura 38.7 el ancho de pico es independiente de λ.

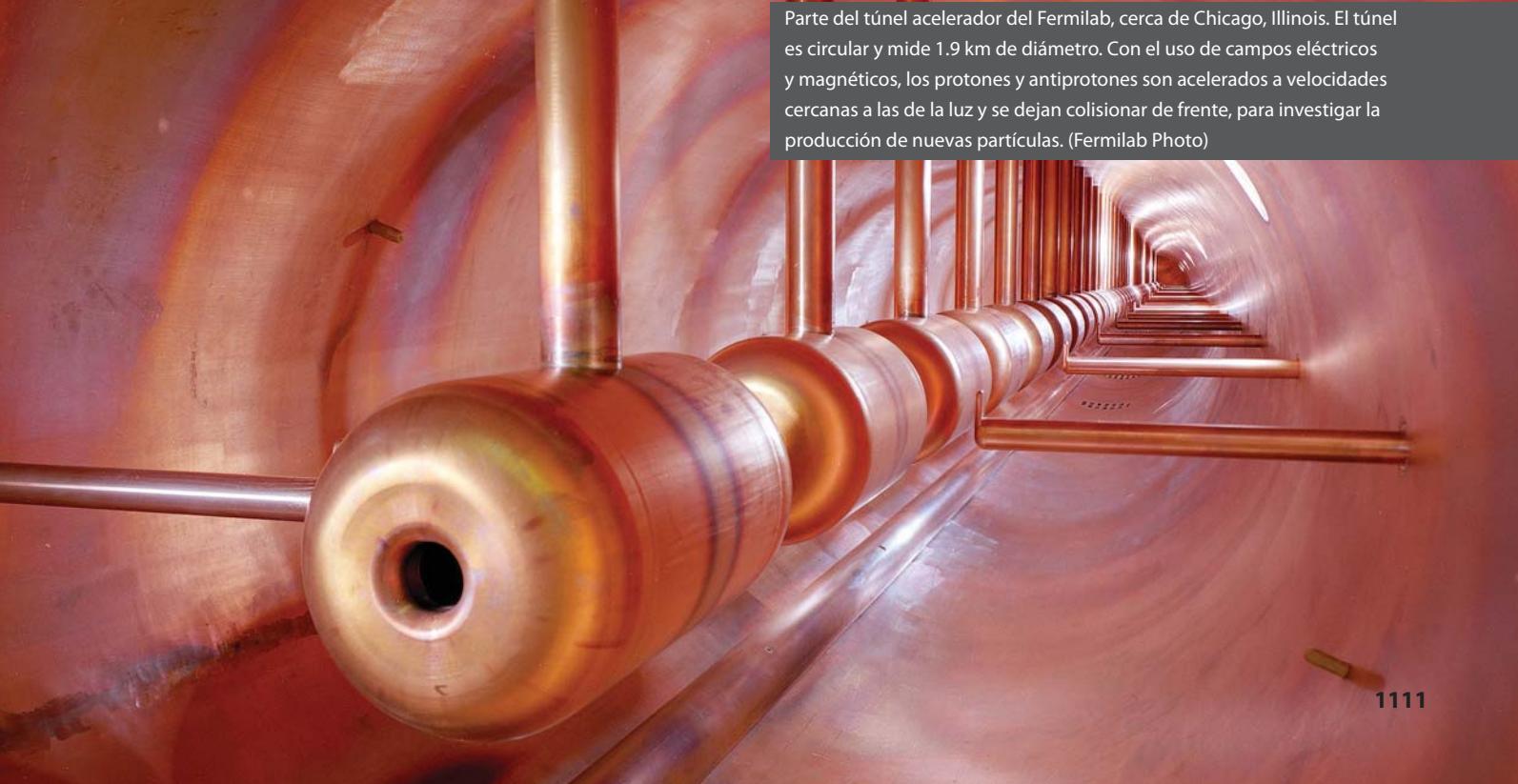
38.3 b) El ancho efectivo de la rendija del ojo del gato en la dirección vertical es mayor que en la dirección horizontal. Por lo tanto, el ojo tiene un mayor poder de resolución para luces separadas en la dirección vertical y resultaría más efectivo para definir las luces del mástil del barco.

38.4 a) Se desea reducir la separación angular mínima para dos objetos por debajo del ángulo subtendido por las dos estrellas en el sistema binario. Se puede hacer lo anterior reduciendo la longitud de onda de la luz; esto, en esencia, provoca que sea mayor la abertura, en relación con la longitud de onda

de la luz, y el poder de resolución se incrementa. Debido a eso debería seleccionar un filtro azul.

38.5 c) Con una longitud de onda duplicada, el patrón será más ancho. Las opciones a) y d) ensanchan aún más el patrón. La ecuación 38.10 muestra que la opción b) hace que sen θ se duplique. Debido a que no puede utilizar la aproximación para ángulos pequeños, sin embargo, duplicar sen θ no es lo mismo que duplicar θ, lo que se traduciría en la duplicación de la posición de un máximo a lo largo de la pantalla. Si sólo considera máximos de ángulos pequeños, la opción b) podría funcionar, pero en el caso de los ángulos grandes no es útil.

38.6 b) Los vectores de campo eléctrico paralelos a los alambres metálicos hacen que los electrones en el metal oscilen paralelamente a los alambres. Por lo tanto, la energía de las ondas con estos vectores de campo eléctrico se transfiere al metal al acelerar estos electrones, y por último se transforman en energía interna debido a la resistencia del metal. Las ondas con vectores de campo eléctrico perpendicular a los alambres metálicos pasan a través de ellos, ya que no tienen la capacidad para acelerar a los electrones.

38.7 c) En alguna distancia intermedia, los rayos luminosos de los accesorios incidirán en el suelo, formando el ángulo de Brewster, y se reflejarán en sus ojos. Debido a que esta luz estará polarizada horizontalmente, no podrá pasar a través de sus anteojos polarizados. Si inclina la cabeza hacia un costado, las reflexiones reaparecerán.

Física moderna

A fines del siglo XIX muchos científicos creyeron haber aprendido más de lo que conocían acerca de la física. Las leyes de Newton del movimiento y su teoría de la gravitación universal, la obra teórica de Maxwell al unificar la electricidad y el magnetismo, las leyes de la termodinámica y la teoría cinética y los principios de óptica eran altamente satisfactorios para explicar una gran variedad de fenómenos.

No obstante, a principios del siglo XX, una importante revolución sacudió al mundo de la física. En 1900 Max Planck dio a conocer las ideas básicas que llevaron a la formulación de la teoría cuántica y en 1905 Albert Einstein formuló su teoría especial de la relatividad. Einstein pudo captar la agitación de aquellos tiempos: "Fue una época maravillosa para vivir." Ambas teorías iban a ejercer un profundo efecto en la comprensión de la naturaleza. En unas pocas décadas inspiraron nuevos desarrollos en los campos de la física atómica, la física nuclear y la física de la materia condensada.

En el capítulo 39 se presenta la teoría especial de la relatividad, la cual da una nueva y más profunda visión de las leyes físicas. Aun cuando las predicciones de esta teoría violan con frecuencia el sentido común, la teoría describe correctamente los resultados de experimentos que comprenden magnitudes de velocidades cercanas a la de la luz. En versión extendida de este texto, *Física para ciencias e ingeniería con Física Moderna,* se cubren los conceptos básicos de mecánica cuántica y su aplicación a la física atómica y molecular, y se introduce a la física del estado sólido, la física nuclear, la física de partículas y la cosmología.

Es necesario recordar que, aun cuando la física que se desarrolló durante el siglo XX llevó a múltiples logros tecnológicos de importancia, la historia aún está incompleta. Seguirá habiendo descubrimientos que evolucionarán durante nuestra vida, y muchos de ellos profundizarán o refinarán la comprensión de la naturaleza y el mundo que rodea a la humanidad. Aún es "una época maravillosa para vivir".

Parte del túnel acelerador del Fermilab, cerca de Chicago, Illinois. El túnel es circular y mide 1.9 km de diámetro. Con el uso de campos eléctricos y magnéticos, los protones y antiprotones son acelerados a velocidades cercanas a las de la luz y se dejan colisionar de frente, para investigar la producción de nuevas partículas. (Fermilab Photo)

Sobre los hombros de un gigante. David Serway, hijo de uno de los autores de este libro, cuida a sus hijos Nathan y Kaitlyn que juegan en los brazos del monumento a Albert Einstein en Washington, D.C. Es bien sabido que Einstein, principal arquitecto de la relatividad, fue muy cariñoso con los niños. (Emily Serway)

39 Relatividad

Las experiencias y observaciones cotidianas tienen que ver con cuerpos que se mueven con magnitudes de velocidades mucho menores que la rapidez de la luz. La mecánica de Newton fue formulada al observar y describir el movimiento de esos cuerpos, y este formulismo es lo suficientemente satisfactorio para describir una amplia variedad de fenómenos que se presentan. Con todo, no describe en forma apropiada el movimiento de cuerpos cuyas magnitudes de velocidades se aproximan a la de la luz.

En términos experimentales, las predicciones de la teoría de Newton se pueden probar con magnitudes de velocidad altas al acelerar electrones u otras partículas cargadas a través de una gran diferencia de potencial eléctrico. Por ejemplo, es posible acelerar un electrón con una rapidez de $0.99c$ (donde c es la rapidez de la luz) si se usa una diferencia de potencial de varios millones de volts. Según la mecánica de Newton, si la diferencia de potencial se aumenta en un factor de 4, la energía cinética del electrón deberá ser cuatro veces mayor y su rapidez se duplicará a $1.98c$. No obstante, algunos experimentos demuestran que la rapidez del electrón —así como la rapidez de cualquier otro cuerpo en el Universo— siempre es menor que la rapidez de la luz, cualquiera que sea la magnitud del voltaje acelerador. Ya que no pone un límite superior a la rapidez, la mecánica de Newton no concuerda con resultados experimentales modernos y es claramente una teoría limitada.

En 1905, a la edad de sólo 26 años, Einstein publicó su teoría especial de la relatividad. Respecto a la teoría, Einstein escribió:

> La teoría de la relatividad surgió de la necesidad, de serias y profundas contradicciones de la vieja teoría de la que parecía no haber escape. La fuerza de la nueva teoría está en la consistencia y sencillez con la que resuelve todas estas dificultades...[1]

Aun cuando Einstein hizo muchas otras aportaciones a la ciencia, la teoría especial de la relatividad por sí sola representa uno de los más grandes logros intelectuales de todos los tiempos. Con esta teoría pueden pronosticarse correctamente observaciones experimentales sobre los intervalos de rapidez desde $v = 0$ hasta magnitudes de velocidades que se aproximan a la de la luz. Con magnitudes de velocidades bajas, la teoría de Einstein se reduce a la mecánica de Newton como una situación limitante. Es importante reconocer que Einstein estaba trabajando con el electromagnetismo cuando desarrolló la teoría especial de la relatividad. Estaba convencido de que las ecuaciones de Maxwell eran correctas, y para conciliarlas con uno de sus propios postulados, Einstein se vio forzado a pasar a la noción revolucionaria de suponer que el espacio y el tiempo no eran absolutos.

Este capítulo presenta una introducción a la teoría especial de la relatividad, con énfasis en algunas de sus pronósticos. Además de su bien conocido y esencial papel en la física teórica, la teoría especial de la relatividad tiene aplicaciones prácticas, entre las que se incluye el diseño de plantas de energía nuclear y aparatos modernos del sistema de posicionamiento global moderno (GPS, global positioning system). Estos dispositivos no funcionan si se diseñan de acuerdo con principios no relativistas.

39.1 Principio galileano de la relatividad

Para describir un evento físico, debe establecer un marco de referencia. El estudiante debe recordar del capítulo 5, que un marco inercial de referencia es aquel en el que se observa que un objeto no tiene aceleración cuando no actúan fuerzas sobre él. Además, cualquier sistema que se mueva con velocidad constante respecto a un marco inercial también debe estar en un marco inercial.

No hay marco inercial absoluto de referencia. En consecuencia, los resultados de un experimento realizado en un vehículo que se mueve con velocidad uniforme serán idénticos a los resultados del mismo experimento realizado en un vehículo inmóvil. El enunciado formal de este resultado se denomina **principio galileano de la relatividad:**

Las leyes de la mecánica deben ser las mismas en todos los marcos inerciales de referencia.

◀ Principio galileano de la relatividad

Considere una observación que ilustra la equivalencia de las leyes de la mecánica en diferentes marcos inerciales. Una camioneta de reparto se mueve con velocidad constante, como se muestra en la figura 39.1a. Si un pasajero en ella lanza una pelota

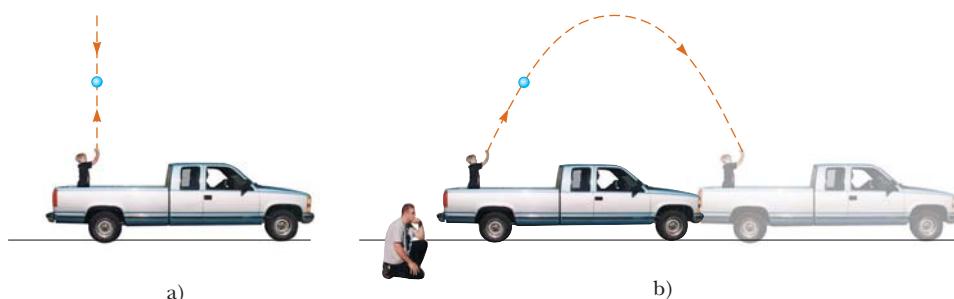



Figura 39.1 a) El observador de la camioneta ve que la pelota se mueve en una trayectoria vertical cuando la lanza hacia arriba. b) El observador que está en el suelo ve la trayectoria de la pelota como una parábola.

[1] A. Einstein y L. Infeld, *The Evolution of Physics*, Nueva York, Simon and Schuster, 1961.

directamente hacia arriba, y si se desprecian los efectos del aire, el pasajero observará que la pelota se mueve en una trayectoria vertical. El movimiento de la pelota parece ser exactamente igual que si la pelota fuera lanzada por una persona en reposo en el suelo. La ley de la gravitación universal y las ecuaciones de movimiento bajo aceleración constante se cumplen ya sea que la camioneta se encuentre en reposo o en movimiento uniforme.

Ambos observadores coinciden con las leyes de física: cada uno de ellos lanza una pelota directamente hacia arriba y ésta sube y cae en sus manos. ¿Pero, qué hay de la *trayectoria* de la pelota lanzada por el observador a bordo de la camioneta? El observador que está en el suelo ve la trayectoria de la pelota como una parábola, como se ve en la figura 39.1b, mientras que, como se mencionó, el observador de la camioneta ve que la pelota se mueve en trayectoria vertical. Además, de acuerdo con el observador que está en el suelo, la pelota tiene una componente horizontal de velocidad igual a la de la camioneta. Aun cuando los dos observadores no están de acuerdo con ciertos aspectos, coinciden en la validez de las leyes de Newton y en principios clásicos como la conservación de la energía o la conservación de la cantidad de movimiento lineal. Este acuerdo implica que no hay experimento mecánico que pueda detectar diferencia alguna entre los dos marcos inerciales. Lo único que se puede detectar es el movimiento relativo de un marco respecto al otro.

Figura 39.2 Se presenta un evento en el punto P. El evento es visto por dos observadores en marcos inerciales S y S′, donde S′ se mueve con una velocidad $\vec{v}$ respecto a S.

Pregunta rápida 39.1 ¿Cuál de los dos observadores de la figura 39.1 ve la trayectoria correcta de la pelota? a) El observador de la camioneta, b) el observador en tierra o c) ambos.

Suponga que se presenta algún fenómeno físico, que llamará *evento,* el cual es observado por alguien en reposo en un marco inercial de referencia. Al decir que un observador está "en un marco", significa que está en reposo respecto al origen de ese marco. La ubicación y tiempo del evento pueden ser especificados por las cuatro coordenadas (x, y, z, t). Lo deseable es poder transformar las coordenadas de un observador en un marco inercial a las de otro en un marco que se mueve con velocidad relativa uniforme en comparación con el primer marco.

Considere dos marcos inerciales S y S′ (figura 39.2). El marco S′ se mueve con una velocidad constante $\vec{v}$ a lo largo de los ejes comunes x y x', donde $\vec{v}$ se mide respecto a S. Suponga que los orígenes de S y S′ coinciden en $t = 0$ y que se presenta un evento en el punto P en el espacio en algún instante. Un observador en S describe el evento con coordenadas espacio–tiempo (x, y, z, t), mientras que un observador en S′ usa las coordenadas primas (x', y', z', t') para describir el mismo evento. Como muestra la geometría de la figura 39.2, las correspondencias entre estas coordenadas se escriben como

Ecuaciones de transformación galileanas ►

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t \tag{39.1}$$

Éstas son las **ecuaciones de transformación galileanas del espacio–tiempo**. Observe que el tiempo se supone igual en ambos marcos inerciales; es decir, dentro de la estructura de la mecánica clásica, todos los relojes funcionan al mismo ritmo, cualquiera que sea su velocidad, de modo que el tiempo en el que se presenta un evento para un observador en S es el mismo tiempo para el mismo evento en S′. En consecuencia, el intervalo entre dos eventos sucesivos debe ser el mismo para ambos observadores. Aun cuando esta suposición puede parecer evidente, resulta incorrecta en situaciones donde v es comparable a la rapidez de la luz.

Ahora suponga que una partícula se mueve en un desplazamiento de magnitud dx a lo largo del eje x en un intervalo dt medido por un observador en S. Se deduce, de las ecuaciones 39.1, que el correspondiente desplazamiento dx' medido por un observador en S′ es $dx' = dx - v\,dt$, donde el marco S′ se mueve con una rapidez v en la dirección x respecto al marco S. Debido a que $dt = dt'$,

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

o bien

$$u'_x = u_x - v \tag{39.2}$$

donde u_x y u'_x son las componentes x de la velocidad de la partícula medida por los observadores en S y S′, respectivamente. (Se usa el símbolo $\vec{u}$ para la velocidad de par-

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.1

Relación entre los marcos S y S′

Muchas de las representaciones matemáticas de este capítulo son verdaderas *sólo* para la correspondencia especificada entre los marcos S y S′. Los ejes x y x' coinciden, excepto en que sus orígenes son diferentes. Los ejes y y y' (y los ejes z y z') son paralelos, pero no coinciden debido al desplazamiento del origen de S′ respecto al de S. Se escoge el tiempo $t = 0$ como el instante en el que coinciden los orígenes de los dos sistemas de coordenadas. Si el marco S′ se mueve en la dirección x positiva respecto a S, v es positiva; de otro modo es negativa.

tícula en lugar de $\vec{\mathbf{v}}$, que se usa para la velocidad relativa de dos marcos de referencia.) La ecuación 39.2 es la **ecuación de transformación galileana de la velocidad,** la cual es consistente con la noción intuitiva de tiempo y espacio, así como con la explicación de la sección 4.6. Sin embargo, como pronto verá, conduce a serias contradicciones cuando es aplicada a ondas electromagnéticas.

Pregunta rápida 39.2 Un *pitcher* de beisbol con una bola rápida de 90 mi/h lanza una pelota cuando está de pie en una plataforma de ferrocarril que se mueve a 110 mi/h. La pelota es lanzada en la misma dirección que la velocidad del tren. Al aplicar la ecuación de la transformación galileana de velocidad, la rapidez de la pelota respecto a la Tierra es a) 90 mi/h, b) 110 mi/n, c) 20 mi/h, d) 200 mi/h, o e) imposible de determinar.

La rapidez de la luz

Es natural preguntar si el principio galileano de la relatividad también se aplica a la electricidad, el magnetismo y la óptica. Experimentos realizados indican que la respuesta es negativa. Recuerde del capítulo 12 que Maxwell demostró que la rapidez de la luz en el espacio libre es $c = 3.00 \times 10^8$ m/s. Los físicos de fines del siglo XIX pensaban que las ondas de luz se movían en un medio llamado *éter* y que la rapidez de la luz era c sólo en un marco absoluto, especial y en reposo respecto al éter. Se esperaba que se cumpliera la ecuación de transformación galileana de velocidad para observaciones de luz hechas en cualquier marco que se moviera a una rapidez v respecto al marco absoluto de éter. Es decir, si la luz se desplaza a lo largo del eje x y un observador se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ a lo largo del mismo eje, medirá que la luz tiene una rapidez $c \pm v$, dependiendo de las direcciones de movimiento del observador y de la luz.

Ya que la existencia de un marco preferente absoluto del éter mostraría la semejanza de la luz en relación con otras ondas clásicas y que las ideas de Newton de un marco absoluto eran verdaderas, se consideró importante establecer la existencia del marco de éter. Antes de fines del siglo XIX, en experimentos de desplazamiento de la luz, en los medios que permitían las más altas magnitudes de velocidades de laboratorio realizables en aquel tiempo, no fue posible detectar diferencias de magnitud entre c y $c \pm v$. A inicios de 1880, algunos científicos decidieron usar la Tierra como el marco en movimiento en un intento de mejorar sus oportunidades de detectar estos pequeños cambios en la rapidez de la luz.

Los observadores fijos en la Tierra, pueden considerar la perspectiva de que están inmóviles y que el marco absoluto del éter que contiene el medio para propagación de la luz se mueve más allá de los observadores a una rapidez v. Determinar la rapidez de la luz bajo estas circunstancias es similar a determinar la rapidez de un avión que vuela en una corriente de aire en movimiento o viento; en consecuencia, se trata de un "viento de éter" que sopla a través del aparato fijo a la Tierra.

Un método directo para detectar un viento de éter usaría un aparato fijo a la Tierra para medir la influencia del viento de éter sobre la rapidez de la luz. Si v es la rapidez de éter respecto a la Tierra, la luz debe tener su máxima rapidez $c + v$ cuando se propague en la dirección del viento, como se ve en la figura 39.3a. Del mismo modo, la rapidez de la luz debe tener su valor mínimo $c - v$ cuando la luz se propague contra el viento, como en la figura 39.3b, y un valor intermedio $(c^2 - v^2)^{1/2}$ en la dirección perpendicular al viento de éter, como se ve en la figura 39.3c. Si se supone que el Sol está en reposo en el éter, la velocidad del viento de éter será igual a la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol, que tiene una magnitud de aproximadamente 30 km/s o 3×10^4 m/s. Como $c = 3 \times 10^8$ m/s, es necesario detectar un cambio en la rapidez de alrededor una parte en 10^4 para mediciones en las direcciones contra el viento y a favor del viento. No obstante, mientras que este cambio es mensurable experimentalmente, todos los intentos por detectar estos cambios y establecer la existencia del viento de éter (y por esto el marco absoluto) ¡resultaron inútiles! En la sección 39.2 se explica la investigación clásica experimental.

El principio galileano de la relatividad se refiere sólo a las leyes de la mecánica. Si se supone que las leyes de la electricidad y el magnetismo son las mismas en todos los marcos

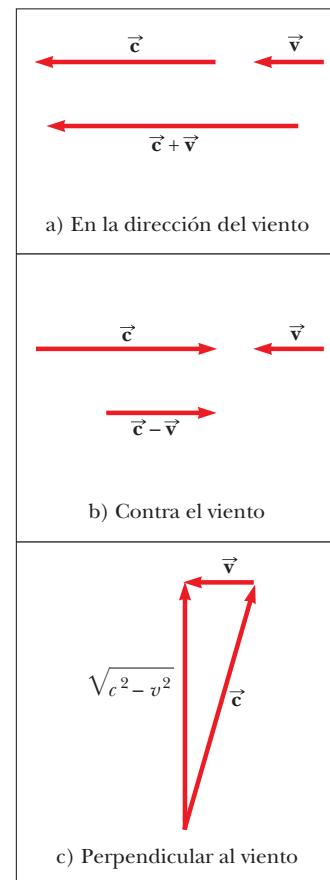



Figura 39.3 Si la velocidad del viento de éter respecto a la Tierra es $\vec{\mathbf{v}}$, y la velocidad de la luz respecto al éter es $\vec{\mathbf{c}}$, la rapidez de la luz respecto a la Tierra es a) $c + v$ en la dirección del viento, b) $c - v$ en la dirección contraria al viento y c) $(c^2 - v^2)^{1/2}$ en la dirección perpendicular al viento.

inerciales, surge una paradoja acerca de la rapidez de la luz. Es posible entender esto al reconocer que las ecuaciones de Maxwell parecen implicar que la rapidez de la luz siempre tiene el valor fijo de 3.00×10^8 m/s en todos los marcos inerciales, un resultado que está en contradicción directa a lo que se espera en términos de la ecuación de transformación galileana de la velocidad. Según la relatividad galileana, la rapidez de la luz *no debe* ser la misma en todos los marcos inerciales.

Para resolver esta contradicción de las teorías, debe concluir que 1) las leyes de la electricidad y el magnetismo no son las mismas en todos los marcos inerciales o 2) la ecuación de transformación galileana de la velocidad es incorrecta. Si supone lo primero, debe existir un marco de referencia preferencial en el que la rapidez de la luz tenga el valor c y la rapidez medida sea mayor o menor que este valor en cualquier marco de referencia, según la ecuación de transformación galileana de la velocidad. Si supone lo segundo, está forzado a abandonar las nociones de tiempo absoluto y longitud absoluta que forman la base de las ecuaciones de transformación galileanas del espacio–tiempo.

39.2 Experimento de Michelson–Morley

El experimento más famoso diseñado para detectar pequeños cambios en la rapidez de la luz fue realizado primero en 1881 por Albert A. Michelson (véase la sección 37.7) y después repetido en diversas condiciones por Michelson y Edward W. Morley (1838–1923). Al inicio se expresó que el resultado del experimento contradijo la hipótesis del éter.

El experimento fue diseñado para determinar la velocidad de la Tierra respecto a la del hipotético éter. La herramienta experimental empleada fue el interferómetro de Michelson, que se estudió en la sección 37.7 y se muestra otra vez en la figura 39.4. El brazo 2 está alineado a lo largo de la dirección del movimiento de la Tierra en el espacio. La Tierra, que se mueve por el éter a una rapidez v, es equivalente al éter que circula junto a ella en dirección opuesta con rapidez v. Este viento de éter que sopla en la dirección opuesta a la del movimiento de la Tierra debe hacer que la rapidez de la luz, medida en el marco de la Tierra, sea $c - v$ cuando la luz se aproxima al espejo M_2 y $c + v$ después de reflejarse, donde c es la rapidez de la luz en el marco de éter.

Figura 39.4 Según la teoría del viento de éter, la rapidez de la luz debe ser $c - v$ cuando el haz se aproxima al espejo M_2 y $c + v$ después de reflejarse.

Los dos haces luminosos se reflejan en M_1 y M_2 y se recombinan y se forma un patrón de interferencia, como se explicó en la sección 37.7. El patrón de interferencia se observa mientras el interferómetro se hace girar un ángulo de 90°. Esta rotación intercambia la rapidez del viento de éter entre los brazos del interferómetro. La rotación debe hacer que el patrón de franjas se desplace en forma ligera pero mensurable. Sin embargo, ¡las mediciones no mostraron ningún cambio en el patrón de interferencia! El experimento de Michelson–Morley se repitió en tiempos diferentes del año cuando se esperaba que el viento de éter cambiara de dirección y magnitud, pero los resultados siempre fueron los mismos: **jamás se observó desplazamiento alguno de franja de la magnitud requerida**.[2]

Los resultados negativos del experimento de Michelson–Morley no sólo contradijeron la hipótesis del éter sino que también demostraron que era imposible medir la velocidad absoluta de la Tierra respecto al marco de éter. No obstante, Einstein ofreció un postulado para esta teoría especial de la relatividad que indica una interpretación diferente sobre estos resultados nulos. En años posteriores, cuando se supo más acerca de la naturaleza de la luz, se abandonó la idea del éter que permea todo. **Ahora se entiende que la luz es una onda electromagnética que no requiere ningún medio para propagarse**. En consecuencia, fue innecesaria la idea de un éter en el cual viajan estas ondas.

[2] Desde el punto de vista de un observador en la Tierra, los cambios en la rapidez y dirección de movimiento de la Tierra en el curso de un año son vistos como desplazamientos en el viento de éter. Incluso si la rapidez de la Tierra respecto al éter fuera cero en algún tiempo, seis meses después la rapidez de la Tierra sería 60 km/s respecto al éter y, por tanto, debería observarse un desplazamiento en las franjas. De cualquier modo, jamás se ha observado desplazamiento alguno.

Detalles del experimento de Michelson–Morley

Para comprender la consecuencia del experimento de Michelson–Morley, suponga que los dos brazos del interferómetro de la figura 39.4 son de igual longitud L. Analice la situación como si hubiera viento de éter, porque eso era lo que Michelson y Morley esperaban hallar. Como ya observó anteriormente, la rapidez del haz luminoso a lo largo del brazo 2 debería ser $c - v$ cuando el haz se aproxima a M_2 y $c + v$ después de que el haz se refleje. Así, el intervalo para el desplazamiento a la derecha por el pulso es $\Delta t = L/(c - v)$, y el intervalo de tiempo para viajar a la izquierda es $\Delta t = L/(c + v)$. El intervalo total de tiempo para un viaje ida y vuelta a lo largo del brazo 2 es

$$\Delta t_{\text{brazo 2}} = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

Ahora considere el haz de luz que viajando a lo largo del brazo 1, perpendicular al viento de éter. Puesto que la rapidez del haz respecto a la Tierra es $(c^2 - v^2)^{1/2}$ en este caso (véase la figura 39.3), el intervalo de tiempo para moverse para cada una de las mitades del viaje es $\Delta t = L/(c^2 - v^2)^{1/2}$, y el intervalo total para el viaje redondo es

$$\Delta t_{\text{brazo 1}} = \frac{2L}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = \frac{2L}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

La diferencia de tiempo Δt entre el viaje redondo horizontal (brazo 2) y el viaje redondo vertical (brazo 1) es

$$\Delta t = \Delta t_{\text{brazo 2}} - \Delta t_{\text{brazo 1}} = \frac{2L}{c}\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right]$$

Ya que $v^2/c^2 \ll 1$, simplifique esta expresión con la siguiente expansión binomial después de cancelar todos los términos de orden superior al segundo:

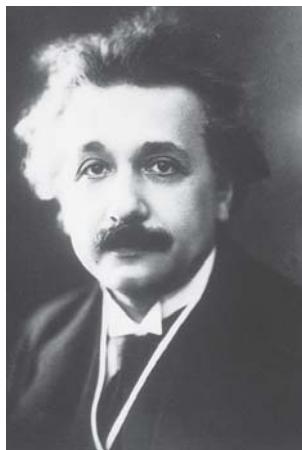
$$(1 - x)^n \approx 1 - nx \quad (\text{para } x \ll 1)$$

En este caso, $x = v^2/c^2$, y se encuentra

$$\Delta t = \Delta t_{\text{brazo 2}} - \Delta t_{\text{brazo1}} \approx \frac{Lv^2}{c^3} \tag{39.3}$$

Esta diferencia en el tiempo entre los dos instantes en que los haces reflejados llegan al telescopio de observación dan lugar a una diferencia de fase entre los haces, produciendo un patrón de interferencia cuando se combinan en la posición del telescopio. Deberá detectar un desplazamiento en el patrón de interferencia cuando el interferómetro se haga girar 90° en un plano horizontal, de modo que los dos haces intercambian sus papeles. Esta rotación resulta en una diferencia de tiempo doble de la que proporcionó la ecuación 39.3. Debido a eso, la diferencia de trayectoria que corresponde a esta diferencia de tiempo es

$$\Delta d = c(2\,\Delta t) = \frac{2Lv^2}{c^2}$$

Porque un cambio en la longitud de trayectoria de una longitud de onda corresponde al desplazamiento de una franja, el correspondiente desplazamiento de franja es igual a esta diferencia de trayectoria dividida entre la longitud de onda de la luz:

$$\text{Desplazamiento} = \frac{2Lv^2}{\lambda c^2} \tag{39.4}$$

En los experimentos realizados por Michelson y Morley, cada uno de los haces luminosos se reflejaba muchas veces mediante espejos para obtener una longitud de trayectoria efectiva L de aproximadamente 11 m. Con el uso de este valor y tomando v igual a 3.0×10^4 m/s (la rapidez de la Tierra alrededor del Sol) y utilizando 500 nm para la longitud de onda de la luz, se espera un desplazamiento de franja

$$\text{desplazamiento} = \frac{2(11\text{m})(3.0 \times 10^4 \text{ m/s})^2}{(5.0 \times 10^{-7}\text{m})(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2}$$

El instrumento empleado por Michelson y Morley podía detectar desplazamientos de franja de sólo 0.01. No obstante, **¡no detectó desplazamiento alguno en el patrón de franjas!** Desde ese tiempo el experimento ha sido repetido numerosas veces por varios científicos bajo diferentes condiciones, y jamás se ha detectado desplazamiento alguno de franja. Por lo tanto, se concluyó que el movimiento de la Tierra respecto al postulado del éter no se puede detectar.

Se realizaron muchos esfuerzos para explicar los resultados nulos del experimento de Michelson–Morley y para salvar el concepto del marco de éter y la ecuación de transformación galileana de la velocidad para la luz. Se ha demostrado que todas las propuestas resultantes de estos esfuerzos son erróneas. Ningún experimento en la historia de la física recibió tan valientes esfuerzos para explicar la ausencia de resultados esperados como en el caso del experimento de Michelson–Morley. El escenario estaba listo para Einstein, que resolvió el problema en 1905 con su teoría especial de la relatividad.

AIP Niels Bohr Library.

ALBERT EINSTEIN

Físico alemán–estadounidense (1879–1955)

Einstein, uno de los físicos más grandes de todos los tiempos, nació en Ulm, Alemania. En 1905, a los 26 años de edad, publicó cuatro ensayos científicos que revolucionaron la física. Dos de estos ensayos se referían a lo que ahora se considera su aportación más importante: la teoría especial de la relatividad.

En 1916, Einstein publicó su obra sobra la teoría general de la relatividad. El pronóstico más impresionante de esta teoría es el grado en el cual la luz es desviada por un campo gravitacional. En 1919 diversos astrónomos realizaron mediciones sobre estrellas brillantes cerca del Sol eclipsado que confirmaron la predicción de Einstein, y como resultado el científico alemán se convirtió en celebridad mundial.

Einstein estaba profundamente preocupado por el perfeccionamiento de la mecánica cuántica en la década de los veinte, a pesar de su propio papel como científico revolucionario. En particular, nunca aceptó la probabilista sucesión de eventos en la naturaleza, característica esencial de la teoría cuántica. Dedicó las últimas décadas de su vida a una infructuosa búsqueda de una teoría unificada que pudiera combinar la gravitación y el electromagnetismo.

39.3 Principio de la relatividad de Einstein

En la sección previa se observa la imposibilidad de medir la rapidez del éter respecto a la Tierra y el fracaso de la ecuación de transformación galileana de la velocidad en el caso de la luz. Einstein propuso una teoría que de manera audaz eliminó estas dificultades y al mismo tiempo alteró por completo la noción de espacio y tiempo.[3] Él basó su teoría especial de la relatividad en dos postulados:

1. **El principio de la relatividad:** las leyes físicas deben ser las mismas en todos los marcos inerciales de referencia.
2. **La invariabilidad de la rapidez de la luz:** la rapidez de la luz en el vacío tiene el mismo valor, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, en todos los marcos inerciales, cualquiera que sea la velocidad del observador o la velocidad de la fuente que emita la luz.

El primer postulado afirma que *todas* las leyes de física —las que se refieran a mecánica, electricidad y magnetismo, óptica, termodinámica, etcétera— son las mismas en todos los marcos de referencia que se muevan con velocidad constante unos respecto a otros. Este postulado es una generalización radical del principio galileano de la relatividad, que se refiere sólo a las leyes de la mecánica. Desde un punto de vista experimental, el principio de la relatividad de Einstein significa que cualquier clase de experimento (medir la rapidez de la luz, por ejemplo) realizado en un laboratorio en reposo debe dar el mismo resultado cuando se realice en un laboratorio que se mueva con una velocidad constante respecto al primero. Por esto, no existe un marco inercial de referencia que sea preferenciado y es imposible detectar movimiento absoluto.

Observe que el postulado 2 es requerido por el postulado 1: si la rapidez de la luz no fuera igual en todos los marcos inerciales, las mediciones de diferentes magnitudes de rapidez harían imposible distinguir entre marcos inerciales; en consecuencia, podría ser identificado un marco absoluto, preferenciado, en contradicción con el postulado 1.

Aun cuando el experimento de Michelson–Morley fue realizado antes de que Einstein publicara su obra sobre la relatividad, no se sabe si Einstein conocía los detalles del experimento. No obstante, el resultado nulo del experimento se puede entender fácilmente dentro de la estructura de la teoría de Einstein. Según su principio de la relatividad, las premisas del experimento de Michelson–Morley eran incorrectas. Cuando se intentó explicar los resultados del experimento se dijo que cuando la luz se desplazaba contra el viento de éter su rapidez era $c - v$, de acuerdo con la ecuación de transformación galileana de la velocidad. Sin embargo, si el estado de movimiento del observador o de la fuente no tiene

[3] A. Einstein, "On the Electrodynamics of Moving Bodies," *Ann. Physik* **17**:891, 1905. Para una traducción al inglés de este artículo y otras publicaciones de Einstein, vea el libro de H. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski y H. Weyl, *The Principle of Relativity*, Dover, 1958.

influencia en el valor encontrado para la rapidez de la luz, uno siempre mide el valor como c. Del mismo modo, la luz hace el viaje de regreso después de reflejarse desde un espejo a una rapidez c, no a $c + v$. En consecuencia, el movimiento de la Tierra no tiene influencia sobre el patrón de franjas observado en el experimento de Michelson–Morley y debería esperarse un resultado nulo.

Si se acepta la teoría de la relatividad de Einstein, se debe concluir que el movimiento relativo es irrelevante cuando se mide la rapidez de la luz. Al mismo tiempo, es necesario alterar la noción de sentido común del espacio y tiempo y estar preparado para algunas consecuencias sorprendentes. Usted podrá encontrar de utilidad leer las páginas siguientes, para tener en mente que las ideas de sentido común están en función de toda una vida de experiencias diarias y no en observaciones de cuerpos que se mueven a cientos de miles de kilómetros por segundo. Por lo tanto, estos resultados parecerán extraños, pero eso es sólo porque no se tiene experiencia alguna con ellos.

39.4 Consecuencias de la teoría especial de la relatividad

Cuando examine algunas de las consecuencias de la relatividad en esta sección, la explicación se restringirá a los conceptos de simultaneidad, intervalos de tiempo y longitudes, los cuales son diferentes en la mecánica relativista respecto a lo que son en la mecánica de Newton. Por ejemplo, en mecánica relativista la distancia entre dos puntos y el intervalo de tiempo entre dos eventos depende del marco de referencia en el que se miden.

Simultaneidad y relatividad de tiempo

Una premisa básica de la mecánica de Newton es que existe una escala universal de tiempo que es la misma para todos los observadores. Newton y sus seguidores simplemente dieron por sentada la simultaneidad. En su teoría especial de la relatividad Einstein abandonó esta suposición.

Einstein ideó el siguiente experimento mental para ilustrar este punto: un furgón de ferrocarril se mueve con velocidad uniforme, y dos rayos inciden en sus extremos, como se ilustra en la figura 39.5a, dejando marcas en el furgón y en el suelo. Las marcas en el furgón están señaladas como A' y B', y las del suelo están como A y B. Un observador O' que se mueve con el furgón está a la mitad entre A' y B', y un observador O en el suelo está entre A y B. Los eventos registrados por los observadores son la descarga de dos rayos en el furgón.

Las señales luminosas emitidas de A y B en el instante en que los dos rayos caen llegan al observador O al mismo tiempo, como se indica en la figura 39.5b. Este observador se da cuenta de que las señales se han movido con la misma rapidez en distancias iguales, por lo que, deduce que los eventos A y B se presentaron simultáneamente. Ahora considere los mismos eventos vistos por el observador O'. Para el tiempo en el que las señales han llegado al observador O, el observador O' se ha movido como se indica en la figura 39.5b. Por lo tanto, la señal desde B' ya ha pasado junto a O', pero la señal desde A' aún no ha llegado a O'. En otras palabras, O' ve la señal desde B antes de ver la señal de A'. De acuerdo con Einstein, *los dos observadores pudieron ver que la luz viajó con la misma rapidez*. En

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.2

¿Quién está en lo correcto?

Usted podría preguntarse cuál de los observadores de la figura 39.5 está en lo correcto respecto a los dos rayos. *Ambos son correctos,* porque el principio de relatividad expresa que *no hay marco inercial de referencia preferencial.* Aun cuando los dos observadores llegan a diferentes conclusiones, ambos tienen razón en su propio marco de referencia porque el concepto de simultaneidad no es absoluto. Este es, en efecto, el punto central de la relatividad: se puede usar cualquier marco de referencia en movimiento uniforme para describir eventos y hacer física.

a) $\vec{v}$ A' O' B' A O B

b) $\vec{v}$ A' O' B' A O B

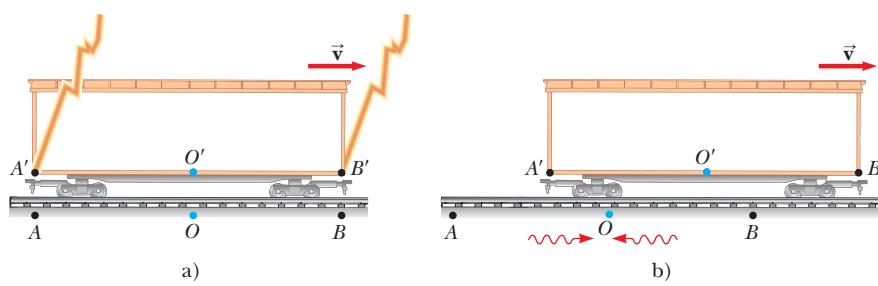



Figura 39.5 a) Dos rayos caen en los extremos de un furgón en movimiento. b) Los eventos parecen ser simultáneos al observador inmóvil O, quien está de pie a la mitad entre A y B. Los eventos no parecen simultáneos al observador O', para quien el primer rayo en caer es el que cae al frente del carro. Observe que en b) la señal de luz que se mueve a la izquierda ya ha pasado a O' pero la señal que se mueve a la derecha todavía no ha llegado a O'.

consecuencia, el observador O' concluye que el rayo cae frente al furgón *antes* de caer en el otro extremo.

Este experimento mental demuestra claramente que los dos eventos que parecen ser simultáneos al observador O *no* parecen ser simultáneos al observador O'.

En otras palabras,

> dos eventos que son simultáneos en un marco de referencia en general no son simultáneos en un segundo marco que se mueve respecto al primero.

Simultaneidad no es un concepto absoluto sino más bien uno que depende del estado de movimiento del observador. El experimento mental de Einstein demuestra que dos observadores pueden no estar de acuerdo sobre la simultaneidad de dos eventos. **Este desacuerdo, sin embargo, depende del tiempo de tránsito de la luz a los observadores y, por tanto, *no* demuestra el significado más profundo de la relatividad.** En análisis relativistas de situaciones de alta velocidad, se muestra que la simultaneidad es relativa incluso cuando el tiempo de tránsito se reste. De hecho, todos los efectos relativistas que se estudian aquí supondrán que se soslayan diferencias causadas por el tiempo de tránsito de la luz a los observadores.

Dilatación del tiempo

Es posible ilustrar el hecho de que observadores situados en diferentes marcos inerciales pueden medir distintos intervalos entre un par de eventos si considera un vehículo que se mueve a la derecha con rapidez v, como el furgón que se ilustra en la figura 39.6a. Un espejo está fijo en el techo del vehículo, y el observador O' en reposo en el marco que está unido al vehículo sostiene una linterna a una distancia d bajo el espejo. En algún instante, la linterna emite un pulso de luz directamente hacia el espejo (evento 1), y tiempo después, una vez que se ha reflejado desde el espejo, el pulso regresa a la linterna (evento 2). El observador O' lleva un reloj y lo emplea para medir el intervalo Δt_p entre estos dos eventos. (El subíndice p es por *propio,* como verá en un momento.) El pulso de luz se modela como una partícula bajo rapidez constante ya que el pulso de luz tiene una rapidez c, el intervalo necesario para que el pulso recorra de O' al espejo y regrese es

$$, \Delta t_p = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{rapidez}} = \frac{2d}{c} \qquad \textbf{(39.5)}$$

Ahora considere el mismo par de eventos vistos por el observador O en un segundo marco, como se muestra en la figura 39.6b. De acuerdo con este observador, el espejo y la linterna se mueven a la derecha con rapidez v, y como resultado de esto la secuencia de

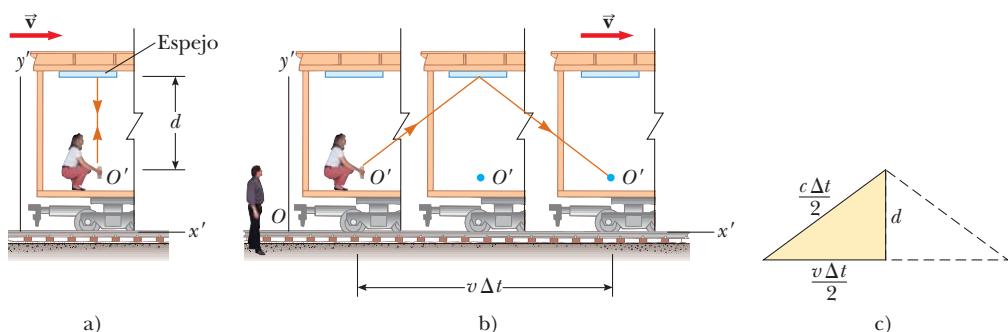



Figura 39.6 a) Un espejo está fijo a un vehículo en movimiento y la observadora O' en reposo en el vehículo envía un pulso de luz. b) Respecto a un observador inmóvil O de pie al lado del vehículo, el espejo y O' se mueven con rapidez v. Advierta que lo que el observador O mide para la distancia que el pulso se mueve es mayor que $2d$. c) Triángulo ractángulo para calcular la correspondencia entre Δt y Δt_p.

eventos parece enteramente diferente. Para el tiempo en que la luz de la linterna llega al espejo, éste se ha movido a la derecha una distancia $v\,\Delta t/2$, donde Δt es el intervalo necesario para que la luz viaje de O' al espejo y regrese a O', observado por O. En otras palabras, O concluye que, debido al movimiento del vehículo, si la luz ha de incidir en el espejo, debe salir de la linterna a un ángulo respecto a la dirección vertical. Al comparar la figura 39.6a y b, la luz debe avanzar más en b) que en a). (Note que ningún observador "sabe" que está en movimiento. Cada uno está en reposo en su propio marco inercial.)

De acuerdo con el segundo postulado de la teoría especial de la relatividad, ambos observadores deben medir c como la rapidez de la luz. Ya que la luz se desplaza más según O, se deduce que el intervalo Δt medido por O es más largo que el intervalo Δt_p medido por O'. Para obtener una correspondencia entre estos dos intervalos de tiempo, es conveniente usar el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 39.6c. El teorema de Pitágoras da

$$\left(\frac{c\,\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\,\Delta t}{2}\right)^2 + d^2$$

Al resolver para Δt resulta

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \textbf{(39.6)}$$

Porque $\Delta t_p = 2d/c$, este resultado se expresa

$$\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_p \qquad \textbf{(39.7)}$$

◄ Dilatación del tiempo

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \textbf{(39.8)}$$

Ya que γ siempre es mayor que 1, este resultado dice que **el intervalo Δt medido por un observador que se mueve respecto a un reloj es más largo que el intervalo Δt_p medido por un observador en reposo respecto al mismo reloj. Este efecto se conoce como dilatación del tiempo.**

La dilatación del tiempo no se observa en la práctica, y puede ser entendida al considerar el factor γ. Este factor se desvía considerablemente desde un valor de 1 sólo para magnitudes de velocidad muy altas, como se ve en la figura 39.7 y en la tabla 39.1. Por ejemplo, para una rapidez de $0.1c$, el valor de γ es 1.005. Por lo tanto, hay una dilatación de tiempo de sólo 0.5% a una décima parte de la rapidez de la luz. Las magnitudes de velocidad que aparecen a diario son mucho más lentas que esto, de modo que no se aprecia la dilatación de tiempo en situaciones normales.

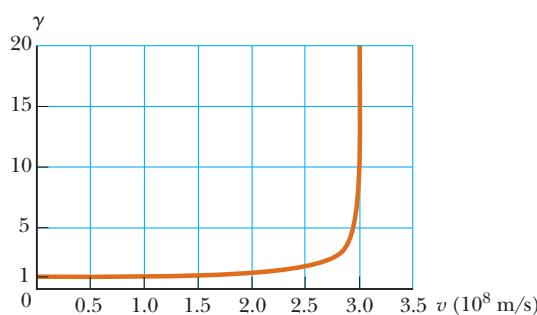



Figura 39.7 Gráfica de γ en función de v. Cuando la rapidez se aproxima a la de la luz, γ aumenta rápidamente.

TABLA 39.1

Valores aproximados para γ a diferentes magnitudes de velocidad

v/c	γ
0.0010	1.000 000 5
0.010	1.000 05
0.10	1.005
0.20	1.021
0.30	1.048
0.40	1.091
0.50	1.155
0.60	1.250
0.70	1.400
0.80	1.667
0.90	2.294
0.92	2.552
0.94	2.931
0.96	3.571
0.98	5.025
0.99	7.089
0.995	10.01
0.999	22.37

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.3

El intervalo de tiempo característico

Es *muy* importante en cálculos relativistas identificar correctamente que se esté midiendo el intervalo de tiempo característico. Dicho intervalo entre dos eventos es siempre el intervalo de tiempo medido por un observador para quien los dos eventos tienen lugar en la misma posición.

El intervalo de tiempo Δt_p en las ecuaciones 39.5 y 39.7 se denomina **intervalo de tiempo característico.** (En alemán, Einstein usó el término *Eigenzeit,* que significa "nuestro tiempo".) En general, **el intervalo de tiempo característico es el intervalo entre dos eventos medidos por un observador que ve que los eventos se presentan en el mismo punto en el espacio.**

Si un reloj es móvil respecto al lector, el intervalo de tiempo entre el tictac del reloj móvil se observa más largo que el intervalo de tiempo entre el tictac de un reloj idéntico en el marco de referencia de usted. Así, a veces se dice que un reloj en movimiento funciona más lentamente que otro en el marco de referencia de usted, en un factor γ. Es posible generalizar este resultado al decir que todos los procesos físicos, incluso los mecánicos, químicos y biológicos, reducen su velocidad cuando esos procesos se presentan en un marco que se mueve respecto al observador. Por ejemplo, el ritmo cardiaco de un astronauta que se mueve en el espacio marcará el tiempo con un reloj dentro de la nave. Tanto el reloj como el ritmo cardiaco del astronauta se medirán con una velocidad reducida, según un observador en la Tierra que compara intervalos con su propio reloj (aun cuando el astronauta no tendrá la sensación de que su vida disminuya en velocidad dentro de la nave).

Pregunta rápida 39.3 Suponga que la observadora O' del tren de la figura 39.6 dirige su linterna hacia la pared del otro extremo del furgón y la enciende y la apaga, enviando así un pulso de luz hacia la pared opuesta; O' y O miden el intervalo entre el momento de salida del pulso de la linterna y su llegada a la pared distante. ¿Cuál observador mide el intervalo de tiempo característico entre estos dos eventos? a) O', b) O, c) ambos observadores o d) ninguno de ellos.

Pregunta rápida 39.4 Un tripulante ve una película de dos horas de duración en una nave espacial que se mueve con alta velocidad a través del espacio. Para un observador desde la Tierra, que también ve la película mediante un potente telescopio, la duración de la película, es de a) más de dos horas, b) menos de dos horas, o c) igual a dos horas?

La dilatación del tiempo es un fenómeno que se puede verificar con diversos experimentos con relojes naturales. Un experimento reportado por J.C. Hafele y R.E. Keating dio evidencia directa de la dilatación del tiempo.[4] Intervalos medidos con cuatro relojes atómicos de cesio en un avión a reacción se compararon con intervalos medidos por relojes atómicos de referencia desde la Tierra. Para comparar estos resultados con la teoría hubo que considerar numerosos factores, incluso periodos de aceleración y desaceleración respecto a la Tierra, variaciones en dirección de movimiento y el hecho de que el campo gravitacional experimentado por los relojes en vuelo era más débil que el experimentado por el reloj en tierra. Los resultados estuvieron de acuerdo con las predicciones de la teoría especial de la relatividad y se pueden explicar en términos del movimiento relativo entre la Tierra y el avión. En su ensayo científico, Hafele y Keating indicaron que, "respecto a la escala atómica de tiempo del U.S. Naval Observatory, los relojes en vuelo se atrasaron 59 $\pm$ 10 ns durante el vuelo hacia el este y se adelantaron 273 $\pm$ 7 ns durante el vuelo hacia el oeste".

Otro interesante ejemplo de la dilatación del tiempo comprende la observación de *muones,* partículas elementales inestables que tienen una carga igual a la del electrón y una masa 207 veces la del electrón. Se pueden producir muones por la colisión de radiación cósmica con átomos a grandes alturas en la atmósfera. Muones de lento movimiento en el laboratorio tienen una vida media que al medirse se encuentra que es el intervalo de tiempo característico $\Delta t_p = 2.2\ \mu$s. Si 2.2 μs es el promedio de la vida media de un muón y supone que su rapidez es cercana a la rapidez de la luz, encontrará que estas partículas pueden desplazarse una distancia de aproximadamente $(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})\ (2.2 \times 10^{-6} \text{ s}) \approx 6.6 \times 10^2$ m antes de desintegrarse (figura 39.8a). En consecuencia, es improbable que lleguen a la superficie de la Tierra desde las grandes alturas de la atmósfera en donde

a)

b)

Figura 39.8 Viajes de muones desde la perspectiva de un observador situado en la Tierra. a) Sin consideraciones relativistas, muones creados en la atmósfera y que se mueven hacia abajo con una rapidez de 0.99c se desplazan sólo unos 6.6×10^2 m antes de desintegrarse con una vida media de 2.2 μs. Así, muy pocos muones llegan a la superficie de la Tierra. b) Con consideraciones relativistas, la vida media del muón se dilata según un observador en la Tierra. En consecuencia, según este observador, el muón puede desplazarse unos 4.8×10^3 antes de desintegrarse. Esto quiere decir que muchos de ellos llegan a la superficie.

[4] J. C. Hafele y R. E. Keating, "Around the World Atomic Clocks: Relativistic Time Gains Observed", *Science,* **177:**168, 1972.

se producen. No obstante, experimentos demuestran que un gran número de muones *sí* llega a la superficie. El fenómeno de la dilatación del tiempo explica este efecto. Según sean medidos por un observador en la Tierra, los muones tienen una vida media dilatada igual a $\gamma\,\Delta t_p$. Por ejemplo, para $v = 0.99c$, $\gamma \approx 7.1$ y $\gamma\,\Delta t_p \approx 16\ \mu$s. En consecuencia, la distancia promedio recorrida por los muones en este tiempo medido por un observador en la Tierra es alrededor de $(0.99)\ (3.0 \times 10^8\ \text{m/s})\ (16 \times 10^{-6}\ \text{s}) \approx 4.8 \times 10^3$ m, como se indica en la figura 39.8b.

En 1976, en el laboratorio del Consejo Europeo para la Investigación Nuclear, en Ginebra, se inyectaron muones en un enorme anillo de almacenamiento, alcanzando magnitudes de velocidad de aproximadamente $0.999\,4c$. Se detectaron electrones producidos por los muones en desintegración mediante contadores colocados alrededor del anillo, lo cual hizo posible que los científicos midieran la rapidez de desintegración y por tanto la vida media del muón. La vida media de los muones en movimiento se midió y se encontró que era aproximadamente 30 veces más que la de un muón inmóvil, de acuerdo con el pronóstico de la relatividad a no más de dos partes entre mil.

EJEMPLO 39.1 ¿Cuál es el periodo del péndulo?

El periodo de un péndulo se observa que es de 3.00 s, en el marco de referencia del péndulo. ¿Cuál es el periodo cuando lo mide un observador que se mueve con una rapidez de $0.960c$ en relación con el péndulo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Cambie los marcos de referencia. En lugar del observador en movimiento a $0.960c$, puede tomar el punto de vista equivalente de que el observador está en reposo y el péndulo se mueve con $0.960c$ más alla del observador inmóvil. Por tanto, el péndulo es un ejemplo de un reloj que se mueve con gran rapidez respecto a un observador.

Categorizar Respecto a la etapa Conceptualizar, este problema se clasifica como uno que involucra dilatación del tiempo.

Analizar El intervalo de tiempo característico, medido en el marco en reposo del péndulo, es $\Delta t_p = 3.00$ s.

Use la ecuación 39.7 para encontrar el intervalo de tiempo dilatado:

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{(0.960c)^2}{c^2}}}\,\Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.921\,6}}\,\Delta t_p$$

$$= 3.57(3.00\ \text{s}) = \boxed{10.7\ \text{s}}$$

Finalizar Este resultado muestra que un péndulo en movimiento que tarda más en completar un periodo que lo que tarda un péndulo en reposo. El periodo aumenta por un factor de $\gamma = 3.57$.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la rapidez del observador aumenta en 4.00%? ¿El intervalo de tiempo dilatado aumenta en 4.00%?

Respuesta En términos del comportamiento enormemente no lineal de γ como función de v en la figura 39.7, se supondría que el aumento en Δt sería diferente de 4.00%.

Encuentre la nueva rapidez si aumenta 4.00%:

$$v_{\text{nueva}} = (1.040\,0)(0.960c) = 0.998\,4c$$

Realice de nuevo el cálculo de dilatación del tiempo:

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{(0.998\,4c)^2}{c^2}}}\,\Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.996\,8}}\,\Delta t_p$$

$$= 17.68(3.00\ \text{s}) = 53.1\ \text{s}$$

Por lo tanto, ¡el aumento de 4.00% en rapidez resulta en casi 400% de aumento en el tiempo dilatado!

EJEMPLO 39.2 **¿Cuánto duró su viaje?**

Suponga que usted conduce su automóvil en un viaje de negocios y que viaja a 30 m/s. Su jefe, quien espera su llegada, considera que el viaje durará 5.0 h. Cuando usted llega tarde, su excusa es que el reloj de su automóvil registró el paso de 5.0 h, pero que usted conducía rápido así que su reloj corrió más lentamente que el reloj en la oficina de su jefe. Si el reloj de su automóvil en realidad indicaba un viaje de 5.0 h, ¿cuánto tiempo pasó en el reloj de su jefe, que estaba en reposo en la Tierra?

SOLUCIÓN

Conceptualizar El observador es su jefe que está de pie en reposo en la Tierra. El reloj está en su automóvil, que se mueve a 30 m/s respecto a su jefe.

Categorizar La rapidez de 30 m/s sugiere que este problema se puede clasificar como uno en el que se usan conceptos y ecuaciones clásicos. Sin embargo, de acuerdo con el enunciado del problema en el sentido de que el reloj que se mueve corre más lentamente que un reloj inmóvil, este problema se clasificó como uno que involucra dilatación del tiempo.

Analizar El intervalo de tiempo característico, medido en el marco en reposo del automóvil, es $\Delta t_p = 5.0$ h.

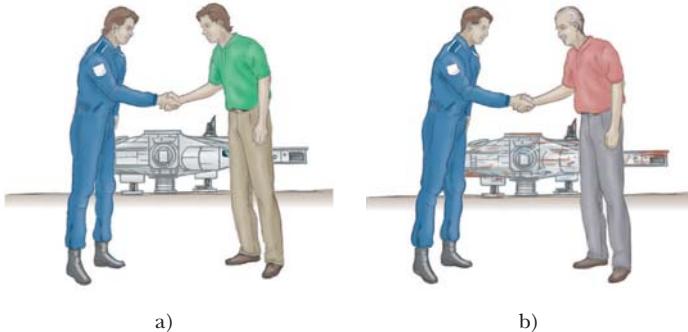
Use la ecuación 39.8 para evaluar γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{(3.0 \times 10^1 \text{ m/s})^2}{(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 10^{-14}}}$$

Si usted intenta determinar este valor en su calculadora, probablemente obtendrá $\gamma = 1$. En vez de ello, realiza una expansión binomial:

$$\gamma = (1 - 10^{-14})^{-1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(10^{-14}) = 1 + 5.0 \times 10^{-15}$$

Use la ecuación 39.7 para encontrar el intervalo de tiempo dilatado medido por su jefe:

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t_p = (1 + 5.0 \times 10^{-15})(5.0 \text{ h})$$

$$= 5.0 \text{ h} + 2.5 \times 10^{-14} \text{ h} = 5.0 \text{ h} + 0.090 \text{ ns}$$

Finalizar El reloj de su jefe sólo estaría adelantado 0.090 ns en relación con el reloj de su automóvil. ¡Tal vez quiera pensar en otra excusa!

La paradoja de los gemelos

Una consecuencia misteriosa de la dilatación del tiempo es la llamada *paradoja de los gemelos* (figura 39.9). Considere un experimento en donde intervienen los gemelos llamados Veloz y Goslo. Cuando tienen 20 años de edad, Veloz, el más aventurero de los dos, parte en un épico viaje al planeta X, que se encuentra a 20 años luz de la Tierra. Un año luz es la distancia que la luz recorre en el espacio libre en un año. Además, la nave de Veloz es capaz de alcanzar una rapidez de $0.95c$ respecto al marco inercial de su hermano gemelo en casa. Después de llegar al planeta X, Veloz se enferma y de inmediato regresa a la Tierra con la

Figura 39.9 a) Cuando un gemelo deja a su hermano en la Tierra, ambos tienen la misma edad. b) Cuando Veloz regresa de su viaje al planeta X, él es más joven que su gemelo Goslo.

misma rapidez de $0.95c$. A su regreso, Veloz se sorprende al descubrir que Goslo ha envejecido 42 años y ahora tiene 62 años. Veloz, por su parte, sólo ha envejecido 13 años.

La paradoja *no* es que los gemelos tengan edades diferentes. La paradoja es que desde el marco de referencia de Goslo, él estaba en reposo mientras que su hermano viajaba a alta velocidad alejándose de él y luego regresa. Sin embargo, según Veloz, él permaneció inmóvil mientras que Goslo y la Tierra se alejaban de él y luego regresaban. Debido a eso, se podría esperar que Veloz reclame que Goslo envejeció más lentamente que él mismo. Esta situación parece simétrica desde dos puntos de vista. ¿Cuál gemelo *realmente* envejeció más lentamente?

La situación en este problema realmente no es simétrica. Considere un tercer observador móvil con una rapidez constante en relación con Goslo. De acuerdo con el tercer observador Goslo jamás cambia de marco inercial. La rapidez de Goslo en relación con el tercer observador siempre es la misma. No obstante, el tercer observador nota, que Veloz acelera durante su viaje cuando diminuye su velocidad e inicia su regreso a la Tierra, *cambiando marcos de referencia en el proceso.* A partir de la persepctiva del tercer observador, existe algo muy diferente acerca del movimiento de Goslo en comparación con Veloz. Debido a eso no existe paradoja; únicamente Goslo, quien siempre está en un marco inercial simple, puede hacer predicciones correctas en términos de relatividad espacial. Goslo encontró que en lugar de envejecer 42 años, Veloz envejeció únicamente $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ (42 años) 13 años. De estos 13 años, Veloz gastó 6.5 años viajando al planeta X y 6.5 años de regreso.

Pregunta rápida 39.5 Suponga que a los astronautas se les paga según el tiempo que pasen viajando en el espacio. Después de un largo viaje que hace a una rapidez que se aproxima a c, ¿a un tripulante se le pagaría según a) un reloj con base en la Tierra, b) el reloj de su nave, o c) cualquiera de estos relojes?

Contracción de longitud

La distancia medida entre dos puntos en el espacio también depende del marco de referencia del observador. **La longitud característica L_p de un objeto es la longitud medida por alguien en reposo respecto al objeto.** La longitud de un objeto medida por alguien en un marco de referencia que se mueve respecto al objeto siempre es menor que la longitud característica. Este efecto se conoce como **contracción de longitud**.

Para comprender la contracción de longitud considere una nave espacial que vuela con una rapidez v de una estrella a otra. Hay dos observadores: uno en la Tierra y el otro en la nave. El observador en reposo en la Tierra (que también se supone en reposo respecto a las dos estrellas) mide que la distancia entre las estrellas es la longitud característica L_p. Según este observador, el intervalo de tiempo necesario para que la nave complete el viaje es $\Delta t = L_p/v$. La travesía de la nave por las dos estrellas se presentó en la misma posición para el viajero espacial. Por lo tanto, éste mide el intervalo de tiempo característico Δt_p. Debido a la dilatación del tiempo, el intervalo de tiempo característico está relacionado con el intervalo de tiempo medido en la Tierra por medio de $\Delta t_p = \Delta t/\gamma$. Como el viajero espacial llega a la segunda estrella en el tiempo Δt_p, concluye que la distancia L entre las estrellas es

$$L = v\,\Delta t_p = v\,\frac{\Delta t}{\gamma}$$

Como la longitud característica es $L_p = v\,\Delta t$,

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \textbf{(39.9)}$$

◄ Contracción de longitud

donde $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ es un factor menor a la unidad. **Si un objeto tiene una longitud característica L_p cuando es medido por un observador en reposo respecto al objeto, su longitud L cuando se mueve con rapidez v en una dirección paralela a su longitud, es más corta según $L = L_p\sqrt{1 - v^2/c^2} = L_p/\gamma$.**

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.4
La longitud propia

Al igual que con el intervalo de tiempo característico, es *muy* importante en cálculos relativistas identificar correctamente al observador que mide la longitud característica. La longitud característica entre dos puntos en el espacio es siempre la longitud medida por un observador en reposo respecto a los puntos. A veces el intervalo de tiempo característica y la longitud característica *no* son medidos por el mismo observador.

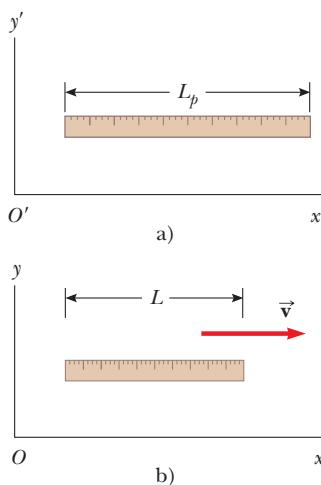



Figura 39.10 a) Una regleta graduada medida por un observador en un marco unido a la regleta (es decir, ambos tienen la misma velocidad) tiene su longitud característica L_p. b) La regla medida por un observador, en un marco en el que la regla tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ respecto al marco, resulta ser más corta que su longitud característica L_p en un factor $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Por ejemplo, suponga que una regleta graduada se mueve con una rapidez v más allá de un observador inmóvil en la Tierra, como se ve en la figura 39.10. La longitud de la regleta, medida por un observador en un marco unido a la regla, es la longitud característica L_p que se muestra en la figura 39.10a. La longitud L de la regleta medida por el observador en la Tierra es más corta que L_p en un factor $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ como sugiere la figura 39.10b. Observe que **la contracción de longitud tiene lugar sólo a lo largo de la dirección de movimiento.**

La longitud característica y el intervalo de tiempo característico se definen de modo diferente. La longitud característica es medida por un observador para quien los puntos extremos de la longitud permanecen fijos en el espacio. El intervalo de tiempo característico es medido por alguno para quien los dos eventos tienen lugar en la misma posición en el espacio. Como ejemplo de este punto, regrese a los muones que se desintegran y se mueven con magnitudes de velocidades cercanas a la de la luz. Un observador en el marco de referencia del muón mediría la vida media característica, mientras que un observador en la Tierra mediría la longitud característica (la distancia desde la creación a la desintegración en la figura 39.8b). En el marco de referencia del muón no hay dilatación de tiempo, pero la distancia de recorrido a la superficie se observa más corta cuando se mide en este marco. Del mismo modo, en el marco de referencia del observador en la Tierra hay dilatación de tiempo, pero la distancia de recorrido se mide como la longitud característica. Por lo tanto, cuando los cálculos sobre el muón se efectúan en ambos marcos, el resultado del experimento en un marco es el mismo que el resultado en el otro marco: más muones llegan a la superficie de los que se pronosticarían sin efectos relativistas.

Pregunta rápida 39.6 Usted prepara la maleta para un viaje a otra estrella. Durante el viaje, usted vuela a $0.99c$. Usted trata de decidir si debe comprar ropa de tallas más pequeñas, porque estará más delgado en el viaje debido a la contracción de longitud. Igualmente, está considerando ahorrar dinero al reservar un compartimiento más pequeño para dormir, porque será menos largo cuando se acueste. ¿Debe a) comprar tallas más pequeñas, b) reservar un compartimiento más pequeño, c) nada de esto, o d) hacer ambas cosas?

Pregunta rápida 39.7 Está observando una nave móvil alejándose y mide que la distancia es más corta que cuando estaba en el suelo en reposo a su lado. También ve un reloj por una ventanilla de la nave, y observa que el paso del tiempo en el reloj se mide y es más lento que en el reloj de pulsera que lleva. En comparación a cuando la nave estaba en la Tierra, ¿cuáles son sus mediciones si la nave cambia de dirección y viene *hacia usted* con la misma rapidez? a) La nave se mide y es más larga, y el reloj se adelanta. b) La nave se mide y es más larga, y el reloj se atrasa. (c) La nave se mide y es más corta, y el reloj se adelanta. d) La nave se mide y es más corta, y el reloj se atrasa.

Figura 39.11 Paradoja de los gemelos en una gráfica de espacio–tiempo. El gemelo que se queda en la Tierra tiene una línea de mundo a lo largo del eje ct (verde). La trayectoria del gemelo que viaja en el espacio–tiempo está representada por una línea de mundo que cambia de dirección (azul).

Gráficas de espacio–tiempo

A veces es útil representar una situación física con una *gráfica de espacio–tiempo*, en donde ct es la ordenada y la posición x es la abscisa. La paradoja de los gemelos se ilustra en la gráfica de la figura 39.11 desde el punto de vista de Goslo. Una trayectoria en el espacio–tiempo se denomina **línea de mundo.** En el origen, las líneas de mundo de Veloz y de Goslo coinciden porque los dos gemelos están en el mismo lugar al mismo tiempo. Después de que Veloz sale a su viaje, su línea de mundo diverge de la de su hermano. La línea de mundo de Goslo es vertical porque él sigue fijo en el lugar. Al reunirse, las dos líneas de mundo se juntan nuevamente. Observe que sería imposible para Veloz tener una línea de mundo que cruzara la trayectoria de un haz luminoso que saliera de la Tierra al momento en que salió. Para hacer esto se requeriría que él tuviera una rapidez mayor a c (que no es posible, como se ve en las secciones 39.6 y 39.7).

Las líneas de mundo para haces luminosos se trazan como líneas diagonales en las gráficas de espacio–tiempo, por lo general inclinadas a 45° a la derecha o a la izquierda de la vertical

(si se supone que tanto el eje x como el ct tienen las mismas escalas), dependiendo de si el haz luminoso se desplaza en la dirección de x creciente o decreciente. Estas dos líneas de mundo significan que todos los posibles eventos futuros para Goslo y Veloz se encuentran dentro de dos líneas de 45° que se prolongan desde el origen. La presencia de cualquiera de los gemelos en un evento fuera de este "cono de luz" haría necesario que se moviera a una rapidez mayor a c, lo que es imposible. También, los únicos eventos más allá que Goslo y Veloz podrían haber experimentado se presentaron dentro de dos líneas de espacio–tiempo similares de 45° que se aproximan al origen desde abajo del eje x.

EJEMPLO 39.3 Un viaje a Sirio

Un astronauta realiza un viaje a Sirio, que se ubica a una distancia de 8 años luz (al) de la Tierra. El astronauta mide el tiempo del viaje de ida en 6 años. Si la nave espacial se mueve con una rapidez constante de $0.8c$, ¿cómo se puede reconciliar la distancia de 8 al con el tiempo de viaje de 6 años medido por el astronauta?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Un observador en la Tierra mide que la luz requiere 8 años en viajar de la Tierra a Sirio. El astronauta mide un intervalo de tiempo de sólo 6 años. ¿El astronauta viaja más rápido que la luz?

Categorizar Ya que el astronauta mide una longitud de espacio entre la Tierra y Sirio, que está en movimiento respecto a ella, este ejemplo se clasifica como un problema de contracción de la longitud.

Analizar La distancia de 8 al representa la longitud característica de la Tierra a Sirio, medida por un observador en la Tierra que ve ambos objetos casi en reposo.

Calcule la longitud contraída medida por el astronauta, con la ecuación 39.9:

$$L = \frac{8 \text{ al}}{\gamma} = (8 \text{ al})\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (8 \text{ al})\sqrt{1 - \frac{(0.8c)^2}{c^2}} = 5 \text{ l}$$

Use el modelo de partícula bajo rapidez constante para encontrar el tiempo de viaje observado en el reloj del astronauta:

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{5 \text{ al}}{0.8c} = \frac{5 \text{ al}}{0.8(1 \text{ al/años})} = 6 \text{ años}$$

Finalizar Note que se usó el valor para la rapidez de la luz como $c = 1$ al/año. El viaja tarda un intervalo de tiempo más corto que 8 años para el astronauta porque, para él, la distancia entre la Tierra y Sirio fue medida como más corta.

¿Qué pasaría si? ¿Y si un técnico en el Control de Misión en la Tierra observa el viaje con un telescopio muy poderoso? ¿En qué tiempo el técnico *verá* que el astronauta llegó a Sirio?

Respuesta El intervalo de tiempo que mide el técnico para que el astronauta llegue es

$$\Delta t = \frac{L_p}{v} = \frac{8 \text{ al}}{0.8c} = 10 \text{ años}$$

Para que el técnico vea el arribo, la luz de la escena de llegada debe viajar de regreso a la Tierra y entrar al telescopio. Este viaje requiere un intervalo de tiempo de

$$\Delta t = \frac{L_p}{v} = \frac{8 \text{ al}}{c} = 8 \text{ años}$$

Por lo tanto, el técnico ve la llegada después de 10 años + 8 años = 18 años. Si el astronauta inmediatamente da vuelta y regresa a casa, llega, de acuerdo con el técnico, 20 años después de partir, ¡sólo 2 años después de que el técnico lo vio llegar! Además, el astronauta habría envejecido sólo 12 años.

EJEMPLO 39.4 La paradoja de la pértiga en el granero

La paradoja de los gemelos, discutida anteriormente, es una "paradoja" clásica de la relatividad. Otra "paradoja" clásica es la siguiente. Suponga que un corredor que se mueve a $0.75c$ lleva una pértiga horizontal de 15 m de largo hacia un granero que tiene 10 m de largo. El granero tiene puertas frontal y trasera que inicialmente están abiertas. Un observador en el suelo instantánea y simultáneamente puede cerrar y abrir las dos puertas mediante un control remoto. Cuando el corredor y la pértiga están dentro del granero, el observador en tierra cierra y luego abre ambas puertas, de modo que el corredor y la pértiga momentáneamente quedan capturados dentro del granero y luego procede a salir del granero por la puerta trasera. ¿Tanto el corredor como el observador en tierra están de acuerdo con que el corredor pasa con seguridad a través del granero?

SOLUCIÓN

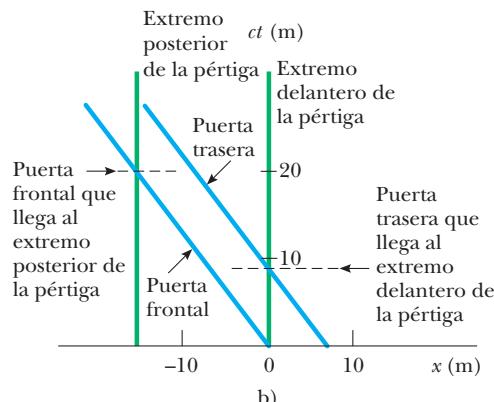
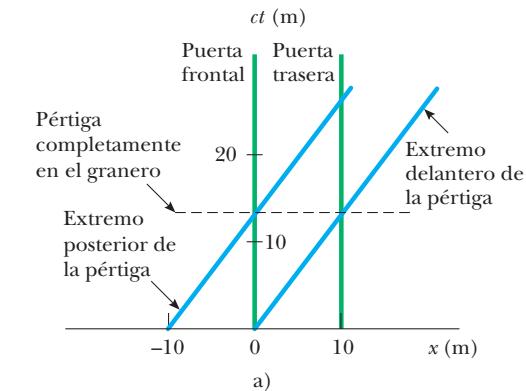
Conceptualizar A partir de su experiencia cotidiana, usted se sorprendería de ver que una pértiga de 15 m ajusta dentro de un granero de 10 m.

Categorizar La pértiga está en movimiento respecto al observador en tierra, de modo que el observador mide su longitud como contraída, mientras que el granero inmóvil tiene una longitud propia de 10 m. Este ejemplo se clasifica como un problema de contracción de la longitud.

Analizar Use la ecuación 39.9 para encontrar la longitud contraída de la pértiga, de acuerdo con el observador en tierra:

$$L_{\text{pértiga}} = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (15 \text{ m})\sqrt{1 - (0.75)^2} = 9.9 \text{ m}$$

Debido a eso, el observador en tierra mide que la pértiga es ligeramente más corta que el granero y no hay problema con capturar momentáneamente la pértiga dentro de él. La "paradoja" surge cuando se considera el punto de vista del corredor.

Use la ecuación 39.9 para encontrar la longitud contraída del granero, de acuerdo con el observador que corre:

$$L_{\text{granero}} = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (10 \text{ m})\sqrt{1 - (0.75)^2} = 6.6 \text{ m}$$

Ya que la pértiga está en el marco en reposo del corredor, el corredor mide que tiene su longitud propia de 15 m. ¿Cómo una pértiga de 15 m puede encajar dentro de un granero de 6.6 m? Aunque esta pregunta es la clásica que siempre se plantea, no es la pregunta que se formuló porque no es la importante. Se preguntó: "*¿El corredor pasa con seguridad a través del granero?*".

La resolución de la "paradoja" se encuentra en la relatividad de la simultaneidad. El cierre de las dos puertas se mide como simultáneo por el observador en tierra. Sin embargo, ya que las puertas están en diferentes posiciones, no se cierran simultáneamente como mide el corredor. La puerta trasera se cierra y luego se abre primero, lo que permite salir el extremo delantero de la pértiga. La puerta frontal del granero no se cierra hasta que el extremo posterior de la pértiga pasa por ahí.

Esta "paradoja" se puede analizar usando una gráfica espacio–tiempo. La figura 39.12a es una gráfica espacio-tiempo desde el punto de vista del observador en tierra. Elija $x = 0$ como la posición de la puerta frontal del granero y $t = 0$ como el instante en que el extremo delantero de la pértiga se ubica en la puerta frontal del granero. Las líneas de mundo para las dos puertas del granero están

Figura 39.12 (Ejemplo 39.4) Gráficas espacio–tiempo para la paradoja de la pértiga en el granero. a) Desde el punto de vista del observador, las líneas de mundo para las puertas frontal y trasera del granero son líneas verticales. Las líneas de mundo para los extremos de la pértiga están inclinadas y separadas 9.9 m horizontalmente. La puerta frontal del granero está en $x = 0$ y el extremo delantero de la pértiga entra a la puerta frontal en $t = 0$. Toda la pértiga está dentro del granero en el tiempo indicado por la línea discontinua. b) Desde el punto de vista del corredor, las líneas de mundo para los extremos de la pértiga son verticales. El granero se mueve en la dirección negativa, de modo que las líneas de mundo para las puertas frontal y trasera están inclinadas hacia la izquierda. El extremo delantero de la pértiga sale por la puerta trasera antes de que el extremo posterior llegue a la puerta frontal.

separadas 10 m y son verticales porque el granero no se mueve en relación con este observador. Para la pértiga, se siguen dos líneas de mundo inclinadas, una para cada extremo de la pértiga en movimiento. Estas líneas de mundo están separadas 9.9 m horizontalmente, que es la longitud contraída vista por el observador en tierra. Como se ve en la figura 39.12a, la pértiga está completamente dentro del granero en un instante.

La figura 39.12b muestra la gráfica espacio–tiempo de acuerdo con el corredor. En este caso, las líneas de mundo para la pértiga están separadas 15 m y son verticales porque la pértiga está en reposo en el marco de referencia del corredor. El granero se lanza hacia el corredor, de modo que las líneas de mundo para las puertas frontal y trasera del granero están inclinadas hacia la izquierda. Las líneas de mundo para el granero están separadas 6.6 m, la longitud contraída como la ve el corredor. El extremo delantero de la pértiga sale por la puerta trasera del granero mucho antes de que el extremo posterior de la pértiga entre al granero. En consecuencia, la apertura de la puerta trasera se presenta antes del cierre de la puerta frontal.

Desde el punto de vista del observador en tierra, use el modelo de partícula bajo velocidad constante para encontrar el tiempo después de $t = 0$ cuando el extremo trasero de la pértiga entra al granero:

$$1)\quad t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{9.9 \text{ m}}{0.75c} = \frac{13.2 \text{ m}}{c}$$

Desde el punto de vista del corredor, use el modelo de partícula bajo velocidad constante para encontrar el tiempo cuando el extremo delantero de la pértiga sale del granero:

$$2)\quad t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{6.6 \text{ m}}{0.75c} = \frac{8.8 \text{ m}}{c}$$

Encuentre el tiempo cuando el extremo posterior de la pértiga entra a la puerta frontal del granero:

$$3)\quad t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{15 \text{ m}}{0.75c} = \frac{20 \text{ m}}{c}$$

Finalizar A partir de la ecuación 1), la pértiga debería estar completamente dentro del granero en un tiempo que corresponde a $ct = 13.2$ m. Esta situación es consistente con el punto en el eje ct de la figura 39.12a donde la pértiga está dentro del granero. A partir de la ecuación 2), el extremo delantero de la pértiga sale del granero en $ct = 8.8$ m. Esta situación es consistente con el punto en el eje ct de la figura 39.12b donde la puerta trasera del granero llega al extremo delantero de la pértiga. La ecuación 3) da $ct = 20$ m, que concuerda con el instante que se muestra en la figura 39.12b cuando la puerta frontal del granero llega al extremo posterior de la pértiga.

El efecto Doppler relativista

Otra importante consecuencia de la dilatación del tiempo es el desplazamiento en la frecuencia observada por la luz que emiten átomos en movimiento, en oposición a la luz emitida por átomos en reposo. Este fenómeno, conocido como efecto Doppler, fue explicado en el capítulo 17 porque está relacionado con las ondas de sonido. En el caso del sonido, el movimiento desde la fuente respecto al medio de propagación se puede distinguir del movimiento del observador respecto al medio. Las ondas de luz deben ser analizadas de modo diferente, no obstante, porque no requieren medio de propagación y no existe ningún método para distinguir el movimiento de una fuente de luz respecto al movimiento del observador.

Si una fuente de luz y un observador se aproximan entre sí con rapidez relativa v, la frecuencia f_{obs} medida por el observador es

$$f_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} f_{\text{fuente}} \qquad \textbf{(39.10)}$$

donde f_{fuente} es la frecuencia de la fuente medida en su marco en reposo. Advierta que esta ecuación de corrimiento Doppler relativista, a diferencia de la ecuación de corrimiento Doppler para el sonido, depende sólo de la rapidez relativa v de la fuente y el observador, y se cumple para magnitudes de velocidad relativas de hasta c. Como es de esperarse, la ecuación predice que $f_{\text{obs}} > f_{\text{fuente}}$ cuando la fuente y el observador se aproximan entre ellos. Obtiene la expresión para el caso en el que la fuente y el observador se alejan uno del otro al sustituir valores negativos para v en la ecuación 39.10.

El uso más espectacular e impresionante del efecto Doppler relativista es la medición del desplazamiento en la frecuencia de luz emitida por un cuerpo astronómico en movimiento, como lo es una galaxia. La luz emitida por átomos y que normalmente se encuentra en la región extrema violeta del espectro se corre hacia el extremo rojo del espectro

para átomos de otras galaxias, lo cual indica que estas galaxias *se alejan*. El astrónomo estadounidense Edwin Hubble (1889–1953) realizó gran cantidad de mediciones de este *corrimiento hacia el rojo* para confirmar que casi todas las galaxias se alejan de la Tierra, lo que indica que el Universo está en expansión.

39.5 Ecuaciones de transformación de Lorentz

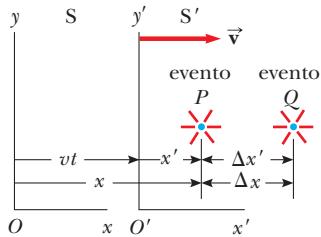



Figura 39.13 Se presentan eventos en los puntos P y Q y son contemplados por un observador en reposo en el marco S y otro en el marco S′, que se mueve a la derecha con una rapidez v.

Suponga que dos eventos se presentan en los puntos P y Q y son reportados por dos observadores, uno en reposo en un marco S y otro en un marco S′ que se mueve a la derecha con una rapidez v, como se ve en la figura 39.13. El observador en S reporta el evento con coordenadas de espacio–tiempo (x, y, z, t), mientras que el observador en S′ reporta el mismo evento con las coordenadas (x', y', z', t'). La ecuación 39.1 predice, que, la distancia entre los dos puntos en el espacio en el que se presentan los eventos no depende del movimiento del observador: $\Delta x = \Delta x'$. Como la predicción es contradictoria con la noción de contracción de la longitud, la transformación galileana no es válida cuando v se aproxima a la rapidez de la luz. En esta sección se expresan las ecuaciones de transformación correctas que aplican para todas las velocidades en el intervalo $0 < v < c$.

Las ecuaciones que son válidas para todas las magnitudes de velocidades y hacen posible transformar coordenadas de S a S′ son las **ecuaciones de transformación de Lorentz:**

Transformación de Lorents para S → S′

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{39.11}$$

Estas ecuaciones de transformación fueron desarrolladas por Hendrik A. Lorentz (1853–1928) en 1890 en relación con el electromagnetismo. Sin embargo, fue Einstein quien reconoció su importancia física y percibió la etapa bien definida de interpretarlas dentro de la estructura de la teoría especial de la relatividad.

Observe la diferencia entre las ecuaciones de tiempo galileanas y de Lorentz. En el caso de las galileanas, $t = t'$, pero en el caso de Lorentz el valor para t, asignado a un evento por un observador O' en el marco S′ de la figura 39.13, depende del tiempo t y de la coordenada x medida por un observador O en el marco S, esto es consistente con la noción de que un evento está caracterizado por cuatro coordenadas espacio–tiempo (x, y, z, t). En otras palabras, en la relatividad, el espacio y el tiempo *no son* conceptos separados sino que más bien estén estrechamente vinculados entre ellos.

Si desea transformar coordenadas del marco S′ a coordenadas del marco S, simplemente sustituya v con $-v$ e intercambie las coordenadas con prima y sin prima en las ecuaciones 39.11:

Transformación inversa de Lorents para S′ → S

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \tag{39.12}$$

Cuando $v \ll c$, las ecuaciones de transformación de Lorentz deben reducirse a las ecuaciones galileanas. Para verificar esto, advierta que cuando v se aproxima a cero, $v/c \ll 1$; debido a eso, $\gamma \to 1$, y las ecuaciones 39.11 se reducen a las ecuaciones de transformación de espacio–tiempo galileanas:

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

En muchas situaciones, es deseable saber la diferencia en las coordenadas entre dos eventos o el intervalo entre dos eventos considerado por los observadores O y O'. Con las ecuaciones 39.11 y 39.12, es posible expresar las diferencias entre las cuatro variables x, x', t y t' en la forma

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\,\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \end{aligned}\right\} \text{S} \to \text{S}' \tag{39.13}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\,\Delta t') \\ \Delta t &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \end{aligned}\right\} \text{S}' \to \text{S} \tag{39.14}$$

donde $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ y $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ son las diferencias medidas por el observador O' y $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$ son las diferencias medidas por el observador O. (No se han incluido las expresiones para relacionar las coordenadas y y z porque no resultan afectadas por el movimiento a lo largo de la dirección x).[5]

EJEMPLO 39.5 Nueva visita a la simultaneidad y la dilatación del tiempo

A) Use las ecuaciones de transformación de Lorentz en forma de diferencia para demostrar que la simultaneidad no es un concepto absoluto.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine dos eventos que son simultáneos y separados en el espacio tales que $\Delta t' = 0$ y $\Delta x' \neq 0$, de acuerdo con un observador O' que se mueve con rapidez v en relación con O.

Categorizar El enunciado del problema dice que este ejemplo se clasifica como uno que involucra la transformación de Lorentz.

Analizar A partir de la expresión para Δt conocida en la ecuación 39.14, encuentre el intervalo de tiempo Δt medido por el observador O:

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma\left(0 + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma\frac{v}{c^2}\Delta x'$$

Finalizar El intervalo de tiempo para los mismos dos eventos como los observa O son distintos de cero, así que los eventos no parecen ser simultáneos para O.

B) Use las ecuaciones de transformación de Lorentz en forma de diferencia para demostrar que un reloj en movimiento es preciso al funcionar más lentamente que un reloj que está en reposo respecto a un observador.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el observador O' lleva un reloj que usa para medir un intervalo de tiempo $\Delta t'$. Él encuentra que dos eventos se presentan en el mismo lugar en su marco de referencia ($\Delta x' = 0$) pero en diferentes tiempos ($\Delta t' \neq 0$). El observador O' se mueve con rapidez v en relación con O.

Categorizar El enunciado del problema pide clasificar este ejemplo como uno que involucra la transformación de Lorentz.

Analizar A partir de la expresión para Δt dada en la ecuación 39.14, encuentre el intervalo de tiempo Δt medido por el observador O:

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}(0)\right) = \gamma\Delta t'$$

Finalizar Este resultado es la ecuación para dilatación de tiempo encontrada anteriormente (ecuación 39.7), donde $\Delta t' = \Delta t_p$ es el intervalo de tiempo característico registrado por el reloj que lleva el observador O'. Por lo tanto, O mide que el reloj en movimiento funciona lento.

39.6 Ecuaciones de transformación de velocidad de Lorentz

Suponga que dos individuos en movimiento relativo uno respecto del otro observan un objeto en movimiento. Previamente se definió a un evento como algo que se presenta en un instante de tiempo. Ahora, interprete el "evento" como el movimiento del objeto. Sabe que la transformación de velocidad galileana (ecuación 39.2) es válida para velocidades bajas. ¿Cómo es que las mediciones de los observadores de la velocidad de un objeto se relacionan

[5] Aun cuando el movimiento relativo de dos marcos a lo largo del eje x no cambia las coordenadas y y z de un objeto, sí cambia las componentes de velocidad y y z de un objeto que se mueve en cualquiera de estos marcos, como se vio en la sección 39.6.

entre ellas si la rapidez del cuerpo es cercana a la de la luz? Una vez más S′ es el marco que se mueve con una rapidez v respecto a S. Suponga que un objeto tiene una componente de velocidad u_x' preciso en el marco S′, donde

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} \tag{39.15}$$

Si se usa la ecuación 39.11, tiene

$$dx' = \gamma(dx - v\,dt)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}\,dx\right)$$

La sustitución de estos valores en la ecuación 39.15 da

$$u_x' = \frac{dx - v\,dt}{dt - \dfrac{v}{c^2}\,dx} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt}}$$

De cualquier modo, el término dx/dt es simplemente la componente de velocidad u_x del objeto bien proporcionado por un observador en S, y por tanto esta expresión se convierte en

Transformación de velocidad de Lorentz para S → S′

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \tag{39.16}$$

Si el objeto tiene componentes de velocidad a lo largo de los ejes y y z, las componentes medidas por un observador en S′ son

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)} \quad \text{y} \quad u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)} \tag{39.17}$$

Observe que u_y' y u_z' no contienen el parámetro v en el numerador porque la velocidad relativa es a lo largo del eje x.

Cuando v es mucho menor que c (el caso no relativista), el denominador de la ecuación 39.16 se aproxima a la unidad y, por tanto, $u_x' \approx u_x - v$, que es la ecuación de transformación de velocidad galileana. En otro extremo, cuando $u_x = c$, la ecuación 39.16 se convierte en

$$u_x' = \frac{c - v}{1 - \dfrac{cv}{c^2}} = \frac{c\left(1 - \dfrac{v}{c}\right)}{1 - \dfrac{v}{c}} = c$$

Este resultado, muestra que una rapidez calculada como c por un observador en S también es medida como c por un observador en S′, independiente del movimiento relativo de S y S′. Esta conclusión es consistente con el segundo postulado de Einstein, de que la rapidez de la luz debe ser c respecto a todos los marcos inerciales de referencia. Además, la rapidez de un objeto nunca puede calcularse más grande que c. Es decir, la rapidez de la luz es la rapidez máxima. Regresará a este punto más adelante.

Para obtener u_x en términos de u_x', sustituya v con $-v$ en la ecuación 39.16 e intercambie los papeles de u_x y u_x':

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \dfrac{u_x' v}{c^2}} \tag{39.18}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.5

¿En qué pueden estar de acuerdo los observadores?

Ha visto varias mediciones en las que no están de acuerdo los dos observadores O y O': 1) el intervalo de tiempo entre eventos que tienen lugar en la misma posición en uno de los marcos, 2) la distancia entre dos puntos que permanecen fijos en uno de sus marcos, 3) las componentes de velocidad de una partícula en movimiento y 4) si dos eventos que se presentan en diferentes lugares en ambos marcos son simultáneos o no lo son. Los dos observadores *pueden* estar de acuerdo en 1) su rapidez relativa de movimiento v respecto uno de otro, 2) la rapidez c de cualquier rayo de luz y 3) la simultaneidad de dos eventos que tienen lugar en la misma posición y tiempo en algún marco.

Pregunta rápida 39.8 Usted viaja en auto en una autopista con una rapidez relativista. **i)** Justo frente a usted, un técnico que está de pie en el suelo enciende un faro y el haz de luz se mueve exactamente en forma vertical hacia arriba, como lo ve el técnico. Usted observa el

haz luminoso y mide la magnitud de la componente vertical de su velocidad como a) igual a c, b) mayor que c o c) menor que c. **ii)** Si el técnico apunta el faro directamente a usted en lugar de hacia arriba, usted mide la magnitud de la componente horizontal de su velocidad como a) igual a c, b) mayor que c o c) menor que c.

EJEMPLO 39.6 Velocidad relativa de dos naves espaciales

Dos naves espaciales A y B se mueven en direcciones opuestas como se muestra en la figura 39.14. Un observador en la Tierra mide la rapidez de la nave espacial A en $0.750c$ y la rapidez de la nave espacial B en $0.850c$. Encuentre la velocidad de la nave espacial B como la observa la tripulación de la nave espacial A.

Figura 39.14 (Ejemplo 39.6) Dos naves espaciales, A y B, se mueven en direcciones opuestas. La rapidez de la nave espacial B en relación con la nave espacial A es *menor* que c y se obtiene a partir de la ecuación de transformación de velocidad relativista.

SOLUCIÓN

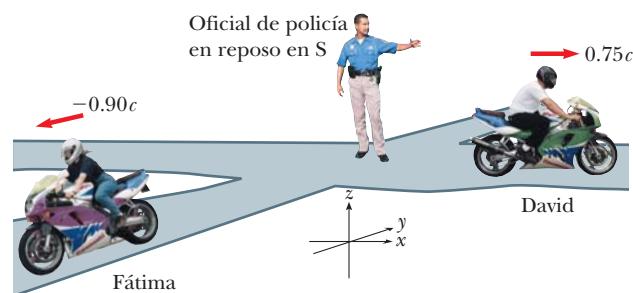
Conceptualizar Existen dos observadores, uno en la Tierra y uno en la nave espacial A. El evento es el movimiento de la nave espacial B.

Categorizar Porque el problema pide encontrar una velocidad observada, este ejemplo se clasifica como uno que requiere la transformación de velocidad de Lorentz.

Analizar El observador con base en la Tierra, en reposo en el marco S, hace dos mediciones, una de cada nave espacial. Se quiere encontrar la velocidad de la nave espacial B medida por la tripulación de la nave espacial A. Por lo tanto, $u_x = -0.850c$. La velocidad de la nave espacial A también es la velocidad del observador en reposo en la nave espacial A (el marco S') relativo al observador en reposo en la Tierra. Por tanto, $v = 0.750c$.

Obtenga la velocidad u'_x, de la nave espacial B en relación con la nave espacial A con la ecuación 39.16:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} = \frac{-0.850c - 0.750c}{1 - \dfrac{(-0.850c)(0.750c)}{c^2}} = -0.977c$$

Finalizar El signo negativo indica que la nave espacial B se mueve en la dirección x negativa, como observa la tripulación de la nave espacial A. ¿Esto es consistente con su expectativa a partir de la figura 39.14? Note que la rapidez es menor que c. Es decir: un objeto cuya rapidez es menor que c en un marco de referencia debe tener una rapidez menor que c en cualquier otro marco de referencia. (De haber usado la ecuación de transformación de velocidad galileana en este ejemplo, habría encontrado que $u'_x = u_x - v = -0.850c - 0.750c = -1.60c$, que es imposible. La ecuación de transformación galileana no funciona en situaciones relativistas.)

¿Qué pasaría si? ¿Y si las dos naves espaciales pasan una junto a la otra? ¿ Ahora cuál es su rapidez relativa?

Respuesta El cálculo con la ecuación 39.16 involucra sólo las velocidades de las dos naves espaciales y no depende de sus posiciones. Después de que pasan una a la otra, tienen las mismas velocidades, de modo que la velocidad de la nave espacial B, como la observa la tripulación en la nave espacial A, es la misma, $-0.977c$. La única diferencia después de que pasan es que la nave espacial B se aleja de la nave espacial A, mientras que se aproximaba a ella antes de pasar.

EJEMPLO 39.7 Líderes de la prisa relativistas

Dos conductores de motocicleta llamados David y Fátima corren con rapidez relativista a lo largo de trayectorias perpendiculares, como se muestra en la figura 39.15. ¿Qué tan rápido se aleja Fátima, según ve David sobre su hombro derecho?

Figura 39.15 (Ejemplo 39.7) David se mueve hacia el este con una rapidez de $0.75c$ relativa al oficial de policía, y Fátima viaja hacia el sur con una rapidez de $0.90c$ relativa al oficial.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los dos observadores son David y el oficial de policía en la figura 39.15. El evento es el movimiento de Fátima. La figura 39.15 representa la situación como la ve el oficial de policía en reposo en el marco S. El marco S′ se mueve junto con David.

Categorizar Ya que el problema pide encontrar una velocidad observada, este problema se clasifica como uno que requiere la transformación de velocidad de Lorentz. El movimiento tiene lugar en dos dimensiones.

Analizar Identifique las componentes de velocidad para David y Fátima de acuerdo con el oficial de policía:

David: $v_x = v = 0.75c \qquad v_y = 0$

Emily: $u_x = 0 \qquad u_y = -0.90c$

Con las ecuaciones 39.16 y 39.17, calcule u'_x y u'_y para Fátima, según mide David:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} = \frac{0 - 0.75c}{1 - \dfrac{(0)(0.75c)}{c^2}} = -0.75c$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{(0.75c)^2}{c^2}}\,(-0.90c)}{\left(1 - \dfrac{(0)(0.75c)}{c^2}\right)} = -0.60c$$

Con el teorema de Pitágoras, encuentre la rapidez de Fátima como la mide David:

$$u' = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2} = \sqrt{(-0.75c)^2 + (-0.60c)^2} = 0.96c$$

Finalizar Esta rapidez es menor que c, como requiere la teoría especial de la relatividad.

39.7 Movimiento lineal relativista

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.6

Cuidado con la "masa relativista"

Algunos tratados viejos sobre la relatividad mantenían el principio de conservación de la cantidad de movimiento a magnitudes altas de velocidades, para lo cual usaban un modelo en el que la masa de una partícula aumentaba con la rapidez. Incluso podría encontrar esta noción de "masa relativista" en sus lecturas, en especial en libros viejos. Deberán ser conscientes de que esta noción ya no se acepta en general y hoy la masa es considerada *invariante,* independientemente de la rapidez. La masa de un objeto en todos los marcos se considera la masa medida por un observador en reposo respecto al objeto.

Para describir en forma correcta el movimiento de partículas dentro de la estructura de la teoría especial de la relatividad, debe sustituir las ecuaciones de transformación galileana con las ecuaciones de transformación de Lorentz. Porque las leyes de la física deben permanecer sin cambio bajo la transformación de Lorentz, debe generalizar las leyes de Newton y las definiciones de cantidad de movimiento lineal y energía para que se ajusten a las ecuaciones de transformación de Lorentz y al principio de relatividad. Estas definiciones generalizadas deben reducirse a las definiciones clásicas (no relativistas) para $v \ll c$.

Primero, recuerde que en un modelo de un sistema aislado cuando dos partículas (u objetos que se pueden modelar como partículas) chocan, la cantidad de movimiento total lineal del sistema aislado de las dos partículas permanece constante. Suponga que observa esta colisión en un marco de referencia S y confirma que se conserva la cantidad de movimiento del sistema. Ahora imagine que las cantidades de movimiento de las partículas son medidas por un observador en un segundo marco de referencia S′, que se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ respecto al primer marco. Con el uso de la ecuación de transformación de velocidad de Lorentz y la definición clásica de cantidad de movimiento lineal, $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{u}}$ (donde $\vec{\mathbf{u}}$ es la velocidad de una partícula), encuentra que la cantidad de movimiento lineal, de acuerdo con las mediciones del observador en S′, *no* se conserva. No obstante, como las leyes de la física son las mismas en todos los marcos inerciales, la cantidad de movimiento lineal del sistema debe conservarse en todos los marcos, por lo que tiene una contradicción. En vista de esta contradicción, y suponiendo que la ecuación de la transformación de velocidad de Lorentz es correcta, debe modificar la definición de cantidad de movimiento lineal así que la cantidad de movimiento lineal de un sistema aislado debe conservarse para todos los observadores. Para cualquier partícula, la ecuación relativista correcta para una cantidad de movimiento lineal que satisface estas condiciones es

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv \frac{m\vec{\mathbf{u}}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \gamma m \vec{\mathbf{u}} \quad \textbf{(39.19)}$$

◀ Definición de cantidad de movimiento lineal relativista

donde $\vec{\mathbf{u}}$ es la velocidad de la partícula y m es su masa. Cuando u es mucho menor que c, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ se aproxima a la unidad y $\vec{\mathbf{p}}$ se aproxima a $m\vec{\mathbf{u}}$. Por lo tanto, la ecuación relativista para $\vec{\mathbf{p}}$ se reduce a la expresión clásica cuando u es mucho menor que c.

La fuerza relativista $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre una partícula cuya cantidad de movimiento lineal es $\vec{\mathbf{p}}$ se define como

$$\vec{\mathbf{F}} \equiv \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \quad \textbf{(39.20)}$$

donde $\vec{\mathbf{p}}$ se conoce por la ecuación 39.19. Esta expresión, que es la forma relativista de la segunda ley de Newton, es razonable porque conserva la mecánica clásica en el límite de bajas velocidades, y es consistente con la conservación de la cantidad de movimiento lineal para un sistema aislado ($\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0$), tanto en forma relativista como clásica.

El problema 61 se deja como problema de final del capítulo para demostrar que, bajo condiciones relativistas, la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ de una partícula disminuye bajo la acción de una fuerza constante, en cuyo caso $a \propto (1 - u^2/c^2)^{3/2}$. Esta proporcionalidad, muestra que cuando la rapidez de la partícula se aproxima a c, la aceleración causada por cualquier fuerza finita se aproxima a cero. En consecuencia, es imposible acelerar una partícula desde el reposo hasta una rapidez $u \geq c$. Este argumento fortalece que la rapidez de la luz es la máxima rapidez, el límite de la rapidez del Universo. Es la rapidez máxima posible de transferencia y de transformación de energía. Cualquier objeto con masa debe moverse con una rapidez inferior

EJEMPLO 39.8 Cantidad de movimiento lineal de un electrón

Un electrón, que tiene una masa de 9.11×10^{-31} kg, se mueve con una rapidez de $0.750c$. Encuentre la magnitud de su cantidad de movimiento relativista y compare este valor con la cantidad de movimiento calculada a partir de la expresión clásica.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un electrón que se mueve con rapidez alta. El electrón porta cantidad de movimiento, pero la magnitud de su cantidad de movimiento no se conoce por $p = mv$ porque la rapidez es relativista.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución que involucra una ecuación relativista.

Use la ecuación 39.19 con $u = 0.750c$ para encontrar la cantidad de movimiento:

$$p = \frac{m_e u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

$$p = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(0.750)(3.00 \times 10^8\text{ m/s})}{\sqrt{1-\dfrac{(0.750c)^2}{c^2}}}$$

$$= 3.10 \times 10^{-22}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

La expresión clásica (usada incorrectamente en este caso) da $p_{\text{clásica}} = m_e u = 2.05 \times 10^{-22}$ kg · m/s. Por tanto, ¡el resultado relativista correcto es 50% mayor que el resultado clásico!

39.8 Energía relativista

La definición de cantidad de movimiento lineal requiere una generalización para hacerla compatible con los postulados de Einstein. Esta conclusión implica que, con toda probabilidad, la definición de energía cinética también debe modificarse.

Para deducir la forma relativista del teorema del trabajo y energía cinética, imagine una partícula que se mueve en una dimensión a lo largo del eje x. Una fuerza en la dirección x hace que la cantidad de movimiento de la partícula cambie según la ecuación 39.20. A continuación suponemos que la partícula se acelera desde el reposo hasta alguna rapidez final u. El trabajo invertido por la fuerza F sobre la partícula es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt}\,dx \tag{39.21}$$

Para efectuar esta integración y hallar el trabajo realizado sobre la partícula y la energía cinética relativista como función de u, primero evalúe dp/dt:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mu}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{m}{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{du}{dt}$$

Al sustituir esta expresión para dp/dt y $dx = u\,dt$ en la ecuación 39.21

$$W = \int_0^t \frac{m}{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{du}{dt}(u\,dt) = m\int_0^u \frac{u}{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,du$$

donde se usan los límites 0 y u en la integral porque la variable de integración ha sido cambiada de t a u. Al evaluar la integral, encontramos que

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} - mc^2 \tag{39.22}$$

Recuerde del capítulo 7, que el trabajo invertido por una fuerza que actúa sobre un sistema formado por una sola partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula. Ya que supuso que la rapidez inicial de la partícula es cero, su energía cinética inicial es cero. Por lo tanto, el trabajo W de la ecuación 39.22 es equivalente a la energía cinética relativista K:

Energía cinética relativista ▶

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \tag{39.23}$$

Esta ecuación se confirma normalmente por experimentos que usan aceleradores de partículas de alta energía.

Con rapidez baja, donde $u/c \ll 1$, la ecuación 39.23 debe reducirse a la expresión clásica $K = \frac{1}{2}mu^2$. Esto se comprueba al usar la expansión binomial $(1-\beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots$ para $\beta \ll 1$, donde las potencias de orden superior de β se ignoran en la expansión. (En tratamientos de relatividad, β es un símbolo común empleado para representar u/c o v/c). En nuestro caso, $\beta = u/c$, por lo cual

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

Al sustituir esto en la ecuación 39.23

$$K \approx \left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) - 1\right]mc^2 = \frac{1}{2}mu^2 \quad (\text{para } u/c \ll 1)$$

que es la expresión clásica para la energía cinética. En la figura 39.16 se presenta una gráfica que compara las expresiones relativista y no relativista. En el caso relativista, la rapidez de la partícula nunca excede de c, cualquiera que sea la energía cinética. Las dos curvas están en concordancia con $u \ll c$.

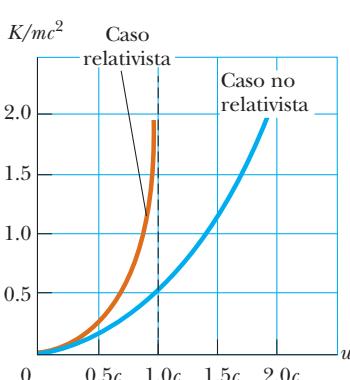



Figura 39.16 Gráfica que compara energía cinética relativista y no relativista de una partícula en movimiento. Las energías se grafican como función de la rapidez u de la partícula. En el caso relativista, u siempre es menor que c.

El término constante mc^2 de la ecuación 39.23, que es independiente de la rapidez de la partícula, se denomina **energía en reposo** E_R de la partícula:

$$E_R = mc^2 \tag{39.24}$$

◀ Energía en reposo

La ecuación 39.24 muestra que **la masa es una forma de energía** donde c^2 es simplemente un factor de conversión constante. Esta expresión también exhibe que una masa pequeña corresponde a una cantidad considerable de energía, un concepto fundamental de la física nuclear y de partículas elementales.

El término γmc^2 en la ecuación 39.23, que depende de la rapidez de la partícula, es la suma de las energías cinética y en reposo, y se le llama **energía total** E:

$$\text{Energía total} = \text{energía cinética} + \text{energía en reposo}$$

$$E = K + mc^2 \tag{39.25}$$

o bien,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \tag{39.26}$$

◀ Energía total de una partícula relativista

En muchas situaciones, se mide la cantidad de movimiento lineal o energía de una partícula más bien que su rapidez. Por lo tanto, es útil tener una expresión que relacione la energía total E a la cantidad de movimiento lineal relativista p. Esto se logra al usar las expresiones $E = \gamma mc^2$ y $p = \gamma mu$. Al elevar al cuadrado estas ecuaciones y restar, es posible eliminar u (problema 37). El resultado, después de un poco de álgebra, es[6]

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \tag{39.27}$$

◀ Relación de energía y cantidad de movimiento para una partícula relativista

Cuando la partícula está en reposo, $p = 0$, entonces $E = E_R = mc^2$.

En la sección 35.1 aparece el concepto de una partícula de luz, denominada **fotón.** Para partículas que tienen masa cero, como los fotones, $m = 0$ en la ecuación 39.27 y

$$E = pc \tag{39.28}$$

Esta ecuación es una expresión exacta que relaciona la energía total y la cantidad de movimiento lineal para fotones, que siempre se desplazan a la rapidez de la luz (en el vacío).

Por último, observe que, como la masa m de una partícula es independiente de su movimiento, m debe tener el mismo valor en todos los marcos de referencia. Por esta razón, con frecuencia m se denomina **masa invariante.** Por otra parte, porque la energía total y la cantidad de movimiento lineal de una partícula dependen de la velocidad, estas cantidades dependen del marco de referencia en el que se miden.

Cuando se relaciona con partículas subatómicas, es conveniente expresar su energía en electrón volts (sección 25.1) porque las partículas por lo general adquieren esta energía por aceleración mediante una diferencia de potencial. El factor de conversión, como debe recordar de la ecuación 3.5, es

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Por ejemplo, la masa de un electrón es 9.11×10^{-31} kg. Por esto, la energía en reposo del electrón es

$$\begin{aligned} m_e c^2 &= (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 8.187 \times 10^{-14} \text{ J} \\ &= (8.187 \times 10^{-14} \text{ J})(1 \text{ eV}/1.602 \times 10^{-19} \text{ J}) = 0.511 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Pregunta rápida 39.9 Los siguientes *pares* de energía representan la energía en reposo y la energía total de tres partículas diferentes: partícula 1: E, $2E$; partícula 2: E, $3E$; partícula 3: $2E$, $4E$. Clasifique las partículas, de mayor a menor, según su a) masa, b) energía cinética, y c) rapidez.

[6] Una forma de recordar esta relación es trazar un triángulo rectángulo que tenga una hipotenusa de longitud E y catetos de longitudes pc y mc^2.

EJEMPLO 39.9 La energía de un protón correlón

A) Encuentre la energía en reposo de un protón en unidades de electrón volt.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Incluso si el protón no se mueve, tiene energía asociada con su masa. Si se mueve, el protón posee más energía, siendo la energía total la suma de su energía en reposo y su energía cinética.

Categorizar La frase "energía en reposo" sugiere que se debe tomar un planteamiento relativista en lugar de uno clásico a este problema.

Analizar Use la ecuación 39.24 para encontrar la energía en reposo:

$$E_R = m_p c^2 = (1.673 \times 10^{-27}\text{ kg})(2.998 \times 10^{8}\text{ m/s})^2$$

$$= (1.504 \times 10^{-10}\text{ J})\left(\frac{1.00\text{ eV}}{1.602 \times 10^{-19}\text{ J}}\right) = \boxed{938\text{ MeV}}$$

B) Si la energía total de un protón es tres veces su energía en reposo, ¿cuál es la rapidez del protón?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 39.26 para relacionar la energía total del protón con la energía en reposo:

$$E = 3m_p c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \rightarrow 3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Resuelva para u:

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{1}{9} \rightarrow \frac{u^2}{c^2} = \frac{8}{9}$$

$$u = \frac{\sqrt{8}}{3}c = 0.943c = \boxed{2.83 \times 10^{8}\text{ m/s}}$$

C) Determine la energía cinética del protón en unidades de electrón volt.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 39.25 para encontrar la energía cinética del protón:

$$K = E - m_p c^2 = 3m_p c^2 - m_p c^2 = 2m_p c^2$$

$$= 2(938\text{ MeV}) = \boxed{1.88 \times 10^{3}\text{ MeV}}$$

D) ¿Cuál es la cantidad de movimiento del protón?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 39.27 para calcular la cantidad de movimiento:

$$E^2 = p^2c^2 + (m_p c^2)^2 = (3m_p c^2)^2$$

$$p^2c^2 = 9(m_p c^2)^2 - (m_p c^2)^2 = 8(m_p c^2)^2$$

$$p = \sqrt{8}\,\frac{m_p c^2}{c} = \sqrt{8}\,\frac{(938\text{ MeV})}{c} = \boxed{2.65 \times 10^{3}\text{ MeV}/c}$$

Finalizar La unidad de cantidad de movimiento en el inciso D) se escribe MeV/c, que es una unidad común en física de partículas. Para comparar, puede resolver este ejemplo con ecuaciones clásicas.

¿Qué pasaría si? En física clásica, si la cantidad de movimiento de una partícula se duplica, la energía cinética aumenta por un factor de 4. ¿Qué ocurre con la energía cinética del protón en este ejemplo, si su cantidad de movimiento se duplica?

Respuesta De acuerdo con lo que ha visto hasta el momento en relatividad, es probable que prediga que su energía cinética no aumenta en un factor de 4.

Encuentre la cantidad de movimiento duplicada:

$$p_{\text{nueva}} = 2\left(\sqrt{8}\,\frac{m_p c^2}{c}\right) = 4\sqrt{2}\,\frac{m_p c^2}{c}$$

Use este resultado en la ecuación 39.27 para encontrar la nueva energía total:

$$E_{\text{nueva}}^2 = p_{\text{nueva}}^2 c^2 + (m_p c^2)^2$$

$$E_{\text{nueva}}^2 = \left(4\sqrt{2}\,\frac{m_p c^2}{c}\right)^2 c^2 + (m_p c^2)^2 = 33(m_p c^2)^2$$

$$E_{\text{nueva}} = \sqrt{33}(m_p c^2) = 5.7 m_p c^2$$

Use la ecuación 39.25 para encontrar la nueva energía cinética:

$$K_{\text{nueva}} = E_{\text{nueva}} - m_p c^2 = 5.7 m_p c^2 - m_p c^2 = 4.7 m_p c^2$$

Este valor es un poco más del doble de la energía cinética que se encontró en el inciso C), no cuatro veces. En general, el factor por el que aumenta la energía cinética si la cantidad de movimiento se duplica, depende de la cantidad de movimiento inicial, pero tiende a 4 conforme la cantidad de movimiento tiende a cero. En esta última situación, la física clásica describe correctamente la situación.

39.9 Masa y energía

La ecuación 39.26, $E = \gamma mc^2$, que representa la energía total de una partícula, sugiere que, incluso cuando una partícula está en reposo ($\gamma = 1$), todavía tiene enorme energía a través de su masa. La prueba experimental más clara de la equivalencia de masa y energía se presenta en interacciones nucleares y de partículas elementales en donde tiene lugar la conversión de masa en energía cinética. Debido a esto, en situaciones relativistas, no es posible usar el principio de conservación de energía como se señaló en el capítulo 8. Debe modificar el principio para incluir energía en reposo como otra forma de almacenamiento de energía.

Este concepto es importante en procesos atómicos y nucleares, en donde el cambio en la masa es una fracción relativamente grande de la masa inicial. Por ejemplo, en un reactor nuclear convencional, el núcleo de uranio se somete a *fisión*, una reacción que resulta en varios fragmentos más ligeros con una considerable energía cinética. En el caso del ^{235}U, que se emplea como combustible en plantas de energía nuclear, los fragmentos son dos núcleos más ligeros y unos pocos neutrones. La masa total de los fragmentos es menor que la del ^{235}U en una cantidad Δm. La correspondiente energía Δmc^2 asociada con esta diferencia de masa es exactamente igual al total de la energía cinética de los fragmentos. La energía cinética es absorbida cuando los fragmentos se mueven en el agua, lo que eleva la energía interna del agua. Esta energía interna se utiliza para producir vapor para la generación de energía eléctrica.

A continuación, considere una reacción de *fusión* básica en la que dos átomos de deuterio se combinan para formar un átomo de helio. La reducción en masa que resulta de la creación de un átomo de helio a partir de dos átomos de deuterio es $\Delta m = 4.25 \times 10^{-29}$ kg. Por tanto, la correspondiente energía que resulta de una reacción de fusión es $\Delta mc^2 = 3.83 \times 10^{-12}$ J = 23.9 MeV. Para apreciar la magnitud de este resultado, si sólo 1 g de deuterio se convierte en helio, la energía liberada es del orden de 10^{12} J! A precio base del año 2007, esto costaría unos 30 000 dólares. En el capítulo 45 se presentan más detalles de estos procesos nucleares.

EJEMPLO 39.10 **Cambio de masa en un decaimiento radiactivo**

El núcleo de ^{216}Po es inestable y exhibe radiactividad (capítulo 44). Decae a ^{212}Pb mediante la emisión de una partícula alfa, que es un núcleo de helio, ^{4}He. Las masas relevantes son $m_i = m(^{216}\text{Po}) = 216.001\,905$ u y $m_f = m(^{212}\text{Pb}) + m(^{4}\text{He}) = 211.991\,888$ u $+ 4.002\,603$ u.

A) Encuentre el cambio de masa del sistema en este decaimiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sistema inicial es el núcleo de ^{216}Po. Imagine que la masa del sistema disminuye durante el decaimiento y se transforma a energía cinética de la partícula alfa y el núcleo de ^{212}Pb después del decaimiento.

Categorizar Se usan los conceptos discutidos en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Calcule el cambio de masa:

$$\Delta m = 216.001\,905 \text{ u} - (211.991\,888 \text{ u} + 4.002\,603 \text{ u})$$
$$= 0.007\,414 \text{ u} = \boxed{1.23 \times 10^{-29} \text{ kg}}$$

B) Encuentre la energía que representa este cambio de masa.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 39.24 par encontrar la energía asociada con este cambio de masa:

$$E = \Delta mc^2 = (1.23 \times 10^{-29} \text{ kg})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$
$$= 1.11 \times 10^{-12} \text{ J} = \boxed{6.92 \text{ MeV}}$$

39.10 Teoría general de la relatividad

Hasta este punto, se ha evitado un curioso acertijo. La masa tiene dos propiedades aparentemente diferentes: la *atracción gravitacional* que ejerce sobre otras masas y la propiedad *inercial,* que representa una resistencia a la aceleración. Para designar estos dos atributos, se usan los subíndices g e i y se escribe

$$\text{Propiedad gravitacional} \qquad F_g = m_g g$$
$$\text{Propiedad inercial} \qquad \sum F = m_i a$$

El valor para la constante gravitacional G se escogió para hacer numéricamente iguales las magnitudes de m_g y de m_i. Cualquiera que sea la forma en que se escoja G, no obstante, la proporcionalidad estricta de m_g y m_i se ha establecido experimentalmente a un grado extremadamente alto: unas cuantas partes en 10^{12}. Por lo tanto, parece que la masa gravitacional y la masa inercial pueden ser exactamente proporcionales.

Pero, ¿por qué? Se involucran dos conceptos por completo diferentes: una fuerza de atracción gravitacional mutua entre dos masas y la resistencia de una sola masa a ser acelerada. Esta pregunta, que desconcertó a Newton y a muchos otros físicos durante años, fue contestada por Einstein en 1916 cuando publicó su teoría sobre la gravitación, conocida como *teoría general de la relatividad.* Ya que es una teoría compleja desde el punto de vista matemático, aquí se ofrece sólo una sugerencia de su elegancia e intuición.

Desde el punto de vista de Einstein, el comportamiento doble de la masa era evidencia de una muy íntima y básica conexión entre los dos comportamientos. Él señaló que ningún experimento mecánico (por ejemplo, dejar caer un objeto) podría distinguir entre las dos situaciones ilustradas en las figuras 39.17a y 39.17b. En la figura 39.17a, una persona está de pie en un elevador sobre la superficie de un planeta, y se siente presionado en el piso debido a la fuerza gravitacional. Si suelta su portafolios, observa que se mueve hacia el piso con aceleración $\vec{\mathbf{g}} = -g\hat{\mathbf{j}}$. En la figura 39.17b, la persona está en un elevador en espacio vacío acelerando hacia arriba con $\vec{\mathbf{a}}_{\text{el}} = +g\hat{\mathbf{j}}$. La persona se siente presionada hacia el piso con la misma fuerza que en la figura 39.17a. Si suelta su portafolios, observa que se mueve hacia el piso con aceleración g, exactamente como en la situación previa. En cada situación, un objeto soltado por el observador experimenta una aceleración hacia abajo de magnitud g en relación con el piso. En la figura 39.17a, la persona está en reposo en un marco inercial en un campo gravitacional debido al planeta. En la figura 39.17b, la persona está en un marco no inercial que acelera en espacio libre de gravedad. La afirmación de Einstein es que estas dos situaciones son completamente equivalentes.

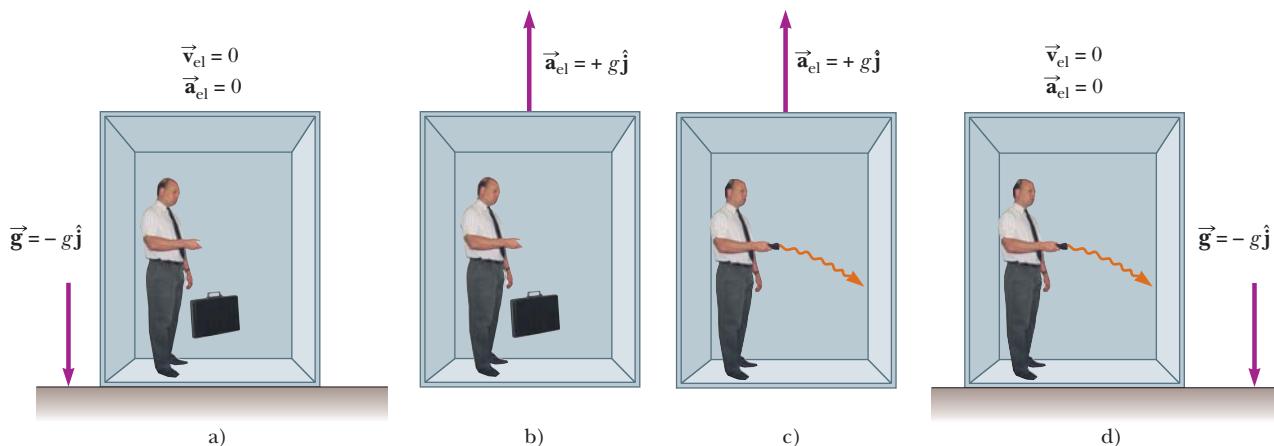
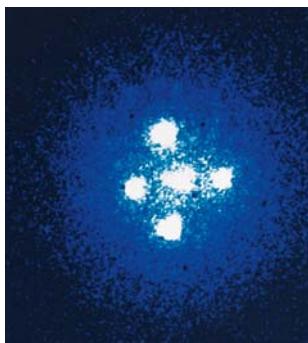



Figura 39.17 a) El observador está en reposo en un elevador en un campo gravitacional uniforme $\vec{g} = g\hat{j}$ dirigido hacia abajo. El observador deja caer su portafolios, que se mueve hacia abajo con aceleración g. b) El observador está en una región donde la gravedad es despreciable, pero el elevador se mueve hacia arriba con una aceleración $\vec{a}_{el} = +g\hat{j}$. El observador suelta su portafolios, que se mueve hacia abajo (de acuerdo con el observador) con aceleración g relativa al piso del elevador. De acuerdo con Einstein, los marcos de referencia en a) y b) son equivalentes. Ningún experimento local puede distinguir alguna diferencia entre los dos marcos. c) En el marco en aceleración, un rayo de luz parecería doblarse hacia abajo debido a la aceleración. d) Si a) y b) son verdaderamente equivalentes, como Einstein propuso, c) sugiere que un rayo de luz se doblaría hacia abajo en un campo gravitacional.

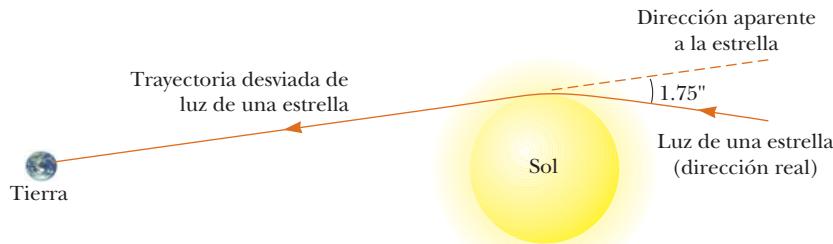
Einstein llevó esta idea más lejos y propuso que *ningún* experimento, mecánico o de otro tipo, podría distinguir entre los dos casos. Esta extensión para incluir todos los fenómenos (no sólo mecánicos) tiene consecuencias interesantes. Por ejemplo, suponga que un pulso de luz es enviado horizontalmente en un elevador que se acelera hacia arriba en un espacio vacío, como se muestra en la figura 39.17c. Desde el punto de vista de un observador en un marco inercial fuera del elevador, la luz se desplaza en línea recta mientras que el piso del elevador acelera hacia arriba. Según el observador que está en el elevador, sin embargo, la trayectoria del pulso de luz se dobla hacia abajo cuando el piso del elevador (y el observador) acelera hacia arriba. Por lo tanto, en términos de la igualdad de los incisos a) y b) de la figura, Einstein propuso **que un haz de luz también debería ser doblado hacia abajo por un campo gravitacional,** como se ve en la figura 39.17d. Experimentos realizados han verificado el efecto, aun cuando el doblamiento es pequeño. Un láser que apunta al horizonte cae menos de 1 cm después de recorrer 6000 km. (Este doblamiento no se pronosticó en la teoría de gravitación de Newton.)

Los dos postulados de la **teoría general de la relatividad** de Einstein son:

◄ Postulados de la teoría general de la relatividad

- Todas las leyes de la naturaleza tienen la misma forma para observadores en cualquier marco de referencia, acelerados o no.
- En la cercanía de cualquier punto, un campo gravitacional es equivalente a un marco de referencia acelerado en ausencia de efectos gravitacionales. (Este es el **principio de equivalencia.**)

Un interesante efecto pronosticado por la teoría general es que el tiempo es alterado por la gravedad. Un reloj en presencia de gravedad funciona más lentamente que uno colocado donde la gravedad es insignificante. Por tanto, las frecuencias de radiación emitidas por átomos en presencia de un campo gravitacional intenso están *corridas hacia el rojo* a frecuencias menores cuando se comparan con las mismas emisiones en presencia de un campo débil. Este corrimiento hacia el rojo gravitacional ha sido detectado en líneas espectrales emitidas por átomos en estrellas pesadas. También se ha verificado en la Tierra al comparar las frecuencias de rayos gamma emitidos desde núcleos separados verticalmente unos 20 metros.

El segundo postulado sugiere que un campo gravitacional puede ser "transformado" en cualquier punto si se escoge un apropiado marco de referencia acelerado: uno en caída libre. Einstein ideó un ingenioso método para describir la aceleración necesaria para hacer "desaparecer" el campo gravitacional. Especificó un concepto, la *curvatura del espacio–tiempo*, que describe el efecto gravitacional en todo punto. De hecho, la curvatura

Cruz de Einstein. Los cuatro puntos brillantes son imágenes de la misma galaxia que se han doblado alrededor de un cuerpo enorme situado entre la galaxia y la Tierra. El objeto pesado actúa como lente, haciendo que los rayos de luz que divergían de la galaxia distante convergieran en la Tierra. (Si el objeto pesado que interviene tuviera una distribución de masa uniforme, se vería un anillo brillante en lugar de cuatro puntos.)

del espacio–tiempo sustituye por completo la teoría gravitacional de Newton. Según Einstein, no hay nada como la fuerza gravitacional. Más bien, la presencia de una masa produce alrededor de ella una curvatura del espacio–tiempo, y esta curvatura dicta la trayectoria del espacio–tiempo que deben seguir todos los cuerpos en caída libre.

Como ejemplo de los efectos de la curvatura del espacio–tiempo, imagine dos viajeros que se mueven en trayectorias paralelas a unos pocos metros de distancia entre ellos, sobre la superficie de la Tierra, y conservando un rumbo exacto al norte a lo largo de dos líneas longitudinales. Cuando se ven el uno al otro cerca del ecuador, dirán que sus trayectorias son exactamente paralelas. Cuando se aproximan al polo norte, sin embargo, observarán que se están moviendo cada vez más cerca uno del otro y de hecho se encontrarán en el polo norte. Por lo tanto, dirán que se movieron a lo largo de trayectorias paralelas, pero uno hacia el otro, *como si hubiera una fuerza de atracción entre ellos.* Llegarán a esta conclusión de acuerdo con su experiencia diaria de moverse en superficies planas, pero a partir de una representación mental verán que están caminando en una superficie curva y que es la geometría de la superficie curva la que los hace converger, en lugar de una fuerza de atracción. De igual forma, la relatividad general sustituye la noción de fuerzas con el movimiento de cuerpos en el espacio–tiempo curvado.

Una predicción de la teoría general de la relatividad es que un haz luminoso que pase cerca del Sol debe desviarse en el espacio–tiempo curvado producido por la masa del Sol. Esta predicción fue confirmada cuando astrónomos detectaron el doblamiento de la luz de una estrella cercana al Sol durante un eclipse solar total que ocurrió poco después de la Primera Guerra Mundial (figura 39.18). Cuando se anunció este descubrimiento, Einstein se hizo una celebridad internacional.

Si la concentración de masa se vuelve muy grande, como se cree que ocurre cuando una estrella pesada agota su combustible nuclear y se colapsa a un volumen muy pequeño, se puede formar un **agujero negro.** En este caso, la curvatura del espacio–tiempo es tan grande que, dentro de cierta distancia del centro del agujero negro, toda la materia y la luz quedan atrapadas, como se explicó en la sección 13.6.

Figura 39.18 Desviación de la luz de una estrella que pasa cerca del Sol. Debido a este efecto, el Sol, o cualquier otro cuerpo remoto, puede actuar como *lente gravitacional.* En su teoría general de relatividad, Einstein calculó que la luz de una estrella que apenas roce la superficie del Sol debe ser desviada por un ángulo de 1.75 s de arco.

Resumen

DEFINICIONES

La expresión relativista para la **cantidad de movimiento lineal** de una partícula que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{u}}$ es

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv \frac{m\vec{\mathbf{u}}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{\mathbf{u}} \qquad (39,19)$$

La fuerza relativista $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre una partícula cuya cantidad de movimiento lineal es $\vec{\mathbf{p}}$ se define como

$$\vec{\mathbf{F}} \equiv \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \qquad (39.20)$$

(*continúa*)

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Los dos postulados básicos de la teoría de la relatividad especial son los siguientes:

- Las leyes de la física deben ser las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.
- La rapidez de la luz en el vacío tiene el mismo valor, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, en todos los marcos inerciales, sin importar la velocidad del observador o la velocidad de la fuente que emite la luz.

Tres consecuencias de la teoría de la relatividad especial son las siguientes:

- Los eventos que se observan como simultáneos para un observador no necesariamente se observan como simultáneos para otro observador que está en movimiento en relación con el primero.
- Los relojes en movimiento relativo a un observador se mide que funcionan más lentos en un factor $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Este fenómeno se conoce como **dilatación del tiempo.**
- La longitud de los objetos en movimiento se observa como contraída en la dirección de movimiento en un factor $1/\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Este fenómeno se conoce como **contracción de la longitud.**

Para satisfacer los postulados de la relatividad especial, las ecuaciones de transformación galileana se deben sustituir por las **ecuaciones de transformación de Lorentz**:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{39.11}$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ y el marco S′ se mueven en la dirección x en relación con el marco S.

La forma relativista de la **ecuación de transformación de velocidad de Lorentz** es

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \tag{39.16}$$

donde u'_x es la componente x de la velocidad de un objeto observado en el marco S′ y u_x es su componente observada en el marco S.

La expresión relativista para la **energía cinética** de una partícula es

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \tag{39.23}$$

El término constante mc^2 en la ecuación 39.23 se llama **energía en reposo** E_R de la partícula:

$$E_R = mc^2 \tag{39.24}$$

La energía total E de una partícula se conoce por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \tag{39.26}$$

La cantidad de movimiento lineal relativista de una partícula se relaciona con su energía total a través de la ecuación

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \tag{39.27}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. La rapidez de la luz en el agua es de 230 Mm/s. Suponga un electrón que se mueve en el agua a 250 Mm/s. ¿Esto viola el principio de la relatividad?

2. **O** Usted mide el volumen de un cubo en reposo como V_0. Luego mide el volumen del mismo cubo conforme pasa junto a usted en una dirección paralela a un lado del cubo. La rapidez del cubo es $0.98c$, así que $\gamma \approx 5$. ¿El volumen que mide está cerca de a) $V_0/125$, b) $V_0/25$, c) $V_0/5$, d) V_0, e) $5V_0$, f) $25V_0$, g) $125V_0$?

3. **O** Una nave espacial construida con la forma de esfera, se mueve más allá de un observador en la Tierra con una rapidez de $0.5c$. ¿Qué forma describe el observador para la nave espacial mientras pasa frente a él? a) una esfera, b) una forma de cigarro, elongada con la dirección de movimiento, c) una forma de cojín redondeado, aplanado a lo largo de la dirección de movimiento, d) una forma cónica, que apunta en la dirección de movimiento.

4. **O** Una nave espacial se aleja más allá de la Tierra con una velocidad constante. Un observador en la Tierra observa que un reloj no descompuesto en la nave espacial hace tictac a un tercio la rapidez de un reloj idéntico en la Tierra. ¿Qué mide un observador en la nave espacial acerca de la rapidez de tictac del reloj de la Tierra? a) Funciona más de tres veces más rápido que su propio reloj. b) Funciona tres veces más rápido que el propio. c) Funciona a la misa tasa que el propio. d) Funciona aproximadamente a la mitad de la rapidez que el propio. e) Funciona a un tercio la rapidez del propio. f) Funciona al menos a un tercio la rapidez del propio.

5. Explique por qué es necesario, cuando se define la longitud de una varilla, especificar que las posiciones de los extremos de la varilla deben medirse simultáneamente.

6. **O** Dos relojes idénticos se sincronizan. Uno permanece en la Tierra. El otro se pone en órbita alrededor de la Tierra y se mueve hacia el este. **i)** Según mide un observador en la Tierra, mientras está en rápido movimiento, ¿el reloj en órbita a) funciona más rápido que el reloj con base en la Tierra, b) funciona con la misma relación o c) funciona más lento? **ii)** El reloj en órbita regresa a su ubicación original y es llevado al reposo relativo en la Tierra. De ahí en adelante, a) su lectura se atrasa cada vez más a la del reloj con base en la Tierra, b) se retrasa al reloj con base en la Tierra en una cantidad constante, c) está sincronizado con el reloj con base en la Tierra, d) se adelanta al reloj con base en la Tierra en una cantidad constante o e) cada vez se adelanta más al reloj con base en la Tierra.

7. Un tren se aproxima con muy alta rapidez a usted que está de pie junto a las vías. Cuando un observador a bordo pasa frente a usted, ambos empiezan a tocar la misma sinfonía de Beethoven en aparatos reproductores de discos compactos. a) Según usted, ¿en cuál reproductor de CD termina primero la sinfonía? b) **¿Qué pasaría si?** Según el observador a bordo del tren, ¿en cuál reproductor de CD termina primero la sinfonía? c) ¿En cuál reproductor de CD realmente termina primero la sinfonía?

8. Haga una lista de algunas de las formas en que nuestra vida cambiaría si la rapidez de la luz fuera de sólo 50 m/s.

9. ¿Cómo se indica la aceleración en una gráfica de espacio–tiempo?

10. Explique cómo se usa el efecto Doppler con microondas para determinar la rapidez de un automóvil.

11. En muchos casos se descubre que una estrella cercana tiene un gran planeta en órbita alrededor suyo, aunque la luz del planeta no se pueda ver por separado de la luz de la estrella. Con las ideas de un sistema que gira en torno a su centro de masa y del corrimiento Doppler de la luz, explique cómo un astrónomo podría determinar la presencia del planeta invisible.

12. Una partícula se mueve con una rapidez menor que $c/2$. Si se duplica la rapidez de la partícula, ¿qué ocurre con su cantidad de movimiento?

13. **O** Clasifique de mayor a menor las siguientes partículas, de acuerdo con las magnitudes de sus cantidades de movimiento. Si algunas tienen iguales valores de cantidad de movimiento, o cantidad de movimiento cero, refleje este hecho en su clasificación. a) Un fotón de 1 MeV, b) un protón con energía cinética $K = 1$ MeV, c) un electrón con $K = 1$ MeV, d) un grano de polvo con $K = 1$ MeV $= 160$ fJ.

14. Dé un argumento físico que muestre la imposibilidad de acelerar un cuerpo de masa m a la rapidez de la luz, incluso con una fuerza continua que actúe sobre él.

15. **O i)** ¿La rapidez de un electrón tiene un límite superior? a), sí, la rapidez de la luz c, b) sí, con otro valor, c) no. **ii)** ¿La magnitud de la cantidad de movimiento de un electrón tiene un límite superior? a) Sí, $m_e c$, b) sí, con otro valor, c) no. **iii)** ¿La energía cinética del electrón tiene un límite superior? a) Sí, $m_e c^2$, b) sí, $\frac{1}{2} m_e c^2$, c) sí, con otro valor, d) no.

16. **O** Un objeto astronómico distante (un quásar) se mueve alejándose de usted a la mitad de la rapidez de la luz. ¿Cuál es la rapidez de la luz que recibe de este quásar? a) Mayor que c, b) c, c) entre $c/2$ y c, d) $c/2$, e) entre 0 y $c/2$, f) 0.

17. "La mecánica de Newton describe correctamente cuerpos que se mueven con magnitudes ordinarias de velocidades y la mecánica relativista describe correctamente cuerpos que se mueven muy rápidamente." "La mecánica relativista debe hacer una transición uniforme cuando se reduce a la mecánica de Newton en un caso donde la rapidez de un objeto se hace pequeña en comparación con la rapidez de la luz." Argumente a favor o en contra de cada uno de estos dos enunciados.

18. Dos tarjetas tienen bordes rectos. Suponga que el borde superior de una tarjeta cruza el borde inferior de otra tarjeta a un pequeño ángulo, como se ve en la figura P39.18a. Una persona desliza las tarjetas juntas con una rapidez moderadamente alta. ¿En qué dirección se mueve el punto de intersección de los bordes? Demuestre que el punto de intersección se puede mover con una rapidez mayor que la de la luz.

    Una pequeña linterna se cuelga en un plano horizontal y se pone en rápida rotación. Demuestre que el punto de luz que produce en una pantalla distante se puede mover por la pantalla a una rapidez mayor que la de la luz. (Si se usa un apuntador láser, como en la figura P39.18, asegúrese de que la luz directa del láser no entre a los ojos de una persona.) Explique cómo estos experimentos no invalidan el principio de que ningún material, energía o información se puede mover con mayor rapidez que la luz en un vacío.

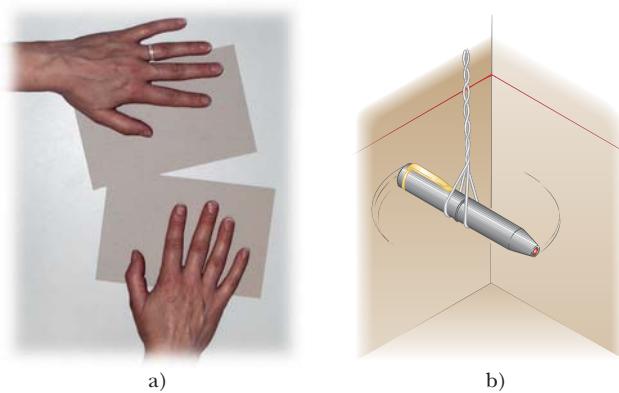



Figura P39.18

19. Respecto a marcos de referencia, ¿cómo difiere la relatividad general de la relatividad especial?

20. Dos relojes idénticos están en la misma casa, uno en una recámara en el segundo piso, y el otro en la planta baja en la cocina. ¿Cuál reloj funciona más despacio? Explique.

Problemas

Sección 39.1 Principio galileano de la relatividad

1. En el marco de referencia de un laboratorio, un observador ve que la segunda ley de Newton es válida. Demuestre que también es válida para un observador que se mueve a una rapidez constante, pequeña en comparación con la rapidez de la luz, relativa al marco del laboratorio.

2. Demuestre que la segunda ley de Newton *no* es válida en un marco de referencia que se mueve más allá del marco del laboratorio del problema 1 con ua aceleración constante.

3. Un auto de 2000 kg en movimiento a 20.0 m/s choca y queda trabado con un auto de 1500 kg en reposo en un semáforo. Demuestre que se conserva la cantidad de movimiento en un marco de referencia que se mueve a 10.0 m/s en la dirección del auto en movimiento.

Sección 39.2 Experimento de Michelson–Morley

Sección 39.3 Principio de la relatividad de Einstein

Sección 39.4 Consecuencias de la teoría especial de la relatividad

El problema 37 del capítulo 4 se puede asignar a esta sección.

4. ¿Con qué rapidez debe moverse una regleta de un metro si su longitud contraída es de 0.500 m?

5. ¿Con qué rapidez se mueve un reloj si se observa funcionando a un ritmo que es la mitad del ritmo de un reloj en reposo respecto a un observador?

6. Una astronauta viaja en un vehículo espacial que tiene una rapidez de $0.500c$ respecto a la Tierra. La astronauta observa su ritmo cardiaco a 75.0 latidos por minuto. Señales generadas por los latidos de la astronauta son radiadas a la Tierra cuando el vehículo se mueve en una dirección perpendicular a la línea que conecta el vehículo con un observador en la Tierra. a) ¿Qué ritmo cardiaco mide el observador en la Tierra? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál sería el ritmo cardiaco si la rapidez del vehículo espacial aumentara a $0.990c$?

7. Un reloj atómico se mueve a 1000 km/h durante 1.00 h medida por un reloj idéntico en la Tierra. ¿Con cuántos nanosegundos de atraso estará el reloj en movimiento en comparación con el reloj que está en la Tierra, al final del intervalo de 1.00 h?

8. Un muón formado a grandes alturas de la atmósfera de la Tierra se desplaza con una rapidez $v = 0.990c$ una distancia de 4.60 km antes de desintegrarse en un electrón, un neutrino y un antineutrino ($\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$). a) ¿Cuánto dura el muón, observado en su marco de referencia? b) ¿Cuánto se desplaza la Tierra, observada en el marco del muón?

9. Una nave espacial con una longitud característica de 300 m tarda 0.750 μs en pasar frente a un observador en la Tierra. Determine la rapidez de la nave espacial medida por dicho observador.

10. a) Un objeto de longitud característica L_p toma un intervalo Δt en pasar frente a un observador en la Tierra. Determine la rapidez del objeto medido por dicho observador. b) Una columna de tanques, de 300 m de largo, tarda 75.0 s en pasar frente a una niña que espera en la esquina de una calle camino de la escuela. Determine la rapidez de los vehículos blindados. c) Demuestre que la respuesta al inciso a) incluye la respuesta al problema 9 como un caso especial, e incluya la respuesta al inciso b) como otro caso especial.

11. Problema de repaso. En 1963 el astronauta Gordon Cooper de la nave Mercury le dio 22 vueltas a la Tierra. La prensa dijo que en cada vuelta él envejeció 2 millonésimas de segundo menos de lo que hubiera envejecido en la Tierra. a) Si se supone que él se encontraba a 160 km sobre la Tierra en una órbita circular, determine la diferencia de tiempo entre alguien en la Tierra y el astronauta en órbita para las 22 vueltas. Necesitará usar la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

para x pequeña. b) ¿La prensa reportó información precisa? Explique por qué.

12. ¿Para qué valor de v es que $\gamma = 1.010\,0$? Observe que para magnitudes de velocidad menores que este valor, la dilatación de tiempo y contracción de longitud son efectos que suman menos de 1%.

13. Un amigo pasa frente a usted en una nave espacial que vuela a alta velocidad. Su amigo le dice que su nave mide 20.0 m de largo y que la nave idénticamente construida en la que está usted sentado mide 19.0 m de largo. Según sus observaciones, a) ¿cuánto mide su nave?, b) ¿cuánto mide la nave de su amigo? y c) ¿cuál es la rapidez de la nave de su amigo?

14. Los gemelos idénticos Veloz y Goslo se unen en una migración desde la Tierra al planeta X, que está a 20.0 años luz en un marco de referencia en el que ambos planetas están en reposo. Los gemelos, de la misma edad, parten al mismo tiempo en diferentes naves espaciales. La nave de Veloz vuela con rapidez constante de $0.950c$ y la de Goslo a $0.750c$. Calcule la diferencia de edades entre los gemelos después de que la nave de Goslo aterrice en el planeta X. ¿Cuál gemelo es el más viejo?

15. Problema de repaso. Una civilización extraña ocupa una estrella enana café, casi inmóvil respecto al Sol, a varios años luz de distancia. A los extraterrestres les gustan los programas de *I Love Lucy,* del canal 2 de televisión, que tiene una frecuencia portadora de 57.0 MHz. Su línea de visión hacia nosotros está en el plano de la órbita de la Tierra. Encuentre la diferencia entre las frecuencias más alta y más baja que reciben debido al movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol.

16. Un radar de la policía detecta la siguiente rapidez de un auto (figura P39.16). Microondas de una frecuencia conocida con gran precisión se emiten hacia el auto. El auto en movimiento refleja las microondas con un corrimiento Doppler. Las ondas reflejadas se reciben y combinan con una versión atenuada de la onda transmitida. Se presentan batimientos entre las dos señales de microondas. Se mide la frecuencia de los batimientos. (a) Para una onda electromagnética reflejada a su fuente desde un espejo que se aproxima con una rapidez v, demuestre que la onda reflejada tiene una frecuencia de

$$f = f_{\text{fuente}}\frac{c+v}{c-v}$$

donde f_{fuente} es la frecuencia de la fuente. b) Cuando v es mucho menor que c, la frecuencia de pulsación es mucho menor que la frecuencia transmitida. En este caso use la aproximación $f + f_{\text{fuente}} \approx 2f_{\text{fuente}}$ y demuestre que la frecuencia de pulsación puede escribirse como $f_{\text{pulsación}} = 2v/\lambda$. c) ¿Qué frecuencia de pulsación se observa para una rapidez de 30.0 m/s de un auto si las microondas tienen una frecuencia de 10.0 GHz? d) Si la medición de la frecuencia de pulsación es precisa a ± 5 Hz, ¿qué tan precisa es la medición de velocidad?

Figura P39.16

17. *El corrimiento hacia el rojo.* Una fuente de luz se aleja de un observador con una rapidez v_{fuente} que es pequeña en comparación con c. a) Demuestre que el corrimiento fraccionario en la longitud de onda medida está dado por la expresión aproximada de

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v_{\text{fuente}}}{c}$$

Este fenómeno se conoce como corrimiento hacia el rojo, porque la luz visible se corre hacia el rojo. b) Mediciones espectroscópicas de luz a $\lambda = 397$ nm que provienen de una galaxia en la Osa Mayor dejan ver un corrimiento hacia el rojo de 20.0 nm. ¿Cuál es la rapidez con la que se aleja la galaxia?

18. Un físico que va en auto se pasa la luz roja de un semáforo. Cuando se orilla a su izquierda, le dice al oficial de tránsito que el corrimiento Doppler hizo que la luz roja de longitud de 650 nm le pareciera verde, con una longitud de onda de 520 nm. El oficial de tránsito escribe la multa por exceso de velocidad. ¿Con qué rapidez circulaba el físico, según su propio testimonio?

Sección 39.5 Ecuaciones de transformación de Lorentz

19. Suzanne observa dos pulsos de luz que han de emitirse desde la misma ubicación, pero separados un tiempo de 3.00 μs. Mark ve la emisión de los dos pulsos con una separación en el tiempo de 9.00 μs. a) ¿Con qué rapidez se mueve Mark respecto a Suzanne? b) Según Mark, ¿cuál es la separación en el espacio de los dos pulsos?

20. Se observa que una varilla en movimiento tiene una longitud de 2.00 m y está orientada con un ángulo de 30° respecto a la dirección del movimiento, como se muestra en la figura P39.20. La varilla tiene una rapidez de 0.995c. a) ¿Cuál es la longitud de la varilla? b) ¿Cuál es el ángulo de orientación en el marco característico?

Figura P39.20

21. Un observador en un marco de referencia S ve dos eventos como simultáneos. El evento A se presenta en el punto (50.0 m, 0, 0) en el instante 9:00:00 del tiempo universal, el 15 de enero de 2004. El evento B ocurre en el punto (150 m, 0, 0) en el mismo momento. Un segundo observador, que se mueve con una velocidad 0.800 $c\hat{\mathbf{i}}$ también analiza los dos eventos. En su marco de referencia S′, ¿cuál evento ocurrió primero y qué intervalo transcurrió entre ambos eventos?

22. Una luz roja destella en la posición $x_R = 3.00$ m y en un tiempo $t_R = 1.00 \times 10^{-9}$ s, y una luz azul centellea en $x_B = 5.00$ m y $t_B = 9.00 \times 10^{-9}$ s, todos observados en el marco de referencia S. El marco de referencia S′ tiene su origen en el mismo punto que S en $t = t' = 0$; el marco S′ se mueve uniformemente a la derecha. Se observa que ambos destellos se presentan en el mismo lugar en S′. a) Encuentre la rapidez relativa entre S y S′. b) Encuentre la ubicación de los dos destellos en el marco S′. c) ¿En qué tiempo se presenta el destello rojo en el marco S′?

Sección 39.6 Ecuaciones de transformación de velocidad de Lorentz

23. Dos chorros de material son expulsados en direcciones opuestas desde el centro de una radiogalaxia. Ambos chorros se mueven con una velocidad de 0.750c respecto a la galaxia. Determine la rapidez de un chorro respecto al otro.

24. Una nave espacial Klingon se aleja de la Tierra con rapidez de 0.800c (figura P39.24). La estación espacial *Enterprise* la persigue con rapidez de 0.900c respecto a la Tierra. Observadores en la Tierra ven que la *Enterprise* alcanza a la Klingon con rapidez relativa de 0.100c. ¿Con qué rapidez la *Enterprise* alcanza a la Klingon según lo ve la tripulación de la primera?

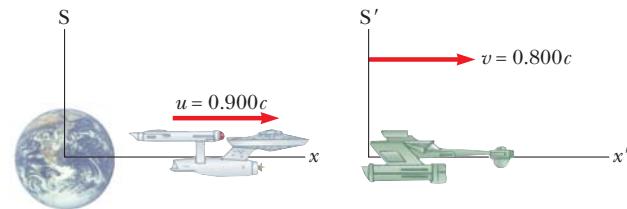



Figura P39.24

Sección 39.7 Movimiento lineal relativista

25. Calcule la cantidad de movimiento de un electrón que se mueve con una rapidez de a) 0.010 0c, b) 0.500c y c) 0.900c.

26. La expresión no relativista para la cantidad de movimiento de una partícula, $p = mu$, coincide con los experimentos si $u \ll c$. ¿Con qué rapidez el uso de esta ecuación presenta un error en la cantidad de movimiento de a) 1.00% y b) 10.0%?

27. Una pelota de golf se desplaza con una rapidez de 90.0 m/s. ¿En qué fracción difiere su magnitud de cantidad de movimiento relativista p respecto a su valor clásico mu? Es decir, encuentre la proporción $(p - mu)/mu$.

28. La rapidez límite en cierta autopista es de 90.0 km/h. Suponga que las multas por alta rapidez se hacen proporcionales a la cantidad por la que la cantidad de movimiento de un vehículo supera la cantidad de movimiento que tendría cuando viaja a la rapidez límite. La multa por conducir a 190 km/h (esto es, 100 km/h por arriba de la rapidez límite) es de 80 dólares. ¿En tal caso cuál será la multa por viajar a) a 1090 km/h? b) ¿A 1 000 000 090 km/h?

29. Una partícula inestable en reposo se descompone en dos fragmentos de masa desigual. La masa del primer fragmento es

2.50×10^{-28} kg, y la del otro es 1.67×10^{-27} kg. Si el fragmento más ligero tiene una rapidez de $0.893c$ después de la separación, ¿cuál es la rapidez del fragmento más pesado?

Sección 39.8 Energía relativista

30. Un electrón tiene una energía cinética cinco veces mayor que su energía en reposo. Encuentre su a) energía total y b) rapidez.

31. Un protón en un acelerador de alta energía se mueve con una rapidez de $c/2$. Utilice el teorema del trabajo y energía cinética para hallar el trabajo necesario para aumentar su rapidez a a) $0.750c$ y b) $0.995c$.

32. Demuestre que, para cualquier cuerpo que se mueva a menos de una décima de la rapidez de la luz, la energía cinética relativista coincide con el resultado de la ecuación clásica $K = \frac{1}{2} mu^2$ en una variación menor a 1%. Por lo tanto, para la mayor parte de los casos, la ecuación clásica es lo suficientemente buena para describir estos objetos.

33. Encuentre la cantidad de movimiento de un protón en unidades de MeV/c, suponiendo que su energía total es el doble que su energía en reposo.

34. ● Encuentre la energía cinética de una nave espacial de 78.0 kg a) lanzada fuera del sistema solar con una rapidez de 106 km/s, mediante el uso de la ecuación clásica $K = \frac{1}{2}mu^2$. b) **¿Qué pasaría si?** Calcule la energía cinética con la ecuación relativista. c) Explique los resultados de comparar a) y b).

35. Un protón se mueve a $0.950c$. Calcule a) su energía en reposo, b) su energía total y c) su energía cinética.

36. Una partícula inestable con una masa de 3.34×10^{-27} kg está inicialmente en reposo. La partícula se desintegra en dos fragmentos que vuelan a lo largo del eje x con componentes de velocidad de $0.987c$ y $-0.868c$. Encuentre las masas de los fragmentos. *Sugerencia:* Aplique los principios de conservación de energía y de cantidad de movimiento.

37. Demuestre que la correspondencia de energía y cantidad de movimiento $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$ se sigue de las expresiones $E = \gamma mc^2$ y $p = \gamma mu$.

38. En un cinescopio representativo de color, los electrones son acelerados desde el repaso por medio de una diferencia de potencial de 25 000 V. a) ¿Qué rapidez tienen los electrones cuando inciden en la pantalla? b) ¿Cuál es su energía cinética en joules?

39. La energía en reposo de un electrón es de 0.511 MeV. La energía en reposo de un protón es de 938 MeV. Suponga que ambas partículas tienen energía cinética de 2.00 MeV. Encuentre la rapidez de a) el electrón y b) el protón. c) ¿En cuánto supera la rapidez del electrón a la del protón? d) Repita los cálculos si supone que ambas partículas tienen energías cinéticas de 2000 MeV.

40. Considere electrones acelerados a una energía de 20.0 GeV en el Acelerador Lineal de Stanford de 3.00 km de largo. a) ¿Cuál es el factor γ para los electrones? b) ¿Cuál es su rapidez? c) ¿Qué tan largo parece el acelerador para los electrones?

41. Un pión en reposo ($m_\pi = 273m_e$) se desintegra en un muón ($m_\mu = 207m_e$) y un antineutrino ($m_{\bar{\nu}} \approx 0$). La reacción se escribe $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$. Encuentre la energía cinética del muón y la energía del antineutrino en electrón volts. *Sugerencia:* Aplique la conservación de energía como la cantidad de movimiento.

42. Considere un automóvil que se mueve con rapidez de autopista u. ¿Su energía cinética real es mayor o menor que $\frac{1}{2}mu^2$? Realice una estimación del orden de magnitud de la cantidad en la que su energía cinética real difiere de $\frac{1}{2}mu^2$. En su solución, establezca las cantidades que toma como datos y los valores que midió o estimó para ellos. Puede encontrar útil el apéndice B.5.

Sección 39.9 Masa y energía

43. ● Cuando 1.00 g de hidrógeno se combina con 8.00 g de oxígeno, se forman 9.00 g de agua. Durante esta reacción química se liberan 2.86×10^5 J de energía. ¿La masa del agua es mayor o menor que la masa de los reactantes? ¿Cuál es la diferencia en masa? ¿Es posible detectar el cambio de masa?

44. En una planta de energía nuclear, las barras de combustible duran tres años antes que sea necesario cambiarlas. Si una planta con una potencia térmica nominal de 1.00 GW funciona a 80.0% de su capacidad durante tres años, ¿cuál es la pérdida de masa del combustible?

45. La potencia de salida del Sol es de 3.85×10^{26} W. ¿Cuánta masa se convierte en energía en el Sol en un segundo?

46. Un rayo gamma (fotón de alta energía) puede producir un electrón (e^-) y un positrón (e^+) cuando entra en el campo eléctrico de un núcleo pesado: $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$. ¿Cuál es la mínima energía de rayos gamma que se requiere para lograr esta tarea? *Nota:* las masas del electrón y del positrón son iguales.

Sección 39.10 Teoría general de la relatividad

47. Un satélite de la Tierra empleado en el sistema de posicionamiento global (GPS) se mueve en órbita circular con un periodo de 11 h 58 min. a) Determine el radio de su órbita. b) Determine su rapidez. c) El satélite contiene un oscilador que produce la señal principal no militar GPS. Su frecuencia es 1575.42 MHz en el marco de referencia del satélite. Cuando es recibida esta frecuencia en la superficie terrestre, ¿cuál es el cambio fraccionario en ella debido a la dilatación del tiempo, como lo describe la relatividad especial? d) El corrimiento hacia el azul gravitacional de la frecuencia, según la relatividad general, es un efecto separado. Se llama corrimiento hacia el azul para indicar un cambio a frecuencia alta. La magnitud del cambio fraccionario se conoce por

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta U_g}{mc^2}$$

donde ΔU_g es el cambio en la energía potencial gravitacional de un sistema objeto–Tierra cuando el objeto de masa m se mueve entre los dos puntos donde se observa la señal. Calcule este cambio fraccionario en la frecuencia. e) ¿Cuál es el cambio fraccionario general en la frecuencia? Sobrepuesto a estos dos efectos relativistas está un corrimiento Doppler que por lo general es mucho mayor. Puede ser un corrimiento hacia el rojo o un corrimiento hacia el azul, depende del movimiento de un satélite particular respecto a un receptor GPS (figura P39.47).

© Eimantas Buzas/Shutterstock
Figura P39.47

Problemas adicionales

48. *Houston, tenemos un problema.* Un astronauta desea visitar la galaxia de Andrómeda, para lo cual necesita hacer un viaje de ida que le tomará 30.0 años en el marco de referencia de la nave espacial. Suponga que la galaxia está a 2.00×10^6 años luz de distancia y que la rapidez del astronauta es constante. a) ¿Con qué rapidez debe viajar respecto a la Tierra? b) ¿Cuál será la energía cinética de su nave de 1000 toneladas métricas? c) ¿Cuál es el costo de esta energía si se compra a un precio típico al consumidor de energía eléctrica: \$0.130/kWh?

49. Los rayos cósmicos que poseen la más alta energía son protones que tienen energía cinética del orden de 10^{13} MeV. a) ¿Cuánto tardaría uno de estos protones en atravesar la galaxia de la Vía Láctea, que tiene un diámetro de $\sim 10^5$ años luz, medido en el marco del protón? b) Desde el punto de vista del protón, ¿de cuántos kilómetros es el diámetro de la galaxia?

50. Un electrón tiene una rapidez de $0.750c$. a) Encuentre la rapidez de un protón que tiene la misma energía cinética que dicho electrón. b) **¿Qué pasaría si?** Encuentre la rapidez de un protón que tiene la misma cantidad de movimiento que el electrón.

51. ● La ecuación

$$K = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1\right)mc^2$$

da la energía cinética de una partícula que se mueve con rapidez u. a) Resuelva la ecuación para u. b) A partir de la ecuación para u, identifique el valor mínimo posible de rapidez y la correspondiente energía cinética. c) Identifique la máxima rapidez posible y la correspondiente energía cinética. d) Diferencie la ecuación para u respecto al tiempo para obtener una ecuación que describa la aceleración de una partícula como función de su energía cinética y la potencia de entrada a la partícula. e) Observe que, para una partícula no relativista, se tiene $u = (2K/m)^{1/2}$, y que diferenciar esta ecuación respecto al tiempo da $a = \mathcal{P}/(2mK)^{1/2}$. Establezca la forma límite de la expresión en el inciso d) a baja energía. Establezca cómo se compara con la expresión no relativista. f) Establezca la forma límite de la expresión en el inciso d) a alta energía. g) Considere una partícula con potencia de entrada constante. Explique cómo la respuesta al inciso f) ayuda a explicar la respuesta a la parte c).

52. Toño y Fátima juegan a atrapar una pelota en el marco S′, que se mueve a $0.600c$ respecto al marco S, mientras que Jaime, en reposo en el marco S, observa la acción (figura P39.52). Toño lanza la pelota a Fátima a $0.800c$ (según Toño) y su separación (medida en S′) es de 1.80×10^{12} m. a) Según Fátima, tan qué rapido se mueve la pelota? b) Según Fátima, ¿cuánto tarda la pelota en llegar a ella? c) Según Jaime, ¿cuál es la separación entre Toño y Fátima, y con qué rapidez se mueve la pelota? d) Según Jaime, ¿cuánto tarda la pelota en llegar a Fátima?

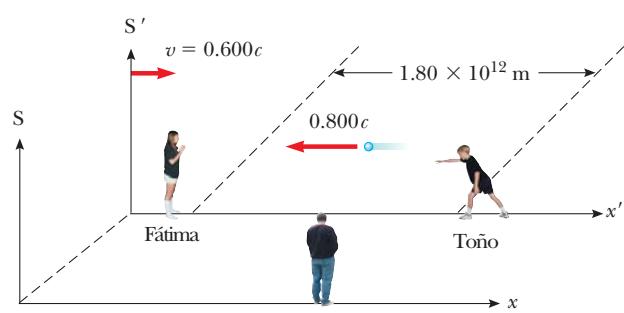



Figura P39.52

53. La reacción neta de la fusión nuclear dentro del Sol se puede escribir como $4\,^1\text{H} \rightarrow \,^4\text{He} + E$. La energía en reposo de cada átomo de hidrógeno es 938.78 MeV y la energía en reposo del átomo de helio−4 es 3728.4 MeV. Calcule el porcentaje de la masa inicial que se transforma en otras formas de energía.

54. Un objeto se desintegra en dos fragmentos. Uno de los fragmentos tiene una masa de 1.00 MeV/c^2 y una cantidad de movimiento 1.75 MeV/c en la dirección x positiva. El otro fragmento tiene una masa de 1.50 MeV/c^2 y una cantidad de movimiento de 2.00 MeV/c en la dirección y positiva. Encuentre a) la masa y b) la rapidez del objeto original.

55. La nave espacial I, en la que viajan estudiantes que hacen un examen de física, se aproxima a la Tierra con una rapidez de 0.600c (respecto a la Tierra), mientras que la nave espacial II, que contiene profesores que vigilan el examen, se mueve a 0.280c (respecto a la Tierra) directamente hacia los estudiantes. Si los profesores detienen el examen después de transcurridos 50.0 min en su reloj, ¿cuánto dura el examen según es medido por a) los estudiantes o b) un observador en la Tierra?

56. Problema de repaso. Un electrón viaja a través de agua con una rapidez 10.0% más rápido que la rapidez de la luz en agua. Determine a) la energía total, b) la energía cinética y c) la cantidad de movimiento del electrón. El electrón emite radiación Cerenkov, el equivalente electromagnético de una onda de proa o un estampido sónico. d) Encuentre el ángulo entre la onda de choque y la dirección de movimiento del electrón. Alrededor del núcleo de un reactor nuclear blindado con una gran alberca de agua, la radiación Cerenkov aparece como un brillo azul.

57. Una nave espacial de otro planeta, que vuela a 0.600c hacia la Tierra, lanza una nave de aterrizaje con una avanzada de agentes de compras y maestros de física. Esta nave viaja en la misma dirección con una rapidez de 0.800c respecto a la nave nodriza. Como se observa en la Tierra, la nave espacial está a 0.200 años luz de la Tierra cuando lanza la nave de aterrizaje. a) ¿Cuál es la rapidez de la nave que se aproxima y cuál es la que miden los observadores en la Tierra? b) ¿Cuál es la distancia a la Tierra en el momento en que aterriza la nave, como la observan los tripulantes de la nave nodriza? c) ¿Cuánto tarda la nave de aterrizaje en llegar a la Tierra, según la observan los tripulantes de la nave nodriza? d) Si la nave de aterrizaje tiene una masa de 4.00×10^5 kg, ¿cuál es su energía cinética como se observa en el marco de referencia de la Tierra?

58. ● *Rapidez de la luz en un medio en movimiento.* El movimiento de un medio transparente influye en la rapidez de la luz. Este efecto lo observó por primera ocasión Fizeau en 1851. Considere un haz de luz en agua que se mueve con rapidez v en una tubería horizontal. Suponga que la luz viaja en la misma dirección que el agua. La rapidez de la luz respecto al agua es c/n, donde $n = 1.33$ es el índice de refracción del agua. a) Use la ecuación de transformación de velocidad para demostrar que la rapidez de la luz medida en el marco del laboratorio es

$$u = \frac{c}{n}\left(\frac{1 + nv/c}{1 + v/nc}\right)$$

b) Demuestre que para $v << c$, la expresión del inciso a) se convierte, a una buena aproximación, en

$$u \approx \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2}$$

Argumente a favor o en contra de la visión de que se debe esperar que el resultado sea $u = (c/n) + v$, de acuerdo con la transformación galileana, y que la presencia del término $-v/n^2$ representa un efecto relativista que aparece incluso a rapideces “no relativistas”. c) Evalúe u en el límite cuando la rapidez del agua tiende a c.

59. Un supertren (con una longitud propia de 100 m) viaja con una rapidez de 0.950c cuando pasa por un túnel (con una longitud propia de 50.0 m). Visto por un observador que está junto a la vía, ¿el tren se encuentra en algún momento por completo dentro del túnel? Si es así, ¿cuánto espacio le sobra?

60. Imagine que todo el Sol se colapsa a una esfera de radio R_g, de manera que el trabajo necesario para remover una pequeña masa m desde la superficie sería igual a su energía en reposo mc^2. Este radio se denomina *radio gravitacional.* Encuentre R_g. Se cree que el destino final de estrellas muy pesadas es colapsarse alrededor de sus radios gravitacionales y convertirse en agujeros negros.

61. Una partícula con carga eléctrica q se mueve a lo largo de una recta en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ con una rapidez u. La fuerza eléctrica ejercida sobre la carga es $q\vec{\mathbf{E}}$. El movimiento y el campo eléctrico están en la dirección x. a) Demuestre que la aceleración de la partícula en la dirección x se conoce por

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{qE}{m}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

b) Analice la importancia de la dependencia de la aceleración sobre la rapidez. c) **¿Qué pasaría si?** La partícula arranca desde el reposo en $x = 0$ y $t = 0$, ¿qué haría usted para hallar la rapidez de la partícula y su posición en el tiempo t?

62. Un observador en una nave espacial se mueve por inercia hacia un espejo a una rapidez v respecto al marco de referencia marcado por S en la figura P39.62. El espejo está inmóvil respecto a S. Un pulso de luz emitido por la nave espacial viaja hacia el espejo y es reflejado hacia la nave. El frente de la nave está a una distancia d del espejo (medida por observadores en S) en el momento en que el pulso de luz sale de la nave. ¿Cuál es el tiempo total de viaje del pulso, medido por observadores en a) el marco S y b) el frente de la nave espacial?

S
Espejo
$v = 0.800c$
0

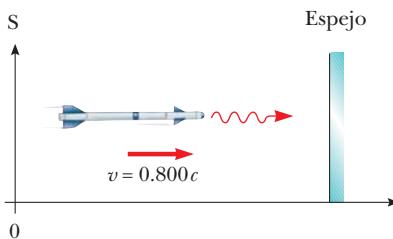



Figura P39.62

63. ● Las estrellas pesadas que terminan su vida en explosiones supernova producen los núcleos de todos los átomos en la mitad inferior de la tabla periódica, mediante fusión de núcleos más pequeños. Este problema modela burdamente dicho proceso. Una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x con una componente de velocidad $+u$, choca frontalmente y se pega a una partícula de masa $m/3$ que se mueve a lo largo del eje x con la componente de velocidad $-u$. a) ¿Cuál es la masa M de la partícula resultante? b) Evalúe la expresión del inciso a) en el límite $u \to 0$. Explique si el resultado coincide con lo que esperaría a partir de la física no relativista.

64. La creación y el estudio de nuevas partículas elementales es una parte importante de la física contemporánea. En especial es interesante el descubrimiento de una partícula muy pesada. Para crear una partícula de masa M es necesaria una energía Mc^2. Con suficiente energía, es posible crear una partícula exótica al dejar que una partícula de materia ordinaria en rápido movimiento, por ejemplo un protón, choque con una partícula similar a un objetivo. Considere una colisión perfectamente inelástica entre dos protones: un protón incidente con masa m_p, energía cinética K y magnitud p de cantidad de movimiento, se une con un protón objetivo originalmente inmóvil para formar una sola partícula producto de masa M. podría pensar que la creación de una nueva partícula, nueve veces más pesada que en un experimento previo, haría necesaria precisamente nueve veces más energía para el protón incidente. Por desgracia, no toda la energía cinética total del protón entrante está disponible para crear la partícula producto, porque la conservación de la cantidad de movimiento exige que después de la colisión el sistema en su conjunto todavía debe tener energía cinética. En consecuencia sólo una fracción de la energía de la partícula incidente está disponible para crear una partícula nueva. En este problema determine la forma en que la energía disponible para la creación de la partícula depende de la energía del protón en movimiento. Demuestre que la energía existente para crear una partícula producto se conoce por

$$Mc^2 = 2m_pc^2\sqrt{1 + \frac{K}{2m_pc^2}}$$

A partir de este resultado, cuando la energía cinética K del protón incidente sea grande en comparación con su energía en reposo m_pc^2, M se aproxima a $(2m_pK)^{1/2}/c$. Por lo tanto, si la energía del protón entrante se incrementa en un factor de nueve, la masa creada aumenta sólo en un factor de tres. Este decepcionante resultado es la razón principal de que casi todos los aceleradores modernos, por ejemplo los del CERN (en Europa), el Fermilab (cerca de Chicago), el SLAC (en Stanford) y el DESY (en Alemania), usan *rayos en colisión*. Aquí la cantidad total de movimiento de un par de partículas que interactúan puede ser cero. El centro de masa puede estar en reposo después de la colisión, de modo que en principio toda la energía cinética inicial se puede usar para crear partículas, según la ecuación

$$Mc^2 = 2mc^2 + K = 2mc^2\left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right)$$

donde K es la energía cinética total de dos partículas idénticas que colisionan entre sí. En este caso, si $K \gg mc^2$, M es directamente proporcional a K, como es de esperarse. Estas máquinas son difíciles de construir y de operar, pero abren nuevas perspectivas para la física.

65. ● Suponga que el Sol está a punto de explotar. En un esfuerzo por escapar, escapa en una nave espacial a $v = 0.800c$ y se dirige hacia la estrella Tau Ceti, a 12.0 años luz de distancia. Cuando llega al punto medio del viaje desde la Tierra, ve que el Sol explota y, desafortunadamente, en el mismo instante también Tau Ceti explota. a) En el marco de referencia de la nave espacial, ¿debe concluir que las dos explosiones se presentan en forma simultánea? Si no es así, ¿cuál ocurrió primero? b) **¿Qué pasaría si?** En un marco de referencia en el que el Sol y Tau Ceti están en reposo, ¿explotaron simultáneamente? Si no es así, ¿cuál explotó primero?

66. Elabore una gráfica de la energía cinética relativista y la energía cinética clásica, ambas como función de la rapidez, para un objeto con una masa de su elección. ¿A qué rapidez subestima la energía cinética clásica el valor experimental en 1%? ¿En 5%? ¿En 50%?

67. Un núcleo de ^{57}Fe en reposo emite un fotón de 14.0 keV. Use la conservación de la energía y la cantidad de movimiento para deducir la energía cinética del núcleo de retroceso en electrón volts. Utilice $Mc^2 = 8.60 \times 10^{-9}$ J para el estado final del núcleo de ^{57}Fe.

Respuestas a las preguntas rápidas

39.1 c) Si bien difieren las mediciones de los observadores, ambos tienen razón.

39.2 d) La transformación galileana de velocidad da $u_x = u'_x + v$ = 90 mi/h + 110 mi/h = 200 mi/h.

39.3 d) Los dos eventos (el pulso que sale de la linterna y el pulso que incide en la pared lejana) ocurren en lugares diferentes para ambos observadores, de modo que ninguno mide el intervalo propio.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

39.4 a) Los dos eventos son el principio y fin de la película, ya que ambos tienen lugar en reposo respecto a la tripulación de la nave espacial. Por lo tanto, la tripulación mide el intervalo exacto de 2 h. Cualquier observador en movimiento respecto a la nave espacial, que incluye al observador en la Tierra, medirá un intervalo más largo debido a la dilatación del tiempo.

39.5 a) Si su tiempo en el servicio está registrado en relojes que permanecen en la Tierra, tendrán salarios más grandes. Un intervalo más corto habrá transcurrido para los astronautas, en su marco de referencia, que para su empleador en la Tierra.

39.6 c) Su cuerpo y su cabaña están en reposo en su marco de referencia; por lo tanto, tendrán longitudes propias de acuerdo con usted. No habrá cambio en las longitudes medidas de los objetos, incluyéndose usted mismo dentro de su nave espacial.

39.7 d) La dilatación del tiempo y la contracción de la longitud dependen sólo de la rapidez relativa de un observador respecto a otro, no de si los observadores están retrocediendo o aproximándose entre sí.

39.8 c) Debido a su movimiento hacia la fuente de luz, el rayo de luz tiene una componente horizontal de velocidad medida por usted. La magnitud de la suma vectorial de los vectores componentes horizontal y vertical debe ser igual a c, de modo que la magnitud de la componente vertical debe ser menor que c.

39.9 a) $m_3 > m_2 = m_1$; la energía en reposo de la partícula 3 es $2E$, mientras que es E para las partículas 1 y 2. b) $K_3 = K_2 > K_1$; la energía cinética es la diferencia entre la energía total y la energía en reposo. La energía cinética es $4E - 2E = 2E$ para la partícula 3, $3E - E = 2E$ para la partícula 2, y $2E - E = E$ para la partícula 1. c) $u_2 > u_3 = u_1$; de la ecuación 39.26, $E = \gamma E_R$. Al despejar esto del cuadrado de la rapidez u de la partícula, se encuentra $u^2 = c^2(1 - (E_R/R)^2)$. En consecuencia, la partícula con la mínima relación entre energía en reposo y energía total tendrá la rapidez máxima. Las partículas 1 y 3 tienen la misma relación una de otra, y la relación entre la partícula 2 es menor. **ii)** a) En este caso existe únicamente una componente horizontal de la velocidad de la luz y debe medir una rapidez de c.

El filamento de este foco brilla con un resplandor anaranjado. ¿A qué se debe esto? La física clásica no es capaz de explicar la distribución de la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida por un objeto caliente que se observa en experimentos. En el año 1900 se propuso una teoría que describe la radiación emitida por dichos objetos, y que se considera el amanecer de la física cuántica. (Imágenes de Steve Cole/Getty)

40 Introducción a la física cuántica

En el capítulo 39 vió la necesidad de reemplazar la mecánica newtoniana por la teoría especial de la relatividad de Einstein, al trabajar con magnitudes de velocidad de partícula cercanas a la rapidez de la luz. Conforme avanzaba el siglo XX, muchos problemas experimentales y teóricos fueron resueltos aplicando la teoría especial de la relatividad. Sin embargo, existían muchos otros problemas, a los cuales ni la relatividad ni la física clásica podían ofrecer una respuesta teórica. Todos los intentos de aplicar las leyes de la física clásica para explicar el comportamiento de la materia a escala atómica fueron invariablemente infructuosos. Por ejemplo, las longitudes de onda de luz discretas emitidas por los átomos de un gas a temperatura alta no podían ser explicadas dentro de la estructura de la física clásica.

Mientras los físicos buscaban nuevos métodos para resolver estos enigmas, entre 1900 y 1930 se produjo otra revolución en la física. Una nueva teoría, llamada *mecánica cuántica*, explicaba con gran éxito el comportamiento de partículas de tamaño microscópico. Al igual que la teoría especial de la relatividad, la teoría cuántica requiere una modificación de las ideas de la humanidad respecto al mundo físico.

La primera explicación de un fenómeno que aplica la teoría cuántica fue presentada por Max Planck. Diversos desarrollos matemáticos e interpretaciones consecutivas fueron realizados por otros físicos distinguidos, entre los que se cuenta a Einstein, Bohr, De Broglie, Schrödinger y Heisenberg. A pesar del gran éxito de la teoría cuántica, Einstein fue con frecuencia muy crítico, en especial respecto a la manera en que era interpretada.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 40.1
Espere ser desafiado

Si las explicaciones de la física cuántica en este y capítulos subsecuentes le parecen extraños y confusos, se debe a que toda su vida ha transcurrido en el mundo macroscópico, donde los efectos cuánticos no son evidentes.

En vista de que un estudio extenso de la teoría cuántica está fuera del alcance y los propósitos de este libro, este capítulo simplemente es una introducción a sus principios fundamentales.

40.1 Radiación de cuerpo negro e hipótesis de Planck

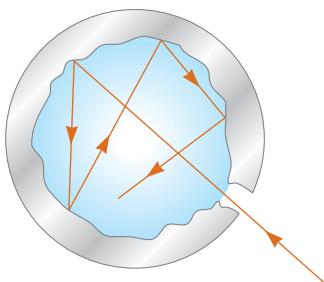



Figura 40.1 La abertura hacia la cavidad en el interior de un objeto hueco es una buena aproximación de lo que es un cuerpo negro. La luz penetra por el pequeño orificio e incide sobre las paredes interiores, donde una parte es absorbida y otra es reflejada en ángulos aleatorios. Las paredes de la cavidad vuelven a radiar con longitudes de onda correspondientes a su temperatura, produciendo ondas estacionarias dentro de la cavidad. Parte de la energía a causa de estas ondas estacionarias puede abandonar la cavidad a través del orificio.

Corbis.

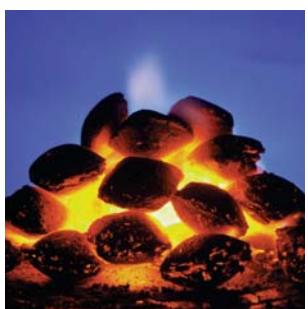



Figura 40.2 El resplandor que emana de los espacios entre estas briquetas de carbón ardientes es una buena aproximación a la radiación de un cuerpo negro. El color de la luz sólo depende de la temperatura de las briquetas.

Un objeto a cualquier temperatura emite ondas electromagnéticas en la forma de **radiación térmica** desde las superficie, como se explicó en la sección 20.7. Las características de esta radiación dependen de la temperatura y de las propiedades de la superficie del objeto. Estudios cuidadosos muestran que la radiación consiste en una distribución de longitudes de onda continuas desde todas las partes del espectro electromagnético. Si el objeto se encuentra a temperatura ambiente, la radiación térmica tendrá longitudes de onda principalmente en la región infrarroja y, por esto, no podrá ser detectada a simple vista. Conforme aumenta la temperatura superficial del objeto, llegará un momento en que éste comenzará a resplandecer con un color rojo visible. A temperaturas suficientemente altas, el objeto resplandeciente parece blanco, como en el caso del filamento caliente de tungsteno de un foco.

Desde un punto de vista clásico, la radiación térmica tiene su origen a causa de las partículas con carga y aceleradas en los átomos que están cerca de la superficie del objeto; estas partículas con carga emiten abundante radiación como lo hacen pequeñas antenas. Las partículas agitadas térmicamente tienen una distribución de energía que explica el espectro continuo de radiación emitido por el objeto. Sin embargo, hacia finales del siglo XIX, fue evidente que la teoría clásica de la radiación térmica era inadecuada. El problema básico era comprender la distribución observada de longitudes de onda de la radiación emitida por un cuerpo negro. Como se definió en la sección 20.7, un **cuerpo negro** es un sistema ideal que absorbe toda radiación incidente. La radiación electromagnética emitida por un cuerpo negro se conoce como **radiación de cuerpo negro**.

Una buena aproximación a un cuerpo negro es un orificio pequeño que conduce al interior de un objeto hueco, como se muestra en la figura 40.1. Toda la radiación que incide en el orificio desde el exterior de la cavidad penetra en la abertura y es reflejada varias veces por las paredes internas de la cavidad, por esto, el orificio funciona como un absorbente perfecto. La naturaleza de la radiación que abandona la cavidad a través del orificio depende sólo de la temperatura de las paredes de la cavidad y no del material del que las paredes están fabricadas. Los espacios entre carbones ardientes (figura 40.2) emiten una luz que es muy similar a la radiación de un cuerpo negro.

La radiación emitida por los osciladores en las paredes de la cavidad experimenta condiciones de frontera. Como la radiación se refleja desde las paredes de la cavidad, se establecen ondas electromagnéticas estacionarias dentro del espacio tridimensional en el interior de la cavidad. Existen muchos modos de onda estacionaria posibles, y la distribución de la energía dentro de la cavidad entre estos diferentes modos determina la distribución de longitudes de onda de la radiación que sale de la cavidad a través del orificio.

La distribución de las longitudes de onda de la radiación desde las cavidades fue estudiada experimentalmente a finales del siglo XIX. La figura 40.3 muestra cómo varía la intensidad de la radiación de un cuerpo negro en relación con la temperatura y la longitud de onda. Los dos descubrimientos experimentales siguientes se consideraron especialmente significativos:

1. **La potencia total de la radiación emitida aumenta con la temperatura.** Este comportamiento se explicó brevemente en el capítulo 20, cuando se presentó la **ley de Stefan**,

Ley de Stefan ►

$$\mathcal{P} = \sigma A e T^4 \tag{40.1}$$

donde $\mathcal{P}$ es la potencia en watts radiada en todas las longitudes de onda desde la superficie de un objeto, σ es la constante Stefan-Boltzmann, igual a 5.670×10^{-8} W/m$^2 \cdot$ K^4, A es el área de la superficie del objeto en metros cuadrados, e es la emisividad de la superficie y T es la temperatura de la superficie en grados kelvin. En el caso de un cuerpo negro, el valor de emisividad es exactamente $e = 1$.

2. **El pico de la distribución de la longitud de onda se desplaza hacia longitudes de onda más cortas conforme aumenta la temperatura.** Este comportamiento se describe mediante la correspondencia siguiente, conocida como **ley de desplazamiento de Wien**:

$$\lambda_{\text{máx}} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \tag{40.2}$$

◀ Ley de desplazamiento de Wien

donde $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda en la que el máximo de la curva y T es la temperatura absoluta de la superficie del objeto que emite la radiación. La longitud de onda en el pico de la curva es inversamente proporcional a la temperatura absoluta; es decir, conforme la temperatura aumenta, el pico se "desplaza" hacia longitudes de onda más cortas (figura 40.3).

Figura 40.3 Intensidad de la radiación de un cuerpo negro en función de la longitud de onda en tres temperaturas diferentes. La radiación emitida (área bajo una curva) aumenta al incrementarse la temperatura. El intervalo visible de longitudes de onda está entre 0.4 μm y 0.7 μm, por lo que la curva de 4000 K presenta un pico que está cerca del intervalo visible y representa un objeto que resplandecería con un color blanco amarillento. A la temperatura de aproximadamente 6000 K, el pico aparece en el centro de las longitudes de onda visibles y el objeto parece blanco.

La ley de desplazamiento de Wien coincide con el comportamiento del objeto mencionado al principio de esta sección. A temperatura ambiente, no parece resplandecer porque el pico está en la región infrarroja del espectro electromagnético. A una temperatura más elevada, resplandece con un color rojo debido a que el pico está en la cercanía infrarroja, con alguna radiación en el extremo rojo del espectro visible y a temperaturas aún mayores resplandece blanco porque el pico está en el intervalo visible, así que todos los colores son emitidos.

Pregunta rápida 40.1 La figura 40.4 muestra dos estrellas en la constelación de Orión. Betelgeuse emite un resplandor rojo, en tanto que Rigel tiene un color azul. ¿Cuál de las estrellas tiene una temperatura superficial más elevada? a) Betelgeuse, b) Rigel, c) ambas poseen la misma temperatura superficial, o d) imposible de determinar.

Figura 40.4 (Pregunta rápida 40.1) ¿Cuál de estas estrellas está más caliente?

Una teoría adecuada para la radiación de cuerpo negro debe predecir la forma de las curvas de la figura 40.3, la dependencia con la temperatura expresada en la ley de Stefan y el corrimiento del pico en función de la temperatura descrito por la ley de desplazamiento de Wien. Los primeros intentos que utilizaron ideas clásicas para explicar las formas de estas curvas de la figura 40.3 fallaron.

Considere uno de estos primeros intentos. Para describir la distribución de la energía de un cuerpo negro, resulta útil definir $I(\lambda, T)\,d\lambda$ como la intensidad o la potencia por unidad de área emitida en el intervalo de longitud de onda $d\lambda$. El resultado del cálculo según la teoría clásica de la radiación de un cuerpo negro, conocido como **ley de Rayleigh-Jeans** es

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi c k_{\text{B}} T}{\lambda^4} \tag{40.3}$$

◀ Ley de Rayleigh-Jeans

donde k_{B} es la constante de Boltzmann. El cuerpo negro se representa como un orificio que conduce a una cavidad que contiene muchos modos de oscilación del campo electromagnético causados por cargas aceleradas en las paredes de la cavidad, lo que da como resultado la emisión de ondas electromagnéticas en todas las longitudes de onda. En la teoría clásica empleada para deducir la ecuación 40.3, la energía promedio de cada longitud de onda de los modos de ondas estacionarias se supone proporcional a $k_{\text{B}}T$, en función del teorema de equipartición de la energía explicado en la sección 21.1.

Figura 40.5 Comparación de los resultados experimentales con la curva que establece la ley Rayleigh-Jeans para la distribución de la radiación de un cuerpo negro.

En la figura 40.5 aparece una curva experimental del espectro de radiación de un cuerpo negro, junto con la predicción teórica de la ley de Rayleigh-Jeans. En el caso de longitudes de onda largas, la ley de Rayleigh-Jeans coincide razonablemente con la información experimental, pero en longitudes de onda cortas la diferencia es apreciable.

Observe que conforme λ se aproxima a cero, la función $I(\lambda, T)$ dada por la ecuación 40.3 tiende al infinito. Por esto, de acuerdo con la teoría clásica, no sólo deben predominar las longitudes de onda corta en el espectro de un cuerpo negro, sino que también la energía emitida por cualquier cuerpo negro debe tender al infinito en el límite de una longitud de onda cero. En contraste con esta predicción, los datos experimentales graficados en la figura 40.5 muestran que, conforme λ se aproxima a cero, $I(\lambda, T)$ también se aproxima a cero. Esta falta de coincidencia entre teoría y experimentación, resultaba tan desconcertante que los científicos le dieron el nombre de *catástrofe ultravioleta.* (Esta "catástrofe" —energía infinita— se presenta conforme la longitud de onda se aproxima a cero; se le añadió la palabra "ultravioleta" porque las ondas ultravioleta son cortas.)

En el año 1900, Max Planck desarrolló una teoría para la radiación de un cuerpo negro que conduce a una ecuación para $I(\lambda, T)$ que está en total acuerdo con los resultados experimentales a todas las longitudes de onda. Planck supuso que la radiación de la cavidad llega a causa de osciladores atómicos en las paredes de la cavidad de la figura 40.1. Planck formuló dos atrevidas y controvertidas hipótesis respecto a la naturaleza de los osciladores en las paredes de la cavidad:

- La energía de un oscilador sólo puede tener ciertos valores *discretos* E_n:

$$E_n = nhf \tag{40.4}$$

  donde n es un entero positivo conocido como **número cuántico**,[1] f es la frecuencia de la oscilación y h es un parámetro introducido por Planck y que hoy se conoce como la **constante de Planck**. Porque la energía de cada oscilador sólo puede tener valores discretos conocidos por la ecuación 40.4, se dice que la energía está **cuantizada**. Cada uno de los valores discretos de energía corresponde a un **estado cuántico** diferente, representado por el número cuántico n. Cuando el oscilador se encuentra en el estado cuántico $n = 1$, su energía es igual a hf; cuando se encuentra en el estado cuántico $n = 2$, la energía es igual a $2hf$; y así sucesivamente.
- Los osciladores emiten o absorben energía cuando realizan una transición de un estado cuántico a otro. Toda la diferencia de energía entre los estados inicial y final de la transición es emitida o absorbida como un solo cuanto de radiación. Si la transición es a causa de un estado a otro inmediatamente inferior, por ejemplo, del estado $n = 3$ al estado $n = 2$, la ecuación 40.4 muestra que la cantidad de energía emitida por el oscilador es igual a

$$E = hf \tag{40.5}$$

© Bettmann/CORBIS.

MAX PLANCK
Físico alemán (1858-1947)
Planck introdujo el concepto de "cuanto de acción" (la constante de Planck, h) en un intento por explicar la distribución espectral de la radiación de un cuerpo negro, concepto que estableció los cimientos de la teoría cuántica. En 1918 se le otorgó el premio Nobel, por ser el descubridor de la naturaleza cuantizada de la energía.

Un oscilador emite o absorbe energía sólo cuando cambia de estado cuántico. Si permanece en un mismo estado cuántico, no existe emisión o absorción de energía. La figura 40.6 es un **diagrama de nivel de energía** que muestra los niveles cuantizados de energía y las transiciones posibles, según la propuesta de Planck. Esta es una representación semigráfica de importancia, que es utilizada a menudo en la física cuántica.[2] El eje vertical es lineal respecto a la energía, y los niveles de energía permitidos están representados por líneas horizontales. El sistema cuantizado sólo puede tener representadas energías mediante líneas horizontales.

El punto clave en la teoría de Planck es la hipótesis radical de los estados cuantizados de la energía. Este desarrollo representó una clara separación de la física clásica y marcó el nacimiento de la teoría cuántica.

En el modelo de Rayleigh-Jeans, la energía promedio asociada con una longitud de onda específica de las ondas estacionarias existentes en la cavidad es la misma para todas las longitudes de onda y es igual a $k_B T$. Planck utilizó las mismas ideas clásicas que en el modelo de Rayleigh-Jeans para llegar con la densidad de energía para una longitud de

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 40.2

De nuevo *n* es un entero

En los capítulos anteriores sobre óptica, se utilizó el símbolo n como índice de refracción, el cual no era un número entero. Aquí se utiliza otra vez n como en el capítulo 18, para indicar el modo de onda estacionaria presente en una cuerda o en una columna de aire. En la física cuántica n se utiliza a menudo como un número cuántico entero para identificar el estado cuántico particular de un sistema.

[1] Un número cuántico por lo general es un número entero (aunque pueden presentarse números cuánticos de medio entero) que describe un estado permitido en un sistema, como por ejemplo los valores de n, que describen los modos normales de oscilación de una cuerda fija en ambos extremos, como se explicó en la sección 18.3.

[2] En la sección 21.4, aparece por primera vez un diagrama de niveles de energía.

onda determinada como un producto de valores constantes y la energía promedio, pero la energía promedio no se proporciona por el teorema de equipartición. La energía promedio de una onda es la diferencia de energía promedio entre los niveles del oscilador, *ponderados de acuerdo con la probabilidad de la onda que se está emitiendo*. Esta ponderación a partir de la ocupación de estados de energía más elevada, como se describe en la ley de distribución de Boltzmann, se explicó en la sección 21.5. De acuerdo con esta ley, la probabilidad de que un estado esté ocupado es proporcional al factor e^{-E/k_BT}, donde E es la energía del estado.

Figura 40.6 Niveles de energía permitidos para un oscilador con frecuencia f. Las transiciones permitidas se indican mediante flechas de doble punta.

A frecuencias bajas, los niveles de energía están más cerca, como se observa a la derecha de la figura 40.7, y la mayoría de los estados de energía están excitados porque el factor de Boltzmann e^{-E/k_BT} es relativamente grande para estos estados. Por lo tanto, existen muchas contribuciones a la radiación de salida, si bien cada contribución tiene muy poca energía. Considere ahora una radiación de alta frecuencia, esto es, una radiación con longitud de onda corta. Para obtener esta radiación, las energías permitidas están muy separadas, como se ve a la izquierda de la figura 40.7. La probabilidad de que una agitación térmica excite estos altos niveles de energía es pequeña, debido a que para valores grandes de E el valor del factor de Boltzmann es pequeño. A frecuencias altas, la baja probabilidad de excitación da como resultado una muy pequeña contribución a la energía total, a pesar de que cada cuanto tiene una gran energía. Esta baja probabilidad "invierte la curva" y la lleva a cero una vez más en longitudes de onda corta.

Utilizando este procedimiento, Planck generó una expresión teórica para la distribución de la longitud de onda que coincide notablemente con las curvas experimentales de la figura 40.3:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda k_BT} - 1)} \qquad \textbf{(40.6)}$$

◀ Función de distribución de las longitudes de onda de Planck

Esta función incluye el parámetro h que Planck ajustó de manera que su curva coincidiera con la información experimental en todas las longitudes de onda. Se determinó que este parámetro es independiente del material con el cual está hecho el cuerpo negro e independiente de la temperatura; se trata de una constante fundamental de la naturaleza. El valor de h, la constante de Planck, que se introdujo por primera vez en el capítulo 35, es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} \qquad \textbf{(40.7)}$$

◀ Constante de Planck

En longitudes de onda largas, la ecuación 40.6 se reduce a la expresión de Rayleigh-Jeans, ecuación 40.3 (véase el problema 13), y a longitudes de onda cortas predice una reducción exponencial en $I(\lambda, T)$ al disminuir la longitud de onda, que concuerda con los resultados experimentales.

Cuando Planck presentó su teoría, la mayoría de los científicos (¡Planck incluido!) no consideró la idea del cuanto como realista. Creyeron que se trataba de un truco matemático que casualmente daba los resultados correctos. En consecuencia, Planck y los demás

Figura 40.7 En el modelo de Planck, la energía promedio asociada con una longitud de onda particular es el producto de la energía de una transición y de un factor relacionado con la probabilidad de que ocurra dicha transición. Conforme los niveles de energía se separan con longitudes de onda más cortas (mayor energía), la probabilidad de excitación disminuye, al igual que la probabilidad de una transición desde el estado de excitación.

Figura 40.8 Un termómetro ótico mide la temperatura de un paciente al detectar la intensidad de la radiación infrarroja emitida por el tímpano.

continuaron buscando una explicación más "racional" de la radiación de los cuerpos negros. Sin embargo, desarrollos posteriores demostraron que una teoría según el concepto del cuanto (antes que en conceptos clásicos) tendría que ser utilizada para explicar no solamente la radiación de cuerpo negro sino también para explicar varios fenómenos más a nivel atómico.

En 1905, Einstein volvió a deducir los resultados de Planck al suponer que las oscilaciones de la cavidad del campo electromagnético estaban cuantizadas. En otras palabras, propuso que la cuantización es una propiedad fundamental de la luz y de otras radiaciones electromagnéticas. Esto condujo al concepto de fotones, como se explicó en la sección 40.2. Un factor crítico para el éxito de la teoría cuántica o de los fotones es la relación entre la energía y la frecuencia, que fracasó completamente en predecir la teoría clásica.

Es posible que un doctor en su consultorio mida la temperatura corporal con un *termómetro ótico*, el cual lee la temperatura en cuestión de segundos (figura 40.8). Este tipo de termómetro mide la cantidad de radiación infrarroja emitida por el tímpano. Después convierte la radiación en una lectura de temperatura. Este termómetro es muy sensible porque en la ley de Stefan la temperatura aparece elevada a la cuarta potencia. Suponga que tiene una temperatura de 1°C por encima de lo normal. Ya que las temperaturas absolutas se determinan agregando 273 a las temperaturas Celsius, la relación de su temperatura febril con la temperatura normal de su cuerpo de 37°C es igual a

$$\frac{T_{\text{fiebre}}}{T_{\text{normal}}} = \frac{38°\text{C} + 273°\text{C}}{37°\text{C} + 273°\text{C}} = 1.003\,2$$

Esto representa sólo un incremento de temperatura de 0.32%. De cualquier modo, el incremento en energía radiada es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura, así que

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{fiebre}}}{\mathcal{P}_{\text{normal}}} = \left(\frac{38°\text{C} + 273°\text{C}}{37°\text{C} + 273°\text{C}}\right)^4 = 1.013$$

Esto representa un incremento de 1.3% en energía radiada, que es fácilmente medida por los modernos sensores de radiación infrarroja.

EJEMPLO 40.1 Radiación térmica de diferentes objetos

A) Encuentre la longitud de onda máxima de la radiación de cuerpo negro emitida por el cuerpo humano cuando la temperatura de la piel es de 35°C.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Desde la superficie de cualquier objeto se emite radiación térmica. La longitud de onda máxima se relaciona con la temperatura superficial a través de la ley de desplazamiento de Wien (ecuación 40.2).

Categorizar Los resultados se evalúan con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 40.2 para $\lambda_{\text{máx}}$:

$$1)\qquad \lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{T}$$

Sustituya la temperatura superficial:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{308\ \text{K}} = 9.4\ \mu\text{m}$$

Dicha radiación está en la región infrarroja del espectro y es invisible al ojo humano. Algunos animales (como las serpientes, por ejemplo) son capaces de detectar radiación de esta longitud de onda y por lo tanto localizar presas de sangre caliente incluso en la oscuridad.

B) Encuentre la longitud de onda máxima de la radiación de cuerpo negro emitida por el filamento de tungsteno de un foco, que opera a 2000 K.

SOLUCIÓN

Sustituya la temperatura del filamento en la ecuación 1):

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}}{2000\ \text{K}} = \boxed{1.4\ \mu\text{m}}$$

Esta radiación también está en el infrarrojo, lo que significa que la mayor parte de la energía emitida por un foco no es visible para los humanos.

C) Encuentre la longitud de onda máxima de la radiación de cuerpo negro emitida por el Sol, que tiene una temperatura superficial de aproximadamente 5800 K.

SOLUCIÓN

Sustituya la temperatura superficial en la ecuación 1):

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}}{5800\ \text{K}} = \boxed{0.50\ \mu\text{m}}$$

Esta radiación está cerca del centro del espectro visible, cerca del color de una pelota de tenis amarillo verdosa. Porque es el color más frecuente en la luz solar, los ojos humanos evolucionaron para ser más sensibles a la luz de aproximadamente esta longitud de onda.

EJEMPLO 40.2 El oscilador cuantizado

Un bloque de 2.0 kg se une a un resorte sin masa que tiene una constante de fuerza de $k = 25$ N/m. El resorte se estira 0.40 m desde su posición de equilibrio y se libera desde el reposo.

A) Encuentre la energía total del sistema y la frecuencia de oscilación de acuerdo con cálculos clásicos.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los detalles del movimiento del bloque se comprenden a partir del estudio del movimiento armónico simple del capítulo 15.

Categorizar La frase "de acuerdo con cálculos clásicos" pide clasificar esta parte del problema como un análisis clásico del oscilador. El bloque se modela como una partícula en movimiento armónico simple.

Analizar En términos de la manera en que el bloque se pone en movimiento, su amplitud es de 0.40 m.

Evalúe la energía total del sistema bloque-resorte con la ecuación 15.21:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(25\ \text{N/m})(0.40\ \text{m})^2 = \boxed{2.0\ \text{J}}$$

Evalúe la frecuencia de oscilación a partir de la ecuación 15.14:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25\ \text{N/m}}{2.0\ \text{kg}}} = \boxed{0.56\ \text{Hz}}$$

B) Si supone que la energía del oscilador está cuantizada, encuentre el número cuántico n para el sistema que oscila con esta amplitud.

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del problema se clasifica como un análisis cuántico del oscilador. El sistema bloque-resorte se modela como un oscilador de Planck:

Analizar Resuelva la ecuación 40.4 para el número cuántico n:

$$n = \frac{E_n}{hf}$$

Sustituya valores numéricos:

$$n = \frac{2.0\ \text{J}}{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(0.56\ \text{Hz})} = \boxed{5.4 \times 10^{33}}$$

Finalizar Note que 5.4×10^{33} es un número cuántico muy grande, que es representativo para sistemas macroscópicos. A continuación se exploran los cambios entre estados cuánticos para el oscilador.

¿Qué pasaría si? Suponga que el oscilador realiza una transición desde el estado $n = 5.4 \times 10^{33}$ hasta el estado que corresponde a $n = 5.4 \times 10^{33} - 1$. ¿En cuánto cambia la energía del oscilador en este cambio de un cuanto?

Respuesta A partir de la ecuación 40.5, la energía retirada debido a la transición entre estados que difieren en n por 1 es

$$E = hf = (6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(0.56\text{ Hz}) = 3.7 \times 10^{-34}\,\text{J}$$

Este cambio de energía debido a un cambio de un cuanto es fraccionalmente igual a $3.7 \times 10^{-34}\,\text{J}/2.0\,\text{J}$, ¡o en el orden de una parte en 10^{34}! Esta es una fracción tan pequeña de la energía total del oscilador que no se puede detectar. Por lo tanto, aun cuando la energía de un sistema bloque-resorte macroscópico esté cuantizada y de hecho disminuya mediante pequeños saltos cuánticos, los sentidos humanos perciben la disminución como continua. Los efectos cuánticos se vuelven importantes y detectables sólo a nivel submicroscópico de átomos y moléculas.

40.2 Efecto fotoeléctrico

El primer fenómeno explicado a partir del modelo cuántico fue la radiación de cuerpo negro. A finales del siglo XIX, mientras se recolectaba información sobre la radiación térmica, algunos experimentos demostraron que una luz incidente sobre ciertas superficies metálicas provoca la emisión de electrones de esas superficies. Este fenómeno, explicado por primera vez en la sección 35.1, se conoce como **efecto fotoeléctrico,** y los electrones emitidos se conocen como **fotoelectrones.**[3]

Figura 40.9
Diagrama del circuito para estudiar el efecto fotoeléctrico. Cuando la luz incide sobre la placa E (emisor), se expulsan fotoelectrones de ella. Los electrones que se desplazan de la placa E a la placa C (colector) constituyen una corriente en el circuito.

La figura 40.9 es un diagrama de un aparato diseñado para el estudio del efecto fotoeléctrico. Un tubo de vidrio o de cuarzo al vacío contiene una placa metálica E (emisor) conectada a la terminal negativa de una batería, y otra placa metálica C (colector) conectada a la terminal positiva de la batería. Cuando el tubo se conserva en la oscuridad, el amperímetro lee cero, lo que indica que no hay corriente en el circuito. Sin embargo, cuando se ilumina la placa E mediante luz con una longitud de onda apropiada, el amperímetro detecta una corriente, lo cual indica que existe un flujo de cargas a través del espacio entre las placas E y C. Esta corriente surge a causa de los fotoelectrones emitidos por la placa E y recolectados en la placa C.

La figura 40.10 es un diagrama de la corriente fotoeléctrica en función de la diferencia de potencial ΔV aplicada entre las placas E y C para dos intensidades de luz. Con valores grandes de ΔV, la corriente alcanza un valor máximo; todos los electrones emitidos por E son recolectados en C, y la corriente no puede aumentar más. Además, la corriente máxima aumenta conforme se incrementa la intensidad de la luz incidente, como podría esperarse, ya que una luz de mayor intensidad emite mayor cantidad de electrones. Por último, cuando ΔV es negativo, es decir, cuando se invierte la batería del circuito haciendo que la placa E sea positiva y la placa C negativa, la corriente cae porque muchos de los fotoelectrones emitidos por E son repelidos por la placa C, que ahora es negativa. En esta situación, sólo aquellos fotoelectrones que tengan una energía cinética mayor que $e|\Delta V|$ llegan a la placa C, en donde e es la magnitud de la carga del electrón. Cuando ΔV es igual o más negativo que $-\Delta V_s$, siendo ΔV_s el **potencial de frenado,** ningún fotoelectrón llega a C, con lo cual la corriente es igual a cero.

Figura 40.10
Corriente fotoeléctrica en función de la diferencia de potencial aplicada a dos intensidades de luz. La corriente aumenta al incrementar la intensidad, pero con valores altos de ΔV llega a un nivel de saturación. Con voltajes iguales o más negativos que $-\Delta V_s$, en donde ΔV_s es el potencial de frenado, la corriente es igual a cero.

Considere que la combinación del campo eléctrico entre las placas y un electrón expulsado de la placa E es un sistema aislado. Suponga que este electrón se detiene justo cuando llega a la placa C. Porque es un sistema aislado, deberá conservarse la energía mecánica total del sistema:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

donde la configuración 1 se refiere al instante en que el electrón abandona el metal con una energía cinética K_1 y la configuración 2 al momento en que el electrón se frena, justo antes de tocar la placa C. Si define igual a cero la energía potencial eléctrica del sistema en la configuración 1, tiene

$$K_1 + 0 = 0 + (-e)(-\Delta V)$$

[3] Los fotoelectrones no son diferentes de otros electrones. Se les ha dado este nombre únicamente porque han sido emitidos de un metal por luz debido al efecto fotoeléctrico.

Ahora, suponga que incrementa la diferencia de potencial ΔV en la dirección negativa, justo hasta que la corriente es cero. En este caso, el electrón que se frena justo antes de alcanzar la placa C tendrá la energía cinética máxima posible al abandonar la superficie metálica, y ΔV será igual al potencial de frenado ΔV_s. En tal caso la ecuación anterior puede escribirse como:

$$K_{\text{máx}} = e\Delta V_s \qquad \textbf{(40.8)}$$

Esta ecuación permitirá medir $K_{\text{máx}}$ en forma experimental, al determinar el voltaje ΔV_s, en el cual la corriente disminuye hasta cero.

A continuación se mencionan varias características del efecto fotoeléctrico. Para cada una se hace la comparación entre las predicciones realizadas con el método clásico, utilizando el modelo ondulatorio de la luz, y los resultados experimentales.

1. Dependencia de la energía cinética del fotoelectrón en relación con la intensidad de la luz.

   Predicción clásica: Los electrones absorben energía continuamente de las ondas electromagnéticas. Conforme aumenta la intensidad de la luz que incide sobre un metal, se tranfiere energía al metal en una proporción considerable y los electrones se expulsan con más energía cinética.
   Resultado experimental: La energía cinética máxima de los fotoelectrones es *independiente* de la intensidad de la luz. Esto se muestra en la figura 40.10, en donde ambas curvas llegan al valor cero para el *mismo* voltaje negativo. (De acuerdo con la ecuación 40.8, la energía cinética máxima es proporcional al potencial de frenado.)

2. Intervalo de tiempo entre la incidencia de la luz y la expulsión de los fotoelectrones.

   Predicción clásica: A bajas intensidades de luz, debe transcurrir un intervalo de tiempo medible entre el instante en que se enciende la luz y el momento en que el electrón es expulsado del metal. Este intervalo de tiempo es necesario para que el electrón absorba la radiación incidente antes de adquirir la energía suficiente para escapar del metal.
   Resultado experimental: Los electrones son emitidos de la superficie metálica casi *de manera instantánea* (menos de 10^{-9} s después de que se ilumina la superficie), incluso con intensidades de luz muy bajas.

3. Dependencia de expulsión de electrones en relación con la frecuencia de la luz.

   Predicción clásica: Los electrones se expulsan del metal con luz incidente de cualquier frecuencia, siempre y cuando la intensidad sea lo suficientemente elevada, porque la energía se transfiere al metal sin importar la frecuencia de la luz incidente.
   Resultado experimental: No existe emisión de electrones si la frecuencia de la luz incidente disminuye por debajo de cierta **frecuencia de corte** f_c, cuyo valor es característico del material iluminado. No existe expulsión de electrones por debajo de esta frecuencia de corte, independiente de la intensidad de luz.

4. Dependencia de la energía cinética del fotoelectrón en relación con la frecuencia de la luz.

   Predicción clásica: No existe *ninguna* correspondencia entre la frecuencia de la luz y la energía cinética del electrón. La energía cinética debe estar relacionada con la intensidad de la luz.
   Resultado experimental: La energía cinética máxima de los fotoelectrones aumenta al incrementarse la frecuencia de la luz.

De estas características los resultados experimentales contradicen *las cuatro* predicciones clásicas. En 1905 Einstein aportó una explicación exitosa del efecto fotoeléctrico, en el mismo año en que publicó su teoría especial de la relatividad. Como parte de su trabajo general sobre la radiación electromagnética, por el cual recibió el premio Nobel en 1921, Einstein amplió el concepto de cuantización de Planck a las ondas electromagnéticas, como se mencionó en la sección 40.1. Supuso que la luz (o cualquier otra onda electromagnética) de frecuencia f se puede considerar un flujo de cuantos, independientemente de la fuente de la radiación. Hoy en día a esos cuantos les llamamos **fotones**. Cada fotón tiene una energía E, dada por la ecuación 40.5, $E = hf$, y se mueve en el vacío a la rapidez de la luz c, donde $c = 3.00 \times 10^8$ m/s.

Pregunta rápida 40.2 Cuando por la tarde usted se encuentra fuera de su casa, está expuesto a los cuatro siguientes tipos de radiaciones electromagnéticas: luz amarilla de los arbotantes de luz de sodio de la calle, ondas de radio de una estación de radio AM, ondas de radio de una estación de radio FM y microondas de la antena de un sistema de comunicaciones. Ordene de menor a mayor estos tipos de ondas en función de su energía fotónica.

En el modelo de Einstein del efecto fotoeléctrico, un fotón de la luz incidente transfiere *toda* su energía hf a un electrón *particular* en el metal. Debido a eso, la absorción de energía por parte de los electrones no es un proceso de absorción continuo, como se asumía en el modelo ondulatorio, sino un proceso discontinuo en el cual la energía es entregada a los electrones en paquetes discretos. La transferencia de energía se lleva a cabo mediante un evento que incluye un fotón y un electrón.[4]

Los electrones expulsados de la superficie del metal y que no entran en colisión con otros átomos del metal antes de escapar tienen una energía cinética máxima $K_{\text{máx}}$. De acuerdo con Einstein, la energía cinética máxima de estos electrones liberados es igual a

Ecuación del efecto fotoeléctrico

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi \qquad \textbf{(40.9)}$$

donde ϕ se llama la **función trabajo** del metal. **La función trabajo representa la energía mínima con la cual un electrón está unido en el metal** y tiene un valor del orden de unos cuantos electrón volts. La tabla 40.1 muestra las funciones de trabajo para diversos metales.

Es posible comprender la ecuación 40.9 si la reordena como sigue

$$K_{\text{máx}} + \phi = hf$$

En esta presentación la ecuación de Einstein es la ecuación 8.2 aplicada al sistema no aislado del electrón y el metal. $K_{\text{máx}}$ es el cambio ΔK en la energía cinética del electrón, suponiendo que parte del reposo; ϕ es el cambio ΔU en energía potencial del sistema, si define como cero la energía potencial cuando el electrón está incluido en el metal; y hf es la transferencia de energía hacia el sistema debido a la radiación electromagnética.

Con el modelo fotónico de la luz es posible explicar las características observadas del efecto fotoeléctrico que no eran posibles de comprender a partir de los conceptos clásicos:

1. Dependencia que tiene la energía cinética del fotoelectrón con la intensidad de la luz.

La ecuación 40.9 muestra que $K_{\text{máx}}$ es independiente de la intensidad de la luz. La energía cinética máxima de cualquier electrón individual, que es igual a $hf - \phi$, depende sólo de la frecuencia de la luz y de la función trabajo. Si se duplica la intensidad de la luz, lo mismo pasa con la cantidad de fotones que llegan por unidad de tiempo, lo que duplica la rapidez a la cual se emiten los fotoelectrones. De cualquier modo la energía cinética máxima de cualquier fotoelectrón individual se conserva sin intercambio de tiempo.

2. Intervalo entre la incidencia de la luz y la expulsión de fotoelectrones.

Una emisión casi instantánea de los electrones es consistente con el modelo fotónico de la luz. La energía incidente se presenta en pequeños paquetes, y existe una interacción uno a uno entre fotones y electrones. Incluso si la luz incidente es de muy baja intensidad, puede haber muy pocos fotones llegando por unidad de intervalo de tiempo; no obstante, cada fotón tiene la energía suficiente como para expulsar de inmediato un electrón.

3. Dependencia que tiene la expulsión de electrones con la frecuencia de la luz.

Porque el fotón debe tener una energía superior a la función trabajo ϕ al expulsar un electrón, el efecto fotoeléctrico no se observa abajo de cierta frecuencia de corte. Si la energía de un fotón que está llegando no cumple este requisito, no será posible la expulsión de ningún electrón de la superficie, sin importar el nivel de intensidad luminosa.

TABLA 40.1

Funciones trabajo de metales seleccionados

Metal	ϕ (eV)
Na	2.46
Al	4.08
Cu	4.70
Zn	4.31
Ag	4.73
Pt	6.35
Pb	4.14
Fe	4.50

Nota: Los valores son representativos para los metales listados. Los valores reales pueden variar dependiendo de si el metal es un solo cristal o es policristalino. Los valores también dependen de la cara desde la cual son expulsados los electrones de los metales cristalinos. Además, procedimientos experimentales diferentes producen distintos valores.

[4] En principio, es posible que dos fotones se combinen para entregar un electrón con sus energías combinadas. No obstante, esto es muy poco probable sin el auxilio de una elevada intensidad de radiación, que sólo está disponible en láser muy potentes.

Figura 40.11
Gráfica de $K_{máx}$ de los fotoelectrones en función de la frecuencia de la luz incidente, correspondiente a un experimento representativo de efecto fotoeléctrico. Para un metal dado los fotones que tengan una frecuencia inferior a la frecuencia de corte no poseen suficiente energía para expulsar un electrón de la superficie del metal.

4. Dependencia que tiene la energía cinética del fotoelectrón con la frecuencia de la luz.

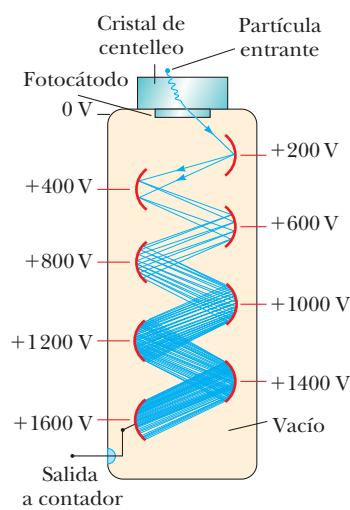
Un fotón de frecuencia superior lleva más energía y debido a eso expulsa un fotoelectrón de energía más elevada que un fotón de frecuencia inferior.

El modelo de Einstein anticipa una correspondencia lineal (ecuación 40.9) entre la energía cinética máxima del electrón $K_{máx}$ y la frecuencia de la luz f. Una comprobación definitiva de la teoría de Einstein sería observar experimentalmente la correspondencia lineal entre $K_{máx}$ y f. En realidad, se observa dicha correspondencia lineal, como se bosqueja en la figura 40.11, donde la pendiente de las líneas de dicha gráfica h es la constante de Planck. La intersección con el eje horizontal representa la frecuencia de corte por debajo de la cual no se emiten electrones. La frecuencia de corte está relacionada con la función trabajo según la correspondencia $f_c = \phi/h$. La frecuencia de corte corresponde a **la longitud de onda de corte** λ_c, donde

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{c}{\phi/h} = \frac{hc}{\phi} \qquad \textbf{(40.10)}$$

◀ Longitud de onda de corte

y c es la rapidez de la luz. Longitudes de onda superiores a λ_c que inciden sobre un material que tiene una función trabajo ϕ no dan como resultado la emisión de fotoelectrones.

La combinación hc en la ecuación 40.10 se presenta con frecuencia al relacionar la energía de un fotón con su longitud de onda. Un método abreviado común para la resolución de problemas es expresar esta combinación en unidades útiles, según la aproximación siguiente:

$$hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$$

Uno de los primeros usos prácticos del efecto fotoeléctrico fue como detector en el medidor de luz de una cámara fotográfica. La luz que refleja el objeto que se desea fotografiar incide sobre una superficie fotoeléctrica en el medidor, generando la emisión de fotoelectrones que acto seguido pasan a través de un amperímetro sensible. La magnitud de la corriente del amperímetro depende de la intensidad de la luz.

El fototubo, otra de las primeras aplicaciones del efecto fotoeléctrico, actúa de manera muy parecida a un interruptor en un circuito eléctrico. Produce una corriente en el circuito cuando una luz con una frecuencia suficientemente alta incide sobre una placa de metal del fototubo, pero en la oscuridad no produce corriente. Estos fototubos eran utilizados en alarmas contra robo así como en la detección de la pista sonora en las películas sonoras. Hoy en día modernos dispositivos semiconductores han ido reemplazando aparatos más antiguos de acuerdo con el efecto fotoeléctrico.

El efecto fotoeléctrico se usa actualmente en la operación de tubos fotomultiplicadores. La estructura de uno de estos dispositivos se esboza en la figura 40.12. Un fotón al incidir sobre un fotocátodo expulsa un electrón debido al efecto fotoeléctrico. Este electrón es acelerado debido a una diferencia de potencial existente entre el fotocátodo y el primer *dínodo*,

Figura 40.12 La multiplicación de electrones en un tubo fotomultiplicador.

que aparece en la figura 40.12 con una diferencia de potencial de +200 V en relación con el fotocátodo. Este electrón de alta energía incide en el dínodo y expulsa varios electrones más. Este proceso se repite a través de una serie de dínodos cada uno con un potencial cada vez más elevado, hasta que se produce un pulso eléctrico cuando inciden sobre el último dínodo millones de electrones. Debido a eso al tubo se le denomina *multiplicador*: un fotón en la entrada ha dado como resultado millones de electrones en la salida.

El tubo fotomultiplicador se usa en los detectores nucleares para localizar fotones producidos por la interacción de partículas cargadas de energía o de rayos gama con ciertos materiales. También se utiliza en astronomía, en una técnica que se conoce como *fotometría fotoeléctrica,* en la cual la luz recolectada por un telescopio desde una sola estrella se deja incidir durante un cierto intervalo sobre un tubo fotomultiplicador. El tubo mide la energía total de la luz transferida durante ese intervalo, que posteriormente puede convertirse en la luminosidad de la estrella.

En muchas observaciones astronómicas el tubo fotomultiplicador está siendo reemplazado por un *dispositivo acoplado por cargas* (CCD, *charged-coupled device*), que es el mismo dispositivo que se utiliza en las cámaras digitales (sección 36.6). En un CCD se forma una matriz de pixeles sobre una superficie de silicio de un circuito integrado (sección 43.7). Cuando esta superficie se expone a la luz desde una escena astronómica a través de un telescopio o de una escena terrestre a través de una cámara digital, los electrones generados por el efecto fotoeléctrico quedan retenidos en “trampas” por debajo de la superficie. La cantidad de electrones está relacionada con la intensidad de la luz que incide sobre la superficie. Un procesador de señales mide el número de electrones asociados con cada pixel y convierte esta información a un código digital que utiliza una computadora para reconstruir y desplegar la escena.

La *cámara CCD de bombardeo de electrones* ofrece una mayor sensibilidad que una CCD convencional. En este dispositivo los electrones expulsados de un fotocátodo debido al efecto fotoeléctrico, son acelerados mediante un voltaje elevado antes de que se impacten sobre la matriz del CCD. Estos electrones de alta energía dan como resultado un detector muy sensible a radiaciones de baja intensidad.

Pregunta rápida 40.3 Considere una de las curvas de la figura 40.10. Suponga que la intensidad de la luz incidente se conserva fija pero su frecuencia aumenta. El potencial de frenado de la figura 40.10 a) se mantiene fijo, b) se mueve hacia la derecha o c) se mueve hacia la izquierda.

Pregunta rápida 40.4 Suponga que a los físicos clásicos se les hubiera ocurrido la idea de predecir cuál sería la apariencia de una gráfica de $K_{\text{máx}}$ en función de f, como se muestra en la figura 40.11. Dibuje una gráfica que se parezca al resultado esperado, según el modelo ondulatorio de la luz.

EJEMPLO 40.3 El efecto fotoeléctrico para el sodio

Una superficie de sodio se ilumina con luz que tiene una longitud de onda de 300 nm. La función de trabajo para el metal sodio es 2.46 eV.

A) Encuentre la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un fotón que golpea la superficie metálica y expulsa un electrón. El electrón con la máxima energía es uno cerca de la superficie que no experimenta interacciones con otras partículas en el metal que reduciría su energía en su ruta fuera del metal.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este problema se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre la energía de cada fotón en el haz de luz iluminante a partir de la ecuación 40.5:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{300 \text{ nm}} = 4.13 \text{ eV}$$

A partir de la ecuación 40.9, halle la energía cinética máxima de un electrón:

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi = 4.13 \text{ eV} - 2.46 \text{ V} = \boxed{1.67 \text{ eV}}$$

B) Encuentre la longitud de onda de corte λ_c para el sodio.

SOLUCIÓN

Calcule λ_c con la ecuación 40.10:

$$\lambda_c = \frac{hc}{\phi} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{2.46 \text{ eV}} = \boxed{504 \text{ nm}}$$

40.3 Efecto Compton

En 1919 Einstein llegó a la conclusión de que un fotón de energía E se desplaza en una misma dirección y tiene una cantidad de movimiento igual a $E/c = hf/c$. En 1923 Arthur Holly Compton (1892-1962) y Peter Debye (1884-1966), cada uno por su lado, desarrollaron aún más la idea de la cantidad de movimiento del fotón de Einstein.

Antes de 1922, Compton y sus colegas habían acumulado evidencia que demostraba que la teoría ondulatoria clásica de la luz no podía explicar la dispersión de los rayos X a causa los electrones. De acuerdo con la teoría clásica, las ondas electromagnéticas de frecuencia f_0 que inciden sobre los electrones tienen dos efectos: 1) la presión de radiación (véase la sección 34.5) debe hacer que los electrones se aceleren en la dirección de la propagación de las ondas y 2) el campo eléctrico oscilante de la radiación incidente debería poner en oscilación a los electrones a la frecuencia aparente f', donde f' es la frecuencia en el marco de los electrones en movimiento. Esta frecuencia aparente f' es diferente de la frecuencia f_0 de la radiación incidente, debido al efecto Doppler (véase la sección 17.4). Primero cada electrón absorbe radiación como una partícula en movimiento y después vuelve a radiar como una partícula en movimiento, exhibiendo por lo tanto dos corrimientos Doppler en la frecuencia de radiación.

ARTHUR HOLLY COMPTON
Físico estadounidense (1892-1962)
Compton nació en Wooster, Ohio, y estudió en el Wooster College y en la Universidad de Princeton. Llegó a ser el director del laboratorio en la Universidad de Chicago, donde se efectuaban trabajos experimentales relacionados con reacciones nucleares sostenidas en cadenas. Su trabajo resultó de importancia central para la construcción de la primera arma nuclear. Su descubrimiento del efecto Compton lo llevó a compartir el premio Nobel de Física de 1927 con Charles Wilson.

Dado que cada electrón se mueve a una rapidez diferente después de la interacción, dependiendo de la cantidad de energía absorbida a causa de las ondas electromagnéticas, la frecuencia de la onda dispersa en un ángulo determinado en relación con la radiación de llegada debe mostrar una distribución de valores con corrimiento Doppler. Contrariamente a esta predicción, los experimentos de Compton demostraron que, en un ángulo determinado, sólo se observa *una* frecuencia de radiación. Compton y sus colegas se dieron cuenta de que podían explicar estos experimentos si trataban los fotones no como ondas, sino más bien como partículas puntuales de energía hf y con una cantidad de movimiento hf/c, y suponiendo que se conserva tanto la energía como la cantidad de movimiento en el sistema aislado del par fotón-electrón en colisión. Compton adoptó un modelo de partícula para algo que era bien conocido como una onda, y hoy por hoy este fenómeno de dispersión es conocido como **efecto Compton.** La figura 40.13 muestra la imagen cuántica de la colisión entre un fotón individual de rayos X y un electrón. En el modelo cuántico el electrón es desviado un ángulo ϕ respecto a esta dirección, como si se tratara de una colisión parecida a la que ocurre con las bolas de billar. (El símbolo ϕ aquí utilizado es un ángulo y no debe confundirse con la función trabajo, que se vio en la sección anterior.)

Figura 40.13 Modelo cuántico para la dispersión de rayos X a causa de un electrón. La colisión del fotón con el electrón muestra la naturaleza corpuscular del fotón.

La figura 40.14 es un diagrama del aparato utilizado por Compton. Los rayos X, desviados a causa de un blanco de grafito, se analizaron utilizando un espectrómetro de cristal giratorio, y la intensidad se midió con una cámara de ionización generadora de una corriente

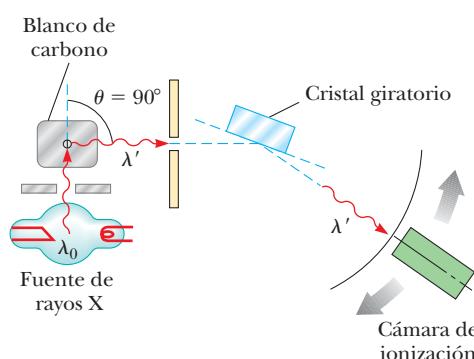



Figura 40.14 Diagrama del aparato de Compton. La longitud de onda se midió con un espectrómetro de cristal giratorio, usando grafito (carbono) como blanco.

proporcional a la intensidad. El haz incidente estaba constituido por rayos X monocromáticos de longitud de onda $\lambda_0 = 0.071$ nm. Las gráficas experimentales de intensidad en función de la longitud de onda observadas por Compton para cuatro ángulos de dispersión (correspondientes a θ en la figura 40.13) aparecen en la figura 40.15. Las gráficas para los tres ángulos distintos de cero muestran dos picos, uno en λ_0 y el otro en $\lambda' > \lambda_0$. El pico desplazado en λ' está causado por la dispersión de los rayos X de los electrones libres, y Compton anticipó que dependería del ángulo de dispersión como sigue:

Ecuación de desplazamiento Compton ▶

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \tag{40.11}$$

donde m_e es la masa del electrón. Esta expresión se conoce como **ecuación de desplazamiento Compton**, y al factor $h/m_e c$ se le conoce como **longitud de onda Compton** del electrón, el cual tiene un valor actualmente aceptado de

Longitud de onda Compton ▶

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 0.002\ 43 \text{ nm}$$

El pico sin corrimiento en λ_0 de la figura 40.15 se genera por rayos X que son dispersados por causa de los electrones fuertemente unidos a los átomos blanco. Este pico sin corrimiento también está previsto por la ecuación 40.11 si la masa del electrón es reemplazada por la masa de un átomo de carbono, que es aproximadamente 23 000 veces la masa del electrón. Debido a eso, existe un corrimiento de la longitud de onda debido a la dispersión a causa de un electrón unido a un átomo, pero es de una magnitud tan reducida que en el experimento de Compton no fue detectada.

Las mediciones de Compton coincidieron extraordinariamente bien con las predicciones de la ecuación 40.11. Es justo decir que estos resultados ¡fueron los primeros que realmente convencieron a muchos físicos de la validez fundamental de la teoría cuántica!

Pregunta rápida 40.5 Observe que para cualquier ángulo θ de dispersión determinado, la ecuación 40.11 da el mismo valor para el corrimiento de Compton en cualquier longitud de onda. Teniendo presente lo anterior, ¿para cuál de los siguientes tipos de radiación es máximo el corrimiento fraccionario en la longitud de onda en un ángulo determinado de dispersión? a) Las ondas de radio, b) las microondas, c) la luz visible o d) los rayos X.

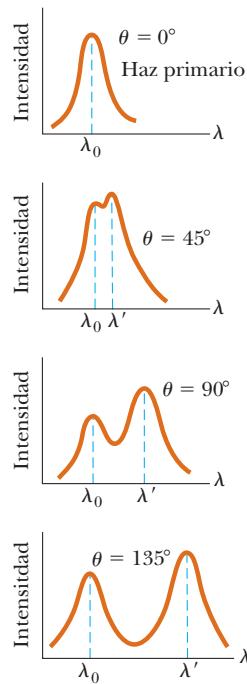



Figura 40.15 Intensidad de rayos X desviados en función de la longitud de onda para la dispersión Compton en $\theta = 0°$, 45°, 90° y 135°.

Deducción de la ecuación de desplazamiento Compton

Es posible deducir la ecuación de corrimiento de Compton si supone que el fotón se comporta como una partícula y entra en colisión elástica con un electrón inicialmente en reposo, como se puede observar en la figura 40.13. El fotón es tratado como una partícula con una energía $E = hf = hc/\lambda$ y una energía en reposo igual a cero. Se aplica un modelo de sistema aislado al fotón y al electrón. En el proceso de dispersión, la totalidad de la energía y la cantidad de movimiento lineal del sistema deben conservarse. Si aplica el principio de conservación de la energía a este proceso obtiene

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e$$

siendo hc/λ_0 la energía del fotón incidente, hc/λ' la energía del fotón disperso y K_e la energía cinética del electrón con retroceso. Porque el electrón retrocede con una rapidez comparable a la rapidez de la luz, es necesario que use la expresión relativista $K_e = (\gamma - 1)m_e c^2$ (ecuación 39.23). Por tanto,

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda'} + (\gamma - 1)m_e c^2 \tag{40.12}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - (u^2/c^2)}$ y u es la rapidez del electrón.

A continuación, a esta colisión se le aplica la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, observando que sus componentes en x y en y de la cantidad de movimiento se conservan cada una de forma independiente. La ecuación 39.28 muestra que la cantidad de movimiento del fotón tiene una magnitud $p = E/c$, y se sabe por la ecuación 40.5 que $E = hf$. Por lo tanto, $p = hf/c$. Si en esta expresión reemplaza λf por c (ecuación 16.12)

obtiene $p = h/\lambda$. Porque la expresión relativista para la cantidad de movimiento del electrón en retroceso es igual a $p_e = \gamma m_e v$ (ecuación 39.19), obtiene las siguientes expresiones para las componentes en x y en y de la cantidad de movimiento lineal, donde los ángulos son los descritos en la figura 40.13:

$$\text{componente en } x: \quad \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + \gamma m_e u \cos\phi \qquad \textbf{(40.13)}$$

$$\text{componente en } y: \quad 0 = \frac{h}{\lambda'}\operatorname{sen}\theta - \gamma m_e u \operatorname{sen}\phi \qquad \textbf{(40.14)}$$

Al eliminar v y ϕ de las ecuaciones 40.12 a 40.14, obtiene una sola expresión que relaciona las tres variables restantes (λ', λ_0 y θ). Después de un poco de álgebra (véase el problema 59) obtiene la ecuación (40.11).

EJEMPLO 40.4 Dispersión Compton a 45°

De un bloque de material se dispersan rayos X con longitud de onda $\lambda_0 = 0.200\ 000$ nm. Los rayos X dispersados se observan en un ángulo de 45.0° con el haz incidente. Calcule su longitud de onda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine el proceso de la figura 40.13, con el fotón dispersado a 45° de su dirección original.

Categorizar El resultado se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 40.11 para la longitud de onda de los rayos X dispersados:

$$1)\quad \lambda' = \lambda_0 + \frac{h(1-\cos\theta)}{m_e c}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\lambda' = 0.200\ 000 \times 10^{-9}\ \text{m} + \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(1-\cos 45.0^\circ)}{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}$$

$$= 0.200\ 000 \times 10^{-9}\ \text{m} + 7.10 \times 10^{-13}\ \text{m} = 0.200\ 710\ \text{nm}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si el detector se mueve de modo que los rayos X dispersados se detectan a un ángulo mayor de 45°? ¿La longitud de onda de los rayos X dispersados aumenta o disminuye conforme aumenta el ángulo θ?

Respuesta En la ecuación 1), si el ángulo θ aumenta, cos θ disminuye. En consecuencia, el factor $(1 - \cos\theta)$ aumenta. Por lo tanto, la longitud de onda dispersada aumenta.

También se podía aplicar un argumento energético para lograr este mismo resultado. Conforme el ángulo de dispersión aumenta, más energía se transfiere del fotón incidente al electrón. Como resultado, la energía del fotón dispersado disminuye con ángulo de dispersión creciente. Porque $E = hf$, la frecuencia del fotón dispersado disminuye, y porque $\lambda = c/f$, la longitud de onda aumenta.

40.4 Fotones y ondas electromagnéticas

Fenómenos como el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton representan una evidencia a prueba de fuego de que cuando la luz (y otras formas de radiación electromagnética) interactúa con la materia, se comporta como si estuviera compuesta de partículas con una energía hf y con una cantidad de movimiento h/λ. ¿Cómo es posible considerar la luz como un fotón (en otras palabras como una partícula) cuando sabe que se trata de una onda? Por otra parte, la luz se describe en términos de fotones con cierta energía y cantidad de movimiento. También, por otra parte, la luz y otras ondas electromagnéticas exhiben efectos de interferencia y de difracción, que son entendibles sólo mediante una interpretación ondulatoria.

¿Cuál de los modelos es el correcto? ¿ La luz es una onda o una partícula? La respuesta dependerá del fenómeno que se esté observando. Algunos experimentos se explican mejor con el modelo del fotón, en tanto que otros se explican mejor únicamente con el modelo ondulatorio. El resultado final es que **necesita aceptar ambos modelos y admitir que no es posible describir la naturaleza verdadera de la luz en función de ninguna concepción clásica única.** El mismo rayo de luz puede expulsar fotoelectrones de un metal (lo que quiere decir que el haz está formado de fotones) y también puede ser difractado por una rendija (lo que quiere decir que el haz es una onda). En otras palabras, **el modelo de partícula y el modelo ondulatorio de la luz se complementan**.

El éxito que tiene el modelo de partícula de la luz para explicar el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton plantea muchas otras preguntas. Si la luz es una partícula, ¿qué quiere decir la "frecuencia" y "la longitud de onda" de la partícula, y cuál de estas dos propiedades determina su energía y su cantidad de movimiento? ¿ La luz es *simultáneamente* una onda y una partícula? A pesar de que los fotones no tienen energía en reposo (una cantidad imposible de observar, ¡ya que el fotón no puede estar en reposo!), ¿existe alguna expresión sencilla para la *masa efectiva* de un fotón en movimiento? Si los fotones tienen una masa efectiva, ¿experimentan atracción gravitacional? ¿Cuál es la extensión espacial de un fotón, y cómo es posible que un electrón absorba o disperse un fotón? Algunas de estas preguntas se pueden contestar, pero otras demandan una visión de procesos atómicos que resultan demasiado pictóricos y literales. Muchas de estas preguntas se generan debido a analogías clásicas como la colisión de bolas de billar y el rompimiento de las olas en una playa. La mecánica cuántica le da a la luz una naturaleza más fluida y más flexible al considerar el modelo de partícula y el modelo ondulatorio de la luz tanto necesarios como complementarios. No se puede utilizar de manera exclusiva ninguno de los modelos para describir todas las propiedades de la luz. Un discernimiento completo del comportamiento observado de la luz sólo se puede obtener si se combinan ambos modelos de una manera complementaria.

40.5 Propiedades ondulatorias de las partículas

AIP Niels Bohr Library.

LOUIS DE BROGLIE
Físico francés 1892–1987
De Broglie nació en Dieppe, Francia, estudió Historia en la Sorbona de París en preparación para lo que esperaba sería una carrera en el Cuerpo Diplomático. El mundo de la ciencia tiene suerte de que cambiara su carrera para convertirse en un físico teórico. En el año de 1929 le fue otorgado el premio Nobel debido a su predicción de la naturaleza ondulatoria de los electrones.

Los estudiantes que se inician en la naturaleza dual de la luz, con frecuencia encuentran este concepto difícil de aceptar. Se está acostumbrado a considerar cosas como los bates de beisbol como partículas y otras cosas, como las ondas sonoras, únicamente como una forma de movimiento ondulatorio. Todas las observaciones a gran escala pueden ser interpretadas considerando ya sea una explicación ondulatoria o una explicación de partículas, pero en el mundo de los fotones y de los electrones, esta distinción no está hecha con tanta claridad. Todavía más desconcertante es el hecho de que, bajo ciertas condiciones, estas que sin ninguna ambigüedad se identifican como "partículas" ¡exhiben características ondulatorias!

En su disertación doctoral en el año de 1923, Louis de Broglie postuló que **ya que los fotones tienen a la vez características ondulatorias y de partículas, es posible que todas las formas de la materia tengan ambas propiedades.** Esta era una idea en extremo revolucionaria que en esas fechas no tenía confirmación experimental. Según De Broglie, los electrones, justo igual que la luz, tienen una naturaleza dual partícula-onda.

En la sección 40.3 se encontró que la cantidad de movimiento de un fotón puede ser expresada de la forma

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Esta ecuación muestra que la longitud de onda del fotón puede especificarse por su cantidad de movimiento: $\lambda = h/p$. De Broglie sugirió que las partículas materiales que tengan una cantidad de movimiento p tienen una longitud de onda característica dada por la misma expresión, $\lambda = h/p$. Porque $p = mv$ es la magnitud de la cantidad de movimiento de una partícula de masa m y de rapidez u, la **longitud de onda de De Broglie** de dicha partícula es igual a[5]

[5]La longitud de onda De Broglie para una partícula móvil a *cualquier* rapidez u es $\lambda = h/\gamma mu$, siendo $\gamma = [1 - (u^2/c^2)]^{-1/2}$.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu} \qquad (40.15)$$

◄ Longitud de onda de De Broglie

Además, en analogía con los fotones, De Broglie postuló que las partículas obedecen la relación de Einstein $E = hf$, donde E es la energía total de la partícula. En tal caso, la frecuencia de una partícula es

$$f = \frac{E}{h} \qquad (40.16)$$

La naturaleza dual de la materia resulta evidente en estas dos últimas ecuaciones, ya que cada una contiene a la vez conceptos de partículas (p y E) y cantidades ondulatorias (λ y f).

El experimento Davisson-Germer

La propuesta hecha en 1923 por De Broglie en el sentido de que la materia exhibe propiedades a la vez ondulatorias y de partícula, fue considerada una simple especulación. Si las partículas como los electrones tuvieran propiedades ondulatorias, bajo las condiciones adecuadas, deberían exhibir efectos de difracción. Sólo tres años después, C. J. Davisson (1881-1958) y L. H Germer (1896-1971) lograron medir la longitud de onda de los electrones. Este importante descubrimiento fue la primera confirmación experimental de las ondas de la materia propuestas por De Broglie.

Es interesante observar que la intención inicial del experimento de Davisson-Germer no era confirmar las hipótesis de De Broglie. De hecho, su descubrimiento se hizo accidentalmente (como ocurre con frecuencia). El experimento involucraba la dispersión de electrones de baja energía (aproximadamente de 54 eV) desde una placa de señal de níquel en el vacío. Durante uno de los experimentos, la superficie de níquel se oxidó en extremo debido a una ruptura accidental del sistema de vacío. Después de haber calentado la placa de señal en una corriente de hidrógeno, a fin de eliminar el recubrimiento de óxido, los electrones dispersados por dicha placa exhibieron intensidades máximas y mínimas en ángulos específicos. Por último, los responsables del experimento finalmente se dieron cuenta de que al calentarse al níquel se le formaron grandes regiones cristalinas y que los planos a distancias regulares de esas regiones servían como rejilla de difracción para electrones. (Véase en la sección 38.5 la explicación de difracción de rayos X por medio de cristales.)

Poco tiempo después, Davisson y Germer llevaron a cabo mediciones de difracción más amplias sobre electrones dispersos a partir de objetos de un solo cristal. Sus resultados mostraron de manera concluyente la naturaleza ondulatoria de los electrones y confirmó la correspondencia de De Broglie $p = h/\lambda$. Ese mismo año, G. P. Thomson (1892-1975) de Escocia también observó patrones de difracción de electrones al hacerlos pasar a través de hojas muy delgadas de oro. Se han observado patrones de difracción en la dispersión de átomos de helio, átomos de hidrógeno y en neutrones. En resumen, se ha establecido de diversas maneras la naturaleza de onda de las partículas.

Comprender la naturaleza dual de la materia y de la radiación es conceptualmente difícil, porque los dos modelos parecen contradecirse. Este problema, en lo que se refiere a la luz, ya se explicó. El **principio de complementariedad** dice que **los modelos ondulatorios y de partículas, ya sea de la materia o de radiaciones, se complementan entre sí.** Ninguno de los modelos puede utilizarse de manera exclusiva para describir adecuadamente ya sea la materia o la radiación. Porque los seres humanos tienden a generar imágenes mentales en términos de sus experiencias en el mundo real (bate de beisbol, ondas en el agua y así, sucesivamente), se utilizan ambas descripciones en forma complementaria para explicar algún conjunto determinado de datos causa del mundo cuántico.

Pregunta rápida 40.6 Un electrón y un protón que se mueven con magnitudes de velocidad no relativistas tienen la misma longitud de onda de De Broglie. ¿Cuáles de las características siguientes también son iguales para ambas partículas? a) Rapidez, b) energía cinética, c) cantidad de movimiento o d) frecuencia.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 40.3

¿Qué oscila?

Si las partículas tienen propiedades ondulatorias, ¿qué oscila? Son familiares las ondas de las cuerdas, ondas muy concretas. Las ondas sonoras son más abstractas, pero lo probable es que se sienta cómodo con ellas. Las ondas electromagnéticas son aún más abstractas, pero se describen en función de variables físicas y de campos eléctrico y magnético. En contraste, las ondas asociadas con las partículas son totalmente abstractas y no es posible asociarlas con una variable física. En el capítulo 41 se describe la onda asociada con un partícula en términos de probabilidad.

EJEMPLO 40.5 Longitudes de onda para objetos micro y macroscópicos

A) Calcule la longitud de onda de De Broglie para un electrón ($m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) que se mueve a 1.00×10^7 m/s.

SOLUCIÓN

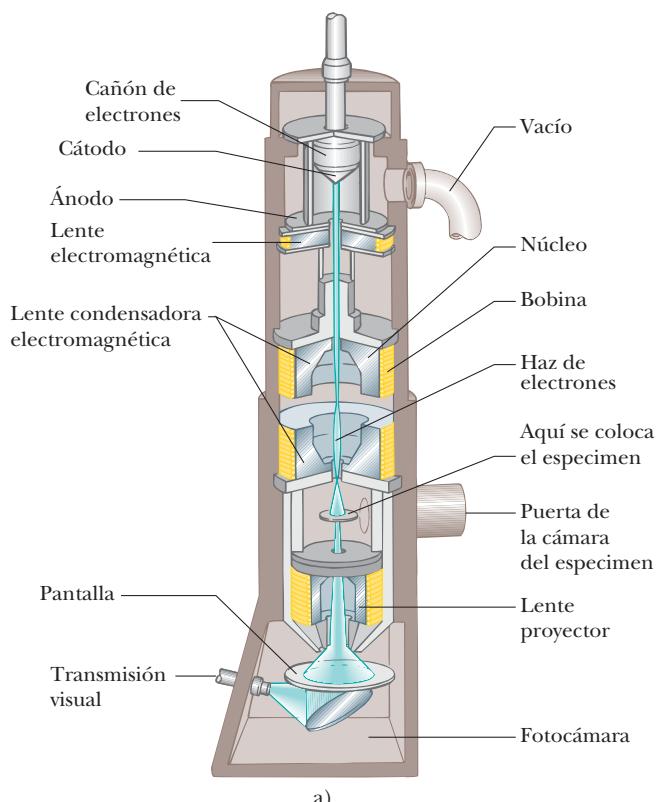
Conceptualizar Imagine al electrón que se mueve a través del espacio. Desde un punto de vista clásico, es una partícula bajo velocidad constante. Desde el punto de vista cuántico, el electrón tiene una longitud de onda asociada con él.

Categorizar El resultado se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la longitud de onda con la ecuación 40.15:

$$\lambda = \frac{h}{m_e u} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.00 \times 10^7\ \text{m/s})} = 7.28 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

B) Una roca de 50 g de masa se lanza con una rapidez de 40 m/s. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie?

SOLUCIÓN

Evalúe la longitud de onda de De Broglie con la ecuación 40.15:

$$\lambda = \frac{h}{mu} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(50 \times 10^{-3}\ \text{kg})(40\ \text{m/s})} = 3.32 \times 10^{-34}\ \text{m}$$

Esta longitud de onda es mucho menor que cualquier abertura a través de la cual posiblemente pudiera pasar la roca. Por esto, no se podrían observar efectos de difracción y, como resultado, las propiedades ondulatorias de objetos a gran escala no se pueden observar.

El microscopio electrónico

Un aparato práctico que se basa en las características ondulatorias de los electrones es el **microscopio electrónico.** En la figura 40.16 aparece un microscopio electrónico de *transmisión* que se utiliza para estudiar muestras planas y delgadas. En muchos aspectos es similar a un

Figura 40.16 a) Diagrama de un microscopio electrónico de transmisión para estudiar una muestra muy delgada. Las "lentes" que controlan el haz de electrones son en realidad bobinas de deflexión magnética. b) Microscopio electrónico.

microscopio óptico, de cualquier modo, el microscopio electrónico tiene un poder de resolución mucho mayor porque puede acelerar electrones hasta energías cinéticas muy altas, con lo que se logran longitudes de onda muy cortas. Ningún microscopio tiene la capacidad de definir detalles que sean significativamente menores que la longitud de onda de las ondas utilizadas para iluminar el objeto. Las longitudes de onda de los electrones son cerca de 100 veces más cortas que las de la luz visible utilizada en los microscopios ópticos. Como consecuencia, un microscopio electrónico con lentes ideales sería capaz de distinguir detalles aproximadamente 100 veces más pequeños que un microscopio óptico. (La radiación electromagnética con la misma longitud de onda que los electrones de un microscopio electrónico se presenta en la región de rayos X del espectro.)

El haz de electrones en un microscopio electrónico se controla mediante desviación electrostática o magnética, que actúa sobre los electrones para enfocar el haz y formar una imagen. En vez de examinar la imagen a través de un ocular, como ocurre en un microscopio óptico, el observador estudia una imagen formada en un monitor o en algún otro tipo de pantalla de despliegue. La figura 40.17 pone de manifiesto el asombroso detalle disponible al utilizar un microscopio electrónico.

© Eye of Science/Science Source/Photo Researchers, Inc.

Figura 40.17 Fotografía de un microscopio electrónico de color mejorado que muestra el detalle significativo de un ácaro de bodega *Lepidoglyphus destructor*. Este ácaro es tan pequeño (longitud máxima de 0.75 mm), que los microscopios ordinarios no pueden definir sus diminutos detalles anatómicos.

40.6 Partícula cuántica

Ya que en el pasado se consideraba que los modelos de partícula y onda eran diferentes, la explicación presentada en secciones previas es posible que sea completamente inquietante. La idea de que tanto la luz como las partículas de la materia tienen propiedades a la vez de partícula y de onda no encaja con esta distinción. No obstante, la evidencia experimental muestra que esta conclusión es exactamente la que se debe aceptar. El reconocimiento de esta naturaleza dual lleva a un nuevo modelo, **la partícula cuántica**, la cual es una combinación del modelo de partícula presentado en el capítulo 2 y el modelo de onda visto en el capítulo 16. En este nuevo modelo las entidades tienen características a la vez de partículas y de ondas, y debe elegir un comportamiento apropiado —partícula u onda— a fin de comprender un fenómeno en particular.

En esta sección se explora este modelo de manera que pueda llegar a sentirse mejor con la idea, para lo cual se demostrará que es posible construir a partir de ondas una entidad que exhiba las propiedades de una partícula.

Primero recuerde algunas de las características de las partículas y de las ondas ideales. Una partícula ideal tiene de tamaño cero dimensiones. Debido a eso, una característica esencial de una partícula es que está *localizada* en el espacio. Una onda ideal tiene una sola frecuencia y es infinitamente larga, como lo sugiere la figura 40.18a. Por lo tanto, una onda ideal *no se localiza* en el espacio. Se puede construir una entidad localizada a partir de ondas infinitamente largas. Imagine que dibuja una a lo largo del eje x, con una de sus crestas localizada en $x = 0$, como en la parte superior de la figura 40.18b. Ahora dibuje una segunda onda, de la misma amplitud pero con una frecuencia distinta, y que también tiene una de sus crestas localizada en $x = 0$. El resultado de la sobreposición de estas dos ondas es un *batimiento*, ya que las ondas están alternativamente en y fuera de fase. (Los batimientos fueron analizados en la sección 18.7.) La curva inferior de la figura 40.18b muestra el resultado de la sobreposición de estas dos ondas.

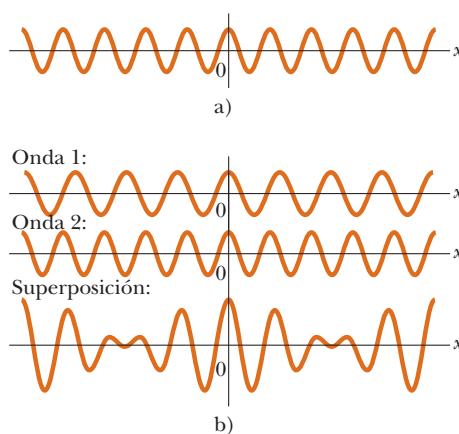
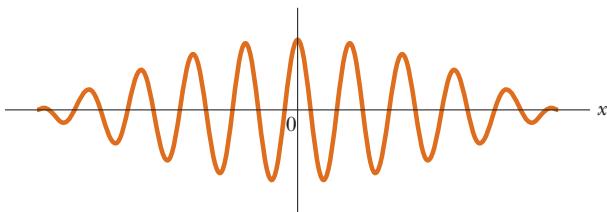



Figura 40.18 a) Una onda idealizada de una única frecuencia exacta es igual a todo en todas las partes del espacio y del tiempo. b) Si se combinan dos ondas ideales con frecuencias ligeramente distintas, el resultado es una pulsación (sección 18.7). Las regiones en el espacio en donde existe interferencia constructiva son distintas de aquellas en donde se tiene interferencia destructiva.

Figura 40.19
Si se combina un gran número de ondas, el resultado es un paquete de ondas que representa una partícula.

Observe que ya se ha introducido alguna localización gracias a la sobreposición de dos ondas. Una onda individual tiene la misma amplitud en cualquier sitio del espacio, no existe ningún punto en el espacio diferente de cualquier otro punto. Sin embargo, cuando se añade una segunda onda, existe alguna diferencia relativa a los puntos en fase en comparación con los que están fuera de fase.

Ahora imagine que se agregan más y más ondas a las dos originales, donde cada nueva onda tiene una nueva frecuencia. Cada onda nueva se agrega de forma que una de sus crestas esté en $x = 0$, con el resultado de que todas las ondas se suman constructivamente en $x = 0$. Cuando se considera un gran número de ondas, la probabilidad de que exista un valor positivo de una función de onda en cualquier punto $x \neq 0$ es igual a la probabilidad de que se tenga un valor negativo, y existe interferencia destructiva *en todos los sitios* excepto cerca de $x = 0$, donde se sobrepusieron todas las crestas. El resultado de esto se ilustra en la figura 40.19. La pequeña región de interferencia constructiva se conoce como **paquete de ondas**. Se trata de una región localizada en el espacio que es diferente de todas las demás regiones. Se identifica el paquete de ondas como una partícula porque ¡tiene la naturaleza localizada de una partícula! La localización del paquete de ondas corresponde a la posición de la partícula.

La naturaleza localizada de esta entidad es la *única* característica de una partícula que fue generada mediante este proceso. Aún no se ha encarado la forma en que el paquete de ondas logra tener características de partícula tales como masa, carga eléctrica, espín, etc. Debido a esto, quizá aún no esté totalmente convencido de que ha construido una partícula. Como evidencia adicional de que el paquete de ondas puede representar la partícula, se prueba que tiene otra característica de ésta.

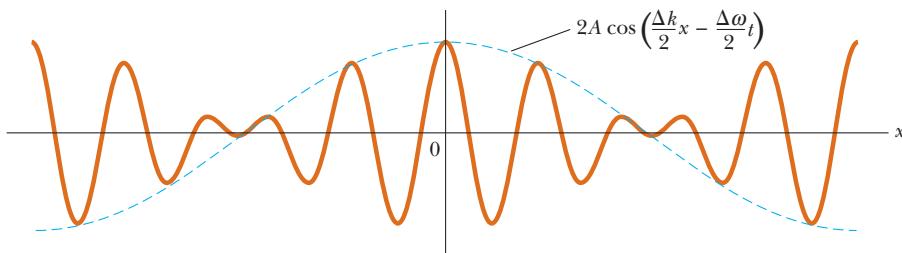
A fin de hacer sencilla la representación matemática, regrese a la combinación de dos ondas. Considere dos ondas de igual amplitud pero de frecuencias diferentes f_1 y f_2. La representación matemática de estas ondas es

$$y_1 = A\cos(k_1x - \omega_1t) \quad \text{y} \quad y_2 = A\cos(k_2x - \omega_2t)$$

donde, igual que en el capítulo 16, $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f$. Utilizando el principio de sobreposición, se añaden las ondas:

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(k_1x - \omega_1t) + A\cos(k_2x - \omega_2t)$$

Es conveniente escribir lo anterior de manera que se utilice la identidad trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Haciendo que $a = k_1x - \omega_1t$ y $b = k_2x - \omega_2t$, se encuentra que

$$y = 2A\cos\left[\frac{(k_1x - \omega_1t) - (k_2x - \omega_2t)}{2}\right]\cos\left[\frac{(k_1x - \omega_1t) + (k_2x - \omega_2t)}{2}\right]$$

$$y = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \qquad \textbf{(40.17)}$$

donde $\Delta k = k_1 - k_2$ y $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. El segundo factor coseno representa una onda con un número y una frecuencia iguales a los promedios de los valores de las ondas individuales.

En la ecuación 40.17, el factor entre paréntesis cuadrados representa la envolvente de la onda, como por ejemplo la curva color azul de la figura 40.20. Observe que este factor también tiene la forma matemática de una onda. **Esta envolvente, resultado de la combinación, puede moverse a través del espacio a una rapidez distinta de la de las ondas**

Figura 40.20 Patrón de batimiento de la figura 40.18b, con la sobreposición de una función envolvente (curva color azul).

individuales. Como un ejemplo extremo de esta posibilidad, imagine dos ondas idénticas pero que se mueven en direcciones opuestas. Ambas ondas se mueven con la misma rapidez, pero la rapidez de su envolvente es *cero*, ya que se ha generado una onda estacionaria, la cual fue analizada en la sección 18.2.

Para una onda individual, su rapidez se conoce por la ecuación 16.11,

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} \quad \textbf{(40.18)}$$

◀ Rapidez de fase de una onda en un paquete de ondas

Esta rapidez se conoce como **rapidez de fase** ya que se trata de la relación de avance de una cresta en una sola onda, que es un punto de una fase fija. Esta ecuación se interpreta como: la rapidez de fase de una onda es la relación del coeficiente variable en el tiempo t con el coeficiente variable en el espacio x en la ecuación de la onda, $y = A\cos(kx - wt)$.

El factor entre paréntesis de la ecuación 40.17 tiene la forma de una onda, por lo que se mueve con una rapidez conocida por esta misma relación:

$$v_g = \frac{\text{coeficiente variable en el tiempo } t}{\text{coeficiente variable en el espacio } x} = \frac{(\Delta\omega/2)}{(\Delta k/2)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

El subíndice g de la rapidez indica que a este término por lo común se le conoce como **rapidez de grupo**, es decir, la rapidez del paquete de ondas (el *grupo* de ondas) que se ha construido. Se ha generado esta expresión por una simple adición de dos ondas. Para la sobreposición de una gran cantidad de ondas para formar un paquete de ondas, esta relación se convierte en una derivada:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \textbf{(40.19)}$$

◀ Rapidez de grupo de un paquete de ondas

Multiplique tanto el numerador como el denominador por $\hbar$, donde $\hbar = h/2\pi$ da:

$$v_g = \frac{\hbar\, d\omega}{\hbar\, dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} \quad \textbf{(40.20)}$$

Considere los términos en el paréntesis de la ecuación 40.20, de manera separada. En el caso del numerador,

$$\hbar\omega = \frac{h}{2\pi}(2\pi f) = hf = E$$

Para el denominador,

$$\hbar k = \frac{h}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \frac{h}{\lambda} = p$$

Por lo tanto, la ecuación 40.20 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$v_g = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} \quad \textbf{(40.21)}$$

Porque se está explorando la posibilidad de que la envolvente de las ondas combinadas represente la partícula, piense en una partícula libre con una rapidez u que es pequeña en comparación con la rapidez de la luz. La energía de esta partícula es su energía cinética:

$$E = \tfrac{1}{2}mu^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Al derivar esta ecuación respecto a p

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{1}{2m}(2p) = u \qquad \textbf{(40.22)}$$

En consecuencia la rapidez de grupo del paquete de ondas es ¡idéntica a la rapidez de la partícula que se modela en su representación! Esto permite confiar más en el hecho de que el paquete de ondas es una forma razonable de generar una partícula.

Pregunta rápida 40.7 Como una analogía a los paquetes de ondas, considere un "paquete de automóvil" que se presenta cerca de la escena de un accidente en una autopista. La rapidez de fase es análoga a la rapidez individual de los automóviles cuando se mueven a través de la acumulación causada por el accidente. La rapidez de grupo puede ser identificada como la rapidez del borde de adelante del paquete de automóviles. Para el paquete de automóviles, la rapidez de grupo a) es la misma que la rapidez de fase, b) menor que la rapidez de fase, c) mayor que la rapidez de fase.

40.7 Revisión del experimento de doble rejilla

La dualidad onda-partícula ya es ahora un concepto firmemente aceptado, reforzado por resultados experimentales, incluyendo los del experimento Davisson-Germer. Sin embargo, de manera similar a los postulados de la relatividad especial, a menudo esta idea conduce a contradicciones con los patrones familiares de pensamiento recibidos de la experiencia cotidiana.

Una forma de cristalizar estas ideas respecto a la dualidad onda-partícula del electrón es mediante un experimento en el que se disparan electrones hacia una doble rejilla. Piense en un haz paralelo de electrones monoenergéticos que incide sobre una rejilla doble, como en la figura 40.21. Suponga que el ancho de la rejilla es pequeño en comparación con la longitud de onda de los electrones, por lo que no es necesario preocuparse sobre máximos y mínimos de difracción, como se explicó en el caso de la luz en la sección 38.2. Lejos de las rejillas y a una distancia mucho mayor que d, que es la separación entre ellas, está ubicado un detector de electrones. Si la pantalla del detector reune electrones durante un tiempo suficientemente largo, se halla un patrón de interferencia de ondas representativo respecto al conteo por cada minuto, es decir, a la probabilidad de llegada de los electrones. Este patrón de interferencia no debería esperarse si los electrones se comportaran como si fueran partículas clásicas, proporcionando una evidencia clara de que los electrones están interferidos, un comportamiento distinto parecido a la onda.

Si se miden los ángulos θ en los que la intensidad máxima de los electrones llega a la pantalla del detector en la figura 40.21, se encuentra que se describen exactamente por la misma ecuación (ecuación 37.2) que para la luz, $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$, donde m es el número de

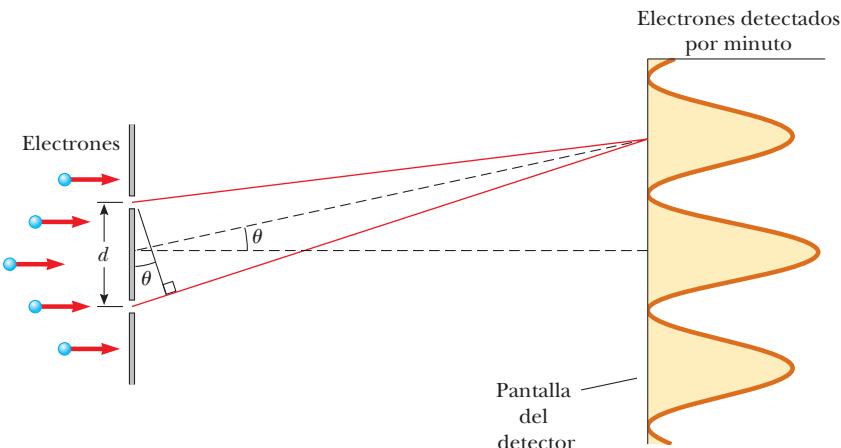



Figura 40.21 Interferencia de los electrones. La separación d entre las rejillas es mucho mayor que el ancho de cada una y mucho menor que la distancia entre rejillas y el detector.

orden y λ es la longitud de onda del electrón. Por lo tanto, la naturaleza dual del electrón se muestra claramente en este experimento: **los electrones se detectan como partículas en una mancha localizada sobre la pantalla del detector en algún instante de tiempo, pero la probabilidad de llegada a dicha mancha se determina al encontrar la intensidad de dos ondas que interfieren.**

En un haz de electrones con intensidades extremadamente bajas, un electrón por vez llega a la doble rendija. Es tentador suponer que el electrón pasa a través de la rendija 1 o la rendija 2. Puede argumentar que no hay efectos de interferencia porque no hay un segundo electrón que pase a través de la otra rendija para interferir con el primero. Sin embargo, esta suposición pone demasiado énfasis en el modelo de partícula del electrón. ¡Sólo se observa el patrón de interferencia si el intervalo de tiempo para la medición es suficientemente grande para que muchos electrones lleguen a la pantalla del detector! Esta situación se ilustra por los patrones simulados por computadora en la figura 40.22, donde el patrón de interferencia se vuelve más claro conforme aumenta el número de electrones que llegan a la pantalla del detector. Por esto, la suposición de que el electrón se localiza y pasa sólo a través de una rendija, cuando ambas rendijas están abiertas, debe ser incorrecta (¡una conclusión dolorosa!).

Para interpretar estos resultados, se está forzado a concluir que **un electrón interactúa con ambas rendijas simultáneamente**. Si usted intenta determinar experimentalmente por cuál rendija pasa el electrón, el acto de medir destruye el patrón de interferencia. Es imposible determinar por cuál rendija pasa el electrón. En efecto, ¡sólo se puede decir que **el electrón pasa a través de ambas rendijas**! Los mismos argumentos aplican a fotones.

Si se restringe usted mismo a un modelo de partícula puro, es una noción incómoda que el electrón pueda estar presente en ambas rendijas al mismo tiempo. Sin embargo, a partir del modelo de partícula cuántica, la partícula se puede considerar construida por ondas que existen en todo el espacio. Debido a eso, las componentes ondulatorias del electrón están presentes en ambas rendijas al mismo tiempo, y este modelo conduce a una interpretación más cómoda de este experimento.

a) Después de 28 electrones.

b) Después de 1000 electrones.

c) Después de 10 000 electrones.

d) Patrón de electrones de doble rejilla.

Figura 40.22
a), b), c). Patrones de interferencia simulados por computadora de un haz de electrones que inciden sobre una doble rejilla. d) Fotografía de un patrón de interferencia de doble rejilla producido por electrones.

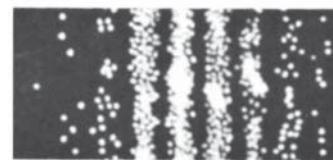
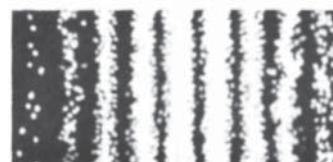
40.8 El principio de incertidumbre

Siempre que se mida la posición o la velocidad de una partícula en cualquier momento, habrá incertidumbres experimentales incluidas en las mediciones. Según la mecánica clásica, no existe una barrera básica que impida un refinamiento adicional de los aparatos o de los procedimientos experimentales de medición. En otras palabras, es posible llevar a cabo, en principio, dichas mediciones con una incertidumbre arbitrariamente pequeña. Sin embargo, la teoría cuántica dice que **básicamente es imposible medir, simultáneas, la posición y la cantidad de movimiento de una partícula con una precisión infinita**.

En el año de 1927 Werner Heisenberg (1901-1976) introdujo este concepto, que ahora se conoce como el **principio de incertidumbre de Heisenberg**:

Si se hace una medición con una incertidumbre Δx de la posición de una partícula y de manera simultánea se hace una medición con una incertidumbre Δp_x de su componente en x de la cantidad de movimiento, el producto de ambas incertidumbres no puede ser nunca menor de $\hbar/2$:

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \textbf{(40.23)}$$

◄ Principio de incertidumbre de Heisenberg

Es decir, **físicamente es imposible medir de manera simultánea la posición exacta y la cantidad de movimiento exacto de una partícula**. Heisenberg tuvo cuidado en hacer notar que las incertidumbres inevitables Δx y Δp_x no se presentan debido a imperfecciones en los instrumentos reales de medición. Más bien, **las incertidumbres se presentan debido a la estructura cuántica de la materia**.

A fin de comprender el principio de incertidumbre, suponga que se conoce *con exactitud* la longitud de onda de una partícula. Según la relación de De Broglie, $\lambda = h/p$, sabría por tanto que la cantidad de movimiento sería precisamente igual a $p = h/\lambda$. En realidad, una onda de una sola longitud existiría en todo el espacio. Cualquier región junto a esta onda es la misma que cualquier otra (figura 40.18a). Si fuera necesario preguntar,

WERNER HEISENBERG
Físico teórico alemán (1901-1976)
Heisenberg obtuvo su doctorado en 1923 en la Universidad de Munich. Mientras otros científicos intentaban desarrollar modelos físicos de los fenómenos cuánticos, Heisenberg desarrolló un modelo matemático abstracto que se conoce como *mecánica matricial*. Los modelos físicos más ampliamente aceptados demostraron tener una equivalencia con la mecánica matricial. Heisenberg hizo muchas otras contribuciones significativas a la física, incluyendo su famoso principio de incertidumbre debido al cual fue galardonado con el premio Nobel en el año de 1932, por la predicción de dos formas de hidrógeno molecular y por los modelos teóricos del núcleo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 40.4

El principio de incertidumbre
Algunos estudiantes interpretan de manera incorrecta que el principio de incertidumbre significa que una medición interfiere con el sistema. Por ejemplo, si en un experimento hipotético se observa un electrón usando un microscopio óptico, el fotón utilizado para observarlo entra en colisión con él y hace que se mueva, lo que le da incertidumbre en la cantidad de movimiento. Ésta no es la idea en el principio de incertidumbre. El principio de incertidumbre es independiente del proceso de medición y está en función de la naturaleza ondulatoria de la materia.

"¿dónde está la partícula representada por esta onda?", no existe una ubicación especial en el espacio junto a la onda que pueda ser identificada con la partícula; todos los puntos a lo largo de la onda son iguales. Por lo tanto, se tiene incertidumbre *infinita* respecto a la posición de la partícula, y no se sabe nada respecto a su ubicación. Obtener el conocimiento perfecto de la cantidad de movimiento de la partícula ha costado toda la información referente a su localización.

En comparación, considere ahora una partícula cuya cantidad de movimiento es incierta, por lo que tiene un intervalo de valores posibles de cantidad de movimiento. Según la relación de De Broglie, esto da como resultado un intervalo de longitudes de onda. En consecuencia, la partícula no está representada por una sola longitud de onda, sino por una combinación de longitudes de onda dentro de este intervalo. Esta combinación forma un paquete de ondas, como se vio en la sección 40.6, y como se ilustró en la figura 40.19. Si se le pide determinar la localización de la partícula, sólo podrá decir que está en alguna parte en la región definida por el paquete de ondas, ya que existe una diferencia muy clara entre esta región y el resto del espacio. Por lo tantto, al renunciar a parte de la información respecto a la cantidad de movimiento de la partícula, ha ganado información en relación con su posición.

Si perdiera *toda* información en relación con la cantidad de movimiento, estaría sumando ondas de todas las longitudes de onda posibles. Esto daría como resultado un paquete de ondas con una longitud igual a cero. Por lo tanto, si no sabe nada respecto a la cantidad de movimiento, sabe exactamente donde está la partícula.

La forma matemática del principio de incertidumbre afirma que el producto de las incertidumbres en posición y en la cantidad de movimiento, es siempre mayor que cierto valor mínimo. Este valor puede ser calculado a partir de los argumentos arriba explicados y que resultan en el valor de $\hbar/2$ de la ecuación 40.23.

Si reconsidera la figura 40.19, es posible generar otra forma de principio de incertidumbre. Imagine que el eje horizontal es el tiempo y no la posición en el espacio x. Ahora desarrolle los mismos argumentos que utilizó respecto al conocimiento de la longitud de onda y de la posición, pero en el dominio del tiempo. Las variables correspondientes serían la frecuencia y el tiempo. Porque la frecuencia está relacionada con la energía de la partícula mediante la expresión $E = hf$, en esta forma el principio de incertidumbre es

$$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \textbf{(40.24)}$$

Esta forma del principio de incertidumbre sugiere que puede parecer que se ha violado la conservación de la energía en una cantidad ΔE, siempre y cuando sea durante un breve intervalo de tiempo Δt consistente con la ecuación. En el capítulo 46 se utilizará esta idea para estimar las energías de reposo de las partículas.

Pregunta rápida 40.8 Se observa la localización de una partícula y se concluye que está exactamente en $x = 0$, con una incertidumbre *cero* en la dirección de las x. ¿De qué manera afecta lo anterior la incertidumbre de su componente de velocidad en la dirección y? a) No la afecta. b) Se hace infinita. c) Se hace igual a cero.

EJEMPLO 40.6 Localización de un electrón

Se observa la rapidez de un electrón que es 5.00×10^3 m/s con una exactitud de 0.003 00%. Encuentre la incertidumbre mínima para determinar la posición de este electrón.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El valor fraccionario dado por la exactitud de la rapidez del electrón se puede interpretar como la incertidumbre fraccionaria en su cantidad de movimiento. Esta incertidumbre corresponde a una incertidumbre mínima en la posición del electrón a través del principio de incertidumbre.

Categorizar El resultado se evalúa con conceptos desarrollados en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Suponga que el electrón se mueve junto al eje x y encuentre la componente x de su cantidad de movimiento:

$$p_x = mu_x = (9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(5.00 \times 10^3\text{ m/s}) = 4.56 \times 10^{-27}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Encuentre la incertidumbre en p_x como 0.003 00% de este valor:

$$\Delta p_x = (0.000\,030\,0)(4.56 \times 10^{-27}\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 1.37 \times 10^{-31}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Resuelva la ecuación 40.23 para la incertidumbre en la posición del electrón:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}{2(1.37 \times 10^{-31}\text{ kg}\cdot\text{m/s})} = 0.386\text{ mm}$$

EJEMPLO 40.7 El ancho de línea de emisiones atómicas

Los átomos tienen niveles de energía cuantizados similares a los de los osciladores de Planck, aunque los niveles de energía de un átomo por lo general no están igualmente espaciados. Cuando un átomo hace una transición entre estados, se emite energía en la forma de un fotón. Aunque un átomo excitado puede radiar en cualquier momento de $t = 0$ a $t = \infty$, el intervalo de tiempo promedio después de la excitación durante el cual un átomo radia se llama **vida media** τ. Si $\tau = 1.0 \times 10^{-8}$ s, use el principio de incertidumbre para calcular el ancho de línea Δf producido por este tiempo de vida finito.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La vida media τ determinada por el estado excitado se interpreta como la incertidumbre Δt en el tiempo cuando se presenta la transición. Esta incertidumbre corresponde a una incertidumbre mínima en la frecuencia del fotón radiado a través del principio de incertidumbre.

Categorizar El resultado se evalúa con conceptos desarrollados en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 40.5 para relacionar la incertidumbre en la frecuencia del fotón con la incertidumbre en su energía:

$$E = hf \quad \rightarrow \quad \Delta E = h\Delta f \quad \rightarrow \quad \Delta f = \frac{\Delta E}{h}$$

Use la ecuación 40.24 para sustituir la incertidumbre en la energía del fotón, dado el valor mínimo de Δf:

$$\Delta f \geq \frac{1}{h}\,\frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1}{h}\,\frac{(h/2\pi)}{2\Delta t} = \frac{1}{4\pi\Delta t} = \frac{1}{4\pi\tau}$$

Sustituya para la vida media del estado excitado:

$$\Delta f \geq \frac{1}{4\pi(1.0 \times 10^{-8}\text{ s})} = 8.0 \times 10^6\text{ Hz}$$

¿Que pasaría si? ¿Y si esta misma vida media se asociara con una transición que emite una onda de radio en lugar de una onda de luz visible desde un átomo? ¿El ancho de línea fraccionaria $\Delta f/f$ es mayor o menor que para la luz visible?

Respuesta Puesto que se supone la misma vida media para ambas transiciones, Δf es independiente de la frecuencia de la radiación. Las ondas de radio tienen frecuencias menores que las ondas de luz, así que la relación $\Delta f/f$ será mayor para las ondas de radio. Si supone una frecuencia de onda de luz f de 6.00×10^4 Hz, el ancho de línea fraccionaria es

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{8.0 \times 10^6\text{ Hz}}{6.00 \times 10^{14}\text{ Hz}} = 1.3 \times 10^{-8}$$

Este estrecho ancho de línea fraccionaria se puede medir con un interferómetro sensible. Sin embargo, por lo general los efectos de temperatura y presión ensombrecen el ancho de línea natural y ensancha la línea a través de un mecanismo asociado con el efecto Doppler y las colisiones.

Si supone una frecuencia de onda de radio f de 94.7×10^6 Hz, el ancho de línea fraccionaria es

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{8.0 \times 10^6\text{ Hz}}{94.7 \times 10^6\text{ Hz}} = 8.4 \times 10^{-2}$$

Por lo tanto, para la onda de radio, este mismo ancho de línea absoluto corresponde a un ancho de línea fraccionario de más de 8 por ciento.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Las características de la **radiación de cuerpo negro** no se explican con conceptos clásicos. Planck introdujo el concepto cuántico y la constante de Planck h cuando supuso que los osciladores atómicos que sólo existían en estados de energía discretos fueron los responsables de esta radiación. En el modelo de Planck, la radiación se emite en paquetes cuantizados simples, siempre que un oscilador haga una transición entre estados de energía discretos. La energía de un paquete es

$$E = hf \qquad \textbf{(40.5)}$$

donde f es la frecuencia del oscilador. Einstein extendió exitosamente la hipótesis cuántica de Planck a las ondas estacionarias de la radiación electromagnética en una cavidad usada en el modelo de radiación de cuerpo negro.

El **efecto fotoeléctrico** es un proceso mediante el cual se expulsan electrones de una superficie metálica cuando la luz incide sobre dicha superficie. En el modelo de Einstein la luz se ve como una corriente de partículas o **fotones**, cada uno con energía $E = hf$, donde h es la constante de Planck y f es la frecuencia. La máxima energía cinética del fotoelectrón expulsado es

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi \qquad \textbf{(40.9)}$$

donde ϕ es la **función trabajo** del metal.

Los rayos X se dispersan en diferentes ángulos por electrones en un objetivo. En tal evento de dispersión, se observa un corrimiento de la longitud de onda para los rayos X dispersados, un fenómeno conocido como **efecto Compton**. La física clásica no predice el comportamiento correcto en este efecto. Si el rayo X se trata como un fotón, la conservación de energía y la cantidad de movimiento lineal aplicados a las colisiones fotón-electrón producen, para el corrimiento Compton,

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \qquad \textbf{(40.11)}$$

donde m_e es la masa del electrón, c es la rapidez de la luz y θ es el ángulo de dispersión.

La luz tiene una naturaleza dual en cuanto a que tiene características tanto de onda como de partícula. Algunos experimentos se explican mejor o exclusivamente por el modelo corpuscular, mientras que otros se explican mejor o exclusivamente por el modelo ondulatorio.

Todo objeto de masas m y cantidad de movimiento $p = mu$ tiene propiedades ondulatorias, con una **longitud de onda De Broglie** dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu} \qquad \textbf{(40.15)}$$

Al combinar un gran número de ondas se puede crear una región de interferencia constructiva llamada **paquete de onda**. El paquete de onda tiene la característica de localización como las partículas, pero tiene propiedades ondulatorias porque está construida a partir de ondas. Para una onda individual en el paquete de onda, la **rapidez de fase** es

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} \qquad \textbf{(40.18)}$$

Para el paquete de onda como un todo, la **rapidez de grupo** es

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad \textbf{(40.19)}$$

Para un paquete de onda que representa una partícula, se demuestra que la rapidez de grupo es la misma que la rapidez de la partícula.

El **principio de incertidumbre de Heisenberg** afirma que, si una medida de la posición de una partícula se hace con incertidumbre Δx y una medición simultánea de su cantidad de movimiento lineal se hace con incertidumbre Δp_x, el producto de las dos incertidumbres se restringe a

$$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \textbf{(40.23)}$$

Otra forma del principio de incertidumbre relaciona mediciones de energía y tiempo:

$$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \textbf{(40.24)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. El modelo clásico de la radiación del cuerpo negro conocido por la ley de Rayleigh-Jeans tiene dos defectos importantes. Identifíquelos y explique la forma en que la ley de Planck los resuelve.

2. Todos los objetos emiten energía. ¿Por qué, en tal caso, no es capaz de ver todos los objetos existentes en un cuarto oscuro?

3. **O** En cierto experimento, un filamento en un foco evacuado tiene una corriente I_1 y mide el espectro de luz emitido por el filamento, que se comporta como un cuerpo negro a temperatura T_1. La longitud de onda emitida con la mayor intensidad (simbolizada mediante $\lambda_{\text{máx}}$) tiene el valor λ_1. Por lo tanto, usted aumenta la diferencia de potencial a través del filamento en un factor de 8, y la corriente aumenta en un factor de 2. **i)** Después de este cambio, ¿cuál es el nuevo valor de la temperatura del filamento? a) $16T_1$, b) $8T_1$, c) $4T_1$, d) $2T_1$, e) todavía T_1. **ii)** ¿Cuál es el nuevo valor de la longitud de onda emitida con mayor intensidad? a) $4\lambda_1$, b) $2\lambda_1$, c) $\sqrt{2}\lambda_1$, d) λ_1, e) $\lambda_1/\sqrt{2}$, f) $\lambda_1/2$, g) $\lambda_1/4$.

4. Si observa el efecto fotoeléctrico en un metal, ¿podría concluir que también el efecto será observado en otro metal bajo iguales condiciones? Explique.

5. ¿Qué representa la pendiente de la línea de la figura 40.11? ¿Qué representa la intersección con el eje de las y? ¿De qué manera se compararían estas gráficas en diferentes metales?

6. ¿Por qué la existencia de la frecuencia de corte en el efecto fotoeléctrico favorece la teoría de las partículas y no la teoría ondulatoria?

7. En el efecto fotoeléctrico, explique por qué el potencial de frenado depende de la frecuencia de la luz pero no de su intensidad.

8. ¿Cuál tiene más energía, un fotón de radiación ultravioleta o un fotón de luz amarilla?

9. **O** ¿Cuál de los siguientes es más probable que cause quemadura por entregar más energía a moléculas individuales en las células de la piel? a) Luz infrarroja, b) luz visible, c) luz ultravioleta, d) microondas, e) Las opciones de la a) a la d) son igualmente probables.

10. ¿En qué difiere el efecto Compton del efecto fotoeléctrico?

11. Un fotón de rayos X es dispersado por un electrón originalmente inmóvil. ¿Qué le ocurre a la frecuencia del fotón dispersado en relación con la correspondiente del fotón incidente? La frecuencia del fotón dispersado es a) baja, b) alta, o c) sin cambio.

12. Suponga que se tomó la fotografía de la cara de una persona utilizando sólo unos pocos fotones. ¿El resultado sería una imagen muy poco nítida de la cara? Explique su respuesta.

13. **O** Considere a) un electrón, b) un fotón y c) un protón, todos moviéndose en el vacío. Elija todas las respuestas correctas para cada pregunta. **i)** ¿Cuál de las tres tiene energía en reposo? **ii)** ¿Cuál tiene carga? **iii)** ¿Cuál porta energía? **iv)** ¿Cuál porta cantidad de movimiento? **v)** ¿Cuál se mueve a la rapidez de la luz? **vi)** ¿Cuál tiene una longitud de onda que caracteriza su movimiento?

14. ¿La luz es una onda o una partícula? Documente su respuesta con evidencias experimentales específicas.

15. ¿Un electrón es una onda o una partícula? Documente su respuesta con algunos resultados experimentales.

16. ¿Por qué se considera la demostración de la difracción del electrón, por parte de Davisson y Germer, como un experimento de importancia?

17. **O** Un electrón y un protón, que se mueven en direcciones opuestas, aceleran desde el reposo a través de la misma diferencia de potencial. ¿Cuál partícula tiene la longitud de onda más larga? a) El electrón. b) El protón. c) Ambas. d) Ninguna tiene longitud de onda.

18. Si la materia tiene una naturaleza ondulatoria, ¿por qué esa característica de onda no es observable en la experiencia cotidiana?

19. **O** Clasifique las longitudes de onda de las siguientes partículas cuánticas, de mayor a menor. Si algunas tienen iguales longitudes de onda, despliegue la igualdad en su clasificación. a) Un fotón con energía 3 eV, b) un electrón con energía cinética 3 eV, c) un protón con energía cinética 3 eV, d) un fotón con energía 0.3 eV, e) un fotón con cantidad de movimiento $3 \text{ eV}/c = 1.6 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, f) un electrón con cantidad de movimiento $3 \text{ eV}/c$, g) un protón con cantidad de movimiento $3 \text{ eV}/c$.

20. Cuando estaba describiendo el paso de los electrones a través de una rejilla y su llegada a la pantalla, el físico Richard Feynman dijo que "los electrones llegan en paquetes, como las partículas, pero la probabilidad de llegada de dichos paquetes está determinada al igual que la intensidad de las ondas. Es en este sentido que el electrón se comporta a veces como una partícula y a veces como una onda". Explique esto con sus propias palabras. Para un análisis adicional de este punto, véase R. Feynman, *The caracter of Physical Law*, Cambridge, MA, MIT Press, 1980, capítulo 6.

21. ¿Por qué un microscopio electrónico es más adecuado para "ver" objetos de tamaño inferior a 1 μm que un microscopio óptico?

22. **O** Un electrón y un protón se aceleran a la misma rapidez, y la incertidumbre experimental en la rapidez es la misma para las dos partículas. También se observan las posiciones de las dos partículas. La mínima incertidumbre posible en la posición del electrón es, ¿a) menor que la mínima incertidumbre posible en la posición del protón, b) la misma que para el protón, c) más que para el protón o d) imposible de decir a partir de la información dada?

23. Como se ilustra en las fotografías de apertura del capítulo 37 y de la figura P38.52 en el capítulo 38, la *iridiscencia* es el fenómeno que le da colores brillantes a las plumas de los pavo reales, colibríes, quetzales resplandecientes, e incluso patos y estorninos. Sin pigmentación, le da color a las mariposas Morpho, a las polillas Urania, a algunos escarabajos y moscas, a la trucha arco iris y a las conchas de madreperla de las orejas marinas o de San Pedro. Los colores iridiscentes cambian si se hace girar un objeto. Pueden aparecer diferentes a cada uno de los ojos, con lo cual parecen tener un lustre metálico. Los colores iridiscentes, que fueron descritos por primera vez no por un artista o por un biólogo sino por el físico Isaac Newton, son originados por una amplia diversidad de estructuras intrincadas en diferentes especies; el problema 52 del capítulo 38 describe los correspondientes a una pluma de pavo real. Estas estructuras eran totalmente desconocidas hasta la invención del microscopio electrónico. Explique la razón por la cual los microscopios luminosos no los pueden poner de manifiesto.

24. *Más negro que el negro, más brillante que el blanco.* a) Tome una caja de cartón grande cerrada y vacía. Corte en un costado una ranura de unos milímetros de ancho. Use plumas y marcadores negros así como otro material de color negro para hacer algunas franjas a un costado de la ranura, como se observa en la figura P40.24a. Estúdielas con cuidado y elija la franja más negra; quizá la figura no tenga suficiente contraste para observar cuál es. Explique por qué esa raya es la más negra. b) Busque una lámpara o foco fluorescente de pequeño tamaño de forma intrincada. Obsérvela a través de anteojos oscuros y diga dónde parece ser más brillante. Explique la razón por la cual la lámpara es más brillante en ese punto. La figura P40.24b muestra dos de estas lámparas una al lado de la otra. *Sugerencia*: Gustav Kirchhoff, profesor en Heidelberg y maestro de lo obvio, respondió de la misma manera al inciso a) que se hizo aquí. Su respuesta al inciso b) empezaría como sigue: cuando una radiación electromagnética incide sobre su superficie, un objeto refleja una fracción r de la energía y absorbe lo demás. Independientemente de que la fracción reflejada sea 0.8 o 0.001, la fracción absorbida es igual a $a = 1 - r$. Suponga que el objeto y su entorno están a la misma temperatura. La energía que absorbe el objeto se une a su energía interna, pero la segunda ley de la termodinámica implica que la energía absorbida no puede elevar la temperatura del objeto. No produce un incremento en temperatura porque el presupuesto energético del objeto tiene un término adicional: energía radiada.

Es necesario todavía efectuar las observaciones y responder a las preguntas a) y b), pero, si así lo desea, puede incorporar algunas de las ideas de Kirchhoff.

a)

b)

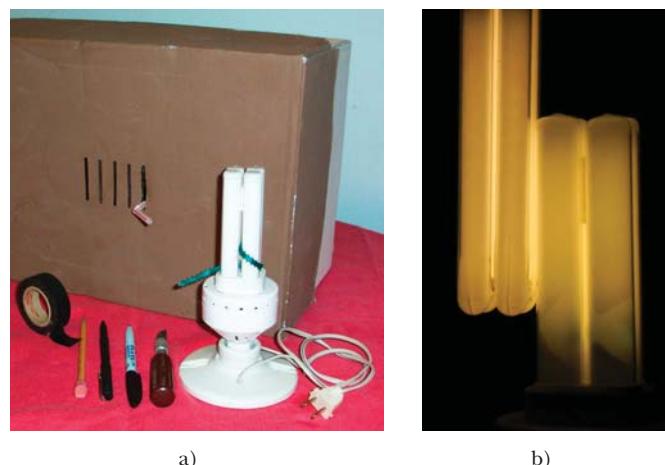



Figura P40.24

Problemas

Sección 40.1 Radiación de cuerpo negro e hipótesis de Planck

1. El ojo humano tiene su máxima sensibilidad a luz de 560 nm. ¿Cuál es la temperatura de un cuerpo negro cuya radiación más intensa ocurrirá en esta longitud de onda?

2. ● a) Modele el filamento de tungsteno de una lámpara como un cuerpo negro a 2900 K de temperatura. Determine la longitud de onda de la luz que emite más intensamente. b) Explique por qué la respuesta al inicio a) sugiere que más energía de la lámpara va a radiación infrarroja que a luz visible.

3. ● La figura P40.3 muestra el espectro de luz emitido por una luciérnaga. Determine la temperatura de un cuerpo negro que emitirá radiación con pico a la misma longitud de onda. Según su resultado, explique si la radiación de la luciérnaga es radiación de cuerpo negro.

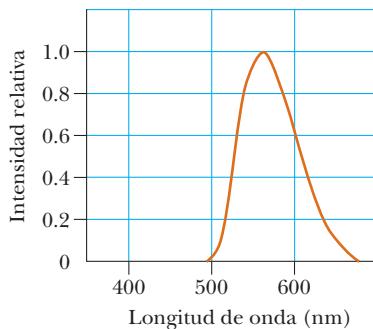



Figura P40.3

4. a) Los relámpagos producen una máxima temperatura de aire del orden de 10^4 K, mientras b) una explosión nuclear produce una temperatura del orden de 10^7 K. Use la ley de desplazamiento de Wien para encontrar el orden de magnitud de la longitud de onda de los fotones térmicamente producidos radiados con mayor intensidad por cada una de estas fuentes. Mencione la parte del espectro electromagnético donde esperaría que cada uno emita más intensamente.

5. Un cuerpo negro a 7 500 K está constituido por una abertura de diámetro 0.050 0 mm, mirando hacia el interior de un horno. Encuentre la cantidad de fotones por segundo que escapan por esa abertura con longitudes de onda entre 500 y 501 nm.

6. Considere un cuerpo negro con 20.0 cm^2 de superficie y con una temperatura de 5000 K. a) ¿Cuánta potencia irradia? b) ¿A qué longitud de onda irradia con una máxima intensidad? Determine la potencia espectral por longitud de onda en c) esta longitud de onda y en longitudes de onda de d) 1.00 nm (un rayo X o un rayo gama), e) 5.00 nm (luz ultravioleta o rayos X), f) 400 nm (en el límite entre la luz ultravioleta y la luz visible), g) 700 nm (en el límite entre la luz visible y la luz infrarroja), h) 1.00 mm (la luz infrarroja o una microonda) e i) 10.0 cm (una microonda o una onda de radio).

j) ¿Aproximadamente cuánta energía irradia el objeto como luz visible?

7. El radio del Sol es de 6.96×10^8 m, y su energía total emitida es de 3.85×10^{26} W. a) Suponiendo que la superficie del Sol radia como si fuera un cuerpo negro, calcule la temperatura de su superficie. b) Utilizando el resultado del inciso a), determine la $\lambda_{máx}$ para el Sol.
8. El umbral promedio de la visión adaptada a la oscuridad (escotópica), es de 4.00×10^{-11} W/m^2 a una longitud de onda central de 500 nm. Si la luz de esta intensidad y longitud de onda entra en el ojo humano y la pupila está abierta a su diámetro máximo de 8.50 mm, ¿cuántos fotones por segundo entran en el ojo?
9. Calcule en electrón volts la energía de un fotón cuya frecuencia es a) 620 THz, b) 3.10 GHz y c) 46.0 MHz. d) Determine las longitudes de onda correspondientes a estos fotones y diga cómo se clasifica cada uno de ellos en el espectro electromagnético.
10. Un péndulo simple tiene una longitud de 1.00 m y una masa de 1.00 kg. La amplitud de las oscilaciones del péndulo es de 3.00 cm. Estime el número cuántico para este péndulo.
11. Un transmisor de radio de FM tiene una potencia de salida de 150 kW y con una frecuencia de 99.7 MHz. ¿Cuántos fotones por segundo emite el transmisor?
12. **Problema de repaso.** Este problema es acerca de que tán fuertemente se acopla la materia a la radiación, el tema con el que comenzó la mecánica cuántica. Para un modelo simple, considere una esfera sólida de hierro de 2.00 cm de radio. Suponga que su temperatura siempre es uniforme en todo su volumen. a) Encuentre la masa de la esfera. b) Suponga que la esfera está a 20°C y tiene emisividad 0.860. Encuentre la potencia con la que emite ondas electromagnéticas. c) Si estuviese sola en el Universo, ¿con qué rapidez cambiaría la temperatura de la esfera? d) Suponga que la ley de Wien describe la esfera. Encuentre la longitud de onda $\lambda_{máx}$ de radiación electromagnética que emite más fuertemente. Aunque emite un espectro de ondas que tienen diferentes longitudes, suponga que su salida de potencia se transporta mediante fotones de longitud de onda $\lambda_{máx}$. Encuentre e) la energía de un fotón y f) el número de fotones que emite cada segundo. *Nota:* La respuesta al inciso f) da un indicio de qué tan rápido emite el objeto y también absorbe fotones cuando está en equilibrio térmico con sus alrededores a 20°C.
13. Demuestre que en las longitudes de onda larga, la ley de la radiación de Planck (ecuación 40.6) se reduce a la ley de Rayleigh-Jeans (ecuación 40.3).

Sección 40.2 Efecto fotoeléctrico

14. El molibdeno tiene una función trabajo de 4.20 eV. a) Determine la longitud de onda y la frecuencia de corte para el efecto fotoeléctrico. b) ¿Cuál es el potencial de frenado si la luz incidente tiene una longitud de onda de 180 nm?
15. Dos fuentes luminosas se usan en un experimento fotoeléctrico para determinar la función trabajo para una superficie metálica particular. Cuando se usa luz verde de una lámpara de mercurio ($\lambda = 546.1$ nm), un potencial de frenado de 0.376 V reduce la fotocorriente a cero. a) Según esta medición, ¿cuál es la función trabajo para este metal? b) ¿Qué potencial de frenado se observa cuando se usa luz amarilla de un tubo de descarga de helio ($\lambda = 587.5$ nm)?
16. Cuando se utiliza una luz de longitud de onda de 625 nm, se expulsan los electrones de una superficie metálica con intervalos de rapidez que llega hasta 4.60×10^5 m/s. a) ¿Cuál es la función trabajo de la superficie? b) ¿Cuál es la frecuencia de corte para esta superficie?
17. ● El litio, el berilio y el mercurio tienen funciones trabajo de 2.30 eV, 3.90 eV y 4.50 eV, respectivamente. Sobre cada uno de estos metales incide una luz con una longitud de onda de 400 nm. Determine a) cuál de estos metales muestra el efecto fotoeléctrico. Explique su razonamiento. b) Encuentre la energía cinética máxima de los fotoelectrones en cada caso.
18. ● A partir de la dispersión de la luz solar, Thomson calculó el radio clásico del electrón de 2.82×10^{-15} m. Sobre un disco de este radio incide luz solar con una intensidad de 500 W/m^2. Calcule el intervalo requerido para acumular 1.00 eV de energía. Suponga que la luz es una onda clásica y que la luz que incide sobre el disco se absorbe totalmente. ¿Cómo se compara su resultado con la observación de que los fotoelectrones se emiten con prontitud (en un tiempo inferior a 10^{-9} s)?
19. **Problema de repaso.** Una esfera de cobre aislada de 5.00 cm de radio, inicialmente sin carga, es iluminada utilizando luz ultravioleta con una longitud de onda de 200 nm. ¿Qué carga induce el efecto fotoeléctrico sobre la esfera? La función trabajo del cobre es de 4.70 eV.
20. ● **Problema de repaso.** Una fuente luminosa que emite radiación en 7.00×10^{14} Hz no es capaz de expulsar fotoelectrones de un cierto metal. En un intento por utilizar esta fuente para expulsar fotoelectrones del metal, se le imprime a la fuente una velocidad dirigida hacia el metal. a) Explique la forma en que este procedimiento produce fotoelectrones. b) Cuando la rapidez de la fuente luminosa es igual a 0.280 c, apenas empiezan a ser expulsados del metal los fotoelectrones. ¿Cuál es la función trabajo del metal? c) Cuándo se incrementa la rapidez de la fuente luminosa hasta $0.900c$, determine la energía cinética máxima de los fotoelectrones.

Sección 40.3 Efecto Compton

21. Calcule la energía y la cantidad de movimiento de un fotón con una longitud de onda de 700 nm.
22. ● Rayos X con una longitud de onda de 120.0 pm se someten a dispersión Compton. a) Encuentre las longitudes de onda de los fotones dispersados con ángulos de 30.0°, 60.0°, 90.0°, 120°, 150° y 180°. b) Encuentre la energía del electrón dispersado en cada caso. c) ¿Cuál de los ángulos de dispersión proporciona al electrón la mayor energía? Explique si podría responder esta pregunta sin hacer cálculo alguno.
23. Un fotón de 0.001 60 nm se dispersa de un electrón libre. ¿Para qué (fotón) ángulo de dispersión del electrón en retroceso tiene una energía cinética igual a la energía del fotón disperso?
24. Los rayos X, con una energía de 300 keV, se someten a cierta dispersión Compton proveniente desde un objetivo. Los rayos dispersos son detectados a 37.0° en relación con los rayos incidentes. Determine a) el corrimiento Compton en este ángulo, b) la energía del rayo X disperso y c) la energía del electrón en retroceso.
25. Un fotón de 0.880 MeV es dispersado por un electrón libre inicialmente en reposo de manera que el ángulo de dispersión del electrón dispersado es igual al del fotón dispersado ($\theta = \phi$ de la figura 40.13b). Determine a) los ángulos θ y ϕ, b) Determine la energía y la cantidad de movimiento del fotón dispersado y c) la energía cinética y la cantidad de movimiento del electrón dispersado.

26. Un fotón con energía E_0 es dispersado por un electrón libre inicialmente en reposo, de manera que el ángulo de dispersión del electrón dispersado es igual al del fotón dispersado ($\theta = \phi$ de la figura 40.13). a) Determine los ángulos θ y ϕ, b) Determine la energía y la cantidad de movimiento del fotón dispersado y c) Determine la energía cinética y la cantidad de movimiento del electrón dispersado.

27. Después de que un fotón de rayos X de 0.800 nm se dispersa a causa de un electrón libre, el electrón retrocede a 1.40×10^6 m/s. a) ¿Cuál es el corrimiento Compton en la longitud de onda del fotón? b) ¿A través de qué ángulo se dispersa el fotón?

28. En un experimento de dispersión Compton, un fotón de rayos X se dispersa en un ángulo de 17.4° a causa de un electrón libre inicialmente en reposo. El electrón retrocede con una rapidez de 2180 km/s. Calcule a) la longitud de onda del fotón incidente y b) el ángulo en el cual se dispersa el electrón.

29. ● En un experimento de dispersión Compton, un fotón se dispersa en un ángulo de 90.0° y el electrón se pone en movimiento en una dirección a un ángulo de 20.0° a la dirección original del fotón. Explique si esta información es suficiente para determinar de manera única la longitud de onda del fotón dispersado. Si es así, encuentre esta longitud de onda.

30. Un fotón con un longitud de onda λ se dispersa por un electrón libre en el punto A (figura P40.30) y produce un segundo fotón con una longitud de onda λ'. Este fotón a su vez se dispersa por colisión con otro electrón libre en el punto B, produciendo un tercer fotón de longitud de onda λ'' y que se mueve en una dirección directamente opuesta a la del fotón original, como se muestra en la figura. Determine el valor numérico de $\Delta\lambda = \lambda'' - \lambda$.

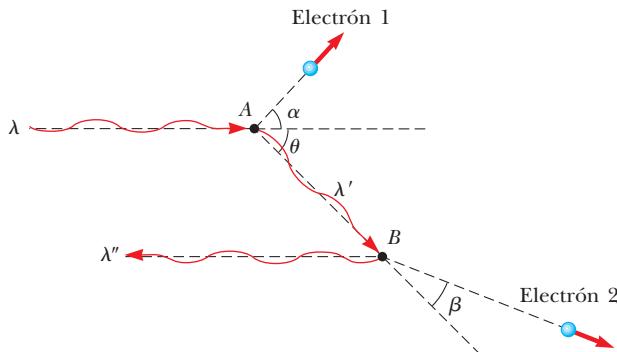



Figura P40.30

31. Determine la máxima pérdida fraccionaria de energía para un rayo gama de 0.511 MeV que ha sido dispersado mediante el efecto Compton a causa de a) un electrón libre y b) un protón libre.

Sección 40.4 Fotones y ondas electromagnéticas

32. ● Un onda electromagnética es llamada *radiación ionizante* si su energía de fotones es superior a, 10.0 eV, por lo que un fotón individual tiene suficiente energía para romper un átomo. En referencia a la figura 34.11, explique que región o regiones del espectro electromagnético que se ajustan a esta definición de radiación ionizante y también las que no se ajustan.

33. **Problema de repaso.** Un láser de helio neón produce un haz que tiene un diámetro de 1.75 mm, y que entrega 2.00×10^{18} fotones/s. Cada fotón tiene una longitud de onda de 633 nm. a) Calcule las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en el interior del haz. b) Si el haz brilla en forma perpendicular sobre una superficie perfectamente reflejante, ¿cuál es la fuerza que ejerce sobre la superficie? c) Si el haz es absorbido por un bloque de hielo a 0°C durante 1.50 h, ¿cuál es la masa de hielo que se funde?

Sección 40.5 Propiedades ondulatorias de las partículas

34. Calcule la longitud de onda de De Broglie para un protón móvil con una rapidez de 1.00×10^6 m/s.

35. Calcule la longitud de onda de De Broglie para un electrón que tiene una energía cinética a) de 50.0 eV y b) de 50.0 keV.

36. a) Un electrón tiene una energía cinética de 3.00 eV. Determine su longitud de onda. b) **¿Qué pasaría si?** Un fotón tiene una energía de 3.00 eV. Determine su longitud de onda.

37. ● El núcleo de un átomo tiene un diámetro del orden de 10^{-14} m. Para que un electrón se quede confinado en un núcleo, su longitud de onda de De Broglie tiene que estar en ese orden de magnitud o menor. a) ¿Cuál sería la energía cinética de un electrón confinado en esa región? b) Estime el orden de magnitud de la energía potencial eléctrica del sistema de un electrón en un núcleo atómico. ¿Qué esperaría para encontrar un electrón en el núcleo? Explique.

38. En el experimento de Davisson-Germer, se difractaron electrones de 54.0 eV a causa de una red de níquel. Si el primer máximo en el patrón de dispersión fue observado en $\phi = 50.0°$ (figura P40.38), ¿cuál fue el espaciamiento a de la red entre las hileras verticales de átomos de la figura? (No es el mismo espaciamiento que el que se encuentra entre las hileras horizontales de átomos.)

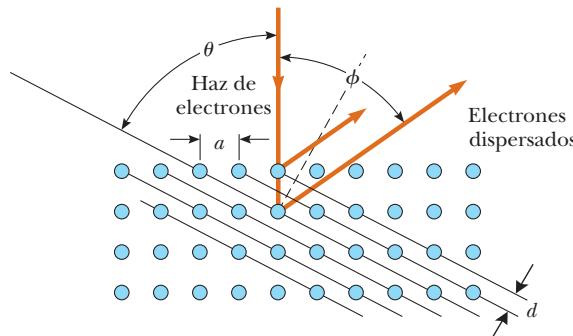



Figura P40.38

39. ● a) Demuestre que la frecuencia f y la longitud de onda λ de una partícula cuántica con un movimiento libre están relacionadas mediante la expresión

$$\left(\frac{f}{c}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda_C^2}$$

donde $\lambda_C = h/mc$ es la longitud de onda Compton de la partícula. b) ¿Será posible alguna vez para una partícula de masa diferente de cero tener la misma longitud de onda y la misma frecuencia que un fotón? Explique su respuesta.

40. Un fotón tiene una energía igual a la energía cinética de un electrón con rapidez u, que puede estar cerca a la rapidez de la luz. a) Calcule la relación de la longitud de onda del fotón a la longitud de onda del electrón. b) Evalúe la relación para la rapidez de la partícula $u = 0.900c$. c) **¿Qué pasaría si?** si la partícula material fuese un protón en lugar de un electrón? d) Evalúe la relación para la rapidez de partícula $u = 0.001\,00c$. e) ¿A qué valor tiende la relación de las longitudes de onda con magnitudes de velocidad altas? f) ¿Con magnitud de velocidad bajas?

41. El poder de resolución de un microscopio depende de la longitud de onda utilizada. Si quisiera "ver" un átomo, sería necesario tener una resolución de aproximadamente 1.00×10^{-11} m. a) Si se utilizan electrones (en un microscopio electrónico), ¿cuál es la energía cinética mínima necesaria para los electrones? b) **¿Qué pasaría si?** Si se utilizan fotones, ¿cuál es la energía mínima necesaria para obtener la resolución requerida?

42. ● Después de aprender de la hipótesis de De Broglie en cuanto a que las partículas de cantidad de movimiento p tienen características ondulatorias con una longitud de onda $\lambda = h/p$, un estudiante de 80.0 kg de peso está preocupado por el temor a ser difractado al pasar a través de una puerta de 75.0 cm de ancho. Suponga que se presenta una difracción significativa cuando el ancho de la abertura de difracción es inferior a 10.0 veces la longitud de la onda que se está difractando. a) Determine la rapidez máxima a la cual el estudiante debe pasar a través de esa puerta para ser difractado significativamente. b) ¿A esa rapidez, cuánto tarda el estudiante en pasar a través de la puerta, si está instalada en un muro de 15.0 cm de espesor? Compare su resultado con la edad actualmente aceptada del Universo, que es de 4×10^{17} s. c) Explique si este estudiante debe preocuparse de ser difractado.

43. ● Robert Hofstadter ganó el Premio Nobel de Física en 1961, por su trabajo pionero en el estudio de la dispersión de electrones de 20 GeV desde el núcleo. a) ¿Cuál es el factor γ para un electrón con energía total de 20.0 GeV, definido por $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$? b) Encuentre la cantidad de movimiento del electrón. c) Encuentre la longitud de onda del electrón. Establezca cómo se compara con el diámetro de un núcleo atómico, representativo en el orden de 10^{-14} m.

Sección 40.6 Partícula cuántica

44. Considere una partícula cuántica en movimiento libre de masa m y rapidez u. Su energía es igual a $E = K = \frac{1}{2}mu^2$. Determine la rapidez de fase de la onda cuántica que representa la partícula y demuestre que es diferente de la rapidez a la cual transporta masa y energía.

45. Para una partícula cuántica relativista libre que se mueve con una rapidez v, la energía total es igual a $E = hf = \hbar\omega = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ y la cantidad de movimiento es igual a $p = h/\lambda = \hbar k = \gamma mu$. Para la onda cuántica que representa la partícula, la rapidez de grupo es igual a $v_g = d\omega/dk$. Demuestre que la rapidez de grupo de la onda es igual a la rapidez de la partícula.

Sección 40.7 Revisión del experimento de doble rejilla

46. Para llevar a cabo un experimento de interferencia de electrones se utiliza un osciloscopio modificado. Los electrones inciden sobre un par de rejillas estrechas separadas 0.060 0 μm. Sobre una pantalla colocada a 20.0 cm de las rejillas, las bandas brillantes del patrón de interferencia aparecen separadas 0.400 mm. Determine la diferencia de potencial a través de la cual se aceleraron los electrones para obtener este patrón.

47. A través de un par de rejillas separadas entre sí 1.00 mm, se hacen pasar neutrones que viajan a 0.400 m/s. A 10.0 m de las rejillas, se coloca un arreglo de detectores. a) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de los neutrones? b) ¿Qué tan alejado del eje está el primer punto de cero intensidad sobre el arreglo de detectores? c) Cuando un neutrón llega a un detector, es posible saber a través de qué rejilla pasó dicho neutrón? Explique.

48. En un determinado tubo de vacío, los electrones se evaporan de un cátodo caliente a una rapidez lenta estable y se aceleran desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 45.0 V. Después se desplazan 28.0 cm conforme pasan a través de un arreglo de rejillas e inciden sobre una pantalla produciendo un patrón de interferencia. Si la corriente del haz está por debajo de un cierto valor, solamente un electrón estará en movimiento en el tubo. ¿Cuál es este valor? En esta situación seguirá apareciendo el patrón de interferencia, lo que demuestra que cada electrón individual puede interferir consigo mismo.

Sección 40.8 El principio de incertidumbre

49. Un electrón ($m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) y una bala ($m = 0.020\,0$ kg) tienen cada uno una velocidad de magnitud 500 m/s, con una precisión dentro de 0.010 0%. ¿En qué límites es posible determinar la posición de los objetos a lo largo de la dirección de la velocidad?

50. Suponga que Fuzzy, un pato mecánico cuántico, vive en un mundo en el cual $h = 2\pi$ J · s. Fuzzy tiene una masa de 2.00 kg e inicialmente se sabe que está en un estanque de 1.00 m de ancho. a) ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la componente de esta velocidad que es paralela al ancho del estanque? b) Suponiendo que se mantiene esta incertidumbre en la rapidez durante 5.00 s, determine la incertidumbre de Fuzzy en esa posición después de este intervalo.

51. ● Con un rifle de aire comprimido se disparan partículas de 1.00 g a 100 m/s a través de un orificio de 2.00 mm de diámetro. ¿A qué distancia del rifle debe colocarse un observador para poder ver la dispersión del haz en 1.00 cm, debido al principio de incertidumbre? Compare esta respuesta con el diámetro del universo visible (2×10^{26} m).

52. Use el principio de incertidumbre a fin de demostrar que si un electrón estuviera confinado en el interior de un núcleo atómico de 2×10^{-15} m de diámetro, tendría que estar desplazándose de manera relativista, en tanto que un protón confinado en el mismo núcleo podría estarse desplazando de manera no relativista.

53. Una mujer de pie sobre una escalera deja caer píldoras pequeñas hacia un objetivo puntual en el piso. a) Demuestre que, según el principio de incertidumbre, la distancia promedio de error debe ser por lo menos

$$\Delta x_f = \left(\frac{2\hbar}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{2H}{g}\right)^{1/4}$$

donde H es la altura inicial de cada píldora desde el piso y m es la masa de cada píldora. Suponga que la dispersión en los puntos de impacto está dada por $\Delta x_f = \Delta x_i + (\Delta v_x)t$. b) Si $H = 2.00$ m y $m = 0.500$ g, ¿cuál es valor de Δx_f?

Problemas adicionales

54. **Problema de repaso.** Diseñe un filamento de lámpara incandescente. Especifique la longitud y radio que puede tener un alambre de tungsteno para radiar ondas electromagnéticas con potencia de 75.0 W cuando sus extremos se conectan a través de un suministro de potencia de 120 V. Suponga que su temperatura de operación constante es 2900 K y su emisividad es 0.450; también que toma energía sólo por transmisión eléctrica y pierde energía sólo por radiación electromagnética. De la tabla 27.2, puede tomar la resistividad del tungsteno a 2900 K como

$$5.6 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}[1 + (4.5 \times 10^{-3}/°\text{C})(2607°\text{C})] = 7.13 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot \text{m}$$

55. La tabla que aparece a continuación muestra datos obtenidos en un experimento fotoeléctrico. a) Utilizando estos datos, elabore una gráfica similar a la de la figura 40.11 que construye

una línea recta. De la gráfica, determine b) un valor experimental para la constante de Planck (en joules-segundo) y c) la función trabajo (en electrón volts) para la superficie. Dos cifras significativas son suficientes para cada respuesta.

Longitud de onda (nm)	Energía cinética máxima de los fotoelectrones (eV)
588	0.67
505	0.98
445	1.35
399	1.63

56. La figura P40.56 muestra el potencial de frenado en función de la frecuencia del fotón incidente para el efecto fotoeléctrico en el sodio. Use la gráfica para determinar a) la función trabajo, b) la relación h/e y c) la longitud de onda de corte. Los datos se han tomado de R. A. Millikan, *Phys. Rev.* **7**:362 (1916).

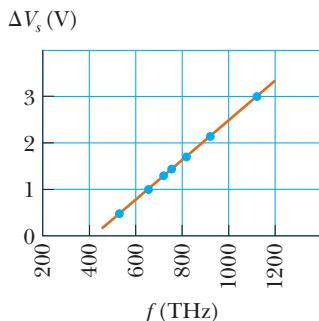



Figura P40.56

57. **Problema de repaso.** Sobre un metal inciden fotones de longitud de onda λ. Los electrones con mayor energía expulsados del metal son desviados y forman un arco circular de radio R mediante un campo magnético de magnitud B. ¿Cuál es la función trabajo del metal?

58. ● Luz ultravioleta, con una sola longitud de onda y con intensidad de 550 W/m^2, incide de manera normal sobre la superficie de un metal que tiene una función trabajo de 3.44 eV. Se emiten fotoelectrones con una rapidez máxima de 420 km/s. a) Encuentre la rtapidez máxima posible de emisión de fotoelectrones desde 1 cm^2 de la superficie al imaginar que cada fotón produce un fotoelectrón. b) Encuentre la corriente eléctrica que constituyen estos electrones. c) ¿Cómo supone que se compara la corriente real con esta corriente máxima posible?

59. Deduzca la ecuación para el desplazamiento Compton (ecuación 40.11), a partir de las ecuaciones 40.12, 40.13 y 40.14.

60. Demuestre que un fotón no puede transferir toda su energía a un electrón libre. *Sugerencia:* Observe que es necesario conservar la energía del sistema, así como la cantidad de movimiento del mismo.

61. La potencia total por unidad de área emitida por un cuerpo negro a una temperatura T es el área bajo la curva $I(\lambda, T)$ en función de λ, como se observa en la figura 40.3. a) Demuestre que esta potencia por unidad de área es igual a

$$\int_0^\infty I(\lambda, T)\,d\lambda = \sigma T^4$$

donde $I(\lambda, T)$ está dada por la ley de radiación de Planck y σ es una constante independiente de T. Este resultado se conoce como la ley de Stefan (véase la sección 20.7). A fin de efectuar la integración, es necesario hacer el cambio de variable $x = hc/\lambda k_B T$ y utilizar

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

b) Demuestre que la constante σ de Stefan-Boltzmann tiene el valor de

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B{}^4}{15c^2h^3} = 5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4$$

62. Deduzca la ley de desplazamiento de Wien a partir de la ley de Planck. Proceda como sigue. En la figura 40.3 observe que la longitud de onda a la cual el cuerpo negro emite con la máxima intensidad es la longitud de onda para la cual la gráfica de $I(\lambda, T)$ en función de λ tiene una tangente horizontal. De la ecuación 40.6 evalúe la derivada $dI/d\lambda$. Establézcala igual a cero. Resuelva numéricamente la ecuación trascendental resultante para demostrar que $hc/\lambda_{\text{máx}}k_B T = 4.965\ldots$, o bien $\lambda_{\text{máx}}T = hc/4.965\ k_B$. Evalúe la constante con la mayor precisión posible y compárela con el valor experimental de Wien.

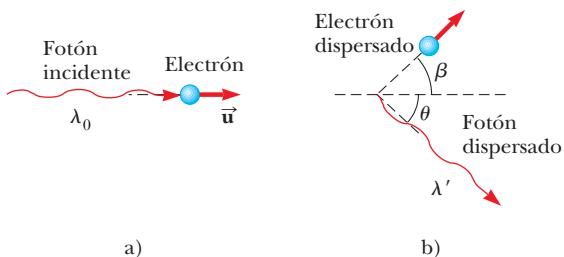
63. ● El neutrón tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg. Los neutrones que se emiten en reacciones nucleares se pueden desacelerar mediante colisiones con la materia. Se conocen como neutrones térmicos en cuanto llegan a un equilibrio térmico con lo que los rodea. La energía cinética promedio $(3k_B T/2)$ de un neutrón térmico es de aproximadamente 0.04 eV. Calcule la longitud de onda de De Broglie de un neutrón que tiene una energía cinética de 0.040 0 eV. ¿Cómo se compara esto con el espaciamiento atómico característico de un cristal? ¿Se debe esperar que los neutrones térmicos exhiban efectos de difracción al ser dispersados por un cristal?

64. El truco favorito de Sergio el saltador es salir por la ventana de un edificio y dejarse caer 50.0 m en una piscina desde el piso 16. Un reportero de noticias toma una fotografía de Sergio, que pesa 75.0 kg, justo antes de que llegue al agua, utilizando un tiempo de exposición de 5.00 ms. Determine a) la longitud de onda de De Broglie correspondiente a Sergio en ese momento, b) la incertidumbre de la medición de su energía cinética durante ese periodo, y c) el porcentaje de error causado por dicha incertidumbre.

65. Demuestre que la relación de la longitud de onda Compton λ_C con la longitud de onda de De Broglie $\lambda = h/p$ en el caso de un electrón relativista es igual a

$$\frac{\lambda_C}{\lambda} = \left[\left(\frac{E}{m_e c^2}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

donde E es la energía total del electrón y m_e es su masa.

66. Un fotón con una energía inicial E_0 se somete a dispersión Compton con un ángulo θ a causa de un electrón libre (de masa m_e), que inicialmente está en reposo. Utilizando ecuaciones relativistas para la conservación de la energía y la cantidad de movimiento, deduzca la correspondencia siguiente para la energía final E' del fotón disperso:

$$E' = \frac{E_0}{1 + \left(\dfrac{E_0}{m_e c^2}\right)(1 - \cos\theta)}$$

67. Un mesón π^0 es una partícula inestable producto de las colisiones entre partículas de alta energía. Su energía en reposo es de aproximadamente 135 MeV, y tiene una existencia con un tiempo de vida media de sólo 8.70×10^{-17} s antes de decaer,

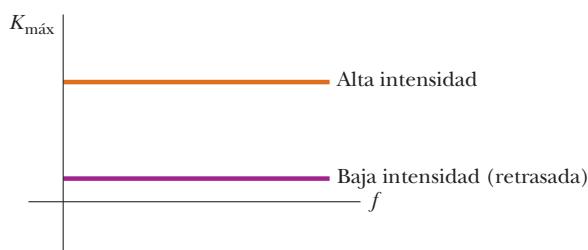
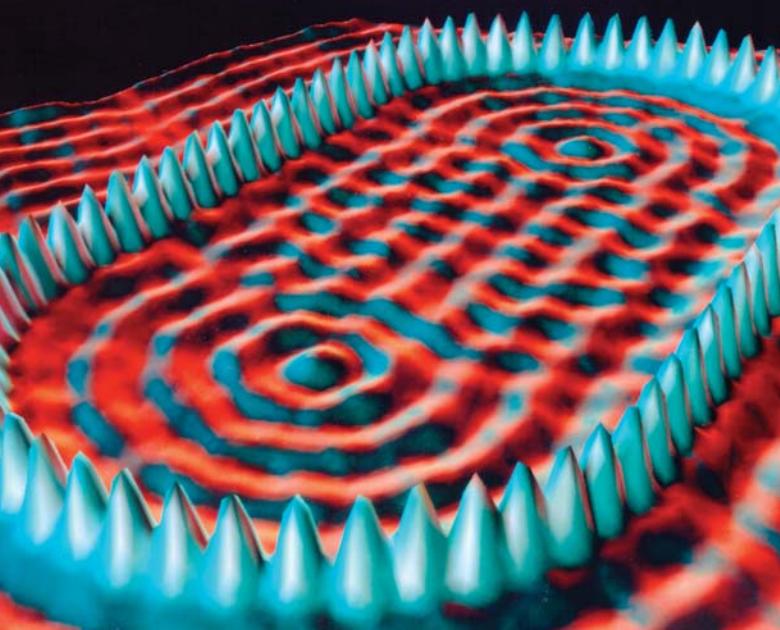
formando dos rayos gamma. Utilizando el principio de incertidumbre, estime la incertidumbre fraccionaria $\Delta m/m$ en su determinación de la masa.

68. Un fotón con una longitud de onda λ_0 se mueve hacia un electrón libre que se está trasladando con una rapidez u en la misma dirección que el fotón (figura P40.68a). El fotón se dispersa en un ángulo θ (figura P40.68b). Demuestre que la longitud de onda del fotón disperso es igual a

$$\lambda' = \lambda_0\left(\frac{1 - (u/c)\cos\theta}{1 - (u/c)}\right) + \frac{h}{m_e c}\sqrt{\frac{1 + (u/c)}{1 - (u/c)}}(1 - \cos\theta)$$

Figura P40.68

Respuestas a las preguntas rápidas

40.1 b) Una estrella muy caliente podría tener su pico en la curva de distribución de intensidad de cuerpo negro con longitudes de onda más cortas que las visibles. Como resultado se emite más luz azul que luz roja.

40.2 Radio AM, radio FM, microondas, luz de sodio. El orden de la energía del fotón será el mismo que el orden de la frecuencia. En la figura 34.11 aparece una representación gráfica de la radiación electromagnética en el orden de frecuencia.

40.3 c) Cuando se incrementa la frecuencia, cada fotón transporta más energía, por lo que se requiere un potencial de frenado más alto para que la corriente se reduzca a cero.

40.4 La física clásica predice que la luz de una intensidad suficiente genera la emisión de fotoelectrones, que son independientes de la frecuencia y que no tienen una frecuencia de corte. También, mientras más alta sea la intensidad, mayor será la energía cinética máxima de los electrones, con cierto retraso en el tiempo para la emisión a bajas intensidades. Por lo que la expectación clásica (que no coincide con el experimento) produce una gráfica como la siguiente

40.5 d) El desplazamiento $\Delta\lambda$ es independiente de λ. Por lo tanto el desplazamiento fraccionario más grande corresponderá a la longitud de onda más baja.

40.6 c) Según la ecuación 40.5, dos partículas con la misma longitud de onda de De Broglie tendrán la misma cantidad de movimiento $p = mv$. Si el electrón y el protón tienen la misma cantidad de movimiento, no pueden tener la misma rapidez debido a la diferencia en sus masas. Por la misma explicación, considerando que $K = p^2/2m$, no pueden tener la misma energía cinética. Porque las partículas tienen diferentes energías cinéticas, la ecuación 40.16 dice que las partículas no tienen tampoco la misma frecuencia.

40.7 b) La rapidez de grupo es igual a cero porque el borde delantero del paquete se mantiene fijo en la ubicación del accidente.

40.8 a) El principio de incertidumbre relaciona la incertidumbre en la posición y la velocidad a lo largo del mismo eje. Una incertidumbre cero en la posición a lo largo del eje x da como resultado una incertidumbre infinita en su componente de velocidad en la dirección de las x, pero sin tener ninguna relación con la dirección y.

Dos de los avances tecnológicos actuales en física pueden verse en un *corral cuántico*. El primero comprende el control sobre átomos individuales. Este corral se forma colocando átomos de hierro en un anillo en forma de estadio sobre una superficie de cobre. El segundo es la capacidad para formar imágenes de átomos individuales con un microscopio de barrido de efecto túnel. El corral se puede usar para estudiar los estados cuantizados de electrones atrapados en una pequeña región. (Cortesía de IBM Research, Almaden Research Center. Prohibido su uso no autorizado.)

41 Mecánica cuántica

En este capítulo se introduce la *mecánica cuántica*, teoría sumamente acertada para explicar el comportamiento de partículas microscópicas. Esta teoría, creada en la década de los veinte del siglo pasado, por Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg y otros, hace posible entender una multitud de fenómenos en donde intervienen átomos, moléculas, núcleos y cuerpos sólidos. La exposición en este capítulo surge del modelo de partícula cuántica que fue desarrollado en el capítulo 40, e incorpora algunas de las características de ondas bajo condiciones frontera que se exploraron en el capítulo 18. También se exponen aplicaciones prácticas de mecánica cuántica, incluyendo el microscopio de barrido de efecto túnel y dispositivos a nanoescala que podrían usarse en las computadoras cuánticas del futuro. Por último, se regresa al oscilador armónico simple presentado en el capítulo 15 para examinarlo desde el punto de vista de la mecánica cuántica.

41.1 Interpretación de la mecánica cuántica

En el capítulo 40 se presentaron algunas ideas nuevas y extrañas. En particular, se concluyó, con base en evidencia experimental, que la materia y la radiación electromagnética a veces se modelan mejor como partículas y a veces como ondas, dependiendo del fenómeno que se observe. Es posible mejorar la comprensión de la física cuántica si se hace

otro enlace conceptual entre partículas y ondas, con el uso de la noción de probabilidad, término que se introdujo en el capítulo anterior.

Primero hay que explicar la radiación electromagnética con el modelo de las partículas. La probabilidad por unidad de volumen de hallar un fotón en una región determinada del espacio en un instante, es proporcional al número N de fotones por unidad de volumen en ese tiempo:

$$\frac{\text{Probabilidad}}{V} \propto \frac{N}{V}$$

El número de fotones por unidad de volumen es proporcional a la intensidad de la radiación:

$$\frac{N}{V} \propto I$$

Ahora, se enlaza el modelo de partícula y el modelo de onda recordando que la intensidad de radiación electromagnética es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico E para la onda electromagnética (ecuación 34.24):

$$I \propto E^2$$

Igualando el principio y el fin de esta sucesión de proporcionalidades, tiene

$$\frac{\text{Probabilidad}}{V} \propto E^2 \qquad \textbf{(41.1)}$$

Por lo tanto, para la radiación electromagnética la probabilidad por unidad de volumen de hallar una partícula asociada con esta radiación (el fotón) es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda electromagnética asociada.

Al reconocer la dualidad onda-partícula de la radiación electromagnética y la materia, se debería sospechar una proporcionalidad paralela para una partícula material: la probabilidad por unidad de volumen de hallar la partícula es proporcional al cuadrado de la amplitud de una onda que represente la partícula. En el capítulo anterior aprendió que hay una onda de De Broglie asociada con cualquier partícula. La amplitud de la onda de De Broglie asociada con una partícula no es una cantidad que se pueda medir, porque la función de onda que representa una partícula es, por lo general, una función compleja, como se verá a continuación. En contraste, el campo eléctrico para una onda electromagnética es una función real. La cuestión análoga a la ecuación 41.1 relaciona el cuadrado de la amplitud de la onda con la probabilidad por unidad de volumen de hallar la partícula. En consecuencia, a la amplitud de la onda asociada con la partícula se le llama simplemente **amplitud de probabilidad**, o **función de onda**, y se simboliza con Ψ.

En general, la función de onda completa Ψ para un sistema depende de las posiciones de todas las partículas del sistema y del tiempo, por lo cual se escribe $\Psi(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{r}}_3, \ldots, \hat{\mathbf{r}}_j, \ldots, t)$, donde $\hat{\mathbf{r}}_j$ es el vector de posición de la j-ésima partícula del sistema. Para muchos sistemas de interés, incluso los que se estudian en este texto, la función de onda Ψ es matemáticamente separable en espacio y tiempo y se puede escribir como un producto de una función de espacio ψ para una partícula del sistema y una función del tiempo compleja:[1]

$$\Psi(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{r}}_3, \ldots, \hat{\mathbf{r}}_j, \ldots, t) = \psi(\hat{\mathbf{r}}_j)\, e^{-i\omega t} \qquad \textbf{(41.2)}$$

◄ Función de onda Ψ dependiente del espacio y el tiempo

donde $\omega(= 2\pi f)$ es la frecuencia angular de la función de onda e $i = \sqrt{-1}$.

Para cualquier sistema en el que la energía potencial sea independiente del tiempo y dependa sólo de las posiciones de las partículas dentro del sistema, la información importante acerca del sistema está contenida dentro de la parte espacial de la función de onda.

[1] La forma estándar de un número complejo es $a + ib$. La notación $e^{i\theta}$ es equivalente a la forma estándar como sigue:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

Por lo tanto, la notación $e^{-i\omega t}$ de la ecuación 41.2 es equivalente a $\cos(-\omega t) + i\,\text{sen}(-\omega t) = \cos\omega t - i\,\text{sen}\,\omega t$.

La parte del tiempo es simplemente el factor $e^{-i\omega t}$. Debido a eso, es fundamental entender ψ en cualquier problema.

La función de onda ψ con frecuencia es una estimado complejo. El cuadrado absoluto $|\psi|^2 = \psi^*\psi$, donde ψ^* es el complejo conjugado[2] de ψ, es siempre real y positivo, y es proporcional a la probabilidad por unidad de volumen de hallar una partícula en un punto determinado en algún instante. La función de onda contiene en su interior toda la información que se pueda conocer acerca de la partícula.

Densidad de probabilidad $|\psi|^2$

Aunque ψ no se puede observar, se puede medir la cantidad real $|\psi|^2$, que se interpreta como sigue. Si ψ representa una sola partícula, entonces $|\psi|^2$; conocida como **densidad de probabilidad**, es la probabilidad relativa por cada unidad de volumen que la partícula encontrará en cualquier punto determinado en el volumen. Esta interpretación también se puede establecer de la manera siguiente: si dV es un elemento de volumen pequeño rodeando algún punto, la probabilidad de hallar la partícula en el elemento de volumen es

$$P(x, y, z)\,dV = |\psi|^2 dV \quad \textbf{(41.3)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.1

La función de onda pertenece a un sistema

Lo común en mecánica cuántica es asociar una función de onda con una partícula. La función de onda, sin embargo, está determinada por la partícula *y* su interacción con su entorno, de modo que pertenece más propiamente a un sistema. En muchos casos la partícula es la única parte del sistema que experimenta un cambio, por lo que se ha desarrollado dicha asociación. En el futuro el estudiante verá ejemplos en los que es más correcto considerar la función de onda del sistema que la función de onda de la partícula.

Esta interpretación probabilística de la función de onda fue sugerida primero por Max Born (1882-1970) en 1928. En 1926, Erwin Schrödinger (1887-1961) propuso una ecuación de onda que describe la manera en que la función de onda cambia en el espacio y el tiempo. La *ecuación de onda de Schrödinger*, que se examina en la sección 41.3, representa un elemento clave en la teoría de la mecánica cuántica.

Los conceptos de mecánica cuántica, que a veces parecen extraños, se crearon a partir de ideas clásicas. De hecho, cuando sus técnicas de mecánica cuántica se aplican a sistemas macroscópicos, los resultados son en esencia idénticos a los de la física clásica. Esta mezcla de los dos planteamientos se presenta cuando la longitud de onda de De Broglie es pequeña en comparación con las dimensiones del sistema. La situación es similar al acuerdo existente entre la mecánica relativista y la mecánica clásica cuando $v \ll c$.

La sección 40.5 mostró que la ecuación de De Broglie relaciona la cantidad de movimiento de una partícula con su longitud de onda mediante $p = h/\lambda$. Si una partícula libre ideal tiene una cantidad de movimiento conocida en forma precisa p_x, su función de onda es una onda sinusoidal infinitamente larga de longitud de onda $\lambda = h/p_x$, y la partícula tiene igual probabilidad de estar en cualquier punto a lo largo del eje x (figura 40.18a). La función de onda ψ para esta partícula libre que se mueve a lo largo del eje x se puede escribir como

Función de onda para una partícula libre

$$\psi(x) = Ae^{ikx} \quad \textbf{(41.4)}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda angular (ecuación 16.8) de la onda que representa la partícula y A es una amplitud constante.[3]

Funciones de onda unidimensionales y valores permitidos

Esta sección expone únicamente sistemas unidimensionales, donde la partícula debe estar ubicada a lo largo del eje x, de modo que la probabilidad $|\psi|^2\,dV$ en la ecuación 41.3 se modifica para convertirse en $|\psi|^2\,dx$. La probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo infinitesimal dx alrededor del punto x es

$$P(x)\,dx = |\psi|^2\,dx \quad \textbf{(41.5)}$$

Aun cuando no es posible especificar la posición de una partícula con certeza completa, es posible por medio de $|\psi|^2$ especificar la probabilidad de observarla en una región que rodea

[2]Para un número complejo $z = a + ib$, el complejo conjugado se encuentra al cambiar i a $-i$: $z^* = a - ib$. El producto de un número complejo y su complejo conjugado es siempre real y positivo: es decir $z^*z = (a - ib)(a + ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - (i)^2b^2 = a^2 + b^2$.

[3]Para la partícula libre, la función de onda completa, con base en la ecuación 41.2 , es

$$\Psi(x, t) = Ae^{ikx}e^{-i\omega t} = Ae^{i(kx - \omega t)} = A[\cos(kx - \omega t) + i\,\text{sen}(kx - \omega t)]$$

La parte real de esta función de onda tiene la misma forma que las ondas unidas para formar paquetes de onda en la sección 40.6.

un punto x determinado. **La probabilidad de hallar la partícula en el intervalo arbitrario $a \leq x \leq b$ es**

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 \, dx \tag{41.6}$$

Figura 41.1 La probabilidad de que una partícula se encuentre en el intervalo $a \leq x \leq b$ es el área bajo la curva de densidad de probabilidad de a a b.

La probabilidad P_{ab} es el área bajo la curva de $|\psi|^2$ en función de x entre los puntos $x = a$ y $x = b$, como en la figura 41.1.

Experimentalmente, existe la probabilidad finita de hallar una partícula en un intervalo cerca de algún punto en algún instante. El valor de esa probabilidad debe encontrarse entre los límites 0 y 1. Por ejemplo, si la probabilidad es 0.30, hay 30% de probabilidad de hallar la partícula en el intervalo.

Porque la partícula debe estar en algún lugar a lo largo del eje x, la suma de las probabilidades en todos los valores de x debe ser 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx = 1 \tag{41.7}$$

◀ Condición de normalización sobre ψ

Cualquier función de onda que satisfaga la ecuación 41.7 se dice que está **normalizada.** La normalización quiere decir, simplemente, que la partícula existe en algún punto en el espacio.

Una vez conocida la función de onda para una partícula, es posible calcular la posición promedio a la que se espera hallarla después de muchas mediciones. Esta posición promedio se denomina **valor esperado** de x y está definido por la ecuación

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi \, dx \tag{41.8}$$

◀ Valor esperado para la posición x

(Se usan paréntesis $\langle ... \rangle$ para indicar valores permitidos.) Además, es posible hallar el valor esperado de cualquier función $f(x)$ asociado con una partícula si se usa la siguiente ecuación:[4]

$$\langle f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x) \psi \, dx \tag{41.9}$$

◀ Valor esperado para una función $f(x)$

Pregunta rápida 41.1 Considere la función de onda para la partícula libre, ecuación 41.4. ¿En qué valor de x es más probable que la partícula se encuentre en un tiempo determinado? a) En $x = 0$, b) a pequeños valores de x, c) a grandes valores de x, o d) en cualquier punto a lo largo del eje x.

EJEMPLO 41.1 Una función de onda para una partícula

Considere una partícula cuya función de onda se grafica en la figura 41.2 y se proporciona por

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2}$$

A) ¿Cuál es el valor de A si se normaliza esta función de onda?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La partícula no es una partícula libre porque la función de onda no es una función sinusoidal. La figura 41.2 indica que la partícula está restringida a permanecer

Figura 41.2 (Ejemplo 41.1) Una función de onda simétrica para una partícula, conocida por $\psi(x) = Ae^{-ax^2}$.

[4]Los valores esperados son análogos a los "promedios ponderados", en los que cada valor posible de una función se multiplica por la probabilidad de la ocurrencia de dicho valor antes de sumar sobre todos los posibles valores. El valor esperado se escribe como $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x) \psi \, dx$ en lugar de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)|\psi|^2 \, dx$, porque $f(x)$ se puede representar mediante un operador (como una derivada) en lugar de una simple función multiplicativa en tratamientos más avanzados de mecánica cuántica. En estas situaciones, el operador se aplica sólo a ψ y no a ψ^*.

cerca de $x = 0$ en todo momento. Piense en un sistema físico en el que la partícula siempre permanece cerca de un punto determinado. Los ejemplos de tales sistemas son un bloque en un resorte, una canica en el fondo de un tazón y la plomada de un péndulo simple.

Categorizar Porque el enunciado del problema describe la naturaleza ondulatoria de una partícula, este ejemplo requiere un planteamiento cuántico en lugar de uno clásico.

Analizar Aplique la condición de normalización, ecuación 41.7, para la función de onda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (Ae^{-ax^2})^2\,dx = A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2}\,dx = 1$$

Exprese la integral como la suma de dos integrales:

$$1)\quad A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2}\,dx = A^2\left(\int_{0}^{\infty} e^{-2ax^2}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-2ax^2}\,dx\right) = 1$$

Cambie la variable de integración de x a $-x$ en la segunda integral:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-2ax^2}\,dx = \int_{\infty}^{0} e^{-2a(-x)^2}(-\,dx) = -\int_{\infty}^{0} e^{-2ax^2}\,dx$$

Invierta el orden de los límites, lo que introduce un signo negativo:

$$-\int_{\infty}^{0} e^{-2ax^2}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-2ax^2}\,dx$$

Sustituya esta expresión para la segunda integral en la ecuación 1):

$$A^2\left(\int_{0}^{\infty} e^{-2ax^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2ax^2}\,dx\right) = 1$$

$$2)\qquad 2A^2\int_{0}^{\infty} e^{-2ax^2}\,dx = 1$$

Evalúe la integral con la ayuda de la tabla B.6 en el apéndice B:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-2ax^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

Sustituya este resultado en la ecuación 2) y resuelva para A:

$$2A^2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\right) = 1 \quad\rightarrow\quad A = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}$$

B) ¿Cuál es el valor esperado de x para esta partícula?

SOLUCIÓN

Evalúe el valor esperado con la ecuación 41.8:

$$\langle x\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x\,\psi\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (Ae^{-ax^2})x(Ae^{-ax^2})\,dx$$

$$= A^2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-2ax^2}\,dx$$

Como en el inciso A), exprese la integral como una suma de dos integrales:

$$3)\qquad \langle x\rangle = A^2\left(\int_{0}^{\infty} xe^{-2ax^2}\,dx + \int_{-\infty}^{0} xe^{-2ax^2}\,dx\right)$$

Cambie la variable de integración de x a $-x$ en la segunda integral:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-2ax^2}\,dx = \int_{\infty}^{0} -\,xe^{-2a(-x)^2}(-\,dx) = \int_{\infty}^{0} xe^{-2ax^2}\,dx$$

Invierta el orden de los límites, lo que introduce un signo negativo:

$$\int_{\infty}^{0} xe^{-2ax^2}\,dx = -\int_{0}^{\infty} xe^{-2ax^2}\,dx$$

Sustituya esta expresión para la segunda integral en la ecuación 3):

$$\langle x \rangle = A^2\left(\int_0^{\infty} xe^{-2ax^2}\,dx - \int_0^{\infty} xe^{-2ax^2}\,dx\right) = 0$$

Finalizar Conocida la simetría de la función de onda en torno a $x = 0$ en la figura 41.2, no es de sorprender que la posición promedio de la partícula está en $x = 0$. En la sección 41.7, se mostró que la función de onda estudiada en este ejemplo representa el estado de menor energía del oscilador armónico cuántico.

41.2 La partícula cuántica bajo condiciones frontera

La partícula libre expuesta en la sección 41.1 no tiene condiciones frontera; puede estar en cualquier parte del espacio. La partícula en el ejemplo 41.1 no es una partícula libre. La figura 41.2 muestra que la partícula siempre está restringida a posiciones cerca de $x = 0$. En esta sección se investigarán los efectos de las restricciones sobre el movimiento de una partícula cuántica.

Una partícula en una caja

En esta sección se aplican algunas de las ideas desarrolladas para un problema físico sencillo: una partícula confinada a una región unidimensional del espacio, un problema de una *partícula en una caja* (aun cuando la "caja" ¡sea en una sola dimensión!). Desde el punto de vista clásico, si una partícula rebota elásticamente hacia atrás y hacia adelante lo largo del eje x entre dos paredes impenetrables separadas por una distancia L, como se muestra en la figura 41.3a, se modela como una partícula bajo repidez constante. Si la rapidez de la partícula es u, la magnitud de su cantidad de movimiento mu permanece constante, al igual que su energía cinética. (Recuerde que en el capítulo 39 se usó u para la rapidez de la partícula y distinguirla de v, la rapidez de un marco de referencia.) La física clásica no impone restricciones a los valores de la cantidad de movimiento y energía de una partícula. El planteamiento mecánico cuántico para este problema es muy diferente y requiere que se encuentre la función de onda apropiada que sea consistente con las condiciones de esta situación.

Ya que las paredes son impenetrables, no existe probabilidad alguna de hallar la partícula fuera de la caja, de modo que la función de onda $\psi(x)$ debe ser cero para $x < 0$ y para $x > L$. Para ser una función que trabaje bien matemáticamente, $\psi(x)$ debe ser continua en el espacio. No deben existir saltos discontinuos en el valor de la función de onda en cualquier punto.[5] Por lo tanto, si ψ es cero fuera de las paredes, también debe ser cero *en* las paredes, esto es, $\psi(0) = 0$ y $\psi(L) = 0$. Sólo se permiten las funciones de onda que satisfagan estas condiciones de frontera.

La figura 41.3b, la representación gráfica del problema de la partícula en una caja, muestra la energía potencial del sistema partícula-entorno como función de la posición de la partícula. Mientras la partícula está dentro de la caja, la energía potencial del sistema no depende de la ubicación de la partícula y es posible escoger su valor igual a cero. Fuera de la caja, debe asegurarse de que la función de onda sea cero. Puede hacer esto al definir la energía potencial del sistema como infinitamente grande si la partícula estuviera fuera de la caja. Por lo tanto, la única forma de que una partícula pueda estar fuera de la caja es si el sistema tiene una cantidad infinita de energía, lo que es imposible.

La función de onda para una partícula en la caja se expresa como una función senosoidal real:[6]

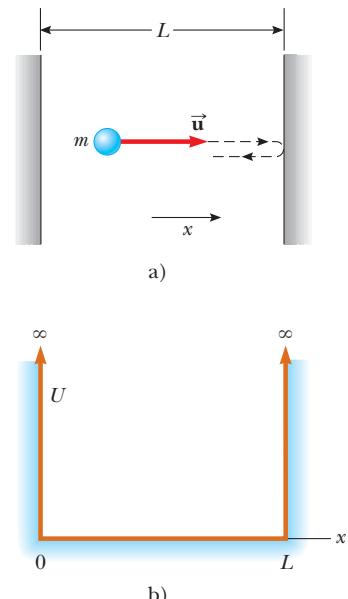
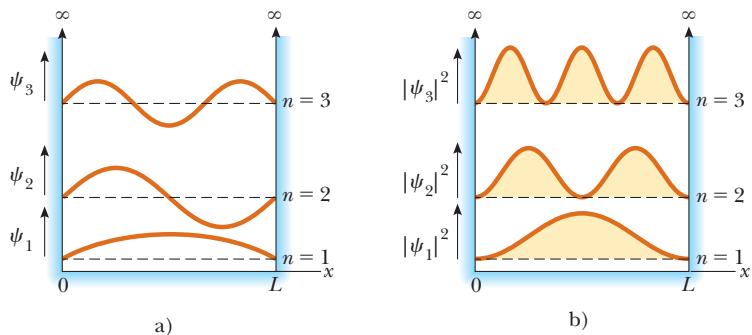



Figura 41.3 a) Partícula de masa m y rapidez u, confinada a rebotar entre dos paredes impenetrables separadas por una distancia L. b) Función de energía potencial para el sistema.

[5] Si la función de onda no fuera continua en un punto, la derivada de la función de onda en ese punto sería infinita. El resultado lleva a dificultades en la ecuación de Schrödinger, por lo cual la función de onda es una solución, como se explicó en la sección 41.3.

[6] Esto se demuestra explícitamente en la sección 41.3.

Figura 41.4

Primeros tres estados permitidos para una partícula confinada a una caja de una dimensión. Los estados se muestran sobrepuestos en la función de energía potencial de la figura 41.3b. a) Funciones de onda ψ para $n = 1$, 2 y 3. b) Densidades de probabilidad $|\psi|^2$ para $n = 1$, 2 y 3. Las funciones de onda y las densidades de probabilidad se grafican verticalmente desde ejes separados que están corridos verticalmente para mayor claridad. Las posiciones de estos ejes sobre la función de energía potencial sugieren las energías relativas de los estados.

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \textbf{(41.10)}$$

donde λ es la longitud de onda de De Broglie asociada con la partícula. Esta función de onda debe satisfacer las condiciones frontera en las paredes. La condición frontera en $\psi(0) = 0$ ya está satisfecha porque la función seno es cero cuando $x = 0$. Para la condición frontera en $\psi(L) = 0$, se tiene

$$\psi(L) = 0 = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)$$

que sólo puede ser verdadera si

$$\frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{n} \quad \textbf{(41.11)}$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ En consecuencia, sólo se permiten ciertas longitudes de onda para la partícula. Cada una de las longitudes de onda permitidas corresponde a un estado cuántico para el sistema, y n es el número cuántico. Incorporando la ecuación 41.11 en la ecuación 41.10 proporciona

Funciones de onda para una partícula en una caja ►

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{2L/n}\right) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \textbf{(41.12)}$$

Al normalizar esta función de onda se demuestra que $A = \sqrt{2/L}$. (Vea el problema 15.) Por lo tanto, la función de onda normalizada para la partícula en una caja es

Función de onda normalizada para una partícula en una caja ►

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \textbf{(41.13)}$$

Las figuras 41.4a y b son representaciones gráficas de ψ en función de x y $|\psi|^2$ en función de x para $n = 1$, 2 y 3 para la partícula en una caja.[7] Observe que aun cuando ψ puede ser positiva o negativa, $|\psi|^2$ siempre es positiva. Como $|\psi|^2$ representa una densidad de probabilidad, un valor negativo para $|\psi|^2$ no tendría sentido.

Una inspección más a fondo de la figura 41.4b muestra que $|\psi|^2$ es cero en las fronteras, lo cual satisface las condiciones frontera. Además, $|\psi|^2$ es cero en otros puntos, dependiendo del valor de n. Para $n = 2$, $|\psi|^2 = 0$ en $x = L/2$; para $n = 3$, $|\psi|^2 = 0$ en $x = L/3$ y en $x = 2L/3$. El número de puntos cero aumenta en uno cada vez que el número cuántico aumente en uno.

[7] Observe que $n = 0$ no se permite porque, según la ecuación 41.12, la función de onda sería $\psi = 0$. Ésta no es una función de onda físicamente razonable; por ejemplo, no puede ser normalizada porque $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (0)\, dx = 0$, pero la ecuación 41.7 dice que esta integral debe ser igual a 1.

Porque las longitudes de onda de la partícula están restringidas por la condición $\lambda = 2L/n$, la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula también está restringida a valores específicos que se hallan a partir de la expresión para la longitud de onda de De Broglie, la ecuación 40.15:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L/n} = \frac{nh}{2L}$$

Se señala la energía potencial del sistema igual a cero cuando la partícula está dentro de la caja. Por lo tanto, los valores permitidos de la energía del sistema, que simplemente es la energía cinética de la partícula, son proporcionados por

$$E_n = \tfrac{1}{2}mu^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(nh/2L)^2}{2m}$$

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2 \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(41.14)}$$

◄ Energías cuantizadas para una partícula en una caja

Esta expresión muestra que **la energía de la partícula está cuantizada.** La energía mínima corresponde **al estado fundamental,** que es el estado de energía mínima para cualquier sistema. Para la partícula en una caja, el estado fundamental corresponde a $n = 1$, para el cual $E_1 = h^2/8mL^2$. Como $E_n = n^2E_1$, los **estados excitados** correspondientes a $n = 2, 3, 4, \ldots$ tienen energías dadas por $4E_1, 9E_1, 16E_1, \ldots$

La figura 41.5 es un diagrama del nivel de energía que describe los valores de energía de los estados permitidos. Porque la menor energía de una partícula en la caja es diferente de cero, **según la mecánica cuántica, la partícula nunca puede estar en reposo.** La mínima energía que puede tener, corresponde a $n = 1$ y se denomina **energía del estado fundamental.** Este resultado contradice el punto de vista clásico, en el que $E = 0$ es un estado aceptable, como son *todos* los valores positivos de E.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.2

Recordatorio: La energía pertenece a un sistema

Con frecuencia se hace referencia a la energía de una partícula en un lenguaje común. Al igual que en la prevención de riesgos ocultos 41.1, en realidad se describe la energía del *sistema* de la partícula y cualquier medio que tenga que ver con el establecimiento de las paredes impenetrables. Para la partícula en una caja, el único tipo de energía es la energía cinética que pertenece a la partícula, que es el origen de la descripción común.

Figura 41.5

Diagrama del nivel de energía para una partícula confinada a una caja unidimensional de longitud L. La mínima energía permitida es $E_1 = h^2/8mL^2$.

Pregunta rápida 41.2 Considere un electrón, un protón y una partícula alfa (un núcleo de helio), cada una atrapada por separado en cajas idénticas. **i)** ¿Cuál partícula corresponde al estado de energía más alto? a) El electrón, b) el protón, c) la partícula alfa, d) la energía de estado fundamental es la misma en los tres casos. **ii)** ¿Cuál partícula tiene la mayor longitud de onda cuando el sistema está en el estado fundamental? a) El electrón, b) el protón, c) la partícula alfa, d) las tres partículas tienen la misma longitud de onda.

Pregunta rápida 41.3 Una partícula está en una caja de longitud L. De pronto, la longitud de la caja se aumenta a $2L$. ¿Qué ocurre con los niveles de energía que se muestran en la figura 41.5? a) Nada, no se ven afectados. b) Se separan más. c) Se acercan más entre sí.

EJEMPLO 41.2 Partículas micro y macroscópicas en cajas

A) Un electrón está confinado entre dos paredes impenetrables con una separación de 0.200 nm. Determine los niveles de energía para los estados $n = 1$, 2 y 3.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 41.3a, imagine que la partícula es un electrón y las paredes están muy juntas.

Categorizar Los niveles de energía se evalúan con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 41.14 para el estado $n = 1$:

$$E_1 = \frac{h^2}{8m_eL^2}(1)^2 = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{8(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.00 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}$$

$$= 1.51 \times 10^{-18}\ \text{J} = \boxed{9.42\ \text{eV}}$$

Con la ecuación $E_n = n^2E$, encuentre las energías de los estados $n = 2$ y $n = 3$:

$$E_2 = (2)^2E_1 = 4(9.42 \text{ eV}) = \boxed{37.7 \text{ eV}}$$

$$E_3 = (3)^2E_1 = 9(9.42 \text{ eV}) = \boxed{84.8 \text{ eV}}$$

B) Encuentre la rapidez del electrón en el estado $n = 1$.

SOLUCIÓN

Resuelva la expresión clásica para energía cinética para la rapidez de la partícula:

$$K = \tfrac{1}{2}m_eu^2 \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2K}{m_e}}$$

Reconozca que la energía cinética de la partícula es igual a la energía del sistema y sustituya E_n por K:

$$1) \quad u = \sqrt{\frac{2E_n}{m_e}}$$

Sustituya valores numéricos del inciso A):

$$u = \sqrt{\frac{2(1.51 \times 10^{-18} \text{ J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = \boxed{1.82 \times 10^6 \text{ m/s}}$$

¡Con sólo colocar el electrón en la caja resulta en una rapidez *mínima* del electrón igual a 0.6% de la rapidez de la luz!

C) Una pelota de beisbol de 0.500 kg está confinada entre dos paredes rígidas de un estadio que se puede modelar como una caja de 100 m de longitud. Calcule la rapidez mínima de la pelota de beisbol.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 41.3a, imagine que la partícula es una pelota de beisbol y las paredes son las del estadio.

Categorizar Esta parte del ejemplo es un problema de sustitución en el que se aplica el planteamiento cuántico a un objeto macroscópico.

Use la ecuación 41.14 para el estado $n = 1$:

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}(1)^2 = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(0.500 \text{ kg})(100 \text{ m})^2} = 1.10 \times 10^{-71} \text{ J}$$

Use la ecuación 1) para encontrar la rapidez:

$$u = \sqrt{\frac{2(1.10 \times 10^{-71} \text{ J})}{0.500 \text{ kg}}} = \boxed{6.63 \times 10^{-36} \text{ m/s}}$$

Esta rapidez es tan pequeña que el objeto se puede considerar en reposo, que es lo que uno esperaría para la rapidez mínima de un objeto macroscópico.

¿Qué pasaría si? ¿Y si se batea una línea franca de modo que la pelota de beisbol se mueve con una rapidez de 150 m/s? ¿Cuál es el número cuántico del estado en el que ahora reside la pelota de beisbol?

Respuesta Se espera que el número cuántico sea muy grande porque la pelota de beisbol es un objeto macroscópico.

Evalúe la energía cinética de la pelota:

$$\tfrac{1}{2}mu^2 = \tfrac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(150 \text{ m/s})^2 = 5.62 \times 10^3 \text{ J}$$

De la ecuación 41.14, calcule el número cuántico n:

$$n = \sqrt{\frac{8mL^2E_n}{h^2}} = \sqrt{\frac{8(0.500 \text{ kg})(100 \text{ m})^2(5.62 \times 10^3 \text{ J})}{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}} = 2.26 \times 10^{37}$$

Este resultado es un número cuántico tremendamente grande. Conforme la pelota de beisbol empuja el aire fuera de su camino, golpea el suelo y rueda hasta detenerse, se mueve a través de más de 10^{37} estados cuánticos. Dichos estados están tan juntos en energía que no se pueden observar las transiciones de un estado al siguiente. En vez de ello, se ve lo que parece ser una variación uniforme en la rapidez de la bola. La naturaleza cuántica del universo simplemente no es evidente en el movimiento de objetos macroscópicos.

EJEMPLO 41.3 **Valores esperados para la partícula en una caja**

Una partícula de masa m está confinada a una caja unidimensional entre $x = 0$ y $x = L$. Encuentre el valor esperado de la posición x de la partícula en el estado caracterizado por el número cuántico n.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 41.4b muestra que la probabilidad para que la partícula esté en una posición determinada varía con la posición dentro de la caja. ¿Puede predecir cuál será el valor esperado de x a partir de la simetría de las funciones de onda?

Categorizar El enunciado del ejemplo clasifica el problema: enfóquese en una partícula cuántica en una caja y en el cálculo de su valor esperado de x.

Analizar En la ecuación 41.8, la integración de $-\infty$ a ∞ se reduce a los límites 0 a L porque $\psi = 0$ en todas partes, excepto en la caja.

Sustituya la ecuación 41.13 en la ecuación 41.8 para encontrar el valor esperado para x:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n {}^* x \psi_n \, dx = \int_0^L x \left[\sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]^2 dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Evalúe la integral al consultar una tabla de integrales o por integración matemática:[8]

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L} \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x \operatorname{sen}\left(2\dfrac{n\pi x}{L}\right)}{4\dfrac{n\pi}{L}} - \frac{\cos\left(2\dfrac{n\pi x}{L}\right)}{8\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2} \right]_0^L$$

$$= \frac{2}{L} \left[\frac{L^2}{4} \right] = \boxed{\frac{L}{2}}$$

Finalizar Este resultado demuestra que el valor esperado de x está en el centro de la caja para todos los valores de n, lo que se esperaría de la simetría del cuadrado de las funciones de onda (la densidad de probabilidad) en torno al centro (figura 41.4b).

La función de onda $n = 2$ en la figura 41.4b tiene un valor de cero en el punto medio de la caja. ¿El valor esperado de la partícula puede estar en una posición donde la partícula tenga probabilidad cero de existir? Recuerde que el valor esperado es la posición *promedio*. Por lo tanto, la partícula tiene tanta probabilidad de encontrarse a la derecha del punto medio como a la izquierda, así que su posición promedio está en el punto medio aun cuando su probabilidad de estar ahí sea cero. Como analogía, considere un grupo de estudiantes para el que la calificación promedio del examen final sea 50%. No hay requisito de que algún estudiante logre una calificación de exactamente 50% para que el promedio de todos los estudiantes sea 50 por ciento.

Condiciones frontera sobre partículas en general

La explicación de la partícula en una caja es muy similar a la realizada en el capítulo 18 acerca de las ondas estacionarias en cuerdas:

- Porque los extremos de la cuerda deben ser nodos, las funciones de onda para las ondas permitidas deben ser cero en las fronteras de la cuerda. Ya que la partícula en una caja no puede existir fuera de la caja, las funciones de onda permitidas para la partícula deben ser cero en las fronteras.
- Las condiciones frontera sobre las ondas en la cuerda conducen a longitudes de onda y frecuencias cuantizadas de las ondas. Las condiciones frontera sobre la función de onda para la partícula en una caja conducen a longitudes de onda y frecuencias cuantizadas de la partícula.

[8] Para integrar esta función, primero sustituya $\operatorname{sen}^2(n\pi x/L)$ con $\frac{1}{2}(1 - \cos 2n\pi x/L)$ (consulte la tabla B.3 en el apéndice B), lo que permite que $\langle x \rangle$ se exprese como dos integrales. En tal caso la segunda integral se puede evaluar mediante integración parcial (sección B.7 en el apéndice B).

En mecánica cuántica es muy común que las partículas dependan de las condiciones frontera. Debido a eso, se introduce un nuevo modelo de análisis, la **partícula cuántica bajo condiciones frontera**. En muchas formas este modelo es similar al de las ondas bajo condiciones frontera estudiado en la sección 18.3. De hecho, las longitudes de onda permitidas para la función de onda de una partícula en una caja (ecuación 41.11) son idénticas en forma a las longitudes de onda permitidas para las ondas mecánicas en una cuerda fija en ambos extremos (ecuación 18.4).

El modelo de la partícula cuántica bajo condiciones frontera *difiere* en algunas formas del modelo de las ondas bajo condiciones de frontera:

- En la mayoría de los casos de partículas cuánticas, la función de onda *no* es una función simple como la función de onda para onda sobre cuerdas. Además, la función de onda para una partícula cuántica puede ser una función compleja.
- Para una partícula cuántica, la frecuencia se relaciona con la energía a través de $E = hf$, de modo que las frecuencias cuantizadas conducen a energía cuantizadas.
- Puede no haber "nodos" inmóviles asociados con la función de onda de una partícula cuántica bajo condiciones frontera. Sistemas más complicados que la partícula en una caja tienen funciones de onda más complicadas, y algunas condiciones de frontera pueden no conducir a ceros de la función de onda en puntos fijos.

En general, **la interacción de una partícula cuántica con su ambiente representa una o más condiciones frontera y, si la interacción restringe a la partícula a una región finita del espacio, resulta en cuantización de la energía del sistema.**

Las condiciones frontera sobre las funciones de onda cuánticas se relacionan con las coordenadas que describen el problema. Para la partícula en una caja, la función de onda debe ser cero en dos valores de x. En el caso de un sistema tridimensional como el átomo de hidrógeno que se explica en el capítulo 42, el problema se presenta mejor en *coordenadas esféricas*. Dichas coordenadas, una extensión de las coordenadas polares planas introducidas en la sección 3.1, consisten en una coordenada radial r y dos coordenadas angulares. La generación de la función de onda y la aplicación de las condiciones frontera para el átomo de hidrógeno están más allá del enlace de este libro. Sin embargo, en el capítulo 42 se examinará el comportamiento de algunas funciones de onda del átomo de hidrógeno.

Las condiciones frontera sobre las funciones de onda que existen para todos los valores de x requieren que la función de onda tienda a cero conforme $x \to \infty$ (de modo que la función de onda se puede normalizar) y permanecer finita conforme $x \to 0$. Una condición frontera sobre cualquier parte angular de las funciones de onda es que agregar 2π radianes al ángulo debe regresar la función de onda al mismo valor, porque una adición de 2π resulta en la misma posición angular.

Pregunta rápida 41.4 ¿Cuál de las siguientes opciones mostrará niveles cuantizados de energía? a) Un átomo en un cristal, b) un electrón y un protón en un átomo de hidrógeno, c) un protón en el núcleo de un átomo pesado, d) todo lo anterior, e) nada de lo anterior.

41.3 La ecuación de Schrödinger

En la sección 34.3 se explicó la ecuación de una onda de radiación electromagnética, que se sigue de las ecuaciones de Maxwell. Las ondas asociadas con partículas también satisfacen la ecuación de onda. La ecuación de onda para partículas materiales es diferente de la asociada con fotones, porque las partículas materiales tienen una energía en reposo diferente de cero. La ecuación de onda apropiada fue creada por Schrödinger en 1926. Al analizar el comportamiento de un sistema cuántico, el planteamiento es determinar una solución a esta ecuación y luego aplicarle las condiciones frontera apropiadas. La solución proporciona las funciones de onda permitidas y los niveles de energía del sistema. La adecuada manipulación de la función de onda hace posible, por lo tanto, calcular todas las características mensurables del sistema.

La ecuación de Schrödinger, como se aplica a una partícula de masa m confinada a moverse a lo largo del eje x e interactuar con su ambiente por medio de una función de energía potencial $U(x)$, es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi=E\psi \quad \textbf{(41.15)}$$

◀ Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

donde E es una constante igual a la energía total del sistema (la partícula y su ambiente). Porque esta ecuación es independiente del tiempo, por lo común se le conoce como **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.** (En este texto no se revisa esta ecuación.)

La ecuación de Schrödinger es consistente con el principio de conservación de energía mecánica de un sistema. El problema 25 muestra, para una partícula libre y una partícula en una caja, que el primer término de la ecuación de Schrödinger se reduce a la energía cinética de la partícula multiplicada por la función de onda. Por lo tanto, la ecuación 41.15 indica que la energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial, y que la energía total es una constante: $K+U=E=$ constante.

En principio, si se conoce la función de la energía potencial U para el sistema, es posible resolver la ecuación 41.15 y obtener las funciones de onda y energías para los estados permitidos del sistema. Porque U puede ser dicontinuo con la posición, puede ser necesario obtener soluciones a la ecuación para diferentes regiones del eje x. Las soluciones a la ecuación de Schrödinger en diferentes regiones deben unirse fácilmente en las fronteras; es necesario que $\psi(x)$ sea *continua.* Además, $d\psi/dx$ también debe ser continua para valores finitos de la energía potencial.[9]

Resolver la ecuación de Schrödinger puede ser difícil, dependiendo de la forma de la función de energía potencial. Así como está, la ecuación de Schrödinger ha sido sumamente útil para explicar el comportamiento de sistemas atómicos y nucleares, mientras que la física clásica no ha podido explicar este comportamiento. Además, cuando se aplica mecánica cuántica a cuerpos macroscópicos, los resultados concuerdan con la física clásica.

(AIP Emilio Segrè Visual Archives).

ERWIN SCHRÖDINGER

Físico teórico austriaco (1887-1961)

Schrödinger es mejor conocido como uno de los creadores de la mecánica cuántica. Su método para abordar la mecánica cuántica demostró ser matemáticamente equivalente a la mecánica de matrices más abstracta creada por Heisenberg. Schrödinger también escribió importantes ensayos técnicos sobre mecánica estadística, visión de color y relatividad general.

Repaso de la partícula en una caja

Para ver cómo es aplicado el modelo de partícula cuántica bajo condiciones frontera a un problema, piense de nuevo en una partícula en una caja unidimensional de longitud L (véase la figura 41.3) y analícela con la ecuación de Schrödinger. La figura 41.13b representa el diagrama de energía potencial que describe este problema. Un diagrama de energía potencial como éste es útil para comprender y resolver problemas con la ecuación de Schrödinger.

Debido a la forma de la curva de la figura 41.3b, a veces se dice que la partícula en la caja está en un **pozo cuadrado**,[10] donde un **pozo** es una región de la curva de cara hacia arriba en un diagrama de energía potencial. (Una región de cara hacia abajo se denomina *barrera*, la cual será investigada en la sección 41.5.) La figura 41.3b muestra un pozo cuadrado infinito.

En la región $0 < x < L$, donde $U = 0$, exprese la ecuación de Schrödinger en la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=-k^2\psi \quad \textbf{(41.16)}$$

donde

$$k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.3

Pozos de potencial

Un pozo de potencial, como el de la figura 41.3b, es una representación gráfica de la energía, no una representación ilustrada, de modo que si pudiera observarse no se vería así. Una partícula se mueve *sólo horizontalmente* en una posición vertical fija en un diagrama de energía potencial, lo que representa la conservación de la energía del sistema de la partícula y su ambiente.

[9] Si $d\psi/dx$ no fuera continua, no podría evaluar $d^2\psi/dx^2$ en la ecuación 41.5 en el punto de discontinuidad.

[10] Se denomina pozo cuadrado incluso si tiene forma rectangular en un diagrama de energía potencial.

La solución a la ecuación 41.16 es una función ψ cuya segunda derivada es el negativo de la misma función multiplicada por una constante k^2. Las funciones seno y coseno satisfacen este requisito. Por lo tanto, la solución más general a la ecuación es una combinación lineal de ambas soluciones:

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$$

donde A y B son constantes que están determinadas por las condiciones de normalización y frontera.

La primera condición frontera en la función de onda es que $\psi(0) = 0$:

$$\psi(0) = A \operatorname{sen} 0 + B \cos 0 = 0 + B = 0$$

lo cual significa que $B = 0$. Debido a eso, la solución se reduce a

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx$$

Con la segunda condición frontera, $\psi(L) = 0$, cuando es aplicada a la solución reducida, se obtiene

$$\psi(L) = A \operatorname{sen} kL = 0$$

Esta ecuación podría satisfacerse si $A = 0$, pero significaría que $\psi = 0$ en todas partes, lo cual no es una función de onda válida. Se cumple la condición frontera si kL es un múltiplo entero de π, es decir, si $kL = n\pi$, donde n es un entero. Sustituyendo $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ en esta expresión da

$$kL = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} L = n\pi$$

Cada valor del entero n corresponde a una energía cuantizada llamada E_n. Al resolver para las energías permitidas E_n,

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right) n^2 \tag{41.17}$$

que son idénticas a las energías permitidas en la ecuación 41.14.

Si sustituye los valores de k en la función de onda, las funciones de onda permitidas $\psi_n(x)$ están dadas por

$$\psi_n(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{41.18}$$

que es la función de onda (ecuación 41.12) que se usó en la explicación inicial de la partícula en una caja.

41.4 Una partícula en un pozo de altura finita

Ahora considere una partícula en un pozo de potencial *finito*, es decir, un sistema que tenga una energía potencial que sea cero cuando la partícula está en la región $0 < x < L$ y un valor finito U cuando la partícula está fuera de esta región, como en la figura 41.6. Si la energía total E del sistema es menor que U, según la física clásica, la partícula estaría de modo permanente ligada en el pozo de potencial. Si la partícula estuviera fuera del pozo, su energía cinética tendría que ser negativa, lo que sería imposible. No obstante, según la mecánica cuántica, **existe una probabilidad finita de que la partícula pueda encontrarse fuera del pozo, incluso si $E < U$.** Es decir, la función de onda ψ por lo general es diferente de cero fuera del pozo —en las regiones I y III en la figura 41.6—, de modo que la densidad de probabilidad $|\psi|^2$ también es diferente de cero en estas regiones. Si bien esto puede ser una noción extraña, el principio de incertidumbre dice que la energía del sistema es incierta. Esto permite que la partícula se encuentre fuera del pozo mientras la violación aparente de la conservación de la energía no exista en ninguna forma posible de medir.

Figura 41.6 Diagrama de energía potencial de un pozo de altura U y longitud L finitas. Una partícula está atrapada en el pozo. La energía total E del sistema partícula-pozo es menor que U.

En la región II, donde $U = 0$, las funciones de onda permitidas son de nuevo sinusoidales porque representan soluciones de la ecuación 41.16. Sin embargo, las condiciones

frontera ya no requieren que ψ sea cero en los extremos del pozo, como fue el caso con el pozo cuadrado infinito.

La ecuación de Schrödinger para las regiones I y III se puede escribir como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2}\,\psi \tag{41.19}$$

Porque $U > E$, el coeficiente de ψ en el lado derecho necesariamente es positivo. Por lo tanto, exprese la ecuación 41.19 en la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = C^2\psi \tag{41.20}$$

donde $C^2 = 2m(U-E)/\hbar^2$ es una constante positiva en las regiones I y III. Como se puede verificar por sustitución, la solución general de la ecuación (41.19) es

$$\psi = Ae^{Cx} + Be^{-Cx} \tag{41.21}$$

donde A y B son constantes.

Esta solución general sirve como punto de partida para determinar la solución apropiada para las regiones I y III. La solución debe permanecer finita cuando $x \to \pm\infty$. En la región I, donde $x < 0$, la función ψ debe excluir el término Be^{-Cx}. Se requiere que $B = 0$ en la región I para evitar un valor infinito de ψ para valores negativos grandes de x. Del mismo modo, en la región III, donde $x > L$, la función ψ no debe contener el término Ae^{Cx}; esto se logra al tomar $A = 0$ en esta región. Esta opción evita un valor infinito de ψ para valores positivos grandes de x. Por esto, las soluciones en las regiones I y III son

$$\psi_{\text{I}} = Ae^{Cx} \quad \text{para } x < 0$$

$$\psi_{\text{III}} = Be^{-Cx} \quad \text{para } x > L$$

En la región II la función de onda es sinusoidal y tiene la forma general

$$\psi_{\text{II}}(x) = F \operatorname{sen} kx + G\cos kx$$

donde F y G son constantes.

Estos resultados muestran que las funciones de onda fuera del pozo de potencial (donde la física clásica prohíbe la presencia de la partícula) decaen exponencialmente con la distancia. A valores negativos grandes de x, ψ_{I} se aproxima a cero; a valores positivos grandes de x, ψ_{III} se aproxima a cero. Estas funciones, junto con la solución sinusoidal en la región II, se muestran en la figura 41.7a para los primeros tres estados de energía. Al evaluar la función de onda completa, se requieren las siguientes condiciones frontera:

$$\psi_{\text{I}} = \psi_{\text{II}} \quad \text{y} \quad \frac{d\psi_{\text{I}}}{dx} = \frac{d\psi_{\text{II}}}{dx} \quad \text{en } x = 0$$

$$\psi_{\text{II}} = \psi_{\text{III}} \quad \text{y} \quad \frac{d\psi_{\text{II}}}{dx} = \frac{d\psi_{\text{III}}}{dx} \quad \text{en } x = L$$

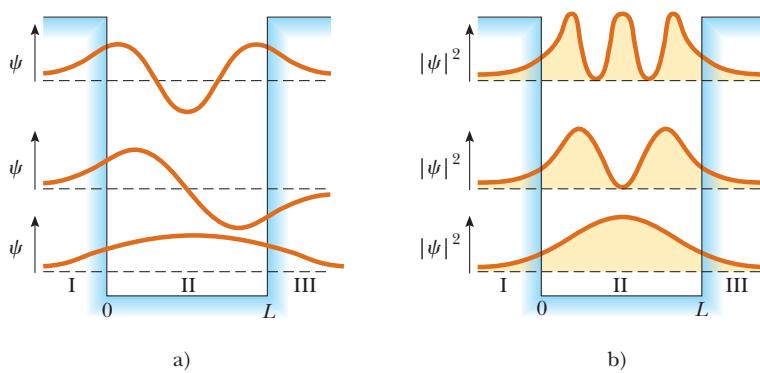



Figura 41.7

a) Funciones de onda ψ y b) densidades de probabilidad $|\psi|^2$ para los tres estados de energía más bajos para una partícula en un pozo de potencial de altura finita. Los estados se muestran sobrepuestos en la función de energía potencial de la figura 41.6. Las funciones de onda y densidades de probabilidad están graficadas en sentido vertical desde ejes separados que están desplazados verticalmente para mayor claridad. Las posiciones de estos ejes sobre la función de energía potencial sugieren las energías relativas de los estados.

Estas cuatro condiciones frontera y la condición de normalización (ecuación 41.7) son suficientes para determinar las cuatro constantes A, B, F y G, y los valores permitidos de la energía E. La figura 41.7b grafica las densidades de probabilidad para estos estados. Observe que en cada caso las funciones de onda dentro y fuera del pozo de potencial se unen fácilmente en las fronteras.

La idea de atrapar partículas en pozos de potencial se emplea en el creciente campo de la **nanotecnología**, que se refiere al diseño y aplicación de equipos que tienen dimensiones que van de 1 a 100 nm. Es frecuente que la fabricación de estos aparatos comprenda la manipulación de átomos individuales, o pequeños grupos de átomos, para formar estructuras tales como el corral cuántico de la fotografía con que se inicia este capítulo.

Un campo de acción de la nanotecnología, de interés para los investigadores, es el **punto cuántico,** una región pequeña que es cubierta de cristales de silicio y actúa como pozo de potencial. Esta región atrapa electrones con energías cuantizadas. Las funciones de onda para una partícula en un punto cuántico parecen semejantes a las de la figura 41.7 si L está en el orden de nanómetros. El almacenamiento de información binaria con el uso de puntos cuánticos es un campo activo de investigación. Un esquema binario sencillo comprendería asociar un uno con un punto cuántico que contenga un electrón y un cero con un punto vacío. Otros esquemas involucran celdas de puntos múltiples tales que las distribuciones de electrones entre los puntos corresponden a unos y ceros. Hay varios laboratorios de investigación que estudian las propiedades y aplicaciones potenciales de los puntos cuánticos. Es posible que en los próximos años se publique continuamente información de estos laboratorios.

41.5 Efecto túnel a través de una barrera de energía potencial

Figura 41.8 Función de onda ψ para una partícula que incide desde la izquierda en una barrera de altura U y ancho L. La función de onda es sinusoidal en las regiones I y III, pero decae exponencialmente en la región II. La función de onda está graficada verticalmente desde un eje ubicado en la energía de la partícula.

Considere la función de energía potencial que se ilustra en la figura 41.8. En esta situación, la energía potencial tiene un valor constante U en la región de ancho L y es cero en todas las otras regiones.[11] Una función de energía potencial de esta forma se llama **barrera cuadrada**, y U se denomina **altura de la barrera**. Un fenómeno muy interesante y peculiar se presenta cuando una partícula en movimiento encuentra una barrera como ésta de altura y ancho finitos. Suponga que una partícula de energía $E < U$ incide en la barrera desde la izquierda (figura 41.8). Clásicamente, la partícula sería reflejada por la barrera. Si la partícula debiera existir en la región II, su energía cinética sería negativa, lo cual no es permitido desde el punto de vista clásico. En consecuencia, la región II, y por tanto la región III, son clásicamente *prohibidas* para la partícula que incide desde la izquierda. Sin embargo, según la mecánica cuántica, **todas las regiones son accesibles a la partícula, cualquiera que sea su energía**. (Aun cuando todas las regiones son accesibles, la probabilidad de que la partícula se encuentre en una región clásicamente prohibida es muy baja.) De acuerdo con el principio de incertidumbre, la partícula puede estar dentro de la barrera mientras el intervalo durante el cual está en ella sea corto y consistente con la ecuación 40.24. Si la barrera es relativamente angosta, este corto intervalo puede permitir que la partícula se mueva a través de la barrera.

Planteando esta situación con una representación matemática. La ecuación de Schrödinger tiene soluciones válidas en las regiones I, II y III. Las soluciones en las regiones I y III son sinusoidales, como en la ecuación 41.12. En la región II, la solución es exponencial semejante a la ecuación 41.21. Si se aplica la condición frontera de que las funciones de onda de las tres regiones y sus derivadas deben unirse fácilmente en las fronteras, es posible hallar una solución completa, como la que representa la curva de la figura 41.8. Porque la probabilidad de localizar la partícula es proporcional a $|\psi|^2$, la probabilidad de encontrar la partícula más allá de la barrera en la región III es diferente de cero. Este resultado está en completo desacuerdo con la física clásica. El movimiento de la partícula en el lado lejano de la barrera se denomina **efecto túnel** o **penetración de barrera**.

La probabilidad del efecto túnel se puede describir con un **coeficiente de transmisión** T y un **coeficiente de reflexión** R. El coeficiente de transmisión representa la probabilidad de que la partícula penetre al otro lado de la barrera, y el coeficiente de reflexión es la

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.4

"Altura" en un diagrama de energía

La palabra *altura* (como en *altura de barrera*) se refiere a una energía en los análisis de barreras en los diagramas de energía potencial. Por ejemplo, podría decirse que la altura de la barrera es de 10 eV. Por otra parte, el *ancho* de barrera es igual que en el uso tradicional de esa palabra; es una medición de la distancia física real entre los dos lados verticales de la barrera.

[11] Es común en física referirse a L como la *distancia* de un paso paro el *ancho* de una barrera.

probabilidad de que la partícula sea reflejada por la barrera. Puesto que la partícula incidente, es reflejada o transmitida, se requiere que $T + R = 1$. Una expresión aproximada para el coeficiente de transmisión que se obtiene cuando $T \ll 1$ (una barrera muy ancha o una barrera muy alta, es decir, $U \gg E$) es

$$T \approx e^{-2CL} \qquad \textbf{(41.22)}$$

donde

$$C = \frac{\sqrt{2m(U - E)}}{\hbar} \qquad \textbf{(41.23)}$$

Este modelo cuántico de penetración de barrera y específicamente la ecuación 41.22, muestran que T puede ser diferente de cero. El hecho de que el fenómeno de efecto túnel pueda observarse experimentalmente proporciona más confianza en los principios de la física cuántica.

Pregunta rápida 41.5 ¿Cuál de los siguientes cambios aumentaría la probabilidad de transmisión de una partícula a través de una barrera de potencial? (Puede escoger más de una respuesta.) a) Reducir el ancho de la barrera, b) aumentar el ancho de la barrera, c) reducir la altura de la barrera, d) aumentar la altura de la barrera, e) reducir la energía cinética de la partícula incidente, f) aumentar la energía cinética de la partícula incidente.

EJEMPLO 41.4 Coeficiente de transmisión para un electrón

Un electrón de 30 eV incide sobre una barrera cuadrada de 40 eV de alto.

A) ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón penetre por efecto túnel a través de la barrera, si su ancho es 1.0 nm?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que la energía de la partícula es menor que la altura de la barrera de potencial, se espera que el electrón se refleje de la barrera con una probabilidad de 100%, de acuerdo con la física clásica. Sin embargo, debido al efecto túnel, hay una probabilidad finita de que la partícula pueda aparecer en el otro lado de la barrera.

Categorizar La probabilidad se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la cantidad $U - E$ que aparece en la ecuación 41.23:

$$U - E = 40\text{ eV} - 30\text{ eV} = 10\text{ eV}\left(\frac{1.6 \times 10^{-19}\text{ J}}{1\text{ eV}}\right) = 1.6 \times 10^{-18}\text{ J}$$

Evalúe la cantidad $2CL$ con la ecuación 41.23:

$$1)\quad 2CL = 2\,\frac{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(1.6 \times 10^{-18}\text{ J})}}{1.055 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}\,(1.0 \times 10^{-9}\text{ m}) = 32.4$$

A partir de la ecuación 41.22, encuentre la probabilidad del efecto túnel a través de la barrera:

$$T \approx e^{-2CL} = e^{-32.4} = \boxed{8.5 \times 10^{-15}}$$

B) ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón penetre por el efecto túnel a través de la barrera, si su ancho es 0.10 nm?

SOLUCIÓN

En este caso, el ancho L en la ecuación 1) es un décimo de grande, así que se evalúa el nuevo valor de $2CL$:

$$2CL = (0.1)(32.4) = 3.24$$

A partir de la ecuación 41.22, encuentre la nueva probabilidad del efecto túnel a través de la barrera:

$$T \approx e^{-2CL} = e^{-3.24} = \boxed{0.039}$$

En la parte A), el electrón tenía aproximadamente una oportunidad en 10^{14} de pasar por el efecto túnel a través de la barrera. Sin embargo, en la parte B), el electrón tiene una probabilidad mucho mayor (3.9%) de penetrar la barrera. Por lo tanto,

¡reducir el ancho de la barrera en sólo un orden de magnitud aumenta la probabilidad de efecto túnel de penetración de barrera en casi 12 órdenes de magnitud!

41.6 Aplicaciones del efecto túnel

Como ha visto, el efecto túnel es un fenómeno cuántico, una manifestación de la naturaleza ondulatoria de la materia. Existen numerosos ejemplos (en escalas atómica y nuclear) en los que el efecto túnel es muy importante.

Desintegración alfa

Una forma de desintegración radiactiva es la emisión de partículas alfa (núcleos de átomos de helio) por núcleos pesados e inestables (capítulo 44). Para que una partícula alfa escape del núcleo, debe penetrar una barrera cuya altura sea varias veces mayor que la energía del sistema núcleo-partícula alfa. La barrera se debe a una combinación de la fuerza nuclear de atracción (que se explica en el capítulo 44) y la repulsión de Coulomb (explicada en el capítulo 23) entre la partícula alfa y el resto del núcleo. En ocasiones, una partícula alfa logra el efecto túnel a través de la barrera, lo cual explica el mecanismo básico para este tipo de desintegración y las grandes variaciones en las vidas medias de diversos núcleos radiactivos.

La figura 41.8 muestra la función de onda de una partícula que penetra por efecto túnel a través de una barrera en una dimensión. Una función de onda similar que tenga simetría esférica describe la penetración de barrera de una partícula alfa que sale de un núcleo radiactivo. La función de onda existe tanto dentro como fuera del núcleo, y su amplitud es constante en el tiempo. De esta forma, la función de onda describe correctamente la pequeña pero constante probabilidad de que el núcleo decaerá. El momento de decaimiento no se puede predecir. En general, la mecánica cuántica implica que el futuro es indeterminado. Esta característica está en contraste con la mecánica clásica, a partir de la cual se puede calcular la trayectoria de un objeto con una precisión muy alta a partir del conocimiento preciso de su posición y su velocidad iniciales y de las fuerzas que se ejercen sobre él. No piense que el futuro es indeterminado simplemente porque se tiene información incompleta acerca del presente. La función de onda contiene toda la información acerca del estado de un sistema. A veces se pueden hacer predicciones precisas, como la energía de un sistema enlazado, pero en ocasiones sólo se pueden calcular probabilidades acerca del futuro. Las leyes fundamentales de la naturaleza son probabilísticas. Por lo tanto, parece que el famoso enunciado de Einstein acerca de la mecánica cuántica, "Dios no juega con dados", estaba equivocado.

Se puede usar un detector de radiación para demostrar que un núcleo decae mediante emisión de una partícula en un momento particular y en una dirección particular. Para puntualizar el contraste entre este resultado experimental y la función de onda que la describe, Shrödinger imaginó una caja que contenía un gato, una muestra radiactiva, un contador de radiación y un frasco de veneno. Cuando un núcleo en la muestra decae, el contador dispara la administración del veneno letal al gato. La mecánica cuántica predice correctamente la probabilidad de encontrar al gato muerto cuando la caja se abra. Antes de que la caja se abra, ¿tiene el gato una función de onda que lo describa como fraccionalmente muerto, con alguna oportunidad de estar vivo?

Esta pregunta sigue bajo continua investigación, nunca con gatos reales sino a veces con experimentos de interferencia construidos sobre el experimento descrito en la sección 40.7. ¿El acto de medir cambia el sistema de un estado probabilístico a uno definido? Cuando una partícula emitida por un núcleo radiactivo se detecta en una posición particular, ¿la función de onda que describe a la partícula cae instantáneamente a cero en todas las demás partes del universo? (Einstein llamó a tal cambio de estado una "espantosa acción a distancia".) ¿Hay una diferencia fundamental entre un sistema cuántico y un sistema macroscópico? Las respuestas a estas preguntas son desconocidas.

Fusión nuclear

La reacción básica que suministra energía al Sol e indirectamente a casi todo lo demás en el sistema solar, es la fusión, que se estudia en el capítulo 45. En una etapa del proceso que se presenta en el núcleo del Sol, los protones se aproximan entre sí a distancias tan pequeñas que se fusionan para formar un núcleo de deuterio. (Véase la sección 45.4.)

Según la física clásica, estos protones no pueden superar penetrar la barrera causada por la repulsión eléctrica entre ellos. De cualquier modo, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, los protones sí pueden lograr el efecto túnel a través de la barrera y fusionarse.

El microscopio de barrido de efecto túnel

El microscopio de barrido de efecto túnel (STM, *scanning tunneling microscope*), permite a los científicos obtener imágenes detalladas de superficies con resoluciones comparables al tamaño de *un solo átomo*. La figura 41.9, que ilustra la superficie de un trozo de grafito, demuestra lo que puede hacer el STM. Lo que hace tan sorprendente esta imagen es su resolución de cerca de 0.2 nm. Para un microscopio, la solución está limitada por la longitud de onda de la luz usada para hacer la imagen. En consecuencia un microscopio óptico, tiene una resolución no mayor a 200 nm, que es cerca de la mitad de la longitud de onda de la luz visible, por lo que nunca podría mostrar el detalle que se muestra en la figura 41.9.

Photo courtesy of roger A. Freedman and Paul K. Hansma, University of California, Santa Barbara

Figura 41.9 Superficie de grafito según se "ve" con un microscopio de barrido de efecto túnel. Este tipo de microscopio permite a los científicos ver detalles con una resolución
lateral de alrededor de 0.2 nm y una resolución vertical de 0.001 nm. Los contornos que se ven aquí representan una distribución semejante a anillos de átomos individuales de carbono en la superficie del cristal.

El microscopio de barrido de efecto túnel logra tan excelente resolución al usar la idea básica que se muestra en la figura 41.10. Una sonda eléctricamente conductora con una aguja muy delgada se coloca cerca de la superficie bajo estudio. El espacio vacío entre la aguja y la superficie representa la "barrera", que se ha explicado, y la punta y la superficie son las dos paredes del "pozo de potencial". Porque los electrones obedecen más las reglas cuánticas antes que las reglas de Newton, pueden "perforar un túnel" hasta el otro lado de la barrera hacia el espacio vacío. Si se aplica un voltaje entre la superficie y la aguja los electrones de los átomos de la superficie material pueden perforar un túnel de preferencia desde la superficie hacia la aguja para producir una corriente de filtración cuántica. De esta manera, la aguja ejemplifica la distribución de electrones que están justo encima de la superficie.

En el espacio vacío entre la punta y la superficie, la función de onda electrónica cae exponencialmente (véase la región II en la figura 41.8 y el ejemplo 41.4). Para distancias punta-superficie $z > 1$ nm (es decir, más allá de unos cuantos diámetros atómicos), esencialmente no ocurre el efecto túnel. Este comportamiento exponencial hace que la corriente de electrones que provocan filtración cuántica de la superficie a la punta dependan en gran medida de z. Al observar la corriente de filtración cuántica cuando la aguja explora en toda la superficie, los investigadores obtienen una medida sensible de la topografía superficial de la distribución electrónica. El resultado de esta exploración se emplea para tomar imágenes como la de la figura 41.9. En esta forma, el STM puede medir la altura de las características de la superficie con una tolerancia de no más de 0.001 nm, ¡aproximadamente 1/100 el diámetro de un átomo!

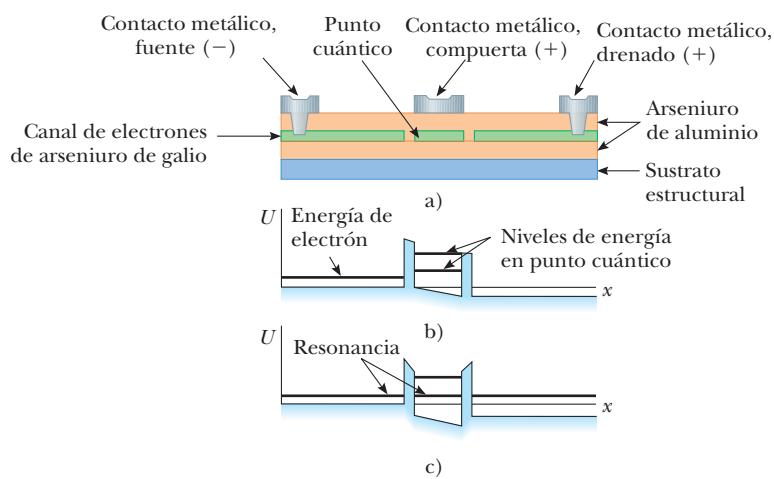
Es posible ver lo sensible que es el STM si examina la figura 41.9. De los seis átomos de carbono de cada anillo, tres aparecen más abajo que los otros tres. En realidad, los seis átomos están a la misma altura, pero todos tienen distribuciones electrónicas ligeramente diferentes. Los tres átomos que aparecen más bajos están ligados a los otros átomos de carbono directamente bajo ellos en la capa atómica que sirve de base; en consecuencia, sus distribuciones electrónicas, que provocan el enlace, se extienden hacia abajo por debajo de la superficie. Los átomos de la capa superficial que aparecen más arriba no están directamente sobre los átomos de la subcapa y, por esto, no están ligados a ningún átomo subyacente. Para estos átomos que aparecen más arriba, la distribución electrónica se extiende por encima de la superficie. Esta densidad electrónica extra es lo que provoca que estos átomos aparezcan más arriba en la figura 41.9, porque lo que el STM traza es la topografía de la distribución electrónica.

Figura 41.10 Vista esquemática de un microscopio de barrido de efecto túnel. Una exploración de la punta sobre la muestra puede revelar contornos de la superficie hasta un nivel atómico. La imagen de un STM está compuesta por una serie de exploraciones desplazadas lateralmente unas de otras.

El STM tiene una seria limitación: su operación depende de la conductividad eléctrica de la muestra y la aguja. Por desgracia, casi todos los materiales resultan malos conductores eléctricos en sus superficies. Incluso los metales, que por lo general son excelentes conductores eléctricos, están cubiertos de óxidos no conductores. Un microscopio más reciente, el microscopio de fuerza atómica (AFM, *atomic force microscope*), supera esta limitación.

Figura 41.11

a) La estructura física de un dispositivo de efecto túnel resonante. b) Diagrama de energía potencial que muestra la doble barrera que representa las paredes del punto cuántico. c) A través del dispositivo se aplica un voltaje. La distorsión de la curva de energía potencial hace que uno de los estados en el punto cuántico resuene con la energía del electrón incidente.

Dispositivos de efecto túnel resonante

Amplíe el análisis del punto cuántico de la sección 41.4 con la exploración del **dispositivo de efecto túnel resonante**. La figura 41.11a muestra la construcción física de tal dispositivo. La isla de arseniuro de galio en el centro es un punto cuántico ubicado entre dos barreras formadas a partir de las delgadas extensiones de arseniuro de aluminio. La figura 41.11b muestra ambas barreras de potencial encontradas por electrones incidentes desde la izquierda y los niveles de energía cuantizados en el punto cuántico. Esta situación difiere de la que se muestra en la figura 41.8 en que hay niveles de energía cuantizados a la derecha de la primera barrera. En la figura 41.8, un electrón que penetra por efecto túnel a través de la barrera se considera una partícula libre y puede tener cualquier energía. En contraste, en la figura 41.11b, conforme el electrón con la energía que se muestra encuentra la primera barrera no tiene niveles de energía disponibles en el lado derecho de la barrera, lo que reduce enormemente la probabilidad de filtración cuántica.

La figura 41.11c muestra el efecto de aplicar un voltaje: el potencial disminuye con la posición conforme se mueve a la derecha a través del dispositivo. La deformación de la barrera de potencial resulta en un nivel de energía en el punto cuántico que coincide con la energía de los electrones incidentes. Esta "resonancia" de energías da su nombre al dispositivo. Cuando se aplica el voltaje, la probabilidad de efecto túnel aumenta de manera considerable y el dispositivo porta corriente. De esta forma, el dispositivo se puede usar como un interruptor muy rápido a una escala nanotecnológica.

Transistores de efecto túnel resonante

La figura 41.12a muestra la adición de un electrodo de compuerta en lo alto del dispositivo de efecto túnel resonante sobre el punto cuántico. Este electrodo convierte el

Figura 41.12 a) La adición de un electrodo de compuerta a la estructura en la figura 41.11 la convierte en un transistor de efecto túnel resonante. b) Diagrama de energía potencial que muestra la doble barrera que representa las paredes del punto cuántico. c) Se aplica un voltaje al electrodo de compuerta. El potencial en la región del punto cuántico cae, junto con los niveles de energía cuantizados.

dispositivo en un **transistor de efecto túnel resonante**. La función básica de un transistor es la amplificación, que convierte un voltaje variable pequeño en un gran voltaje variable. La figura 41.12b, que representa el diagrama de energía potencial para el transistor de efecto túnel, tiene una pendiente en el fondo del punto cuántico debido a la distinción de voltajes en la fuente y los electrodos de consumo. En esta configuración, no hay resonancia entre las energía de electrón fuera del punto cuántico y las energías cuantizadas dentro del punto. Al aplicar un pequeño voltaje al electrodo de compuerta, como en la figura 41.12c, las energías cuantizadas se pueden colocar en resonancia con la energía del electrón afuera del pozo y se presenta efecto túnel resonante. La corriente resultante causa un voltaje a través de un resistor externo que es mucho más grande que el voltaje de la compuerta; por esto, el dispositivo amplifica la señal de entrada al electrodo de compuerta.

41.7 El oscilador armónico simple

Considere una partícula que se somete a una fuerza restauradora lineal $F = -kx$, donde x es la posición de la partícula respecto al equilibrio ($x = 0$) y k es una constante. El movimiento clásico de una partícula sometida a esta fuerza es armónico simple, el cual estudió en el capítulo 15. La energía potencial del sistema es, de la ecuación 15.20.

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2$$

donde la frecuencia angular de vibración es $\omega = \sqrt{k/m}$. En la mecánica clásica, si la partícula se desplaza desde su posición de equilibrio y se suelta, oscila entre los puntos $x = -A$ y $x = A$, donde A es la amplitud del movimiento. Además, su energía total E es, a partir de la ecuación 15.21,

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2$$

En el modelo clásico, cualquier valor de E es permitido, incluso $E = 0$, que es la energía total cuando la partícula está en reposo en $x = 0$.
Ahora investigaremos cómo es tratado el oscilador armónico simple desde el punto de vista cuántico. La ecuación de Schrödinger para este problema se obtiene al sustituir $U = \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ en la ecuación 41.15:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi \qquad \textbf{(41.24)}$$

La técnica matemática para resolver esta ecuación está fuera del alcance de este libro. No obstante, es de utilidad pensar en una solución. Tome la siguiente función de onda para el cálculo:

$$\psi = Be^{-Cx^2} \qquad \textbf{(41.25)}$$

Al sustituir esta función en la ecuación 41.24, se encuentra que es una solución satisfactoria a la ecuación de Schrödinger, siempre y cuando

$$C = \frac{m\omega}{2\hbar} \quad \text{y} \quad E = \tfrac{1}{2}\hbar\omega$$

Resulta que la solución que se ha calculado corresponde al estado fundamental del sistema, que tiene una energía $\tfrac{1}{2}\hbar\omega$. Como $C = m\omega/2\hbar$ se deduce de la ecuación 41.25 que la función de onda para este estado es

$$\psi = Be^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \qquad \textbf{(41.26)}$$

◀ Función de onda para el estado fundamental de un oscilador armónico simple

donde B es la constante a ser determinada desde la condición de normalización. Este resultado es sólo una solución a la ecuación 41.24. Las soluciones restantes que describen los estados excitados son más complicadas, pero todas las soluciones incluyen el factor exponencial e^{-Cx^2}.

Los niveles de energía de un oscilador armónico están cuantizados, como es de esperarse, porque la partícula oscilatoria está destinada a estar cerca de $x = 0$. La energía para un número cuántico arbitrario n es

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(41.27)}$$

◀ Energías cuantizadas para un oscilador armónico simple

El estado $n = 0$ corresponde al estado fundamental, cuya energía es $E_0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega$; el estado $n = 1$ corresponde al primer estado excitado, cuya energía es $E_1 = \tfrac{3}{2}\hbar\omega$, y así sucesivamente.

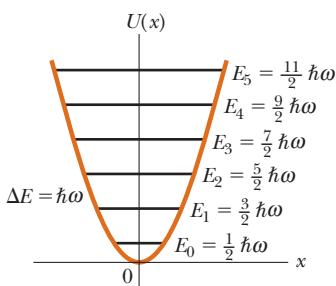



Figura 41.13 Diagrama del nivel de energía para un oscilador armónico simple, sobrepuesto en la función de energía potencial. Los niveles están igualmente espaciados, con una separación $\hbar\omega$. La energía de estado fundamental es $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

El diagrama del nivel de energía para este sistema se ilustra en la figura 41.13. Observe que las separaciones entre niveles adyacentes son iguales y están dadas por

$$\Delta E_0 = \hbar\omega \tag{41.28}$$

Advierta que los niveles de energía para el oscilador armónico de la figura 41.13 están igualmente espaciados, tal como lo propuso Planck para los osciladores en las paredes de la cavidad que se utilizó en el modelo de radiación de cuerpo negro de la sección 40.1. La ecuación 40.4 de Planck para los niveles de energía de los osciladores se distingue de la ecuación 41.27 sólo en el término $\frac{1}{2}$ adicionado a n. Este término adicional no afecta la energía que se emite en una transición, dada por la ecuación 40.5, que es equivalente a la ecuación 41.28. El hecho de que Planck generara estos conceptos sin la ecuación de Schrödinger es testimonio de su genio.

EJEMPLO 41.5 Calor específico molar del gas hidrógeno

En la figura 21.7 (sección 21.4), que muestra el calor específico molar del hidrógeno como función de la temperatura, la vibración no contribuye al calor específico molar a temperatura ambiente. Explique por qué, modelando la molécula de hidrógeno como un oscilador armónico simple. La constante de resorte efectiva para el enlace en la molécula de hidrógeno es 573 N/m.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine el único modo de vibración disponible para una molécula diatómica. Este modo (que se muestra en la figura 21.6c) consiste en los dos átomos que siempre se mueven en direcciones opuestas con igual rapidez.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de oscilador armónico cuántico, con la molécula modelada como un sistema de dos partículas.

Analizar El movimiento de las partículas en relación con el centro de masa se analiza al considerar la oscilación de una sola partícula con masa reducida μ. (Véase el problema 39.)

Use el resultado del problema 39 para evaluar la masa reducida de la molécula de hidrógeno, en la que las masas de las dos partículas es la misma:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m^2}{2m} = \frac{1}{2}m$$

Con la ecuación 41.28, calcule la energía necesaria para excitar la molécula desde su estado vibratorio fundamental a su primer estado vibratorio excitado:

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k}{\mu}} = \hbar\sqrt{\frac{k}{\frac{1}{2}m}} = \hbar\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Sustituya valores numéricos y note que m es la masa de un átomo de hidrógeno:

$$\Delta E = (1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})\sqrt{\frac{2(573\ \text{N/m})}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}} = 8.74 \times 10^{-20}\ \text{J}$$

Iguale esta energía con $\frac{3}{2}k_BT$ a partir de la ecuación 21.4 y encuentre la temperatura a la cual la energía cinética traslacional molecular promedio es igual a la requerida para excitar el primer estado vibratorio de la molécula:

$$\frac{3}{2}k_BT = 8.74 \times 10^{-20}\ \text{J}$$

$$T = \frac{2}{3}\left(\frac{8.74 \times 10^{-20}\ \text{J}}{k_B}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{8.74 \times 10^{-20}\ \text{J}}{1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K}}\right) = 4.22 \times 10^3\ \text{K}$$

Finalizar La temperatura del gas debe ser mayor que 4000 K para que la energía cinética traslacional se compare con la energía requerida para excitar el primer estado vibratorio. Esta energía de excitación debe venir de colisiones entre moléculas, de modo que si las moléculas no tienen suficiente energía cinética traslacional, no se pueden excitar al primer estado vibratorio y la vibración no contribuye al calor específico molar. Por tanto, la curva en la figura 21.7 no se eleva a un valor que corresponda a la contribución de la vibración hasta que el gas hidrógeno se eleva a miles de kelvin.

La figura 21.7 muestra que los niveles de energía rotacional deben estar más cercanamente espaciados en energía que los niveles vibratorios porque se excitan a una temperatura menor que los niveles vibratorios. Los niveles de energía traslacional son los de una partícula en una caja tridimensional, donde la caja es el contenedor que retiene el gas. Estos niveles están dados por una expresión similar a la ecuación 41.14. Porque la caja es macroscópica en tamaño, L es muy grande y los niveles de energía están muy juntos. De hecho, están tan juntos que los niveles de energía traslacional se excitan a una fracción de un kelvin.

Resumen

DEFINICIONES

La **función de onda** Ψ para un sistema es una función matemática que se puede escribir como un producto de una función espacio ψ para una partícula del sistema y una función en el tiempo compleja:

$$\Psi(\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3, \ldots, \vec{\mathbf{r}}_j, \ldots, t) = \psi(\vec{\mathbf{r}}_j)e^{-i\omega t} \quad \textbf{(41.2)}$$

donde ω $(= 2\pi f)$ es la frecuencia angular de la función de onda e $i = \sqrt{-1}$. La función de onda contiene dentro de sí toda la información que se puede saber acerca de la partícula.

La posición observada x de una partícula, promediada sobre muchos ensayos, se llama **valor esperado** de x y se define por

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi \, dx \quad \textbf{(41.8)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

En mecánica cuántica, una partícula en un sistema se puede representar mediante una función de onda $\psi(x, y, z)$. La probabilidad por unidad de volumen (o densidad de probabilidad) de que una partícula se encontrará en un punto es $|\psi|^2 = \psi^*\psi$, donde ψ^* es el complejo conjugado de ψ. Si la partícula está confinada a moverse a lo largo del eje x, la probabilidad de que se ubique en un intervalo dx es $|\psi|^2\, dx$. Además, la suma de todas estas probabilidades en todos los valores de x debe ser 1:

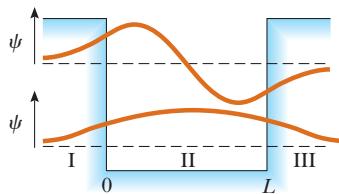
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad \textbf{(41.7)}$$

Esta expresión se llama **condición de normalización**.

Si una partícula de masa m está confinada a moverse en una caja unidimensional de longitud L cuyas paredes son impenetrabales, entonces ψ debe ser cero en las paredes y fuera de la caja. Las funciones de onda para este sistema están dadas por

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2,3, \ldots \quad \textbf{(41.12)}$$

donde A es el máximo valor de ψ. Los estados permitidos de una partícula en una caja tienen energías cuantizadas conocidas por

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2 \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{(41.14)}$$

La función de onda para un sistema debe satisfacer la **ecuación de Schrödinger**. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula confinada a moverse a lo largo del eje x es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi = E\psi \quad \textbf{(41.15)}$$

donde U es la energía potencial del sistema y E es la energía total.

(*continúa*)

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Partícula cuántica bajo condiciones frontera. Una interacción de una partícula cuántica con su ambiente representa una o más condiciones frontera. Si la interacción restringe la partícula a una región finita del espacio, la energía del sistema está cuantizada. Todas las funciones de onda deben satisfacer las siguientes cuatro condiciones frontera: 1) $\psi(x)$ debe permanecer finita conforme x tiende a 0; 2) $\psi(x)$ debe tender a cero conforme x tiende a $\pm\infty$; 3) $\psi(x)$ debe ser continua para todos los valores de x y 4) $d\psi/dx$ debe ser continua para todos los valores finitos de $U(x)$. Si la solución a la ecuación 41.15 es por partes, debe aplicar las condiciones 3) y 4) a las fronteras entre regiones de x en las que se ha resuelto la ecuación 41.15.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Cuál es la importancia de la función de onda ψ?

2. **O** La probabilidad de encontrar cierta partícula cuántica en la sección del eje x entre $x = 4$ nm y $x = 7$ nm es 48%. La función de onda de la partícula $\psi(x)$ es constante en este intervalo. **i)** ¿Qué valor numérico se puede atribuir a $\psi(x)$? a) 0.48, b) 0.16, c) 0.12, d) 0.69, e) 0.40, f) 0.35. **ii)** ¿Cuál es su unidad? a) nm, b) $(\text{nm})^{1/2}$, c) $(\text{nm})^{1/3}$, d) $(\text{nm})^{-1}$, e) $(\text{nm})^{-1/2}$, f) $(\text{nm})^{-1/3}$.

3. **O** **i)** ¿Cada uno de los siguientes enunciados, del a) al j), es verdadero o falso para un fotón? **ii)** ¿Cada uno de los enunciados es verdadero o falso para un electrón? Haga una lista de sus respuestas.
a) Es una partícula cuántica que se comporta en algunos experimentos como una partícula clásica y en algunos experimentos como una onda clásica.
b) Su energía en reposo es cero.
c) Su energía en reposo es distinta de cero.
d) Porta energía en su movimiento.
e) Porta cantidad de movimiento en su movimiento.
f) Su movimiento se describe mediante una función de onda que tiene una longitud de onda y satisface una ecuación de onda.
g) Para un movimiento unidimensional, la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

donde la función de onda E es la magnitud del campo eléctrico, con una ecuación similar para $B = E/c$.
h) Para un movimiento unidimensional, la ecuación de onda es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi = E\psi$$

donde E es la energía constante.
i) La intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de su función de onda.
j) La intensidad de la onda se mide a partir de la proporción a la que las partículas cuánticas bombardean un detector.

4. **O** Una partícula cuántica de masa m_1 está en un pozo cuadrado con paredes infinitamente altas y 3 nm de longitud. Clasifique, las situaciones de la a) a la e) de acuerdo con la energía de mayor a menor de la partícula y note cualquier caso de igualdad. a) La partícula de masa m_1 está en el estado fundamental del pozo. b) La misma partícula está en el estado excitado $n = 2$ del mismo pozo. c) Una partícula con masa $2m_1$ está en el estado fundamental del mismo pozo. d) Una partícula de masa m_1 está en el estado fundamental de un pozo de 6 nm de longitud. e) Una partícula de masa m_1 está en el estado fundamental de un pozo de 3 nm de longitud y el principio de incertidumbre se ha vuelto inoperante; esto es, la constante de Plank se redujo a cero.

5. Para una partícula cuántica en una caja, la densidad de probabilidad en ciertos puntos es cero, como se observa en la figura 41.4b. ¿Implica esto que la partícula no pueda moverse por estos puntos? Explique.

6. Explique la correspondencia entre la energía del estado fundamental y el principio de incertidumbre.

7. **O** Dos pozos cuadrados tienen la misma longitud. El pozo 1 tiene paredes de altura finita, y el pozo 2 tiene paredes de altura infinita. Ambos pozos contienen partículas cuánticas idénticas, una en cada pozo. **i)** ¿La longitud de onda de la función de onda del estado fundamental es a) mayor para el pozo 1, b) mayor para el pozo 2 o c) igual para ambos pozos? **ii)** ¿La magnitud de la cantidad de movimiento del estado fundamental es a) mayor para el pozo 1, b) mayor para el pozo 2 o c) igual para ambos pozos? **iii)** ¿La energía del estado fundamental de la partícula es a) mayor para el pozo 1, b) mayor para el pozo 2 o c) igual para ambos pozos?

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

8. ¿Cuál es la ecuación de Schrödinger? ¿Cómo se utiliza para describir fenómenos cuánticos?

9. **O** Un haz de partículas cuánticas con energía cinética de 2 eV se refleja a causa de una barrera de potencial de ancho pequeño y altura original de 3 eV. ¿Cómo cambia la fracción de las partículas que se reflejan conforme la altura de la barrera se reduce a 2.01 eV? a) Aumenta. b) Disminuye. c) Permanece constante en cero. d) Permanece constante en 1. e) Permanece constante con algún otro valor.

10. **O** Suponga que una corriente de filtración cuántica en un dispositivo electrónico pasa a través de una barrera de energía potencial. La corriente de filtración cuántica es pequeña porque el ancho de la barrera es grande y la barrera es alta. Para aumentar la corriente más efectivamente, ¿qué debe hacer? a) Reducir el ancho de la barrera. b) Reducir la altura de la barrera. c) Cualquiera de las opciones a) o b) es igualmente efectiva. d) Ninguna de las opciones a) o b) aumenta la corriente.

11. Un filósofo dijo una vez que "es necesario, para la existencia misma de la ciencia, que las mismas condiciones siempre produzcan los mismos resultados". En vista de lo que ha estudiado en este capítulo, presente un argumento que demuestre que este enunciado es falso. ¿Cómo podrían cambiarse las palabras del enunciado para que fuera verdadero?

12. En mecánica cuántica es posible que la energía E de una partícula sea menor a la de la energía potencial, pero en la mecánica clásica esto no es posible. Explique por qué.

13. **O** A diferencia del diagrama idealizado de la figura 41.10, una representativa utilizada por un microscopio de efecto túnel más bien está dentada a escala atómica, con varios puntos espaciados de manera irregular. Para tal aguja, ¿la mayor parte de la corriente de efecto túnel se presenta entre la muestra y a) todos los puntos de la punta por igual, b) el punto ubicado de manera más central, c) el punto más cercano a la muestra o d) el punto más alejado de la muestra?

Problemas

Sección 41.1 Una interpretación de la mecánica cuántica

1. Un electrón libre tiene una función de onda

$$\psi(x) = Ae^{i(5.00 \times 10^{10}x)}$$

donde x está en metros. Encuentre a) su longitud de onda de De Broglie, b) su cantidad de movimiento y c) su energía cinética en electrón volts.

2. La función de onda para una partícula es

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}}$$

para $a > 0$ y $-\infty < x < +\infty$. Determine la probabilidad de que la partícula esté situada en algún punto entre $x = -a$ y $x = +a$.

Sección 41.2 La partícula cuántica bajo condiciones en la frontera

3. Un electrón está confinado a una región unidimensional en donde la energía de su estado fundamental ($n = 1$) es 2.00 eV. a) ¿Cuál es la longitud L de la región? b) ¿Cuánta energía se necesita para estimular al electrón a su primer estado excitado?

4. Un electrón que tiene una energía de aproximadamente 6 eV se mueve entre paredes infinitamente altas que tienen 1.00 nm de separación. Encuentre a) el número cuántico n para el estado de energía que el electrón ocupa y b) la energía precisa del electrón.

5. Un electrón está contenido en una caja unidimensional de 0.100 nm de longitud. a) Dibuje un diagrama del nivel de energía para el electrón con niveles hasta de $n = 4$. b) Encuentre las longitudes de onda de todos los fotones que pueden ser emitidos por el electrón al hacer transiciones hacia abajo que puedan, en última instancia, llevarlo del estado $n = 4$ al estado $n = 1$.

6. Una esferita de 5.00 g de masa se desliza sobre un alambre horizontal de 20.0 cm de largo. Su rapidez es 0.100 nm/año, así que aparentemente está en reposo. Trate este sistema como una partícula cuántica en un pozo unidimensional con paredes de altura infinita. Calcule el número cuántico del estado descrito.

7. Un láser de rubí emite luz de 694.3 nm. Suponga que la luz de esta longitud de onda se debe a la transición de un electrón en una caja del estado $n = 2$ al estado $n = 1$. Encuentre la longitud de la caja.

8. Un láser emite luz con una longitud de onda λ. Suponga que esta luz se debe a la transición de un electrón en una caja de su estado $n = 2$ a su estado $n = 1$. Encuentre la longitud de la caja.

9. ● La energía potencial nuclear que enlaza protones y neutrones en un núcleo se puede aproximar a veces mediante un pozo cuadrado. Imagine un protón confinado en un pozo cuadrado infinitamente alto con una longitud de 10.0 fm, el diámetro nuclear típico. Calcule la longitud de onda y la energía asociada con el fotón emitido cuando el protón se mueve del estado $n = 2$ al estado fundamental. Identifique la región del espectro electromagnético a la cual pertenece esta longitud de onda.

10. ● Un protón está confinado a moverse en una caja unidimensional de 0.200 nm de longitud. a) Encuentre la energía más baja posible del protón. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la energía más baja posible de un electrón confinado a la misma caja? c) ¿Cómo puede explicar usted la gran diferencia en los resultados de los incisos a) y b)?

11. ● Utilice el modelo cuántico de la partícula en una caja para calcular los primeros tres niveles de energía de un neutrón atrapado en

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

un núcleo atómico de 20.0 fm de diámetro. Explique si las diferencias en el nivel de energía muestran un orden de magnitud realista.

12. Un fotón con una longitud de onda λ es absorbido por un electrón confinado a una caja. En consecuencia, el electrón se mueve del estado $n = 1$ al estado $n = 4$. a) Encuentre la longitud de la caja. b) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido en la transición de ese electrón del estado $n = 4$ al estado $n = 2$?

13. ● Para una partícula cuántica de masa m en el estado fundamental de un pozo cuadrado con longitud L y paredes de altura infinita, la incertidumbre en la posición es $\Delta x \approx L$. a) Use el principio de incertidumbre para estimar la incertidumbre en su cantidad de movimiento. b) Porque la partícula permanece dentro de la caja, su cantidad de movimiento promedio debe ser cero. En tal caso su cantidad de movimiento al cuadrado promedio es $\langle p^2 \rangle \approx (\Delta p)^2$. Estime la energía de la partícula. Establezca cómo se compara el resultado con la energía de estado fundamental real.

14. ● Una partícula en un pozo cuadrado infinitamente profundo tiene una función de onda conocida por

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

para $0 \le x \le L$; de otro modo es cero. a) Determine el valor esperado de x. b) Determine la probabilidad de hallar la partícula cerca de $L/2$, al calcular la probabilidad de que la partícula se encuentra en el intervalo $0.490L \le x \le 0.510L$. c) **¿Qué pasaría si?** Determine la probabilidad de hallar la partícula cerca de $L/4$, al calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo $0.240L \le x \le 0.260L$. d) Demuestre que el resultado del inciso a) no contradice los resultados de los incisos b) y c).

15. La función de onda para una partícula confinada a moverse en una caja unidimensional es

$$\psi(x) = A\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Utilice la condición de normalización sobre ψ para demostrar que

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Sugerencia: Debido a que la longitud de la caja es L, la función de onda es cero para $x < 0$ y para $x > L$, de modo que la condición de normalización (ecuación 41.6) se reduce a

$$\int_0^L |\psi|^2\, dx = 1$$

16. Un electrón está atrapado en un pozo de potencial de profundidad infinita de 0.300 nm de longitud. a) Si el electrón está en su estado fundamental, ¿cuál es la probabilidad de encontrarlo dentro de 0.100 nm de la pared izquierda? b) Identifique la probabilidad clásica de encontrar el electrón en este intervalo y establezca cómo se compara con la respuesta al inciso a). c) Repita los incisos a) y b) si supone que la partícula está en el estado de energía 99.

17. ● Un electrón en un pozo cuadrado infinitamente profundo tiene una función de onda conocida por

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

para $0 \le x \le L$; de otro modo es cero. ¿Cuáles son las posiciones más probables del electrón? Explique cómo identificarlos.

18. Una partícula cuántica en el estado $n = 1$ está en un pozo cuadrado de profundidad infinita con paredes en $x = 0$ y $x = L$. Sea ℓ un valor arbitrario de x entre $x = 0$ y $x = L$. a) Encuentre una expresión para la probabilidad, como función de ℓ, de que la partícula se hallará entre $x = 0$ y $x = \ell$. b) Dibuje la probabilidad como una función de la variable ℓ/L. Seleccione valores de ℓ que vayan de 0 a 1.00 en pasos de 0.100. c) Explique porqué la función de probabilidad debe tener valores particulares en $\ell/L = 0$ y en $\ell/L = 1$. d) Encuentre el valor de ℓ para el cual la probabilidad de hallar la partícula entre $x = 0$ y $x = \ell$ sea el doble de la probabilidad de hallar la partícula entre $x = \ell$ y $x = L$. Puede resolver numéricamente la ecuación trascendental para ℓ/L.

19. ● Una partícula cuántica en un pozo cuadrado de profundidad infinita tiene una función de onda conocida por

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

para $0 \le x \le L$; de otro modo es cero. a) Determine la probabilidad de hallar la partícula entre $x = 0$ y $x = L/3$. b) Utilice el resultado de este cálculo y argumentos de simetría para hallar la probabilidad de encontrar la partícula entre $x = L/3$ y $x = 2L/3$. No evalúe de nuevo la integral. c) **¿Qué pasaría si?** Establezca cómo se comparan los resultados del inciso a) con la probabilidad clásica.

Sección 41.3 La ecuación de Schrödinger

20. La función de onda de una partícula cuántica es

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\,\text{sen}(kx)$$

donde A, B y k son constantes. Demuestre que ψ es una solución de la ecuación de Schrödinger (ecuación 41.15), si la partícula está libre ($U = 0$), y encuentre la energía E correspondiente de la partícula.

21. Demuestre que la función de onda $\psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$ es una solución a la ecuación de Schrödinger (ecuación 41.13), donde $k = 2\pi/\lambda$ y $U = 0$.

22. En una región del espacio, una partícula con energía total cero tiene una función de

$$\psi(x) = Axe^{-x^2/L^2}$$

a) Encuentre la energía potencial U como función de x. b) Haga un dibujo de $U(x)$ con x.

23. Una partícula cuántica de masa m se mueve en un pozo de potencial de longitud $2L$. Su energía potencial es infinita para $x < -L$ y para $x > +L$. Dentro de la región $-L < x < L$, su energía potencial se conoce por

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 x^2}{mL^2(L^2 - x^2)}$$

Además, la partícula está en un estado estacionario que es descrito por la función de onda $\psi(x) = A(1 - x^2/L^2)$ para $-L < x < +L$, y por $\psi(x) = 0$ en todas las demás partes. a) Determine la energía de la partícula en términos de $\hbar$, m y L. *Sugerencia:* Utilice la ecuación de Schrödinger, ecuación 41.15. b) Demuestre que

$$A = \left(\frac{15}{16L}\right)^{1/2}$$

c) Determine la probabilidad de que la partícula se encuentre entre $x = -L/3$ y $x = +L/3$.

24. Considere una partícula cuántica que se mueve en una caja unidimensional en la cual las paredes están en $x = -L/2$ y $x = L/2$. a) Escriba las funciones de onda y densidades de probabilidad para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. b) Dibuje la función de onda y las densidades de probabilidad. *Sugerencia:* Haga una analogía para el caso de una partícula en una caja en la cual las paredes están en $x = 0$ y $x = L$.

25. Demuestre que el primer término de la ecuación de Schrödinger, $-(\hbar/2m)(d^2\psi/dx^2)$, se reduce a la energía cinética de la partícula cuántica multiplicada por la función de onda a) para una partícula en movimiento libre, con la función de onda conocida por la ecuación 41.4, y b) para una partícula en una caja, con la función de onda conocida por la ecuación 41.13.

Sección 41.4 Una partícula en un pozo de altura finita

26. Trace la función de onda $\psi(x)$ y la densidad de probabilidad $|\psi(x)|^2$ para el estado $n = 4$ de una partícula cuántica en un pozo de potencial finito. (Véase la figura 41.7.)

27. Suponga que una partícula cuántica está atrapada en su estado fundamental en una caja que tiene paredes infinitamente altas (figura 41.4a). Ahora suponga que la pared de la izquierda se baja de pronto a una altura y ancho finitos. a) Trace cualitativamente la función de onda para la partícula para un tiempo breve posterior. b) Si la caja tiene una longitud L, ¿cuál es la longitud de la onda que penetra la pared izquierda?

Sección 41.5 Efecto túnel a través de una barrera de energía potencial

28. Un electrón con energía total $E = 4.50$ eV se aproxima a una barrera rectangular de energía con $U = 5.00$ eV y $L = 950$ pm, como se muestra en la figura P41.28. De acuerdo con la mecánica clásica, el electrón no podría pasar por la barrera porque $E < U$. No obstante, según la mecánica cuántica, la probabilidad de obtener el efecto túnel no es cero. Calcule esta probabilidad, que es el coeficiente de transmisión.

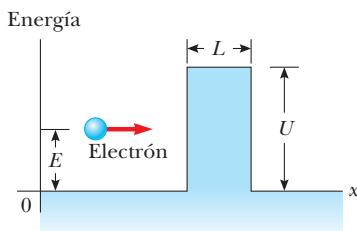



Figura P41.28 Problemas 28, 29 y 31.

29. **¿Qué pasaría si?** En el problema 28, ¿en cuánto tendría que aumentar el ancho L de la barrera de potencial, para que la probabilidad de que un electrón incidente de 4.50 eV muestre un efecto túnel a través de la barrera sea de una en un millón?

30. Calcule la probabilidad de transmisión de efecto túnel mecánico cuántico en cada uno de los siguientes casos. a) Un electrón con un déficit de energía de $U - E = 0.010\,0$ eV incide sobre una barrera de ancho $L = 0.100$ nm. b) Un electrón con un déficit de energía de 1.00 eV incide sobre la misma barrera. c) Una partícula alfa (masa $= 6.65 \times 10^{-27}$ kg) con un déficit de energía de 1.00 MeV incide sobre una barrera de 1.00 fm de ancho. d) Una bola de boliche de 8.00 kg con un déficit de energía de 1.00 J incide sobre una barrera de 2.00 cm de ancho.

31. Un electrón con energía cinética $E = 5.00$ eV incide sobre una barrera con un grosor $L = 0.200$ nm y una altura $U = 10.0$ eV (figura 41.28). ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón a) logre el efecto túnel a través de la barrera? b) ¿Será reflejado?

32. Un electrón tiene una energía cinética de 12.0 eV. Si incide sobre una barrera rectangular con una altura de 20.0 eV y un grosor de 1.00 nm, ¿en qué factor aumentaría la probabilidad de que el electrón presente efecto túnel a través de la barrera, suponiendo que absorbe toda la energía de un fotón (con una longitud de onda de 546 nm) de luz verde en el instante en que alcance la barrera)?

Sección 41.6 Aplicaciones del efecto túnel

33. Un microscopio de barrido de efecto túnel (STM) puede determinar con precisión las profundidades de formas superficiales, porque la corriente que pasaría por su punta es muy sensible a las diferencias en el ancho de la brecha entre la aguja y la superficie de la muestra. Suponga que en esta dirección la función de onda del electrón cae exponencialmente con una longitud de decaimiento de 0.100 nm; es decir, con $C = 10.0$/nm. Determine la relación entre la corriente cuando la aguja del STM está 0.500 nm sobre la figura superficial y cuando la aguja está a 0.515 nm sobre la superficie.

34. El criterio de diseño para un microscopio de barrido de efecto túnel especifica que debe ser capaz de detectar, en la muestra bajo su aguja, la figura superficial con una diferencia en altura de sólo 0.002 00 nm. ¿Qué cambio porcentual en la transmisión electrónica debe ser capaz de detectar la electrónica del STM para lograr esta resolución? Suponga que el coeficiente de transmisión electrónica es e^{-2CL} con $C = 10.0$/nm.

Sección 41.7 El oscilador armónico simple

> *Nota:* El problema 41 del capítulo 16 del volumen I se puede asignar a esta sección.

35. Demuestre que la ecuación 41.26 es una solución de la ecuación 41.24 con una energía $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

36. La función de onda de un oscilador armónico unidimensional es

$$\psi = Axe^{-bx^2}$$

a) Demuestre que ψ satisface la ecuación 41.22. b) Encuentre b y la energía total E. c) ¿Esta función de onda es para un estado fundamental o para un primer estado excitado?

37. Un oscilador armónico simple cuántico consta de un electrón ligado por una fuerza restauradora proporcional a su posición relativa a cierto punto de equilibrio. La constante de proporcionalidad es 8.99 N/m. ¿Cuál es la longitud de onda más larga de luz que puede excitar el oscilador?

38. a) Normalice la función de onda para el estado fundamental de un oscilador armónico simple. Es decir, aplique la ecuación 41.7 a la ecuación 41.26 y encuentre el valor necesario para la constante B, en términos de m, ω y constantes fundamentales. b) Determine la probabilidad de hallar el oscilador en un angosto intervalo $-\delta/2 < x < \delta/2$ alrededor de su posición de equilibrio.

39. Dos partículas con masas m_1 y m_2, que están unidas por un resorte ligero con una constante de fuerza k, vibran a lo largo de una recta con centros de masa fijos. a) Demuestre que la energía total

$$\tfrac{1}{2}m_1u_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2u_2^{\,2} + \tfrac{1}{2}kx^2$$

se puede escribir como $\frac{1}{2}\mu u^2 + \frac{1}{2}kx^2$, donde $u = |u_1| + |u_2|$ es la rapidez *relativa* de las partículas y $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema. Este resultado demuestra que

el par de partículas con vibraciones libres se puede modelar con precisión como una sola partícula que vibra en el extremo de el resorte que tiene fijo su otro extremo. b) Derive la ecuación

$$\tfrac{1}{2}\mu u^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

respecto a x. Siga adelante y demuestre que el sistema ejecuta un movimiento armónico simple. Encuentre su frecuencia.

40. La energía total de un sistema formado por una partícula y un resorte, en el que la partícula se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje x, es

$$E = \frac{p_x^{\,2}}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

donde p_x es la cantidad de movimiento de la partícula y k es la constante del resorte. a) Con el uso del principio de incertidumbre, demuestre que esta expresión también se puede escribir como

$$E \geq \frac{p_x^{\,2}}{2m} + \frac{k\hbar^2}{8p_x^{\,2}}$$

b) Demuestre que la energía mínima del oscilador armónico es

$$E_{\text{mín}} = K + U = \tfrac{1}{4}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Problemas adicionales

41. Al mantener una rapidez constante de 0.8 m/s, una canica rueda en una y otra dirección en una caja de zapatos. Haga una estimación del orden de magnitud de la probabilidad de que pueda escapar a través de la pared de la caja por el efecto de túnel cuántico. Exprese las cantidades que tome como datos y los valores que mida o estime para ellos.

42. Una partícula de masa 2.00×10^{-28} kg está confinada a una caja unidimensional de longitud 1.00×10^{-10} m de longitud. Para $n = 1$, ¿cuáles son a) la longitud de onda de la partícula, b) su cantidad de movimiento y c) su energía de estado fundamental?

43. ● Un electrón está representado por la siguiente función de onda independiente en el tiempo:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-\alpha x} & \text{para } x > 0 \\ Ae^{+\alpha x} & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

a) Trace la función de onda como función de x. b) Trace la densidad de probabilidad que represente la verosimilitud que tiene el electrón de encontrarse entre x y $x + dx$. c) Únicamente un valor infinito de energía potencial puede producir la discontinuidad en la derivada de la función de onda en $x = 0$. A un lado de esta característica argumente que $\psi(x)$ puede ser una función de onda físicamente razonable. d) Normalice la función de onda. e) Determine la probabilidad de hallar el electrón en algún lugar en el intervalo de:

$$x_1 = -\frac{1}{2\alpha} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{1}{2\alpha}$$

44. Compruebe que suponer que $n = 0$ para una partícula cuántica en un pozo de potencial infinitamente profundo conduce a una violación del principio de incertidumbre $\Delta p x\, \Delta x \geq \hbar/2$.

45. Un electrón en un pozo de potencial infinitamente profundo tiene un estado fundamental de 0.300 eV de energía. a) Demuestre que el fotón emitido en una transición desde el estado $n = 3$ hasta el estado $n = 1$ tiene una longitud de onda de 517 nm que hace luz verde visible. b) Halle la longitud de onda y la región espectral para cada una de las otras cinco transiciones que toma lugar entre los cuatro niveles de energía más bajos.

46. Ciertas partículas que inciden desde la izquierda se comparan con el escalón de energía potencial que se muestra en la figura P41.46. Situado en $x = 0$, el escalón tiene una altura U. Las partículas tienen energía $E > U$. Según la mecánica clásica, sería de esperar que todas las partículas siguieran avanzando, aunque con una menor rapidez. De acuerdo con la mecánica cuántica, una parte de las partículas son reflejadas en el escalón. a) Demuestre que el coeficiente de reflexión R para este caso es

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

donde $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ y $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ son los números de onda para las partículas incidentes y transmitidas. Continúe como sigue. Demuestre que la función de onda $\psi_1 = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$ satisface la ecuación de Schrödinger en la región 1, para $x < 0$. En este caso, Ae^{ik_1x} representa el haz incidente y Be^{-ik_1x} las partículas reflejadas. Demuestre que $\psi_2 = Ce^{ik_2x}$ satisface la ecuación de Schrödinger en la región 2, para $x > 0$. Imponga las siguientes condiciones frontera: $\psi_1 = \psi_2$ y $d\psi_1/dx = d\psi_2/dx$ en $x = 0$, para hallar la correspondencia entre B y A. Luego evalúe $R = B^2/A^2$. b) Una partícula que tiene una energía cinética $E = 7.00$ eV incide desde una región donde la energía potencial es cero sobre una en la que $U = 5.00$ eV. Encuentre la probabilidad de que sea reflejada y la probabilidad de que sea transmitida.

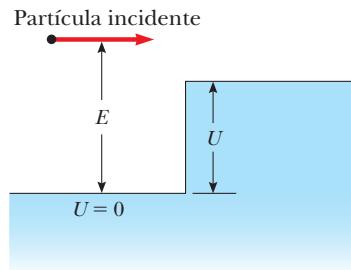



Figura P41.46 Problemas 46 y 47.

47. Ciertas partículas que inciden desde la izquierda se encuentran con un escalón de energía potencial como se muestra en la figura P41.46. El escalón tiene una altura U en $x = 0$ y las partículas tienen una energía $E = 2U$. De manera clásica, todas las partículas pasarían a la región de energía potencial más alta a la derecha. No obstante, según la mecánica cuántica, una parte de las partículas se reflejan en la barrera. Utilice el resultado del problema 46 para determinar la fracción de las partículas incidentes que son reflejadas. (Esta situación es semejante a la reflexión y transmisión parciales de luz que incide en una interfase entre dos medios diferentes.)

48. Un electrón está atrapado en un punto cuántico. El punto cuántico puede ser modelado como una caja unidimensional con paredes rígidas de 1.00 nm de longitud. a) Trace las funciones de onda y densidades de probabilidad para los estados $n = 1$ y $n = 2$. b) Para el estado $n = 1$, calcule la probabilidad de hallar el electrón entre $x_1 = 0.150$ nm y $x_2 = 0.350$ nm, donde $x = 0$ es el lado izquierdo de la caja. c) Repita el inciso b) para el estado $n = 2$. d) Calcule las energías en electrón

volts de los estados $n = 1$ y $n = 2$. *Sugerencia:* Para los incisos b) y c), utilice la ecuación 41.5 y tome nota de que

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax$$

49. Un átomo en un estado excitado de 1.80 eV sobre el estado fundamental permanece en ese estado excitado 2.00 μs antes de pasar al estado fundamental. Encuentre a) la frecuencia y b) la longitud de onda del fotón emitido. c) Encuentre la incertidumbre aproximada en la energía del fotón.

50. Un electrón está confinado a moverse en el plano xy en un rectángulo cuyas dimensiones son L_x y L_y. Es decir, el electrón está atrapado en un pozo de potencial bidimensional que tiene longitudes de L_x y L_y. En esta situación, las energías permitidas del electrón dependen de dos números cuánticos, n_x y n_y. Las energías permitidas se conocen por

$$E = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{n_x^{\,2}}{L_x^{\,2}} + \frac{n_y^{\,2}}{L_y^{\,2}}\right)$$

a) Si $L_x = L_y = L$, encuentre las energías de los cuatro niveles más bajos de energía para el electrón. b) Elabore un diagrama del nivel de energía para el electrón, y determine la diferencia de energía entre el segundo estado excitado y el estado fundamental.

51. Para una partícula cuántica descrita por una función de onda $\psi(x)$, el valor esperado de una cantidad física $f(x)$ asociado con la partícula está definido por

$$\langle f(x)\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x)\psi\, dx$$

Para una partícula en una caja unidimensional que se prolonga de $x = 0$ a $x = L$, demuestre que

$$\langle x^2\rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}$$

52. Una partícula está descrita por la función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) & \text{para } -\dfrac{L}{4} \le x \le \dfrac{L}{4} \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$

a) Determine la constante de normalización A. b) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre entre $x = 0$ y $x = L/8$ si se mide su posición? *Sugerencia:* Use la ecuación 41.6.

53. Una partícula tiene una función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{a}}\, e^{-x/a} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

a) Encuentre y trace la densidad de probabilidad. b) Encuentre la probabilidad de que la partícula esté en cualquier punto donde $x < 0$. c) Demuestre que ψ está normalizada, y luego encuentre la probabilidad de que la partícula esté entre $x = 0$ y $x = a$.

54. Una partícula cuántica de masa m está colocada en una caja unidimensional de longitud L. **¿Qué pasaría si?** La caja es tan pequeña que el movimiento de la partícula es *relativista,* de modo que $K = p^2/2m$ no es válido. a) Deduzca una expresión para hallar los niveles de energía cinética de la partícula. b) Suponga que la partícula se trata de un electrón en una caja de longitud $L = 1.00 \times 10^{-12}$ m. Encuentre su energía cinética más baja posible. ¿Cuál es el porcentaje de error de la ecuación no relativista? *Sugerencia:* Véase la ecuación 39.23.

55. ● Considere un "cristal" formado por dos núcleos y dos electrones, como se muestra en la figura P41.55. a) Tomando en cuenta todos los pares de interacciones, encuentre la energía potencial del sistema como función de d. b) Si se supone que los electrones están restringidos a una caja unidimensional de longitud $3d$, encuentre la energía cinética mínima de los dos electrones. c) Encuentre el valor de d en el cual la energía total es mínima. d) Compare este valor de d con la separación de los átomos en el litio, el cual tiene una densidad de 0.530 g/cm^3 y una masa atómica de 7 u. Este tipo de cálculo se puede usar para estimar la densidad de los cristales y de ciertas estrellas.

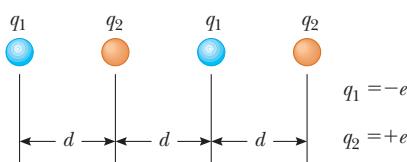



Figura P41.55

56. *Oscilador armónico simple excitado.* La función de onda

$$\psi(x) = Bxe^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$$

es una solución al problema del oscilador armónico simple. a) Encuentre la energía de este estado. b) ¿En qué posición es menos probable encontrarla? c) ¿En qué posiciones es más probable encontrarla? d) Determine el valor de B necesario para normalizar la función de onda. e) **¿Qué pasaría si?** Determine la probabilidad clásica de encontrar la partícula en un intervalo de un pequeño ancho δ centrado en la posición $x = 2(\hbar/m\omega)^{1/2}$. f) ¿Cuál es la probabilidad real de ubicar la partícula en este intervalo?

57. *Normalización de funciones de onda.* a) Encuentre la constante de normalización A para una función de onda formada por los dos estados más bajos de una partícula en una caja:

$$\psi(x) = A\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 4\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

b) Una partícula está descrita en el espacio $-a \le x \le a$ por la función de onda

$$\psi(x) = A\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Determine la correspondencia entre los valores de A y B necesarios para la normalización. *Sugerencia:* Utilice la identidad $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.

58. Las funciones de onda normalizadas para el estado fundamental, $\psi_0(x)$, y el primer estado excitado, $\psi_1(x)$, de un oscilador armónico cuántico son

$$\psi_0(x) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2/2} \qquad \psi_1(x) = \left(\frac{4a^3}{\pi}\right)^{1/4} xe^{-ax^2/2}$$

donde $a = m\omega/\hbar$. Un estado combinado, $\psi_{01}(x)$, se construye a partir de estos estados:

$$\psi_{01}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_0(x) + \psi_1(x)\right]$$

El símbolo $\langle q \rangle_s$ denota el valor esperado de la cantidad q para el estado $\psi_s(x)$. Calcule los siguientes valores esperados: a) $\langle x \rangle_0$, b) $\langle x \rangle_1$ y c) $\langle x \rangle_{01}$.

59. Un experimento de difracción electrónica de dos rejillas se realiza con rejillas de anchos *desiguales*. Cuando sólo la rejilla 1 está abierta, el número de electrones que llegan a la pantalla en un segundo es 25.0 veces el número de electrones que llegan a la pantalla por segundo cuando sólo está abierta la número 2. Cuando ambas están abiertas, se genera un patrón de interferencia en donde la interferencia destructiva no está completa. Encuentre la relación entre la probabilidad de que un electrón llegue a una interferencia máxima a la probabilidad de que un electrón llegue a un mínimo de interferencia adyacente. *Sugerencia:* Utilice el principio de sobreposición.

Respuestas a las preguntas rápidas

41.1 d) La densidad de probabilidad para esta función de onda es $|\psi|^2 = \psi^*\psi = (Ae^{-ikx})(Ae^{ikx}) = A^2$, que es independiente de x. En consecuencia, es igualmente probable que la partícula se encuentre en cualquier valor de x, lo que es consistente con el principio de incertidumbre. Si la longitud de onda se conoce con precisión (de acuerdo con un valor específico de k en la ecuación 41.4), no es posible conocer la posición de la partícula.

41.2 **i)** a) En la ecuación 41.14, resulta $n = 1$ para la energía del estado fundamental lo cual muestra que la energía es inversamente proporcional a la masa de la partícula. **ii)**, d) La longitud de onda está determinada por la longitud L del pozo.

41.3 c) Según la ecuación 41.14, si L aumenta, todas las energías cuantizadas se hacen más pequeñas. Por lo tanto, los niveles de energía se acercan entre sí. Cuando L se muestra macroscópica, los niveles de energía están tan cerca unos con otros que no puede observase el comportamiento cuantizado.

41.4 d) Las partículas en los tres incisos a), b) y c) son parte de un sistema enlazado.

41.5 a), c), f) Disminuir la altura de la barrera y aumentar la energía de la partícula reduce el valor de C en la ecuación 41.23, lo que aumenta el coeficiente de transmisión en la ecuación 41.22. Reducir el ancho L de la barrera aumenta el coeficiente de transmisión en la ecuación 41.22.

Esta calle en el distrito Ginza, en Tokio, despliega muchos letreros formados con lámparas de neón de colores brillantes. La luz de estas lámparas tiene su origen en transiciones entre estados de energía cuantizados en los átomos contenidos en las lámparas. En este capítulo se investigarán dichas transiciones. (© Ken Straiton/Corbis)

42 Física atómica

En el capítulo 41 se presentaron algunos de los conceptos y técnicas básicas empleadas en la mecánica cuántica, junto con sus aplicaciones en diferentes sistemas unidimensionales. En este capítulo se aplica la mecánica cuántica a los sistemas atómicos. Gran parte del capítulo está enfocado a la aplicación de la mecánica cuántica en el estudio del átomo de hidrógeno. Por diferentes razones es importante comprender el átomo de hidrógeno, que es el sistema atómico más simple:

- El átomo de hidrógeno es el único sistema atómico que puede resolverse en forma exacta.
- La mayor parte de lo aprendido durante el siglo XX respecto al átomo de hidrógeno con su electrón único es aplicable a iones de un solo electrón, tales como He^+ y Li^{2+}.
- El átomo de hidrógeno ha demostrado ser un sistema ideal para realizar pruebas precisas de la teoría en comparación con experimentos y para mejorar la comprensión global de la estructura atómica.
- Los números cuánticos utilizados para caracterizar los estados permitidos del hidrógeno también se utilizan para investigar átomos más complejos, y esta descripción permite comprender la tabla periódica de los elementos. Este discernimiento es uno de los más grandes triunfos de la mecánica cuántica.
- Es necesario conocer a fondo los conceptos básicos sobre la estructura atómica, antes de intentar comprender las complejidades de las estructuras moleculares, así como la estructura electrónica de los sólidos.

La solución matemática completa de la ecuación de Schrödinger, aplicada al átomo de hidrógeno, proporciona una descripción completa y armónica de las propiedades del átomo. Sin embargo, porque los procedimientos matemáticos requeridos están fuera del alcance de este libro, se omiten muchos de los detalles. Se estudian las soluciones para ciertos estados del hidrógeno, junto con los números cuánticos empleados para caracterizar los diferentes estados permitidos. Además, se explica el significado físico de los números cuánticos y el efecto de un campo magnético en ciertos estados cuánticos.

En este capítulo aparece un nuevo concepto físico, el *principio de exclusión*. Este principio resulta de enorme importancia para entender las propiedades de los átomos con varios electrones, así como la organización de los elementos en la tabla periódica.

Por último, se aplican los conocimientos adquiridos de la estructura atómica a fin de describir los mecanismos incluidos en la producción de rayos X y la operación de un láser.

42.1 Espectros atómicos de los gases

Como se indicó en la sección 40.1, todos los objetos emiten una radiación térmica, caracterizada por una distribución continua de longitudes de onda. En marcado contraste con este espectro de distribución continua, está el **espectro de línea** discreto que se observa cuando un gas a baja presión se somete a una descarga eléctrica. (La descarga eléctrica se presenta cuando el gas es sometido a una diferencia de potencial que produce un campo eléctrico mayor que la resistencia dieléctrica del gas.) La observación y el análisis de estas líneas espectrales se conoce como **espectroscopia de emisión.**

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 42.1

¿Por qué se les llama líneas?

La expresión "líneas espectrales" se utiliza muy a menudo para describir la radiación a causa de los átomos. Las líneas son visibles porque la luz atraviesa una rejilla larga y muy estrecha para poder ser separada por longitud de onda. Usted verá muchas referencias a estas "líneas" tanto en física como en química.

Cuando se examina la luz de una descarga de gas con un espectrómetro (véase la figura 38.15), es posible ver que está constituida por algunas líneas brillantes de color sobre un fondo por lo general oscuro. Este espectro de línea discreto difiere en gran medida del arco iris continuo de colores observado cuando se examina un sólido resplandeciente con el mismo instrumento. La figura 42.1a muestra que las longitudes de onda contenidas en un espectro de línea particular son características del elemento que emite la luz. El espectro de línea más simple, que se describe con detalle, es el del átomo de hidrógeno. Porque que no hay dos elementos que tengan el mismo espectro de línea este fenómeno es una técnica práctica y sensible para identificar los elementos que están presentes en muestras desconocidas.

Otra forma de la espectroscopia, muy útil para analizar sustancias, es la **espectroscopia de absorción.** Un espectro de absorción se obtiene al pasar una luz blanca de una fuente continua a través de un gas o una solución diluida del elemento que se está analizando. Un espectro de absorción está constituido por una serie de líneas oscuras sobre-

Figura 42.1 a) Espectros de líneas de emisión para el hidrógeno, el mercurio y el neón. b) Espectro de absorción del hidrógeno. Observe que la líneas oscuras de absorción se presentan en las mismas longitudes de onda que las líneas de emisión del hidrógeno en a). (K.W. Whitten, R.E. Davis, M.L. Peck y G.G. Stanley, *General Chemistry*, 7a. Edición, Belmont, CA, Brooks/Cole, 2004.)

puestas al espectro continuo de la fuente de luz, como se muestra en la figura 42.1b para el hidrógeno atómico.

El espectro de absorción de un elemento tiene muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, el espectro continuo de la radiación emitida por el Sol debe pasar a través de los gases más fríos de la atmósfera solar. Las diferentes líneas de absorción observadas en el espectro solar han servido para identificar elementos en la atmósfera del Sol. En los primeros estudios del espectro solar, los científicos descubrieron que ciertas líneas no coincidían con ningún elemento conocido. ¡Se había descubierto un nuevo elemento! Este nuevo elemento fue llamado helio, por la palabra en griego para Sol, *helios.* El helio fue aislado posteriormente en los gases subterráneos de la Tierra.

Con esta técnica los científicos han podido examinar la luz desde otras estrellas, aunque nunca se han detectado elementos distintos de aquellos presentes en la Tierra. La espectroscopia de absorción también ha resultado útil para analizar la contaminación por metales pesados de la cadena alimenticia. Por ejemplo, la primera determinación de altos niveles de mercurio en el atún fue realizada mediante la espectroscopia de absorción atómica.

Las emisiones discretas de luz a causa de las descargas de gas se utilizan en los letreros de "neón" como los que aparecen en la fotografía al inicio de este capítulo. El neón, el primer gas utilizado en este tipo de letreros y la causa de su nombre, emite poderosas radiaciones en la región roja del espectro. Como resultado, un tubo de vidrio lleno con gas neón emite una brillante luz roja cuando el voltaje aplicado provoca una descarga continua. Los primeros letreros utilizaban diferentes gases para producir distintos colores, aunque su brillo era por lo general mucho menor. Muchos de los letreros de "neón" actuales contienen vapor de mercurio, que emite una fuerte luz en la región ultravioleta del espectro electromagnético. El interior del tubo de vidrio está cubierto con un material que emite un color en particular al absorber la radiación ultravioleta del mercurio. El color de la luz que emite el tubo depende del material escogido. Las luces fluorescentes domésticas funcionan de la misma manera, con un recubrimiento de material que emite luz blanca en el interior del tubo de vidrio.

Figura 42.2 Serie de Balmer de líneas espectrales para el átomo de hidrógeno, con varias líneas que indican la longitud de onda en nanómetros. (El eje de la longitud de onda horizontal no está a escala.) La línea marcada como 364.6 es la longitud de onda más corta y se encuentra en la región ultravioleta del espectro electromagnético. Las demás líneas se encuentran dentro de la región visible.

Entre los años 1860 y 1885, por medio de mediciones espectroscópicas, los científicos acumularon gran cantidad de datos sobre las emisiones atómicas. En 1885, un maestro de escuela suizo, Johann Jacob Balmer (1825-1898), descubrió una ecuación empírica que predecía correctamente las longitudes de onda de cuatro líneas de emisión visibles del hidrógeno: H_α (rojo), H_β (azul-verde), H_γ (azul-violeta) y H_δ (violeta). La figura 42.2 muestra estas y otras líneas (en la región ultravioleta) en el espectro de emisión del hidrógeno. Las cuatro líneas visibles se presentan en las longitudes de onda de 656.3 nm, 486.1 nm, 434.1 nm y 410.2 nm. El conjunto completo de líneas se conoce como la **serie de Balmer.** Las longitudes de onda de estas líneas pueden describirse mediante la siguiente ecuación, la cual es una modificación realizada por Johannes Rydberg (1854-1919) a la ecuación original de Balmer:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 3, 4, 5, \ldots \qquad (42.1)$$

◀ Serie de Balmer

en donde R_H es una constante conocida como la **constante de Rydberg.** con un valor de $1.097\,373\,2 \times 10^7\ m^{-1}$. Los valores enteros de n variaban entre 3 y 6 para producir las cuatro líneas visibles entre 656.3 nm (rojo) y 410.2 nm (violeta). La ecuación 42.1 además describe las líneas ultravioletas del espectro en la serie de Balmer cuando n tiene un valor mayor a $n = 6$. El **límite de la serie** es la longitud de onda más corta en la serie y corresponde a $n \to \infty$, con una longitud de onda de 364.6 nm, como se muestra en la figura 42.2. Las líneas espectrales observadas coinciden con la ecuación empírica, la ecuación 42.1, dentro de 0.1 por ciento.

Otras líneas espectrales del hidrógeno fueron encontradas después del descubrimiento de Balmer. Estos espectros se conocen como las series Lyman, Paschen y Brackett, en honor a sus respectivos descubridores. Las longitudes de onda de estas series se calculan al aplicar las siguientes ecuaciones empíricas:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 2, 3, 4, \ldots \qquad (42.2)$$

◀ Serie de Lyman

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 4, 5, 6, \ldots \qquad (42.3)$$

◀ Serie de Paschen

Serie de Brackett

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 5, 6, 7, \ldots \qquad \textbf{(42.4)}$$

No existe una base teórica para las ecuaciones anteriores; simplemente funcionan. En las cuatro ecuaciones aparece la misma constante R_H y las ecuaciones tienen enteros pequeños. En la sección 42.3 se explica el notable logro en la teoría del átomo del hidrógeno que hizo posible obtener una explicación para estas ecuaciones.

42.2 Los primeros modelos del átomo

JOSEPH JOHN THOMSON
Físico inglés (1856–1940)
Premio Nobel de física en 1906, Thompson es considerado el descubridor del electrón. Su estudio de la deflexión de los rayos catódicos (electrones) en un campo eléctrico inició el campo de la física de las partículas subatómicas.

En la época de Newton el átomo estaba modelado como un esfera diminuta, dura e indestructible. Si bien este modelo proporcionó una buena base para la teoría cinética de los gases, fue necesario diseñar nuevos modelos cuando los experimentos revelaron la naturaleza eléctrica de los átomos. En 1897, J. J. Thomson estableció la relación carga a masa para los electrones. (Véase la figura 29.14 en la sección 29.3.) El año siguiente propuso un modelo que describe al átomo como una región en la cual una carga positiva está dispersa en el espacio, con electrones incrustados por toda la región, en forma muy similar a las semillas dentro de una sandía o las pasas dentro de un pan (figura 42.3). De esta forma, el átomo como entidad sería eléctricamente neutro.

En 1911, Ernest Rutherford (1871-1937), junto con sus estudiantes Hans Geiger y Ernest Marsden, realizó un experimento que demostró que el modelo de Thomson podría no ser correcto. En este experimento proyectaron un haz de partículas alfa con carga positiva (núcleos de helio) hacia una delgada hoja de metal, como objetivo en la figura 42.4a. La mayor parte de las partículas atravesaron la hoja como si se tratara de espacio vacío, pero algunos de los resultados del experimento fueron sorprendentes. Muchas de las partículas desviadas de su trayectoria original se dispersaban en ángulos *muy grandes.* ¡Algunas partículas incluso eran desviadas hacia atrás, invirtiendo por completo la dirección de su trayectoria! Cuando Geiger informó a Rutherford que algunas de las partículas alfa eran dispersadas hacia atrás, Rutherford escribió: "Fue probablemente el evento más increíble que me ha ocurrido en la vida. Fue casi tan increíble como disparar una bala (de artillería) de 15 pulgadas sobre papel tisú, y que regresara para golpearte".

Estas deflexiones tan grandes no eran predichas por el modelo de Thomson. De acuerdo con este modelo, la carga positiva de un átomo en la hoja de metal se dispersa en un volumen tan grande (todo el átomo) que no existe una concentración de cargas positivas lo suficientemente fuertes para causar deflexiones importantes de las partículas alfa con cargas positivas. Es más, los electrones tienen tan poca masa en comparación con las partículas alfa que tampoco producirían estas grandes dispersiones en ángulos amplios. Rutherford explicó sus sorprendentes resultados al desarrollar un nuevo modelo atómico, que suponía que la carga positiva en el átomo estaba concentrada en una región reducida en comparación con el tamaño de éste. Rutherford llamó a esta concentración de carga positiva el **núcleo** del átomo. Se hace la suposición de

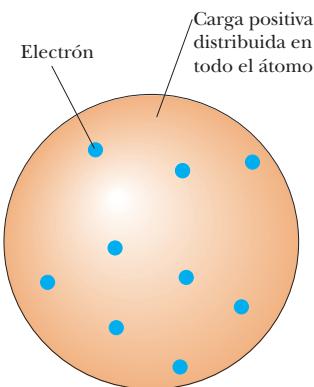
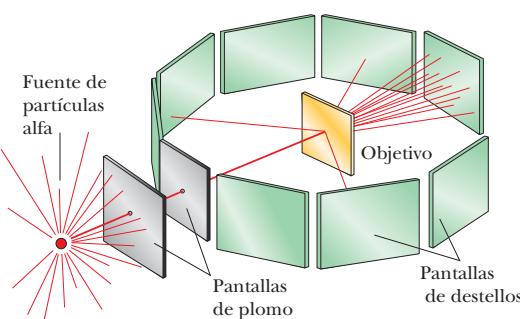
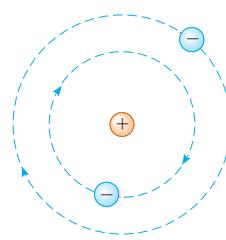



Figura 42.3 Modelo del átomo de Thomson: electrones con carga negativa dentro de un volumen de carga positiva continua.

Figura 42.4 a) Técnica de Rutherford para observar la dispersión de partículas alfa de una delgada hoja objetivo. La fuente es una sustancia radiactiva que ocurre naturalmente, como el radio. b) Modelo planetario del átomo de Rutherford.

que todos los electrones pertenecientes al átomo se encuentran en un volumen relativamente grande fuera del núcleo. Para explicar la razón por la cual los electrones no son atraídos hacia el núcleo debido a la fuerza de atracción eléctrica, Rutherford los representó moviéndose en órbitas alrededor del núcleo de la misma forma en que los planetas giran alrededor del Sol (figura 42.4b). Por esta causa, con frecuencia el modelo se conoce como el modelo planetario del átomo.

Existen dos dificultades básicas con el modelo planetario de Rutherford. Como vio en la sección 42.1, un átomo emite (y absorbe) ciertas frecuencias características de radiación electromagnética y no otras; pero el modelo de Rutherford no puede explicar este fenómeno. La segunda dificultad es que los electrones de Rutherford están sometidos a la aceleración centrípeta. De acuerdo con la teoría del electromagnetismo de Maxwell, las cargas aceleradas de forma centrípeta con una frecuencia f deberían emitir ondas electromagnéticas con una frecuencia f. Por desgracia, este modelo clásico conduce a una predicción de autodestrucción cuando se le aplica al átomo. Conforme el electrón emite, la energía es llevada más allá del átomo, el radio de la órbita del electrón disminuye gradualmente, y su frecuencia de revolución se incrementa. Este proceso conduciría a una frecuencia siempre creciente de la radiación emitida y al colapso final del átomo cuando el electrón se precipita hacia el núcleo (figura 42.5).

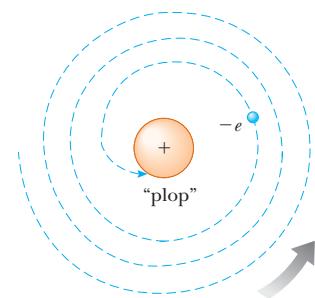



Figura 42.5 Modelo clásico del núcleo del átomo. Debido a que el electrón acelerado emite energía, la órbita decae hasta que éste se precipita hacia el núcleo.

42.3 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno

Dado el caso descrito en el final de la sección 42.2, todo estaba listo para que Niels Bohr en 1913 presentara un nuevo modelo del átomo de hidrógeno que evita las dificultades del modelo planetario de Rutherford. Bohr aplicó las nociones de los niveles cuantizados de energía de Planck (sección 40.1) para los electrones atómicos en órbita. La teoría de Bohr fue históricamente importante para el desarrollo de la física cuántica, y parece explicar las series de líneas espectrales descritas por las ecuaciones 42.1 a 42.4. A pesar de que este modelo hoy se considera obsoleto y ha sido completamente reemplazado por una teoría mecánica cuántica probabilística, es posible utilizar este modelo para desarrollar los conceptos de la cuantización de la energía y de la cantidad de movimiento angular como se aplica en sistemas a nivel atómico.

Bohr combinó las ideas de la teoría cuántica original de Planck, el concepto de Einstein del fotón, el modelo planetario de Rutherford del átomo y la mecánica newtoniana para llegar a un modelo semiclásico en términos de algunos postulados revolucionarios. Las ideas básicas de la teoría de Bohr, según se aplican al átomo de hidrógeno, son las que siguen:

1. El electrón se mueve en órbitas circulares alrededor del protón bajo la influencia de fuerza eléctrica de atracción, como se muestra en la figura 42.6.

2. Sólo ciertas órbitas del electrón son estables. Cuando está en alguno de estos **estados estacionarios,** como los llamaba Bohr, el electrón no emite energía en forma de radiación. En consecuencia, la energía total del átomo permanece constante y puede utilizarse la mecánica clásica para describir el movimiento del electrón. El modelo de Bohr afirma que el electrón acelerado de manera centrípeta no emite radiación continua, perdiendo energía y finalmente girando en los núcleos, como predijo la física clásica según el modelo planetario de Rutherford.

3. La radiación es emitida por el átomo cuando el electrón hace una transición de una órbita inicial más energética a una órbita de menor energía. Esta transición no puede visualizarse ni tratarse de manera clásica. En particular, la frecuencia f del fotón emitida en la transición se relaciona con el cambio en la energía del átomo y no es igual a la frecuencia del movimiento orbital del electrón. La frecuencia de la radiación emitida se determina por la expresión de la conservación de energía

$$E_i - E_f = hf \tag{42.5}$$

donde E_i es la energía en el estado inicial, E_f es la energía en el estado final, y $E_i > E_f$. Además, la energía en un fotón incidente puede ser absorbida por el átomo, pero sólo si el fotón tiene una energía que iguala de manera exacta la diferencia en energía entre un estado permitido del átomo y un estado de energía superior.

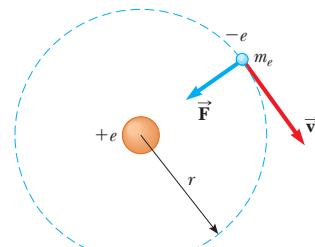



Figura 42.6 Diagrama que representa el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno. El electrón girando sólo puede estar en órbitas específicas de radios discretos.

Foto cortesía de AIP Niels Bohr Library, Margarethe Bohr Collection

NIELS BOHR
Físico danés (1885-1962)
Bohr fue un activo participante en el temprano desarrollo de la mecánica cuántica y aportó gran parte de su estructura filosófica. Durante los años 20 y 30 dirigió el Instituto para Estudios Avanzados en Copenhague. El instituto fue un imán para los mejores físicos del mundo y proporcionó un foro para el intercambio de ideas. Cuando Bohr visitó Estados Unidos en 1939 para asistir a una conferencia científica, trajo noticias sobre la fisión del uranio, que había sido observada por Hahn y Strassman en Berlín. Los resultados fueron los cimientos del arma nuclear desarrollada en Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial. A Bohr se le otorgó el premio Nobel de física en 1922 por su investigación sobre la estructura de los átomos y la radiación emanada por éstos.

Una vez ocurrida la absorción, el fotón desaparece y el átomo hace una transición al estado de energía superior.

4. El tamaño de la órbita permitida del electrón queda determinado por una condición impuesta sobre la cantidad de movimiento angular orbital del electrón: las órbitas permitidas son aquellas para las cuales la cantidad de movimiento angular orbital del electrón en relación con el núcleo se cuantiza y es igual a un múltiplo entero de $\hbar = h/2\pi$,

$$m_e vr = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{42.6}$$

donde m_e es la masa del electrón, v la rapidez del electrón en su órbita y r es el radio orbital.

La suposición 3 implica cualitativamente la existencia de un espectro de línea de emisión característico discreto *y también* un correspondiente espectro de línea de absorción del tipo que se muestra en la figura 42.1 para el hidrógeno. Con estas cuatro suposiciones, se calculan los niveles de energía permitidos y los valores cuantitativos de las longitudes de onda de las emisiones del átomo de hidrógeno.

La energía potencial eléctrica del sistema que se muestra en la figura 42.6 se conoce por la ecuación 25.13, $U = k_e q_1 q_2/r = -k_e e^2/r$, donde k_e es la constante de Coulomb y el signo negativo surge de la carga $-e$ del electrón. Por lo tanto, la energía *total* del átomo, la cual está constituida por la energía cinética del electrón y la energía potencial del sistema, es

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}m_e v^2 - k_e \frac{e^2}{r} \tag{42.7}$$

El electrón es una partícula en movimiento circular uniforme, así que la fuerza eléctrica $k_e e^2/r^2$ ejercida sobre el electrón debe ser igual al producto de su masa y su aceleración centrípeta ($a_c = v^2/r$):

$$\frac{k_e e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{k_e e^2}{m_e r} \tag{42.8}$$

Por la ecuación 42.8, la energía cinética del electrón es igual a

$$K = \tfrac{1}{2}m_e v^2 = \frac{k_e e^2}{2r}$$

Al sustituir este valor de K en la ecuación 42.7, se encuentra que la energía total del átomo es igual a[1]

$$E = -\frac{k_e e^2}{2r} \tag{42.9}$$

Porque la energía total es *negativa*, lo que indica un sistema electrón y protón unidos, es necesario adicionarle al átomo energía en la cantidad de $k_e e^2/2r$ para remover el electrón y hacer que la energía total del sistema sea igual a cero.

Para obtener una expresión para r, los radios de las órbitas permitidas, resuelva las ecuaciones 42.6 en función de v^2 e igualando los resultados con la ecuación 42.8:

$$v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m_e^2 r^2} = \frac{k_e e^2}{m_e r}$$

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{m_e k_e e^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{42.10}$$

[1] Compare la ecuación 42.9 con su contraparte gravitacional, la ecuación 13.18.

La ecuación 42.10 muestra que los radios de las órbitas permitidas tienen valores discretos: están cuantizados. El resultado es con base en la *suposición* de que el electrón sólo puede existir en ciertas órbitas permitidas determinadas por el entero n.

La órbita con el radio más pequeño, llamado el **radio de Bohr** a_0, corresponde a $n = 1$ y tiene el valor

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k_e e^2} = 0.052\,9 \text{ nm} \qquad \textbf{(42.11)}$$

◀ Radio de Bohr

Al sustituir la ecuación 42.11 en la ecuación 42.10 se obtiene la expresión general para el radio de cualquier órbita en el átomo de hidrógeno:

$$r_n = n^2 a_0 = n^2(0.052\,9 \text{ nm}) \qquad \textbf{(42.12)}$$

◀ Radios de órbitas de Bohr para el hidrógeno

La teoría de Bohr predice el valor del radio de un átomo de hidrógeno con un orden correcto de magnitud, en términos de mediciones experimentales. Este resultado fue un triunfo impactante para la teoría de Bohr. En la figura 42.7 se muestran a escala las primeras tres órbitas de Bohr.

La cuantización de los radios de la órbita conduce a la cuantización de la energía. Al sustituir $r_n = n^2 a_0$ en la ecuación 42.9, obtiene

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(42.13)}$$

◀ Energías permitidas del átomo de hidrógeno de Bohr

Al insertar valores numéricos a la expresión, se tiene

$$E_n = -\frac{13.606 \text{ eV}}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(42.14)}$$

Sólo las energías que satisfagan esta ecuación están permitidas. El nivel de energía más bajo, el estado fundamental, tiene $n = 1$ y una energía $E_1 = -13.606$ eV. El siguiente nivel de energía, el primer estado excitado, tiene $n = 2$ y una energía $E_2 = E_1/2^2 = -3.401$ eV. La figura 42.8 es un diagrama de los niveles de energía, que muestra las energías de estos estados de energía discretos y los números cuánticos n correspondientes. El nivel más alto, corresponde a $n = \infty$ (o $r = \infty$) y $E = 0$.

Note cómo las energías permitidas del átomo de hidrógeno difieren de las de la partícula en una caja. Las energías de partícula en una caja (ecuación 41.14) aumenta con n^2, de modo que se separan más en energía conforme n aumenta. Por otra parte, las energías del átomo de hidrógeno (ecuación 42.14) varían inversamente con n^2, de modo que su separación en energía se vuelve más pequeña conforme n aumenta. La separación entre niveles de energía tiende a cero conforme n tiende a infinito y la energía tiende a cero.

La energía cero representa la frontera entre un sistema enlazado de un electrón y un protón y un sistema no enlazado. Si la energía del átomo se eleva del estado fundamental a cualquier energía mayor que cero, el átomo está **ionizado**. La energía mínima necesaria para ionizar el átomo en su estado fundamental se conoce como **energía de ionización.** Como puede verse en la figura 42.8, la energía de ionización del hidrógeno en el estado

Figura 42.8

Diagrama de los niveles de energía para el átomo de hidrógeno. Los números cuánticos están dados a la izquierda y las energías (en electrón volts) a la derecha. Las flechas verticales representan las cuatro transiciones de energía más bajas para cada una de las series espectrales mostradas. Las flechas de colores para la serie de Balmer indican que estas series se presentan en la luz visible.

Figura 42.7

Primeras tres órbitas del átomo de hidrógeno circulares que predice el modelo de Bohr.

fundamental, de acuerdo con los cálculos de Bohr, es de 13.6 eV. Esto ha representado otro logro importante de la teoría de Bohr, ya que había sido medida la energía de ionización para el hidrógeno como 13.6 eV.

Las ecuaciones 42.5 y 42.13 pueden utilizarse para calcular la frecuencia del fotón emitido cuando el electrón hace una transición de una órbita exterior a una interior:

Frecuencia de un fotón emitido por el hidrógeno ▶

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h}\left(\frac{1}{n_f^{\,2}} - \frac{1}{n_i^{\,2}}\right) \quad \textbf{(42.15)}$$

Porque la cantidad observada experimentalmente es la longitud de onda, resulta conveniente utilizar $c = f\lambda$ y expresar la ecuación 42.15 en función de la longitud de onda:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{k_e e^2}{2a_0 hc}\left(\frac{1}{n_f^{\,2}} - \frac{1}{n_i^{\,2}}\right) \quad \textbf{(42.16)}$$

Un hecho notable es que esta expresión, que es simplemente teórica, es *idéntica* a la forma general de las correspondencias empíricas descubiertas por Balmer y Rydberg, que aparecen en las ecuaciones 42.1 a 42.4,

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{n_f^{\,2}} - \frac{1}{n_i^{\,2}}\right) \quad \textbf{(42.17)}$$

siempre que la constante $k_e e^2/2a_0 hc$ sea igual a la constante de Rydberg, obtenida en forma experimental. No mucho después de que Bohr demostró que estas dos cantidades coinciden con una aproximación de 1%, este trabajo fue reconocido como el logro que coronaba su nueva teoría cuántica del átomo de hidrógeno. Además, Bohr demostró que todas las series espectrales del hidrógeno tienen una interpretación natural en su teoría. Las diferentes series corresponden a las transiciones a diferentes estados finales caracterizados por el número cuántico n_f. La figura 42.8 muestra el origen de estas series espectrales como transiciones entre niveles de energía.

Bohr extendió de inmediato su modelo para el hidrógeno a otros elementos, en los cuales se habían retirado todos los electrones, menos uno. Estos sistemas tienen la misma estructura que el átomo de hidrógeno, con excepción de la carga nuclear, que es mayor. Se sospechaba la existencia de elementos ionizados, tales como He^{+}, Li^{2+} y Be^{3+}, en atmósferas estelares ardientes, donde las colisiones atómicas con frecuencia tienen suficiente energía para eliminar por completo uno o más electrones atómicos. Bohr demostró que muchas líneas misteriosas observadas en los espectros del Sol y de varias otras estrellas no podían deberse al hidrógeno, sino que, como predijo correctamente en su teoría, las atribuía simplemente al helio ionizado. En general, el número de protones en el núcleo de un átomo se conoce como **número atómico** de los elementos y está dado por el símbolo Z. Para describir un solo electrón en órbita alrededor de un núcleo fijo de carga $+Ze$, la teoría de Bohr da

$$r_n = (n^2)\frac{a_0}{Z} \quad \textbf{(42.18)}$$

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\left(\frac{Z^2}{n^2}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{(42.19)}$$

Si bien la teoría de Bohr era exitosa en cuanto a que coincidía con algunos resultados experimentales con el átomo de hidrógeno, también sufría de algunas inconsistencias. Una de las primeras indicaciones de que la teoría de Bohr necesitaba modificarse se presentó cuando se emplearon técnicas espectroscópicas mejoradas para examinar las líneas espectrales del hidrógeno. Se descubrió que muchas de las líneas de la serie de Balmer y otras no eran de ninguna manera líneas sencillas. Por el contrario, cada una de ellas era un grupo de líneas muy cercanas entre sí. Además, surgió una dificultad adicional cuando se observó que, en algunas situaciones, ciertas líneas espectrales sencillas se dividían en tres líneas muy cercanas entre sí cuando se colocaba a los átomos en un campo magnético poderoso. Los esfuerzos realizados para explicar estas y otras desviaciones del modelo de Bohr llevaron a modificaciones a la teoría y, con el tiempo, a una teoría de reemplazo que se explica en la sección 42.4.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 42.2

El modelo de Bohr es fantástico, pero ...

El modelo de Bohr predice correctamente la energía de ionización para el hidrógeno y las características generales del espectro del hidrógeno, pero no toma en cuenta los espectros de átomos más complejos y es incapaz de predecir muchos de los detalles sutiles del espectro del hidrógeno y de otros átomos simples. Experimentos de dispersión muestran que el electrón en un átomo de hidrógeno no se mueve en un círculo plano alrededor del núcleo. Más bien, el átomo es eférico. La cantidad de movimiento angular del átomo en el estado fundamental es cero y no $\hbar$.

Principio de correspondencia de Bohr

Cuando se estudió la relatividad se determinó que la mecánica newtoniana es un caso especial de la mecánica relativista y sólo es utilizable cuando v es mucho menor que c. De manera similar, **la física cuántica está de acuerdo con la física clásica cuando la diferencia entre los niveles cuantizados se desvanecen.** Este principio, establecido por primera vez por Bohr, se llama **principio de correspondencia.**[2]

Por ejemplo, considere un electrón que gira alrededor del átomo de hidrógeno con $n > 10\,000$. Para estos valores tan grandes de n, las diferencias de energía entre niveles adyacentes tiende a cero y, por tanto, los niveles son prácticamente continuos. En consecuencia, el modelo clásico tiene una precisión razonable al describir el sistema para valores grandes de n. De acuerdo con la imagen clásica, la frecuencia de la luz emitida por el átomo es igual a la frecuencia de revolución de los electrones en sus órbitas alrededor del núcleo. Los cálculos muestran que para $n > 10\,000$, esta frecuencia difiere de la calculada por la mecánica cuántica en menos de 0.015%.

Pregunta rápida 42.1 Un átomo de hidrógeno está en su estado fundamental. Sobre el átomo inciden muchos fotones, cada uno con una energía de 10.5 eV. ¿Cuál es el resultado? a) el átomo es excitado a un nivel superior permitido, b) el átomo se ioniza o c) los fotones pasan por el átomo sin interactuar.

Pregunta rápida 42.2 Un átomo de hidrógeno hace una transición desde el nivel $n = 3$ al nivel $n = 2$. Después hace una transición del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$. ¿Qué transición da como resultado la emisión de un fotón con una longitud de onda más larga? a) La primera transición, b) la segunda transición o c) ninguna, debido a que las longitudes de onda son las mismas en ambas transiciones.

EJEMPLO 42.1 Transiciones electrónicas en el hidrógeno

A) El electrón en un átomo de hidrógeno hace una transición del nivel de energía $n = 2$ al nivel fundamental ($n = 1$). Encuentre la longitud de onda y la frecuencia del fotón emitido.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine al electrón en una órbita circular alrededor del núcleo, como en el modelo de Bohr en la figura 42.6. Cuando el electrón realiza una transición hacia un nivel estacionario inferior, emite un fotón con una frecuencia determinada.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 42.17 para obtener λ, con $n_i = 2$ y $n_f = 1$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3R_H}{4}$$

$$\lambda = \frac{4}{3R_H} = \frac{4}{3(1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})} = 1.22 \times 10^{-7}\ \text{m} = \boxed{122\ \text{nm}}$$

Use la ecuación 34.20 para encontrar la frecuencia del fotón:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}{1.22 \times 10^{-7}\ \text{m}} = \boxed{2.47 \times 10^{15}\ \text{Hz}}$$

B) En el espacio interestelar se han observado átomos de hidrógeno enormemente excitados, llamados átomos de Rydberg. Encuentre la longitud de onda a la que los radioastrónomos deben sintonizar para detectar señales de electrones que caen del nivel $n = 273$ al nivel $n = 272$.

[2] El principio de correspondencia es en realidad el punto de partida del postulado 4 de Bohr respecto a la cuantización de la cantidad de movimiento angular. Para ver cómo surge el postulado 4 del principio de correspondencia, véase de J. W. Jewett, *Physics Begins With Another M . . . Mysteries, Magic, Myth, and Modern Physics* (Boston, Allyn & Bacon, 1996), pp. 353-356.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 42.17, esta vez con $n_i = 273$ y $n_f = 272$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = R_H\left(\frac{1}{(272)^2} - \frac{1}{(273)^2}\right) = 9.88 \times 10^{-8}R_H$$

Resuelva para λ:

$$\lambda = \frac{1}{9.88 \times 10^{-8}R_H} = \frac{1}{(9.88 \times 10^{-8})(1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1})} = \boxed{0.922 \text{ m}}$$

C) ¿Cuál es el radio de la órbita del electrón para un átomo de Rydberg para el que $n = 273$?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 42.12 para encontrar el radio de la órbita:

$$r_{273} = (273)^2(0.052\,9 \text{ nm}) = \boxed{3.94\ \mu\text{m}}$$

¡Este radio es suficientemente grande para que el átomo esté a punto de volverse macroscópico!

D) ¿Qué tan rápido se mueve el electrón en un átomo de Rydberg para el que $n = 273$?

SOLUCIÓN

Resuelva la ecuación 42.8 para la rapidez del electrón:

$$v = \sqrt{\frac{k_e e^2}{m_e r}} = \sqrt{\frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.94 \times 10^{-6} \text{ m})}}$$

$$= \boxed{8.02 \times 10^3 \text{ m/s}}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si la radiación del átomo de Rydberg en el inciso B) se trata según la teoría clásica? ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación emitida por el átomo en el nivel $n = 273$?

Respuesta Desde la perspectiva clásica, la frecuencia de la radiación emitida es la de la rotación del electrón alrededor del núcleo.

Calcule esta frecuencia con el periodo definido en la ecuación 42.15:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}$$

Sustituya el radio y la rapidez de los incisos C) y D):

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{8.02 \times 10^3 \text{ m/s}}{2\pi(3.94 \times 10^{-6} \text{ m})} = 3.24 \times 10^8 \text{ Hz}$$

Encuentre la longitud de onda de la radiación a partir de la ecuación 34.20:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{3.24 \times 10^8 \text{ Hz}} = 0.926 \text{ m}$$

Este valor es menos de 0.5% diferente de la longitud de onda calculada en el inciso B). Como se indicó en el análisis del principio de correspondencia de Bohr, esta diferencia se vuelve incluso menor para valores mayores de n.

42.4 Modelo cuántico del átomo de hidrógeno

En la sección anterior se describió la forma en que el modelo de Bohr considera al electrón una partícula en órbita alrededor del núcleo en niveles de energía cuantizados no radiantes. Este planteamiento lleva a un análisis que combina conceptos clásicos y cuánticos. Si bien en algunos resultados experimentales el modelo coincide con éxito, no es capaz de explicar otros resultados. Estas dificultades se eliminan cuando se utiliza un modelo completamente cuántico que incluya la ecuación de Schrödinger, para describir el átomo de hidrógeno.

El procedimiento formal para resolver el problema del átomo de hidrógeno es sustituir la función de energía potencial adecuada en la ecuación de Shcrödinger, encontrar soluciones a la ecuación y aplicar condiciones frontera como se hizo para la partícula en una caja del capítulo 41. La función de energía potencial para el átomo de hidrógeno se debe a la interacción eléctrica entre el electrón y el protón:

$$U(r) = -k_e \frac{e^2}{r} \qquad \textbf{(42.20)}$$

donde $k_e = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ la constante Coulomb y r la distancia radial desde el protón (situado en $r = 0$) y el electrón.

Figura 42.9 Un punto P en el espacio se localiza por medio de un vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$. En coordenadas cartesianas, las componentes de este vector son x, y y z. En coordenadas polares esféricas, el punto queda definido por r, es decir, la distancia desde el origen; θ, el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y el eje de las z, y ϕ, el ángulo entre el eje de las x y una proyección de $\vec{\mathbf{r}}$ sobre el plano xy.

El procedimiento matemático para el problema del átomo de hidrógeno es más complicado que para una partícula en una caja, porque el átomo es tridimensional y U depende de la coordenada radial r. Si se amplía la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (ecuación 41.15), a coordenadas rectangulares tridimensionales, el resultado es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + U\psi = E\psi$$

Es fácil resolver esta ecuación para el átomo de hidrógeno si las coordenadas rectangulares se convierten a coordenadas polares esféricas, una ampliación de las coordenadas polares planas presentadas en la sección 3.1. En coordenadas polares esféricas, un punto en el espacio se representa por las tres variables r, θ y ϕ, donde r es la distancia radial desde el origen, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Con el punto representado al extremo de un vector de posición $\hat{\mathbf{r}}$, como se muestra en la figura 42.9, la coordenada angular θ define su posición angular respecto al eje z. Una vez proyectado el vector de posición sobre el plano xy, la coordenada angular ϕ define la posición angular de la proyección (y por lo tanto del punto) respecto al eje x.

La conversión de la ecuación de Schrödinger tridimensional independiente del tiempo para $\psi(x, y, z)$ a la forma equivalente para $\psi\ (r, \theta, \phi)$ es simple pero muy tediosa, y aquí se omiten los detalles.[3] En el capítulo 41 se separó la dependencia con el tiempo de la dependencia con el espacio en la función general de la onda, Ψ. En este caso del átomo de hidrógeno se separan las tres variables del espacio al escribir la función de onda como el producto de las funciones de cada variable individual:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)f(\theta)g(\phi)$$

De esta manera, la ecuación de Schrödinger, que es una ecuación diferencial parcial tridimensional puede transformarse en tres ecuaciones diferenciales ordinarias: una para $R(r)$, otra para $f(\theta)$ y una más para $g(\phi)$. Cada una de estas funciones está sujeta a condiciones frontera. Por ejemplo, $R(r)$ debe permanecer finita conforme $r \to 0$ y $r \to \infty$, y $g(\phi)$ debe tener el mismo valor que $g(\phi + 2\pi)$.

La función de energía potencial dada en la ecuación 42.20 *sólo* depende de la coordenada radial r y no de cualquiera de las coordenadas angulares; por lo tanto, sólo aparece en la ecuación para $R(r)$. Como resultado, las ecuaciones para θ y ϕ son independientes del sistema particular y sus soluciones son válidas para *cualquier* sistema que muestre rotación.

Cuando se le aplica el conjunto completo de condiciones frontera a las tres funciones, se obtienen tres distintos números cuánticos para cada estado permitido del átomo de hidrógeno, uno para cada ecuación diferencial. Dichos números cuánticos están restringidos a valores enteros y deben corresponder a los tres grados de libertad independientes (tres dimensiones espaciales).

El primer número cuántico, asociado con la función radial $R(r)$ de la función ondulatoria completa, es conocido como **número cuántico principal** y se le asigna el símbolo n. La ecuación diferencial para $R(r)$ lleva a funciones que dan la probabilidad de encontrar el electrón a una cierta distancia radial del núcleo. En la sección 42.5 se describen

[3] Las descripciones de las soluciones a la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno están disponibles en libros de física moderna, como en R. A. Serway, C. Moses y C. A. Moyer, *Física moderna*, 3a. edición, Belmont, CA: Brooks/Cole, 2005.

dos de estas funciones de ondas radiales. Las energías de los estados permitidos para el átomo de hidrógeno se determinan al relacionar n como

Energías permitidas del átomo cuántico de hidrógeno

$$E_n = -\left(\frac{k_e e^2}{2a_0}\right)\frac{1}{n^2} = -\frac{13.606\text{ eV}}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{42.21}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 42.3

Sólo en el caso del hidrógeno la energía depende de *n*

La sugerencia en la ecuación 42.21 de que la energía sólo depende del número cuántico n sólo es válida para el átomo de hidrógeno. Para átomos más complicados, se utilizan los mismos números cuánticos desarrollados aquí para el hidrógeno. Los niveles de energía para estos átomos dependerán principalmente de n, pero lo harán en menor grado de otros números cuánticos.

Este resultado está perfectamente de acuerdo con el obtenido en la teoría de Bohr (ecuaciones 42.13 y 42.14). Esta coincidencia es extraordinaria porque la teoría de Bohr y la teoría cuántica completa llegan al resultado desde puntos de partida completamente diferentes.

El **número cuántico orbital,** simbolizado como ℓ, resulta de la ecuación diferencial para $f(\theta)$ y se asocia con el movimiento angular orbital del electrón. El **número cuántico orbital magnético** m_ℓ resulta de la ecuación diferencial para $g(\phi)$. Tanto ℓ como m_ℓ son enteros. En la sección 42.6 se amplía el análisis de estos dos números cuánticos y también se presenta un cuarto número cuántico (no entero), resultado de un tratamiento relativístico del átomo de hidrógeno.

La aplicación de las condiciones frontera de las tres partes de una función ondulatoria completa lleva a correspondencias importantes entre los tres números cuánticos, como también a ciertas restricciones respecto a sus valores:

Restricciones a los valores de los números cuánticos del átomo de hidrógeno

Los valores de n son enteros que pueden ir de 1 a ∞

Los valores de ℓ son enteros que pueden ir de 0 a $n - 1$

Los valores de m_ℓ son enteros que pueden ir de $-\ell$ a ℓ

Por ejemplo, si $n = 1$, sólo están permitidos $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$. Si $n = 2$, ℓ puede ser 0 o 1; si $\ell = 0$, en tal caso $m_\ell = 0$; pero si $\ell = 1$, entonces m_ℓ puede ser 1, 0 o -1. La tabla 42.1 resume las reglas para determinar los valores permitidos de ℓ y m_ℓ para una n determinada.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 42.4

Los números cuánticos definen un sistema

Es común asignar los números cuánticos a un electrón. Sin embargo, recuerde, que estos números cuánticos aparecen de la ecuación de Schrödinger, la cual involucra una función de la energía potencial para el *sistema* del electrón y del núcleo. Por lo tanto, es más *correcto* asignar los números cuánticos al átomo, pero es más *popular* asignarlos a un electrón. Aquí se sigue esta última práctica, ya que es la más común.

Por razones históricas, **se dice que todos los estados que tengan el mismo número cuántico principal forman una capa.** Las capas se identifican por las letras K, L, M, . . . , que designan los estados para los cuales $n = 1, 2, 3,$ . . . . De igual manera, **se dice que todos los estados que tengan los mismos valores de n y de ℓ forman una subcapa.** Las letras[4] *s, p, d, f, g, h,* . . . se utilizan para designar las subcapas para las cuales $\ell = 0, 1, 2, 3,$ . . . . Por ejemplo, el estado designado como 3*p* tiene los números cuánticos $n = 3$ y $\ell = 1$; el estado 2*s* tiene los números cuánticos $n = 2$ y $\ell = 0$. Estas notaciones se resumen en la tabla 42.2.

Aquellos estados que violen las reglas proporcionadas en la tabla 42.1 no existen. (No satisfacen las condiciones frontera de la función ondulatoria.) Por ejemplo, el estado 2*d*, el cual tendría $n = 2$ y $\ell = 2$, no puede existir, ya que el valor más alto permitido de ℓ es $n - 1$, el cual, en este caso, es 1. Por lo tanto, para $n = 2$, los estados 2*s* y 2*p* están permitidos, pero 2*d*, 2*f*, ... no lo están. Para $n = 3$, las subcapas permitidas son 3*s*, 3*p* y 3*d*.

TABLA 42.1

Tres números cuánticos para el átomo de hidrógeno

Número cuántico	Nombre	Valores permitidos	Número de valores permitidos
n	Número cuántico principal	1, 2, 3, . . .	Cualquier número
ℓ	Número cuántico orbital	0, 1, 2, . . . , $n - 1$	n
m_ℓ	Número cuántico orbital magnético	$-\ell, -\ell + 1,$ . . . , 0, . . . , $\ell - 1, \ell$	$2\ell + 1$

[4] Las primeras cuatro letras provienen de las primeras clasificaciones de las líneas espectrales: nítida, principal, difusa y fundamental. Las letras restantes están en orden alfabético.

TABLA 42.2

Notaciones de capa y subcapas atómicas

n	Símbolo de capa	ℓ	Símbolo de subcapa
1	K	0	s
2	L	1	p
3	M	2	d
4	N	3	f
5	O	4	g
6	P	5	h

Pregunta rápida 42.3 ¿Cuántas subcapas posibles hay para el nivel $n = 4$ del hidrógeno? a) 5, b) 4, c) 3, d) 2 o e) 1.

Pregunta rápida 42.4 Cuando el número cuántico principal es $n = 5$, ¿cuántos valores diferentes de a) ℓ y b) m_ℓ son posibles?

EJEMPLO 42.2 **El nivel $n = 2$ del hidrógeno**

Para un átomo de hidrógeno determine los estados permitidos que correspondan al número cuántico principal $n = 2$ y calcule las energías de estos estados.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en el átomo en el estado cuántico $n = 2$. Sólo existe uno de tales estados en la teoría de Bohr, pero la explicación de la teoría cuántica permite más estados debido a los valores posibles de ℓ y m_ℓ.

Categorizar Los resultados se evalúan con las reglas explicadas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

A partir de la tabla 42.1, se encuentra que, cuando $n = 2$, ℓ puede ser 0 o 1. Encuentre los posibles valores de m_ℓ en la tabla 42.1:

$$\ell = 0 \quad \rightarrow \quad m_\ell = 0$$
$$\ell = 1 \quad \rightarrow \quad m_\ell = -1, 0 \text{ o } 1$$

Por esto se tiene un estado designado como estado $2s$, que se asocia con los números cuánticos $n = 2$, $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$, y se tienen tres estados, designados como estados $2p$, para los cuales los números cuánticos son $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = -1$; $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = 0$; y $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = 1$.

Encuentre la energía para estos cuatro estados con $n = 2$ a partir de la ecuación 42.21:

$$E_2 = -\frac{13.606 \text{ eV}}{2^2} = -3.401 \text{ eV}$$

42.5 Las funciones de onda para el hidrógeno

Ya que la energía potencial del átomo de hidrógeno depende solamente de la distancia radial r entre el núcleo y el electrón, algunos de los estados permitidos para este átomo pueden ser representados mediante funciones de onda que sólo dependen de r. Para estos estados, $f(\theta)$ y $g(\phi)$ son constantes. La más simple de las funciones de onda para el hidrógeno es la que describe el estado $1s$ y se conoce como $\psi_{1s}(r)$:

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} e^{-r/a_0} \qquad \textbf{(42.22)}$$

◀ Función de onda para el hidrógeno en su estado fundamental

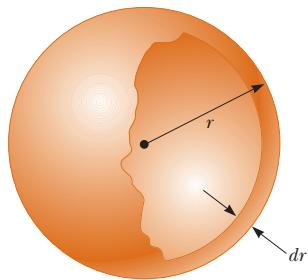



Figura 42.10 Una envolvente esférica con radio r y espesor dr tiene un volumen igual a $4\pi r^2 dr$.

en donde a_0 es el radio de Bohr. (En el problema 19, es posible verificar que esta función satisface la ecuación de Schrödinger.) Observe que ψ_{1s} tiende a cero conforme r tiende a ∞ y se normaliza como se presenta (véase la ecuación 41.7). Además, porque que ψ_{1s} depende sólo de r, es *esféricamente simétrico*, esta simetría existe para todos los estados *s*.

Recuerde que la probabilidad de encontrar una partícula en cualquier región es igual a la integral de la densidad de probabilidad $|\psi|^2$ para la partícula en toda la región. La densidad de probabilidad para el estado 1*s* es

$$|\psi_{1s}|^2 = \left(\frac{1}{\pi a_0{}^3}\right)e^{-2r/a_0} \tag{42.23}$$

Ya que en la posición $r = 0$ se supone que el núcleo está fijo en el espacio, se asigna esta densidad de probabilidad a la cuestión de ubicar el electrón. De acuerdo con la ecuación 41.3 la probabilidad de encontrarlo en un elemento de volumen dV es de $|\psi|^2$ dV. Resulta conveniente definir la *función de densidad de probabilidad radial P(r)* como la probabilidad por unidad de distancia radial de encontrar el electrón en una capa esférica de radio r y de espesor dr. Por lo tanto, $P(r)\,dr$ es la probabilidad de encontrar al electrón en esta capa. El volumen dV de esta capa, infinitesimalmente delgada, es igual a su área superficial $4\pi r^2$, multiplicada por el espesor de la capa dr (figura 42.10), de manera que la expresión de esta probabilidad es

$$P(r)\,dr = |\psi|^2 dV = |\psi|^2 4\pi r^2 dr$$

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad radial es

$$P(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2 \tag{42.24}$$

Al sustituir la ecuación 42.23 en la ecuación 42.24, se obtiene la función de densidad de probabilidad radial para el átomo del hidrógeno en su estado fundamental:

Densidad de probabilidad radial para el estado 1*s* del hidrógeno ▶

$$P_{1s}(r) = \left(\frac{4r^2}{a_0{}^3}\right)e^{-2r/a_0} \tag{42.25}$$

En la figura 42.11a aparece una gráfica de la función $P_{1s}(r)$ con r. El pico de la curva corresponde al valor más probable de r para este estado en particular. En el ejemplo 42.3 se muestra que este pico se presenta en el radio de Bohr, la posición radial del electrón en la cual el átomo de hidrógeno se encuentra en su estado fundamental según la teoría de Bohr, otra coincidencia relevante entre la teoría de Bohr y la teoría cuántica.

De acuerdo con la mecánica cuántica, el átomo no tiene una frontera definida con precisión, como lo sugiere la teoría de Bohr. La distribución de probabilidades de la figura 42.11a sugiere que la carga del electrón puede ser modelada como si se extendiera a través de una región del espacio, conocida comúnmente como *nube electrónica*. La figura 42.11b muestra la densidad de probabilidad del electrón en un átomo de hidrógeno en el estado 1*s* como una función de la posición en el plano *xy*. La parte más oscura de color azul de la distribución aparece en la posición $r = a_0$, lo cual corresponde al valor más probable de r para el electrón.

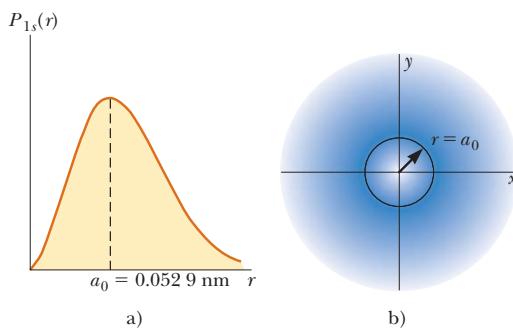



Figura 42.11 a) La probabilidad de encontrar el electrón como una función de la distancia desde el núcleo del átomo de hidrógeno en el estado 1*s* (fundamental). Observe que la probabilidad tiene su valor máximo cuando r es igual al radio de Bohr a_0. b) Sección transversal en el plano *xy* de la distribución de carga electrónica esférica del átomo de hidrógeno en su estado 1*s*.

EJEMPLO 42.3 El estado fundamental del hidrógeno

A) Calcule el valor más probable de r para un electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno.

SOLUCIÓN

Conceptualizar No imagine al electrón en órbita alrededor del protón como en la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno. En vez de ello, imagine que la carga del electrón se dispersa en el espacio alrededor del protón.

Categorizar Porque el enunciado del problema solicita el "valor más probable de r", este ejemplo se clasifica como un problema en que se usa el planteamiento cuántico. (En el átomo de Bohr, el electrón se mueve en una órbita con un valor *exacto* de r.)

Analizar El valor más probable de r corresponde al máximo en la gráfica de $P_{1s}(r)$ con r. El valor más probable de r se puede evaluar al hacer $dP_{1s}/dr = 0$ y resolver para r.

Diferencie la ecuación 42.25 e iguale el resultado a cero:

$$\frac{dP_{1s}}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{4r^2}{a_0{}^3}\right)e^{-2r/a_0}\right] = 0$$

$$e^{-2r/a_0}\frac{d}{dr}(r^2) + r^2\frac{d}{dr}(e^{-2r/a_0}) = 0$$

$$2re^{-2r/a_0} + r^2(-2/a_0)e^{-2r/a_0} = 0$$

$$1)\qquad 2r[1 - (r/a_0)]e^{-2r/a_0} = 0$$

Iguale a cero la expresión entre corchetes y resuelva para r:

$$1 - \frac{r}{a_0} = 0 \quad\rightarrow\quad r = a_0$$

Finalizar ¡El valor más probable de r es el radio de Bohr¡ La ecuación 1) también se satisface en $r = 0$ conforme $r \rightarrow \infty$. Estos puntos son ubicaciones de la probabilidad *mínima*, que es igual a cero, como se vio en la figura 42.11a.

B) Calcule la probabilidad de que el electrón en el estado fundamental del hidrógeno se encontrará afuera del primero radio de Bohr.

SOLUCIÓN

Analizar La probabilidad se encuentra al integrar la función de densidad de probabilidad radial $P_{1s}(r)$ para este estado desde el radio de Bohr a_0 hasta ∞.

Establezca la integral con la ecuación 42.25:

$$P = \int_{a_0}^{\infty} P_{1s}(r)\,dr = \frac{4}{a_0{}^3}\int_{a_0}^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0}\,dr$$

Ponga la integral en forma adimensional al cambiar las variables de r a $z = 2r/a_0$ y note que $z = 2$ cuando $r = a_0$ y que $dr = (a_0/2)\ dz$:

$$P = \frac{4}{a_0{}^3}\int_{a_0}^{\infty}\left(\frac{za_0}{2}\right)^2 e^{-z}\left(\frac{a_0}{2}\right)dz = \tfrac{1}{2}\int_{2}^{\infty} z^2 e^{-z}\,dz$$

Evalúe la integral con integración parcial (véase el apéndice B.7):

$$P = -\tfrac{1}{2}(z^2 + 2z + 2)e^{-z}\Big|_2^{\infty}$$

Evalúe entre los límites:

$$P = -\tfrac{1}{2}(0) - [-\tfrac{1}{2}(4 + 4 + 2)e^{-2}] = 5e^{-2} = 0.677 \text{ o } 67.7\%$$

Finalizar Esta probabilidad es mayor que 50%. La razón para este valor es la asimetría en la función de densidad de probabilidad radial (figura 42.11a), que tiene más área a la derecha del pico que a la izquierda.

¿Qué pasaría si? ¿Y si se le pidiera el valor *promedio* de r para el electrón en el estado fundamental, en lugar del valor más probable?

Respuesta El valor promedio de r es el mismo que el valor esperado para r.

Use la ecuación 42.25 para evaluar el valor promedio de r:

$$r_{\text{prom}} = \langle r \rangle = \int_0^\infty rP(r)\, dr = \int_0^\infty r\left(\frac{4r^2}{a_0{}^3}\right)e^{-2r/a_0}\, dr$$

$$= \left(\frac{4}{a_0{}^3}\right)\int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0}\, dr$$

Evalúe la integral con la ayuda de la primer integral mencionada en la tabla B.6 del apéndice B:

$$r_{\text{prom}} = \left(\frac{4}{a_0{}^3}\right)\left(\frac{3!}{(2/a_0)^4}\right) = \tfrac{3}{2}a_0$$

De nuevo, el valor promedio es mayor que el valor más probable debido a la asimetría en la función de onda, como se ve en la figura 42.11a.

La siguiente función de onda más sencilla del átomo de hidrógeno que sigue es la que corresponde al estado $2s$ ($n = 2$, $\ell = 0$). La función de onda normalizada para este estado es

Función de onda para el hidrógeno en el estado $2s$ ▶

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0} \qquad \textbf{(42.26)}$$

De nuevo, ψ_{2s} depende sólo de r y es esféricamente simétrica. La energía que corresponde a este estado es $E_2 = -(13.606/4)$ eV $= -3.401$ eV. Este nivel de energía representa el primer estado excitado del hidrógeno. En la figura 42.12 aparece una gráfica de la función de densidad de probabilidad radial para este estado, en comparación con el estado $1s$. El trazo correspondiente al estado $2s$ tiene dos picos. En este caso, el valor más probable corresponde a aquel valor de r que tenga el valor más elevado de P ($\approx 5a_0$). Un electrón en el estado $2s$ se encontrará a una distancia mucho mayor (en promedio) del núcleo que un electrón en el estado $1s$.

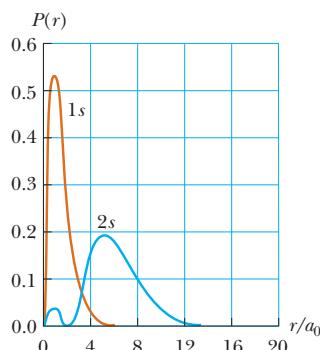



Figura 42.12

Función de densidad de probabilidad radial con r/a_0 para los estados $1s$ y $2s$ del átomo de hidrógeno.

42.6 Interpretación física de los números cuánticos

La energía de un estado particular en el átomo de hidrógeno depende del número cuántico principal, n (ecuación 42.21). Ahora, vea que los otros números cuánticos en el modelo atómico correspondan físicamente.

El número cuántico orbital ℓ

Para iniciar esta explicación conviene recordar brevemente el modelo atómico de Bohr. Si el electrón se mueve en un círculo con radio r, la magnitud de su cantidad de movimiento angular respecto al centro del círculo es igual a $L = m_e vr$. La dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular al plano del círculo y está definida por la regla de la mano derecha. De acuerdo con la física clásica, la magnitud L de la cantidad de movimiento angular orbital puede tener cualquier valor. Sin embargo, el modelo de Bohr del hidrógeno postula que la magnitud de la cantidad de movimiento angular del electrón está restringida a múltiplos de $\hbar$; es decir, $L = n\hbar$. Es necesario modificar este modelo, ya que predice (de manera incorrecta) que el estado fundamental del hidrógeno tiene una cantidad de movimiento angular igual a 1. Además, si en el modelo de Bohr se considera a L como cero, el electrón debe mostrarse como una partícula que oscila en línea recta a través del núcleo, lo cual es una situación físicamente imposible.

Estas dificultades se resuelven con el modelo mecánico cuántico del átomo, aunque debe olvidar la representación mental de un electrón que gira en una trayectoria circular bien definida. A pesar de la ausencia de esta representación, el átomo posee de hecho una cantidad de movimiento angular y se le seguirá llamando cantidad de movimiento angular orbital. De acuerdo con la mecánica cuántica, un átomo en un estado

cuyo número cuántico principal es n puede tomar los siguientes valores *discretos* de la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital:[5]

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots, n - 1 \tag{42.27}$$

◀ Valores permitidos de L

Conocidos estos valores permitidos de ℓ, $L = 0$ (correspondiente a $\ell = 0$) es un valor aceptable de la magnitud de la cantidad de movimiento angular. El hecho de que en este modelo L pueda ser igual a cero sirve para recalcar las dificultades inherentes en cualquier intento por describir resultados con base en la mecánica cuántica en términos de un modelo simplemente similar a una partícula (clásico). En la interpretación mecánica cuántica, la nube de electrones para el estado $L = 0$ es esféricamente simétrica y no tiene un eje de rotación fundamental.

El número cuántico magnético orbital m_ℓ

Puesto que la cantidad de movimiento angular es un vector, su dirección debe especificarse. Recuerde del capítulo 29 que una espira de corriente tiene un momento magnético correspondiente $\vec{\boldsymbol{\mu}} = I\vec{\mathbf{A}}$ (ecuación 29.15), donde I es la corriente en la espira y $\vec{\mathbf{A}}$ es un vector perpendicular a la espira cuya magnitud es el área de la misma. Un momento como éste, colocado en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$ interactúa con el campo. Suponga que un campo magnético débil aplicado a lo largo del eje de las z define una dirección en el espacio. De acuerdo con la física clásica, la energía del sistema espira-campo depende de la dirección del momento magnético de la espira respecto al campo magnético, como se describe en la ecuación 29.18, $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$. En la física clásica se permite cualquier valor para la energía que quede entre $-\mu B$ y $+\mu B$.

En la teoría de Bohr, el electrón que circula representa una espira de corriente. En el planteamiento mecánico cuántico del átomo de hidrógeno, se abandona el modelo de una órbita circular de la teoría de Bohr, aunque el átomo aún posee una cantidad de movimiento angular orbital. Por lo tanto, hay cierta sensación de que existe rotación del electrón alrededor del núcleo, para que este presente un momento magnético debido a esta cantidad de movimiento angular.

Como se mencionó en la sección 42.3, se ha observado que las líneas espectrales de algunos átomos se dividen en grupos de tres en líneas muy juntas entre sí cuando los átomos están colocados en un campo magnético. Suponga que coloca el átomo de hidrógeno en un campo magnético. Según la mecánica cuántica, **existen direcciones discretas permitidas para el vector del momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ respecto al vector del campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$.** Esto es muy diferente de lo que presenta la física clásica, en que están permitidas todas las direcciones.

Porque el momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ del átomo puede relacionarse[6] con el vector de la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$, las direcciones discretas de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ llevan a que la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ esté cuantizada. Esta cuantización significa que L_z (la proyección de $\vec{\mathbf{L}}$ a lo largo del eje de las z) puede asumir sólo valores discretos. El número cuántico orbital magnético m_ℓ define los valores permitidos de la componente z de la cantidad de movimiento angular orbital, de acuerdo con la expresión siguiente[7]

$$L_z = m_\ell \hbar \tag{42.28}$$

◀ Valores permitidos de L_z

La cuantización de las orientaciones posibles de $\vec{\mathbf{L}}$ en función de un campo magnético externo se conoce a menudo como **cuantización espacial.**

Vea las posibles orientaciones de $\vec{\mathbf{L}}$ para un valor dado de ℓ. Recuerde que m_ℓ puede tener valores que van desde $-\ell$ hasta ℓ. Si $\ell = 0$, entonces $m_\ell = 0$ y $L_z = 0$. Si $\ell = 1$, después los valores posibles de m_ℓ son -1, 0 y 1, así que L_z puede ser $-\hbar$, 0 o $\hbar$. Si $\ell = 2$, entonces m_ℓ puede ser $-2, -1, 0, 1$ o 2, correspondientes a los valores L_z de $-2\hbar$, $-\hbar$, 0, $\hbar$ o $2\hbar$, y así en adelante.

[5] La ecuación 42.27 es un resultado directo de la solución matemática de la ecuación de Schrödinger y la aplicación de las condiciones frontera angulares. Sin embargo, este desarrollo, está fuera del alcance de este libro y no será presentado.

[6] Para esta correspondencia véase la ecuación 30.22, donde se dedujo a partir del punto de vista clásico. La mecánica cuántica llega al mismo resultado.

[7] Igual que con la ecuación 42.27, la correspondencia expresada en la ecuación 42.28 surge de la solución a la ecuación de Schrödinger y la aplicación de condiciones frontera.

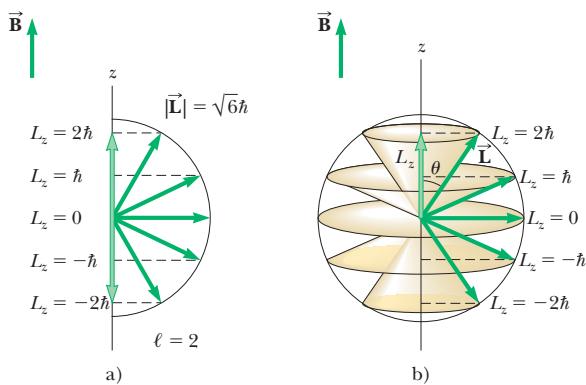



Figura 42.13 Modelo vectorial para $\ell = 2$. a) Proyecciones permitidas sobre el eje z de la cantidad de movimiento angular orbital $\vec{\mathbf{L}}$. b) El vector de la cantidad de movimiento angular orbital $\vec{\mathbf{L}}$ yace en la superficie de un cono.

La figura 42.13a muestra lo que es comúnmente llamado **modelo vectorial,** que describe la cuantización espacial para el caso $\ell = 2$. Observe que $\vec{\mathbf{L}}$ no podrá alinearse nunca paralela o antiparalelamente a $\vec{\mathbf{B}}$ porque el valor máximo de L_z es $\ell\hbar$ debe ser menor que la cantidad de movimiento angular magnitud de $L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar$. La cantidad de movimiento angular del vector $\vec{\mathbf{L}}$ se permite al ser perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, que en este caso corresponde a $L_z = 0$ $\ell = 0$.

El vector $\vec{\mathbf{L}}$ no apunta en una dirección específica, a pesar de que su componente z está fija. Si se conociera el valor exacto de $\vec{\mathbf{L}}$**,** las tres componentes L_x, L_y y L_z podrían definirse, lo que es inconsistente con el principio de incertidumbre. ¿Cómo se puede definir la magnitud y la componente z de un vector, sin definir completamente dicho vector? Para responder lo anterior, imagine que L_x, y L_y están completamente sin especificar de tal manera que $\vec{\mathbf{L}}$ debe yacer en cualquier parte de la superficie de un cono que forma un ángulo θ con el eje de las z, como se muestra en la figura 42.14b. Por la figura, se ve que θ también está cuantizada y que sus valores están definidos mediante la correspondencia

$$\cos\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \qquad \textbf{(42.29)}$$

Si el átomo es colocado en un campo magnético, la energía $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es una energía adicional para el sistema átomo-campo más allá de lo descrito en la ecuación 42.21. Porque las direcciones de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ están cuantizadas, existen energías totales discretas para el átomo correspondientes a diferentes valores de m_ℓ. La figura 42.14a muestra una transición entre dos niveles atómicos en ausencia de un campo magnético. En la figura 42.14b, se aplica un campo magnético y el nivel superior con $\ell = 1$ se divide en tres

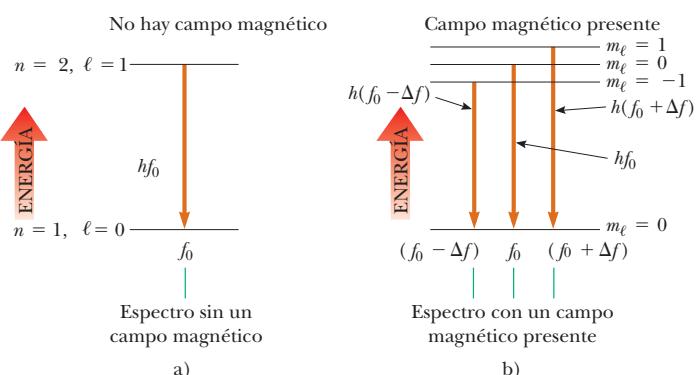



Figura 42.14 Efecto Zeeman. a) Niveles de energía para los estados fundamental y primer estado excitado de un átomo de hidrógeno. Cuando $\vec{\mathbf{B}} = 0$, sólo se observa una única línea espectral en f_0. b) Cuando el átomo está inmerso en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$**,** el estado con $\ell = 1$ se divide en tres estados. Los átomos en los estados excitados decaen al estado fundamental mediante la emisión de fotones con tres niveles diferentes de energía, lo que da origen a las líneas de emisión f_0, $f_0 + \Delta f$, y $f_0 - \Delta f$, siendo Δf el corrimiento de la frecuencia de la emisión causada por el campo magnético.

niveles que corresponden a las diferentes direcciones de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. Existen ahora tres posibles transiciones desde la subcapa $\ell = 1$ hasta la subcapa $\ell = 0$. En consecuencia, en un conjunto de átomos, existen átomos en los tres estados y la única línea espectral de la figura 42.14a se dividirá en tres líneas espectrales. Este fenómeno es conocido como *el efecto Zeeman*.

El efecto Zeeman puede ser aplicado para medir campos magnéticos fuera de la Tierra. Por ejemplo, la división de las líneas espectrales en la luz a causa de los átomos de hidrógeno en la superficie del Sol puede utilizarse para calcular la magnitud del campo magnético en dicha ubicación. El efecto Zeeman es uno de entre muchos fenómenos que no pueden ser explicados con el modelo de Bohr pero que se explican con éxito utilizando el modelo cuántico del átomo.

EJEMPLO 42.4 **Cuantización espacial para el hidógeno**

Considere al átomo de hidrógeno en el estado $\ell = 3$. Calcule la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$, los valores permitidos de L_z, y los correspondientes ángulos θ que $\vec{\mathbf{L}}$ forma con el eje z.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 42.13, que es un modelo vectorial para $\ell = 2$. Dibuje tal modelo vectorial para $\ell = 3$ para ayudarse con este problema.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Calcule la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital con la ecuación 42.27:

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar = \sqrt{3(3 + 1)}\hbar = 2\sqrt{3}\hbar$$

Calcule los valores permitidos de L_z con la ecuación 42.28 con $m_\ell = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3:

$$L_z = -3\hbar, -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar$$

Calcule los valores permitidos de $\cos\theta$ con la ecuación 42.29:

$$\cos\theta = \frac{\pm 3}{2\sqrt{3}} = \pm 0.866 \qquad \cos\theta = \frac{\pm 2}{2\sqrt{3}} = \pm 0.577$$

$$\cos\theta = \frac{\pm 1}{2\sqrt{3}} = \pm 0.289 \qquad \cos\theta = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$$

Encuentre los ángulos correspondientes de estos valores de $\cos\theta$:

$$\theta = 30.0°, 54.7°, 73.2°, 90.0°, 107°, 125°, 150°$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si el valor de ℓ es un entero arbitrario? Para cualquier valor arbitrario de ℓ, ¿cuántos valores de m_ℓ se permiten?

Respuesta Para un valor dado de ℓ, los valores de m_ℓ varían de $-\ell$ a $+\ell$ en pasos de 1. Debido a eso, existen 2ℓ valores distintos de cero para m_ℓ (específicamente, $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\ell$). Además, es posible un valor más de $m_\ell = 0$, para un total de $2\ell + 1$ valores de m_ℓ. Este resultado es crucial para comprender los resultados del experimento de Stern-Gerlach descrito más adelante respecto al espín.

El número cuántico magnético de espín m_s

Los tres números cuánticos n, ℓ y m_ℓ explicados hasta ahora se generan al aplicar las condiciones frontera a las soluciones de la ecuación de Schrödinger, y se les asigna una interpretación física a cada uno de ellos. Ahora considere el **espín del electrón,** el cual *no viene* de la ecuación de Schrödinger.

Cortesía de AIP Niels Bohr Library, Margarethe Bohr Collection.

Wolfgang Pauli y Niels Bohr observan un trompo girando. El giro del electrón es análogo al giro del trompo, pero diferente en muchos aspectos.

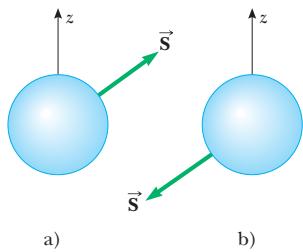



Figura 42.15 El espín de un electrón puede ser a) hacia arriba o b) hacia abajo en relación con el eje de las *z* especificado. El espín jamás podrá estar alineado con el eje.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 42.5

El electrón no está girando

Aunque el concepto de un electrón girando es conceptualmente útil, no debe tomarse en forma literal. El giro de la Tierra es una rotación mecánica. Por otra parte, el giro del electrón es sólo simplemente un efecto cuántico que le da al electrón una cantidad de movimiento angular como si estuviera girando físicamente.

En el ejemplo 42.2 resultan cuatro estados correspondientes a $n = 2$. En realidad, sin embargo, se presentan ocho estados. Los cuatro estados adicionales pueden explicarse al requerir un cuarto número cuántico para cada estado: el **número cuántico magnético del espín m_s.**

La necesidad de este nuevo número cuántico surge debido a una rara propiedad observada en el espectro de ciertos gases, como el vapor del sodio. Una observación más cercana de una línea prominente en el espectro de emisión del sodio revela que la línea es, de hecho, dos líneas muy juntas llamadas *doblete*.[8] Las longitudes de onda de estas líneas se presentan en la región amarilla del espectro electromagnético a 589.0 nm y 589.6 nm. En 1925, cuando se observó este doblete por primera vez, no podía ser explicado con la teoría atómica existente. Para resolver este dilema, Samuel Goudsmit (1902-1978) y George Uhlenbeck (1900-1988), siguiendo una sugerencia hecha por el físico austriaco Wolfgang Pauli (1900-1958), propusieron el número cuántico de espín.

Para describir este nuevo número cuántico, es conveniente (pero técnicamente incorrecto) pensar en el electrón como si estuviera girando alrededor de su eje mientras orbita alrededor del núcleo, como se describió en la sección 30.6. Sólo existen dos direcciones para el espín del electrón, como se ilustra en la figura 42.15. Si la dirección del espín es como la que se muestra en la figura 42.15a, se dice que el electrón *gira hacia arriba*. Si la dirección del espín es como la que se muestra en la figura 42.15b, se dice que el electrón *gira hacia abajo*. En presencia de un campo magnético, la energía del electrón es ligeramente diferente para las dos direcciones del espín, y esta diferencia explica el doblete de sodio.

La descripción clásica del espín electrónico —como resultado de un electrón que gira— es incorrecta. La teoría más reciente indica que el electrón es una partícula puntual, sin amplitud espacial. Debido a eso no se puede considerar que el electrón esté girando. A pesar de esta dificultad conceptual, toda la evidencia experimental apoya la idea de que el electrón sí posee un cierto momentum angular intrínseco que puede describirse como el número cuántico magnético del espín. Paul Dirac (1902-1984) demostró que este cuarto número cuántico se origina en las propiedades relativistas del electrón.

En 1921, Otto Stern (1888-1969) y Walter Gerlach (1889-1979) realizaron un experimento que demostró la cuantización espacial. Sin embargo, sus resultados no estuvieron de acuerdo cuantitativamente con la teoría atómica que existía en ese momento. En su experimento, un haz de átomos de plata dirigidos a través de un campo magnético no uniforme se dividía en dos componentes discretos (figura 42.16). Stern y Gerlach repitieron el experimento utilizando otros átomos, y en cada caso el haz se dividió en dos o más componentes. El argumento clásico es como sigue. Si se elige la dirección z como la correspondiente a la no uniformidad máxima de $\vec{\mathbf{B}}$, la fuerza magnética neta de los átomos está a lo largo del eje z y es proporcional a la componente del momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ del átomo en la dirección z. De manera clásica, $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ puede tener cualquier orientación, de forma que el haz desviado se dispersa de manera continua. Sin embargo, según la mecánica cuántica, el haz desviado tiene un número entero de componentes discretos, y el número de componentes determina el número de valores posibles de μ_z. Por lo tanto, ya que el experimento Stern-Gerlach mostró haces divididos, la cuantización espacial fue por lo menos verificada cualitativamente.

Por el momento, suponga que el momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ del átomo es causado por la cantidad de movimiento angular orbital. Porque μ_z es proporcional a m_ℓ, el número de valores posibles de μ_z es $2\ell + 1$, como se determinó en la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 42.4. Además, ya que ℓ es un entero, el número de valores posibles para μ_z siempre es impar. Esta predicción no es consistente con la observación de Stern y Gerlach de dos componentes (un número *par*) en el haz desviado de átomos de plata. En consecuencia, la conclusión obligada es que, o bien la mecánica cuántica es incorrecta o el modelo necesita ajustes.

En 1927, T. E. Phipps y J. B. Taylor repitieron el experimento Stern-Gerlach utilizando un haz de átomos de hidrógeno. Este experimento era importante, ya que invo-

[8] Este es un efecto Zeeman para el espín y es idéntico en su naturaleza al efecto Zeeman para la cantidad de movimiento angular orbital que se analizó en el ejemplo 42.4, excepto porque el campo magnético externo no se requiere. El campo magnético para este efecto Zeeman es interno al átomo y surge debido al movimiento relativo del electrón y del núcleo.

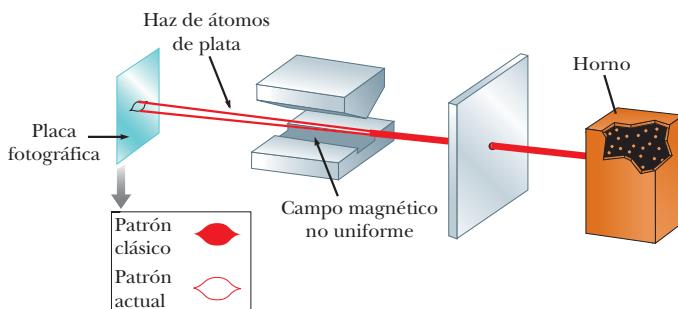



Figura 42.16 Técnica utilizada por Stern y Gerlach para verificar la cuantización espacial. Un campo magnético no uniforme divide en dos un haz de átomos de plata.

lucraba un átomo que contenía un solo electrón en su estado fundamental, para el cual la teoría cuántica hace predicciones confiables. Recuerde que $\ell = 0$ para el hidrógeno en su estado fundamental, así que $m_\ell = 0$. Por lo tanto, no se esperaría que el campo magnético desviara el haz, porque el momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ del átomo es igual a cero. Sin embargo, en el experimento Phipps-Taylor el haz se dividió de nuevo en dos componentes. Con base en este resultado, sólo se llega a una conclusión: algo, además del movimiento orbital del electrón, contribuye al momento magnético del átomo.

Como aprendió anteriormente, Goudsmit y Uhlenbeck propusieron que el electrón tiene un espín intrínseco con una cantidad de movimiento angular, además de su cantidad de movimiento angular orbital. En otras palabras, el momentum angular total del electrón en un estado electrónico particular contiene tanto una contribución orbital $\vec{\mathbf{L}}$ como una contribución de espín $\vec{\mathbf{S}}$. El resultado del experimento Phipps-Taylor confirmó la hipótesis de Goudsmit y Uhlenbeck.

En 1929 Dirac utilizó la forma relativista de la energía total de un sistema para resolver la ecuación de onda relativista para el electrón en un pozo de potencial. Su análisis confirmó la naturaleza fundamental de espín del electrón. (El espín, como la masa y la carga, es una propiedad *intrínseca* de una partícula independiente de su entorno.) Además, el análisis demostró que el espín[9] del electrón puede describirse mediante un solo número cuántico s, cuyo valor únicamente puede ser $s = \frac{1}{2}$. La cantidad de movimiento angular del espín del electrón *nunca cambia*. Esta idea contradice las leyes clásicas, que dictan que una carga giratoria disminuye su velocidad en la presencia de un campo magnético aplicado debido a la fem de Faraday que acompaña el campo cambiante. Además, si el electrón es observado como una pelota giratoria de carga sometida a las leyes clásicas, partes cercanas a su superficie girarían con una rapidez mayor a la de la luz. Por lo tanto, la descripción clásica no debe llevarse demasiado lejos; por último, el espín de un electrón es una entidad cuántica que desafía cualquier descripción clásica simple.

Puesto que el espín es una forma de cantidad de movimiento angular, debe seguir las mismas reglas cuánticas que la cantidad de movimiento angular orbital. De acuerdo con la ecuación 42.27, la magnitud de la **cantidad de movimiento angular del espín $\vec{\mathbf{S}}$** para el electrón es igual a

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \qquad \textbf{(42.30)}$$

◀ Magnitud del momentum angular del espín de un electrón

Al igual que la cantidad de movimiento angular orbital $\vec{\mathbf{L}}$, la cantidad de movimiento angular del espín $\vec{\mathbf{S}}$ es cuantizada en el espacio, como se describe en la figura 42.17. Puede tener dos orientaciones en relación al eje z, definido por el **número cuántico magnético del espín** $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Similar a la ecuación 42.28 para un momentum angular orbital, la componente z de un momentum angular orbital es igual a

$$S_z = m_s\hbar = \pm\tfrac{1}{2}\hbar \qquad \textbf{(42.31)}$$

◀ Valores permitidos de S_z

[9] Los físicos utilizan comúnmente la palabra *espín* para hacer referencia al número cuántico de la cantidad de movimiento angular. Por ejemplo, es común decir: "El electrón tiene un espín de un medio".

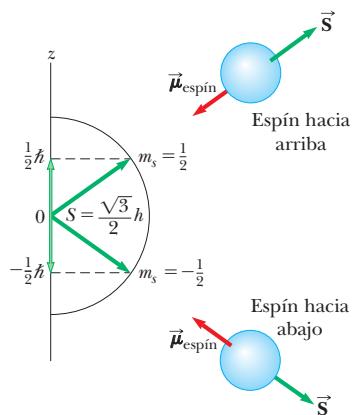



Figura 42.17 La cantidad de movimiento angular del espín $\vec{\mathbf{S}}$ muestra cuantización espacial. Esta figura representa las dos orientaciones permitidas del vector de la cantidad de movimiento angular del espín $\vec{\mathbf{S}}$ y el momento magnético de espín $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{espín}}$ para una partícula de espín-$\frac{1}{2}$, como lo es el electrón.

Los dos valores $\pm\hbar/2$ para S_z corresponden a las dos orientaciones posibles para $\vec{\mathbf{S}}$ que se muestran en la figura 42.17. El valor $m_s = +\frac{1}{2}$ se refiere al caso del espín hacia arriba, y $m_s = -\frac{1}{2}$ se refiere al caso del espín hacia abajo. Observe que las ecuaciones 42.30 y 42.31 no le permiten al espín vectorial yacer a lo largo del eje z. La dirección real de $\vec{\mathbf{S}}$ está en un ángulo relativamente grande respecto al eje z, como se muestra en las figuras 42.15 y 42.17.

El momento magnético del espín $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{espín}}$ del electrón está relacionado con su cantidad de movimiento angular del espín $\vec{\mathbf{S}}$ mediante la expresión

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{espín}} = -\frac{e}{m_e}\vec{\mathbf{S}} \tag{42.32}$$

donde e es la carga electrónica y m_e es la masa del electrón. Porque $S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$, la componente z del momento magnético del espín puede tener los valores

$$\mu_{\text{espín},\, z} = \pm\frac{e\hbar}{2m} \tag{42.33}$$

Como aprendió en la sección 30.6, la cantidad $e\hbar/2m_e$ es el magnetón de Bohr $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ J/T. la relación del momento magnético con la cantidad de movimiento angular es dos veces mayor que la cantidad de movimiento angular de espín (ecuación 42.32), como lo es para la cantidad de movimiento angular orbital (ecuación 30.22). El factor 2 se explica mediante un tratamiento relativista, realizado por vez primera por Dirac.

Actualmente, los físicos explican el experimento Stern-Gerlach Phipp-Taylor como sigue. Los momentos magnéticos observados tanto para la plata como para el hidrógeno se deben sólo a la cantidad de movimiento angular de espín, sin contribución alguna de la cantidad de movimiento angular orbital. Un átomo de un solo electrón, como el hidrógeno, cuantiza el espín del electrón en el campo magnético de tal forma que la componente z de la cantidad de movimiento angular de espín es, ya sea $\frac{1}{2}\hbar$ o $-\frac{1}{2}\hbar$, lo cual corresponde a $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Los electrones con espín $+\frac{1}{2}$ son desviados hacia abajo, y aquellos con espín $-\frac{1}{2}$ son desviados hacia arriba.

El experimento Stern-Gerlach aportó dos resultados importantes: en primer lugar, confirmó el concepto de la cuantización del espacio; en segundo lugar, demostró que existe la cantidad de movimiento angular de espín, aun cuando esta propiedad no fue reconocida sino hasta cuatro años después de que se realizaron los experimentos.

Como ya se mencionó, existen ocho estados cuánticos que corresponden a $n = z$ en el átomo de hidrógeno, no cuatro como se encontró en el ejemplo 42.2. Cada uno de los cuatro estados en el ejemplo 42.2 realmente son dos estados debido a los dos valores posibles de m_s. La tabla 42.3 muestra los estados cuánticos que corresponden a estos ocho estados.

TABLA 42.3

Números cuánticos para el estado $n = 2$ del hidrógeno

n	ℓ	m_ℓ	m_s	Subcapa	Capa	Número de estados en subcapa
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$2s$	L	2
2	0	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	1	$\frac{1}{2}$	$2p$	L	6
2	1	1	$-\frac{1}{2}$			
2	1	0	$\frac{1}{2}$			
2	1	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	−1	$\frac{1}{2}$			
2	1	−1	$-\frac{1}{2}$			

42.7 El principio de exclusión y la tabla periódica

Ha descubierto que el estado de un átomo de hidrógeno está definido mediante cuatro números cuánticos: n, ℓ, m_ℓ y m_s. Como resultado, el número de estados disponibles para otros átomos también puede predecirse utilizando este mismo conjunto de números cuánticos. De hecho, estos cuatro números cuánticos sirven para describir todos los estados electrónicos de un átomo, sin importar el número de electrones en su estructura.

Para el análisis actual de átomos con múltiples electrones, a menudo resulta más fácil asignar los números cuánticos a los electrones en el átomo, en vez de al átomo entero. La pregunta obvia que surge en este punto es: "¿Cuántos electrones pueden encontrarse en un estado cuántico en particular?". Pauli respondió esta importante pregunta en 1925, en un enunciado conocido como el **principio de exclusión:**

> No puede haber dos electrones en el mismo estado cuántico; debido a eso, dos electrones del mismo átomo no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos.

Si este principio no fuera válido, el átomo podría emitir energía hasta que todos sus electrones se encontraran en el estado de energía más bajo posible, y en consecuencia el comportamiento químico de los elementos sería drásticamente diferente. ¡La naturaleza, tal como la conocemos, no existiría!

En la realidad, se considera a la estructura electrónica de los átomos complejos como una sucesión de niveles llenos de energía en aumento. Como regla general, el orden para llenar las subcapas del átomo es como sigue. Una vez que una subcapa está llena, el siguiente electrón se coloca en la subcapa de menor energía que esté desocupada. Este comportamiento se comprende al reconocer que si el átomo no se encontrase en el nivel de energía más bajo disponible, emitiría energía hasta alcanzar este estado.

Antes de explicar la configuración electrónica de diferentes elementos, es conveniente definir que un *orbital* es el estado atómico caracterizado por los números cuánticos n, ℓ y m_ℓ. Según el principio de exclusión **sólo puede haber dos electrones presentes en cualquier orbital.** Uno de estos electrones tiene un número cuántico magnético de espín $m_s = +\frac{1}{2}$, y el otro es $m_s = -\frac{1}{2}$. Ya que cada orbital está limitado a dos electrones, el número de electrones que pueden ocupar las diversas capas también está limitado.

La tabla 42.4 muestra los estados cuánticos permitidos para un átomo hasta $n = 3$. Las flechas que apuntan hacia arriba indican un electrón $m_s = +\frac{1}{2}$, y las que apuntan hacia abajo indican que $m_s = -\frac{1}{2}$. La capa $n = 1$ puede alojar sólo dos electrones, ya que $m_\ell = 0$ significa que sólo está permitido un orbital. (Los tres números cuánticos que describen a este orbital son $n = 1$, $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$.) La capa $n = 2$ contiene dos subcapas, una para $\ell = 0$ y otra para $\ell = 1$. La subcapa $\ell = 0$ está limitada a dos electrones, porque $m_\ell = 0$. La subcapa $\ell = 1$ contiene tres orbitales permitidos, que co-

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 42.6

El principio de exclusión es más general

En el capítulo 46 se estudia una forma más general del principio de exclusión, en ella se establece que dos *fermiones* pueden encontrarse en un mismo estado cuántico. Los fermiones son partículas con espín de medio entero ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etcétera.)

CERN, cortesía de AIP Emilio Segré Visual Archive.

WOLFGANG PAULI

Físico teórico austriaco (1900-1958)

Teórico de gran talento, Pauli hizo grandes contribuciones en muchas áreas de la física moderna, y obtuvo el reconocimiento público a los 21 años, mediante un artículo magistral que resume la relatividad y que todavía se considera una de las mejores y más completas introducciones sobre el tema. Otras de sus contribuciones principales fueron el descubrimiento del principio de exclusión, la explicación de la conexión entre el espín de las partículas y las estadísticas, la teoría sobre la electrodinámica cuántica relativista, la hipótesis del neutrino y la hipótesis del espín nuclear.

TABLA 42.4

Estados cuánticos permitidos para un átomo hasta $n = 3$

Capa	n	**1**	**2**				**3**								
Subcapa	ℓ	0	0	1			0	1			2				
Orbital	m_ℓ	0	0	1	0	−1	0	1	0	−1	2	1	0	−1	−2
	m_s	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓

rresponden a $m_\ell = 1$, 0 y -1. Porque cada orbital puede alojar a dos electrones, la subcapa $\ell = 1$ puede alojar seis electrones. Por lo tanto, la capa $n = 2$ puede contener ocho electrones, como se muestra en la tabla 42.3. La capa $n = 3$ tiene tres subcapas ($\ell = 0$, 1 y 2) y nueve orbitales, y puede alojar hasta 18 electrones. En general, cada capa puede alojar hasta $2n^2$ electrones.

El principio de exclusión puede ilustrarse al examinar el ordenamiento electrónico de unos cuantos de los átomos más ligeros. El número atómico Z de cualquier elemento es el número de protones en el núcleo de un átomo de este elemento. Un átomo neutro de este elemento tiene Z electrones. El hidrógeno ($Z = 1$) sólo tiene un electrón, el cual, en el estado fundamental del átomo, puede describirse por cualquiera de dos conjuntos de números cuánticos n, ℓ, m_ℓ, m_s: 1, 0, 0, $\frac{1}{2}$, o bien, 1, 0, 0, $-\frac{1}{2}$. Esta configuración electrónica a menudo se expresa como $1s^1$. La notación $1s$ se refiere al estado para el cual $n = 1$ y $\ell = 0$, y el superíndice indica que en la subcapa s está presente un electrón.

El helio ($Z = 2$) tiene dos electrones. En el estado fundamental, sus números cuánticos son 1, 0, 0, $\frac{1}{2}$ y 1, 0, 0, $-\frac{1}{2}$. No existen otras combinaciones posibles de números cuánticos para este nivel, y se dice que la capa K está llena. Esta configuración electrónica se expresa como $1s^2$.

El litio ($Z = 3$) tiene tres electrones. En el estado fundamental, dos de éstos se encuentran en la subcapa $1s$. El tercero se encuentra en la subcapa $2s$, porque ésta es ligeramente menor en energía que la subcapa $2p$.[10] Por esto, la configuración electrónica del litio es $1s^22s^1$.

Las configuraciones electrónicas del litio y varios de los siguientes elementos aparecen en la figura 42.18. La configuración electrónica del berilio ($Z = 4$), con sus cuatro electrones, es $1s^22s^2$ y el boro ($Z = 5$) tiene una configuración de $1s^22s^22p^1$. El electrón $2p$ del boro puede describirse mediante uno de los seis conjuntos igualmente probables de números cuánticos distintos que se mencionan en la tabla 42.3. En la figura 42.18 se muestra este electrón en el recuadro $2p$ más a la izquierda con un espín hacia arriba, pero es igualmente probable que se encuentre en cualquiera de los recuadros $2p$ con un espín ya sea hacia abajo o hacia arriba.

El carbono ($Z = 6$) tiene seis electrones, lo cual da lugar a la pregunta de cómo se acomodan los dos electrones $2p$. ¿Se dirigen al mismo orbital con espines apareados (↑↓) u ocupan dos orbitales diferentes con orbitales desaparecidos (↑↑)? Los datos experimentales demuestran que la configuración más estable (es decir, una con la energía más baja) es la última en la que los espines están desparecidos. Por esto, los dos electrones $2p$ del carbono y los tres electrones $2p$ del nitrógeno ($Z = 7$) tienen espines desaparecidos, como se muestra en la figura 42.18. La regla general que determina esta situación, conocida como la **regla de Hund,** establece que

> cuando un átomo tiene orbitales de igual energía, el orden de llenado por electrones es tal que el máximo número de electrones queda con espín desaparecidos.

Se presentan algunas excepciones a esta regla en elementos con subcapas que están casi llenas o a medio llenar.

[10] En una primera aproximación, la energía sólo depende del número cuántico n, como ya se explicó. Sin embargo, debido al efecto de la carga electrónica que aísla la carga nuclear, la energía también depende de ℓ en átomos con muchos electrones. Estos efectos de blindaje se estudian en la sección 42.8.

Átomo	$1s$	$2s$	$2p$			Configuración electrónica
Li	↑↓	↑				$1s^2 2s^1$
Be	↑↓	↑↓				$1s^2 2s^2$
B	↑↓	↑↓	↑			$1s^2 2s^2 2p^1$
C	↑↓	↑↓	↑	↑		$1s^2 2s^2 2p^2$
N	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	$1s^2 2s^2 2p^3$
O	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	$1s^2 2s^2 2p^4$
F	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	$1s^2 2s^2 2p^5$
Ne	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	$1s^2 2s^2 2p^6$

Figura 42.18 El llenado de los estados electrónicos debe obedecer tanto el principio de exclusión como a la regla de Hund.

En 1871, mucho antes de que fuera desarrollada la mecánica cuántica, el químico ruso Dmitri Mendeleyev (1834-1907) hizo un esfuerzo inicial para encontrar algún orden en los elementos químicos. Intentaba organizar los elementos para una tabla de contenido de un libro que estaba escribiendo. Los organizó en una tabla semejante a la que aparece en la figura 42.19, de acuerdo con su masa atómica y sus semejanzas químicas. La primera tabla propuesta por Mendeleyev contenía muchos espacios en blanco, y anunció con atrevimiento que los espacios estaban ahí sólo porque esos elementos aún no se habían descubierto. Al anotar las columnas en las que debían colocarse algunos de estos elementos faltantes, pudo hacer predicciones muy aproximadas de sus propiedades químicas. Durante los 20 años siguientes a este anuncio, la mayoría de estos elementos, de hecho, fueron descubiertos.

Los elementos de la **tabla periódica** (figura 42.19) están ordenados de tal forma que todos aquellos en una columna tienen propiedades químicas similares. Por ejemplo, considere los elementos en la última columna; todos ellos, a temperatura ambiente, son gases: He (helio), Ne (neón), Ar (argón), Kr (kriptón), Xe (xenón) y Rn (radón). La característica sobresaliente de todos estos elementos es que normalmente no toman parte en las reacciones químicas, es decir, no se unen fácilmente con otros átomos para formar moléculas. En consecuencia se les llama *gases nobles*.

Es posible entender parcialmente ese comportamiento al observar la configuración electrónica de ellos en la figura 42.19. El comportamiento químico de un elemento depende de la capa más externa de electrones. La configuración electrónica del helio es $1s^2$; la capa $n = 1$ (que es la capa más externa por ser la única) está llena. Además, con esta configuración, la energía del átomo es considerablemente menor que la de una configuración en que el electrón esté en el siguiente nivel disponible, la subcapa $2s$. Ahora, observe la configuración electrónica del neón: $1s^2 2s^2 2p^6$. De nuevo, la capa más externa ($n = 2$ en este caso), está llena y se presenta un espacio grande de energía entre la subcapa $2p$ llena y el siguiente disponible, la subcapa $3s$. El argón tiene la configuración $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. Aquí sólo la subcapa $3p$ está llena e, igualmente, existe un espacio grande de energía entre la subcapa $3p$ llena y la siguiente disponible, la subcapa $3d$. Este patrón se presenta en todos los gases inertes: el kriptón tiene llena la subcapa $4p$, el xenón la subcapa $5p$ y el radón la subcapa $6p$.

Si considera la columna a la izquierda de los gases inertes en la tabla periódica, se encuentra un grupo de elementos llamados *halógenos*: flúor, cloro, bromo, iodo y astatinio. A temperatura ambiente, el flúor y el cloro son gases, el bromo es líquido

Grupo I	Grupo II			Elementos de transición			Elementos de transición					Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0
H 1 $1s^1$																H 1 $1s^1$	He 2 $1s^2$
Li 3 $2s^1$	Be 4 $2s^2$											B 5 $2p^1$	C 6 $2p^2$	N 7 $2p^3$	O 8 $2p^4$	F 9 $2p^5$	Ne 10 $2p^6$
Na 11 $3s^1$	Mg 12 $3s^2$											Al 13 $3p^1$	Si 14 $3p^2$	P 15 $3p^3$	S 16 $3p^4$	Cl 17 $3p^5$	Ar 18 $3p^6$
K 19 $4s^1$	Ca 20 $4s^2$	Sc 21 $3d^14s^2$	Ti 22 $3d^24s^2$	V 23 $3d^34s^2$	Cr 24 $3d^54s^1$	Mn 25 $3d^54s^2$	Fe 26 $3d^64s^2$	Co 27 $3d^74s^2$	Ni 28 $3d^84s^2$	Cu 29 $3d^{10}4s^1$	Zn 30 $3d^{10}4s^2$	Ga 31 $4p^1$	Ge 32 $4p^2$	As 33 $4p^3$	Se 34 $4p^4$	Br 35 $4p^5$	Kr 36 $4p^6$
Rb 37 $5s^1$	Sr 38 $5s^2$	Y 39 $4d^15s^2$	Zr 40 $4d^25s^2$	Nb 41 $4d^45s^1$	Mo 42 $4d^55s^1$	Tc 43 $4d^55s^2$	Ru 44 $4d^75s^1$	Rh 45 $4d^85s^1$	Pd 46 $4d^{10}$	Ag 47 $4d^{10}5s^1$	Cd 48 $4d^{10}5s^2$	In 49 $5p^1$	Sn 50 $5p^2$	Sb 51 $5p^3$	Te 52 $5p^4$	I 53 $5p^5$	Xe 54 $5p^6$
Cs 55 $6s^1$	Ba 56 $6s^2$	57-71*	Hf 72 $5d^26s^2$	Ta 73 $5d^36s^2$	W 74 $5d^46s^2$	Re 75 $5d^56s^2$	Os 76 $5d^66s^2$	Ir 77 $5d^76s^2$	Pt 78 $5d^96s^1$	Au 79 $5d^{10}6s^1$	Hg 80 $5d^{10}6s^2$	Tl 81 $6p^1$	Pb 82 $6p^2$	Bi 83 $6p^3$	Po 84 $6p^4$	At 85 $6p^5$	Rn 86 $6p^6$
Fr 87 $7s^1$	Ra 88 $7s^2$	89-103**	Rf 104 $6d^27s^2$	Db 105 $6d^37s^2$	Sg 106 $6d^47s^2$	Bh 107 $6d^57s^2$	Hs 108 $6d^67s^2$	Mt 109 $6d^77s^2$	Ds 110 $6d^97s^1$	Rg 111	112		114				

*Serie lantánidos	La 57 $5d^16s^2$	Ce 58 $5d^14f^16s^2$	Pr 59 $4f^36s^2$	Nd 60 $4f^46s^2$	Pm 61 $4f^56s^2$	Sm 62 $4f^66s^2$	Eu 63 $4f^76s^2$	Gd 64 $5d^14f^76s^2$	Tb 65 $5d^14f^86s^2$	Dy 66 $4f^{10}6s^2$	Ho 67 $4f^{11}6s^2$	Er 68 $4f^{12}6s^2$	Tm 69 $4f^{13}6s^2$	Yb 70 $4f^{14}6s^2$	Lu 71 $5d^14f^{14}6s^2$
**Serie actínidos	Ac 89 $6d^17s^2$	Th 90 $6d^27s^2$	Pa 91 $5f^26d^17s^2$	U 92 $5f^36d^17s^2$	Np 93 $5f^46d^17s^2$	Pu 94 $5f^66d^07s^2$	Am 95 $5f^76d^07s^2$	Cm 96 $5f^76d^17s^2$	Bk 97 $5f^86d^17s^2$	Cf 98 $5f^{10}6d^07s^2$	Es 99 $5f^{11}6d^07s^2$	Fm 100 $5f^{12}6d^07s^2$	Md 101 $5f^{13}6d^07s^2$	No 102 $5f^{14}6d^07s^2$	Lr 103 $5f^{14}7s^27p^1$

Figura 42.19 La tabla periódica de los elementos es una representación tabular organizada de los elementos que muestra su comportamiento químico periódico. Los elementos en una columna determinada tienen comportamiento químico similar. Esta tabla muestra el nombre del elemento, el número atómico y la configuración electrónica. En el apéndice C se proporciona una tabla periódica más completa.

y el iodo y el astatinio son sólidos. En cada uno de estos átomos, a la subcapa más externa sólo le falta un electrón para estar llena. Como resultado, los halógenos son elementos químicamente muy activos que fácilmente aceptan un electrón de otro átomo para formar una capa cerrada. Los halógenos tienden a formar enlaces iónicos fuertes con átomos del otro extremo de la tabla periódica. (En el capítulo 43 se explica los enlaces iónicos.) En los faros de halógeno, los átomos de bromo o de iodo se combinan con los de tungsteno evaporado a causa del filamento y regresan a éste a fin de que el faro tenga más duración. Además, el filamento puede estar funcionando a temperaturas más elevadas que en las lámparas ordinarias y producir una luz más intensa y más blanca.

En el lado izquierdo de la tabla periódica, el Grupo I lo forman el hidrógeno y los *metales alcalinos* litio, sodio, potasio, rubidio, cesio y francio. Cada uno de estos átomos contiene un electrón en la subcapa exterior de una subcapa cerrada. Por lo tanto, estos elementos forman iones positivos con facilidad ya que el electrón solitario se enlaza con relativamente poca energía y fácilmente es retirado. Debido a eso, los átomos de metales alcalinos son químicamente activos y forman enlaces fuertes con los átomos de halógenos. Por ejemplo, la sal de mesa NaCl, es la combinación de un metal alcalino y un halógeno. Como el electrón externo está enlazado débilmente, los metales alcalinos puros tienden a ser buenos conductores eléctricos. Debido a su alta actividad química, generalmente no se les encuentra en la naturaleza en forma pura.

Es interesante graficar la energía de ionización con el número atómico Z, como en la figura 42.20. Observe el patrón de $\Delta Z = 2, 8, 8, 18, 18, 32$ en los diversos picos. Este patrón deriva del principio de exclusión, y ayuda a explicar por qué los elementos repiten sus propiedades químicas por grupos. Por ejemplo, los picos en $Z = 2$, 10, 18 y 36 corresponden a los gases inertes helio, neón, argón y kriptón, respectivamente los cuales, como ya

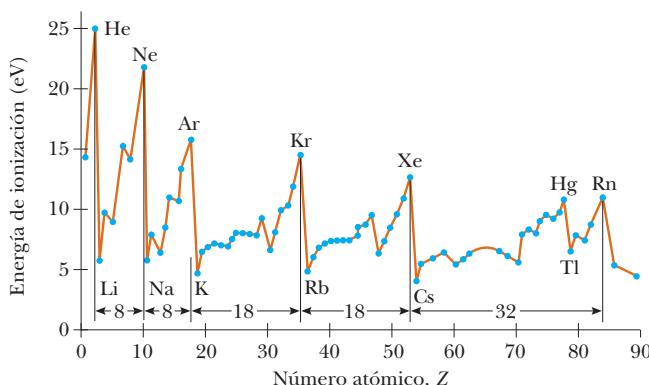



Figura 42.20 Energía de ionización de los elementos en función del número atómico.

se mencionó, tienen todos sus capas exteriores llenas. Estos elementos tienen energías de ionización relativamente elevadas y un comportamiento químico similar.

42.8 Más sobre los espectros atómicos: el visible y el rayo X

En la sección 42.1 se explicó la observación y primeras interpretaciones de las líneas espectrales visibles de los gases. Estas líneas espectrales tienen su origen en las transiciones entre estados atómicos cuantizados. En las últimas tres secciones de este capítulo estudiará estas transiciones con mayor detalle.

En la figura 42.21 aparece un diagrama modificado de los niveles de energía para el hidrógeno. En este diagrama, los valores permitidos para ℓ en cada capa están separados en forma horizontal. La figura 42.21 muestra solamente los estados hasta $\ell = 2$; las capas desde $n = 4$ hacía arriba tendrían más conjuntos de estados en el lado derecho, que no se muestran. Las transiciones en donde ℓ no cambia no tienen mucha probabilidad de presentarse y se conocen como *transiciones prohibidas*. (Estas transiciones sí pueden presentarse, pero su probabilidad es muy baja en comparación con la probabilidad de transiciones "permitidas".) Las diversas líneas diagonales representan transiciones permitidas entre estados estacionarios. Cada vez que un átomo hace una transición desde un estado de energía superior a uno inferior, se emite un fotón de luz. La frecuencia de este fotón es $f = \Delta E/h$, en donde ΔE es la diferencia en energía entre los dos estados y h es la constante de Planck. Las **reglas de selección** para las *transiciones permitidas* son

Figura 42.21 Algunas transiciones electrónicas permitidas para el hidrógeno, representadas mediante las líneas de color. Estas transiciones deben obedecer la regla de selección $\Delta\ell = \pm 1$.

$$\Delta\ell = \pm 1 \quad \text{y} \quad \Delta m_\ell = 0, \pm 1 \qquad \textbf{(42.34)}$$

◀ Reglas de selección para las transiciones atómicas permitidas

Porque la cantidad de movimiento angular orbital del átomo cambia cuando se emite o absorbe un fotón (como resultado de la transición entre estados), y porque la cantidad de movimiento angular del sistema fotón-átomo debe conservarse, se concluye que **el fotón que participa en el proceso debe llevar una cantidad de movimiento angular.** De hecho, el fotón tiene una cantidad de movimiento angular equivalente al de una partícula con espín igual a 1. Por lo tanto, el fotón tiene energía, cantidad de movimiento lineal y angular.

Recuerde, de la ecuación 42.19, que las energías permitidas para átomos de un electrón, así como iones, tales como el hidrógeno y el He^+, son

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\left(\frac{Z^2}{n^2}\right) = -\frac{(13.6 \text{ eV})Z^2}{n^2} \qquad \textbf{(42.35)}$$

Esta ecuación fue desarrollada a partir de la teoría de Bohr, pero también resulta útil como una primera aproximación a la teoría cuántica. En el caso de átomos con varios electrones, la carga nuclear positiva Ze es blindada en su mayor parte por la carga negativa de

Figura 42.22 El espectro de rayo X de un objetivo metálico está constituido por un espectro continuo y ancho (*bremsstrahlung*), seguido por varias líneas nítidas que se deben a los *rayos X característicos*. Los datos que se muestran fueron obtenidos al bombardear un objetivo de molibdeno con electrones de 37-keV.

los electrones en las capas interiores. Por lo tanto, los electrones exteriores interactúan con una carga neta que es menor a la carga nuclear. La expresión para las energías permitidas en átomos con varios electrones tiene la misma forma que la ecuación 42.35, en donde Z es reemplazada por un número atómico efectivo Z_{efec}:

$$E_n = -\frac{(13.6\text{ eV})Z_{eff}^2}{n^2} \quad \textbf{(42.36)}$$

y Z_{eff} depende de n y ℓ.

Espectros de rayo X

Cuando electrones de alta energía, o cualquier otro tipo de partículas con carga, bombardean un objetivo de metal, se emiten rayos X. El espectro característico de rayos X está constituido, en lo general, por una banda ancha y continua que contiene una serie de líneas nítidas, como se muestra en la figura 42.22. En la sección 34.6 se mencionó que una carga eléctrica acelerada emite radiación electromagnética. Los rayos X de la figura 42.22 son el resultado de la disminución de velocidad de electrones de alta energía cuando inciden en el objetivo. Puede tomar varias interacciones con los átomos del objetivo de antes que el electrón pierda toda su energía cinética. La cantidad de energía cinética perdida en cada interacción puede variar desde cero hasta la energía cinética total del electrón. Por lo tanto, la longitud de onda de la radiación a causa de estas interacciones se encuentra dentro de un intervalo continuo desde algún valor mínimo hasta el infinito. Es esta disminución de velocidad general de los electrones la que produce la curva continua que se observa en la figura 42.22, la cual muestra la desaparición de los rayos X por debajo de una longitud de onda mínima que depende de la energía cinética de los electrones incidentes. La radiación del rayo X con su origen en la disminución de electrones se conoce como **bremsstrahlung,** la expresión en alemán para "frenar la radiación".

Las líneas discretas en la figura 42.22, conocidas como **rayos X característicos** y que fueron descubiertas en 1908, tienen un origen distinto. Su origen se mantuvo sin explicación hasta que los detalles de la estructura atómica fueron comprendidos. El primer paso en la producción de rayos X característicos se presenta cuando un electrón incide con un átomo del objetivo. El electrón debe tener la suficiente energía para desalojar un electrón de las capas interiores del átomo. El hueco que se crea en la capa se llena cuando un electrón de un nivel superior baja al nivel que contiene el hueco. El intervalo de tiempo en que esto sucede es muy breve, menor a 10^{-9}s. Esta transición viene acompañada de la emisión de un fotón con una energía equivalente a la diferencia de energía entre los dos niveles. Típicamente, la energía de esta transición es mayor que 1000 eV, y los fotones de rayo X emitidos tienen longitudes de onda dentro de un intervalo que va de 0.01 nm a 1 nm.

Suponga que el electrón incidente ha desalojado un electrón atómico de la capa más interior, la capa K. Si el hueco es llenado por un electrón que desciende de la siguiente capa superior —la capa L— el fotón emitido tiene una energía correspondiente a la línea del rayo X característica K_α en la curva de la figura 42.22. En esta notación, K se refiere al nivel final del electrón y el subíndice α, la *primera* letra del alfabeto griego, se refiere al nivel inicial como el *primero* por encima del nivel final. La figura 42.23 muestra esta transición, como también otras analizadas abajo. Si el hueco en la capa K es llenado por un electrón que desciende de la capa M, se produce la línea K_β de la figura 42.22.

Otras líneas características del rayo X se forman cuando hay electrones que descienden de niveles superiores hacia huecos diferentes a los de la capa K. Por ejemplo, se producen líneas L cuando los huecos en el nivel L son ocupados por electrones que descienden de capas superiores. Se produce una línea L_α cuando un electrón desciende de la capa M a la capa L, y se produce una línea L_β cuando hay una transición de la capa N a la capa L.

Figura 42.23 Transiciones entre niveles altos y bajos de la energía atómica que dan lugar a los fotones de la radiografía de los átomos pesados cuando se bombardean con los electrones de gran energía.

Aunque los átomos de varios electrones no pueden analizarse con exactitud utilizando ya sea el modelo de Bohr o la ecuación de Schrödinger, se puede aplicar la ley de Gauss, del capítulo 24, para realizar unas predicciones sorprendentemente exactas de las energías y longitudes de onda del rayo X. Considere un átomo de número atómico Z, en el que uno de los dos electrones en la capa K ha sido expulsado. Imagine que dibuja una esfera de Gauss justo dentro del radio más probable de los electrones L. El campo eléctrico en la posición de los electrones L es una combinación de los campos producidos por el núcleo, el electrón K solitario, los demás electrones L y los electrones exteriores.

Las funciones de onda de los electrones exteriores son tales que los electrones tienen una alta probabilidad de estar más lejos del núcleo que los electrones L. Por lo tanto, los electrones exteriores tienen mayores probabilidades de encontrarse fuera de la superficie de Gauss que de encontrarse dentro y, en promedio, no contribuyen en gran medida al campo eléctrico desde la posición de los electrones L. La carga efectiva dentro de la superficie de Gauss es la carga nuclear positiva y una carga negativa propia del electrón K solitario. Si ignora las interacciones entre los electrones L, un solo electrón L se comporta como si experimentara un campo eléctrico propio de una carga $(Z - 1)e$ encerrada en de la superficie de Gauss. La carga nuclear es bloqueada por el electrón en la capa K, de manera que Z_{efec} en la ecuación 42.36 es igual a $Z - 1$. En capas de mayor nivel, la carga nuclear es bloqueada por todos los electrones en las capas interiores.

Ahora puede utilizar la ecuación 42.36 para estimar la energía asociada con un electrón en la capa L:

$$E_L = -(Z - 1)^2 \frac{13.6 \text{ eV}}{2^2}$$

Después de que el átomo hace la transición, hay dos electrones en la capa K. Es posible aproximar la energía asociada a uno de estos electrones como la de un átomo con un solo electrón. (En realidad la carga nuclear es reducida en cierto modo por la carga negativa del otro electrón, pero se ignora este efecto.) Es decir,

$$E_K \approx -Z^2(13.6 \text{ eV}) \qquad \textbf{(42.37)}$$

Como se muestra en el ejemplo 42.5, la energía del átomo con un electrón en una capa M puede ser calculada de la misma manera. Al tomar la diferencia de energía entre los niveles inicial y final, se puede calcular la energía y la longitud de onda del fotón emitido.

En 1914 Henry G. J. Moseley (1887-1915) trazó para una gran cantidad de elementos $\sqrt{1/\lambda}$ en función de Z, donde λ es la longitud de onda de la línea K_α de cada uno de los elementos. Descubrió que la gráfica forma una línea recta, como se muestra en la figura 42.24, que es consistente con los cálculos aproximados de los niveles de energía que proporciona la ecuación 42.37. A partir de esta gráfica, Moseley determinó los valores Z para elementos que aún no habían sido descubiertos y produjo una tabla periódica que coincidía por completo con las propiedades químicas conocidas de los elementos. Hasta que se realizó este experimento, los números atómicos habían sido sólo un lugar para los elementos que se editan en la tabla periódica, y los elementos se ordenaban de acuerdo con su masa.

Figura 42.24 Gráfica de Moseley de $\sqrt{1/\lambda}$ en función de Z, donde λ es la longitud de onda de la línea de rayo X K_α de un elemento con número atómico Z.

Pregunta rápida 42.5 En un tubo de rayo X: conforme la energía de los electrones que golpean un objetivo metálico aumenta, la longitud de onda de los rayos X característicos, a) aumenta, b) disminuye, o bien c) no cambia

Pregunta rápida 42.6 Verdadero o falso: ¿es posible que el espectro de un rayo X muestre el espectro continuo de rayos X sin la presencia de los rayos X característicos?

EJEMPLO 42.5 Estimación de la energía de un rayo X

Estime la energía del rayo X característico emitido de un objetivo de tungsteno con un electrón que cae de una capa M (estado $n = 3$) a una vacía en la capa K (estado $n = 1$). El número atómico del tungsteno es $Z = 74$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un electrón acelerado que golpea un átomo de tungsteno y expulsa un electrón de la capa K. Subsecuentemente, un electrón en la capa M cae para llenar el espacio vacío y la diferencia de energía entre los estados se emite como un fotón del rayo X.

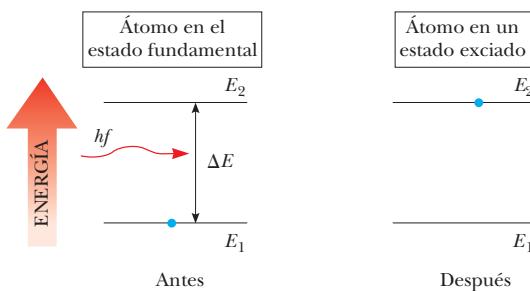
Categorizar Los resultados se estiman con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 42.37 y Z = 74 para tungsteno para estimar la energía asociada con el electrón en la capa K:

$$E_K \approx -(74)^2(13.6 \text{ eV}) = -7.4 \times 10^4 \text{ eV}$$

Use la ecuación 42.36 y que nueve electrones blindan la carga nuclear (ocho electrones en el estado $n = 2$ y un electrón en el estado $n = 1$) para estimar la energía de la capa M:

$$E_M \approx -\frac{(13.6 \text{ eV})(74 - 9)^2}{(3)^2} \approx -6.4 \times 10^3 \text{ eV}$$

Encuentre la energía del fotón del rayo X emitido:

$$hf = E_M - E_K \approx -6.4 \times 10^3 \text{ eV} - (-7.4 \times 10^4 \text{ eV})$$

$$\approx 6.8 \times 10^4 \text{ eV} = \boxed{68 \text{ keV}}$$

La consulta de tablas de rayo X muestra que las energías de transición M-K en el tungsteno varían de 66.9 keV a 67.7 keV, donde el intervalo de energías se debe a valores de energía ligeramente diferentes para estados de diferente ℓ. En consecuencia, la estimación difiere del punto medio de este intervalo observado experimentalmente en más o menos 1%.

Figura 42.25

Absorción estimulada de un fotón. El punto azul representa un electrón. El electrón se transfiere del estado fundamental al estado excitado cuando el átomo absorbe un fotón de energía $hf = E_2 - E_1$.

42.9 Transiciones espontáneas y estimuladas

Hemos visto que un átomo absorbe y emite radiación electromagnética sólo dentro de las frecuencias que corresponden a las diferencias de energía entre los estados permitidos. Ahora se examinan estos procesos con mayor detalle. Considere un átomo con los niveles de energía permitidos $E_1, E_2, E_3, \ldots$. Cuando incide radiación sobre este átomo, sólo aquellos fotones cuya energía hf es igual a la energía de separacíon ΔE entre dos niveles de energía pueden ser absorbidos por el átomo, como se representa en la figura 42.25. Este proceso es conocido como **absorción estimulada** porque el fotón estimula al átomo para realizar la transición hacia un nivel superior. A temperaturas ordinarias, la mayoría de los átomos en una muestra se encuentra en el estado fundamental. Si un recipiente contiene muchos átomos de un elemento gaseoso es iluminado con radiación a todas las frecuencias de fotones posibles (es decir, un espectro continuo), sólo aquellos fotones que tengan una energía $E_2 - E_1$, $E_3 - E_1$, $E_4 - E_1$, etcétera, serán absorbidos por los átomos. Como resultado de esta absorción, algunos átomos se elevarán a estados excitados.

Una vez que el átomo se encuentra en estado excitado, éste puede realizar la transición de regreso hacia un nivel de energía más bajo, emitiendo un fotón en el proceso, como aparece en la figura 42.26. Este proceso es conocido como **emisión espontánea,** porque sucede naturalmente, sin requerir de un evento que produzca dicha transición. Por lo general, un átomo permanece en un estado excitado durante sólo 10^{-8} s.

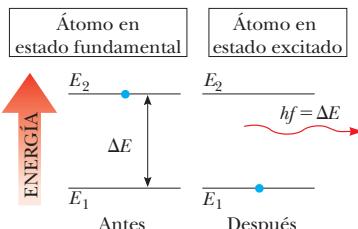
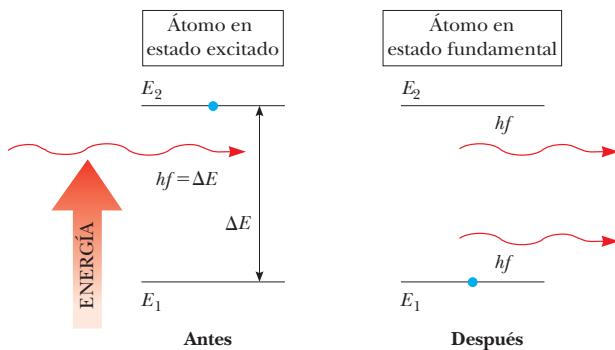



Figura 42.26

Emisión espontánea de un fotón por un átomo que inicialmente está en el estado excitado E_2. Cuando el átomo cae al estado fundamental, emite un fotón de energía

Además de la emisión espontánea, también se presenta la **emisión estimulada.** Considere un átomo que se encuentra en el estado excitado E_2, como en la figura 42.27. Si el estado excitado es un *estado metaestable*, es decir, si su vida es mucho mayor que la vida representativa de 10^{-8} s de los estados excitados, el intervalo de tiempo hasta que se presente la emisión espontánea será relativamente largo. Imagine que durante este intervalo un fotón con energía $hf = E_2 - E_1$ incide en el átomo. Una posibilidad es que

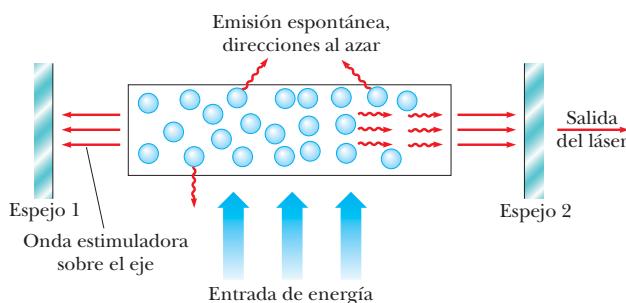
Figura 42.27 Emisión estimulada de un fotón por un fotón entrante de energía $hf = E_2 - E_1$. Inicialmente, el átomo está en el estado excitado. El fotón entrante estimula al átomo a emitir un segundo fotón de energía determinada por $hf = E_2 - E_1$.

la energía del fotón sea suficiente para que éste ionice al átomo. Otra posibilidad es que la interacción entre el fotón incidente y el átomo provoque que éste vuelva al estado fundamental[11] y, por tanto, emita un segundo fotón con energía $hf = E_2 - E_1$. En este proceso, el fotón incidente no es absorbido; por lo tanto, después de la emisión estimulada, existen dos fotones con energía idéntica: el fotón incidente y el fotón emitido. Los dos están en fase y viajan en la misma dirección, que es una consideración importante en el caso de los láser, explicados a continuación.

42.10 Láser

En esta sección se explora la naturaleza de la luz láser y la gran diversidad de aplicación de los láser en esta sociedad tecnológica. Las propiedades principales del láser que lo hacen tan útil para las aplicaciones tecnológicas, son las siguientes:

- La luz de láser es coherente. Los rayos individuales de luz en un haz láser conservan una correspondencia de fase fija entre sí.
- La luz de láser es monocromática. La luz de un haz láser tiene un intervalo muy limitado de longitudes de onda.
- La luz de láser tiene un pequeño ángulo de divergencia. El haz se dispersa muy poco, incluso en grandes distancias.

A fin de comprender el origen de estas propiedades, combine lo que ha aprendido en este capítulo sobre los niveles de energía atómicos con algunos requerimientos especiales de los átomos que emiten luz láser.

Ya se ha descrito cómo un fotón incidente puede provocar transiciones de energía atómica, ya sea hacia arriba (absorción estimulada) o hacia abajo (emisión estimulada). Los dos procesos son igualmente probables. Cuando hay luz incidente sobre un grupo de átomos, usualmente se presenta una absorción neta de energía, porque cuando el sistema se encuentra en equilibrio térmico, existen muchos más átomos en el estado fundamental que en estados excitados. Sin embargo, cuando se invierte la situación de forma que más átomos se encuentren en un estado excitado que en el estado fundamental, puede resultar una emisión neta de fotones. Esta condición se conoce como **inversión de población.**

La inversión de población es de hecho, el principio fundamental que subyace a la operación de un láser (siglas de *l*ight *a*mplification by *s*timulated *e*mission of *r*adiation, amplificación de luz por emisión estimulada de radiación). Su nombre completo indica uno de los requisitos para que exista luz láser: debe presentarse un proceso de emisión estimulada para lograr la acción láser.

Suponga que un átomo se encuentra en el estado excitado E_2, como se muestra en la figura 42.27, y que sobre él incide un fotón con energía $hf = E_2 - E_1$. Como se describe

[11] Este fenómeno es fundamentalmente a causa de *resonancia*. El fotón a punto de llegar tiene una frecuencia y activa al sistema del átomo a esa frecuencia. Ya que la frecuencia de impulso coincide con la asociada con la transición entre estados (una de las frecuencias naturales del átomo), se produce una gran respuesta: el átomo realiza la transición.

Figura 42.28 Diagrama de un diseño de láser. El tubo contiene los átomos que son el medio activo. Una fuente de energía externa (por ejemplo, un dispositivo eléctrico u óptico) "bombea" a los átomos hacia estados excitados. Los espejos paralelos en los extremos evitan que los fotones se salgan del tubo, salvo por el espejo 2, que sólo es parcialmente reflejante.

en la sección 42.9, el fotón que está por llegar puede estimular al átomo excitado para que vuelva al estado fundamental, con lo cual emite un segundo fotón que tiene la misma energía hf y viaja en la misma dirección. El fotón incidente no es absorbido, por lo que al terminar la emisión estimulada existen dos fotones idénticos: el fotón incidente y el fotón emitido. El fotón emitido está en fase con el fotón incidente. Estos fotones pueden estimular a otros átomos para que emitan más fotones, en una cadena de procesos similares. La gran cantidad de fotones que se producen de esta manera, son la fuente de la luz coherente e intensa de un láser.

A fin de que la emisión estimulada dé como resultado una luz láser, debe tener una acumulación de fotones en el sistema. Las tres condiciones siguientes deben ser satisfechas para lograr esta acumulación:

- El sistema debe de estar en un estado de inversión de población, debe haber más átomos en un estado excitado que átomos en el estado fundamental. Esto debe ser verdadero porque el número de fotones emitidos debe ser mayor que el número de fotones absorbidos.
- El estado excitado del sistema debe ser un *estado metaestable*, lo que significa que su vida debe ser larga en comparación con las vidas comúnmente breves de los estados excitados, los cuales duran por lo general 10^{-8} s. En esta situación, es posible establecer una inversión de la población y es más probable que se presente una emisión estimulada antes que una emisión espontánea.
- Los fotones emitidos deben confinarse en el sistema el tiempo suficiente para que puedan tener la capacidad de estimular emisiones posteriores de otros átomos excitados. Esto se logra utilizando espejos en los extremos del sistema. Un extremo es completamente reflejante y el otro es parcialmente reflejante. Una fracción de la intensidad de la luz pasa a través del extremo parcialmente reflejante, formando un haz de luz láser (figura 42.28).

Un dispositivo que muestra una emisión estimulada de radiación es el láser de gas helio-neón. La figura 42.29 es un diagrama del nivel de energía del átomo de neón en este sistema. La mezcla de helio y neón se confina en un tubo de vidrio sellado en sus extremos mediante espejos. Un voltaje aplicado de un extremo al otro del tubo hace que los electrones se desplacen por el tubo, entrando en colisión con los átomos de los gases y elevándolos a estados excitados. Los átomos de neón se excitan al estado E_3* mediante este proceso (el asterisco [*] indica un estado metaestable) y también como resultado de colisiones con los átomos excitados del helio. Se presenta una emisión estimulada, lo que hace que los átomos de neón realicen transiciones al estado E_2. Los átomos cercanos excitados, también son estimulados. Esto da como resultado la producción de luz coherente con una longitud de onda de 632.8 nm.

Estado metaestable
E_3*
hf
λ = 632.8 nm
E_2
Energía
de salida
ENERGÍA
Energía
de entrada
E_1

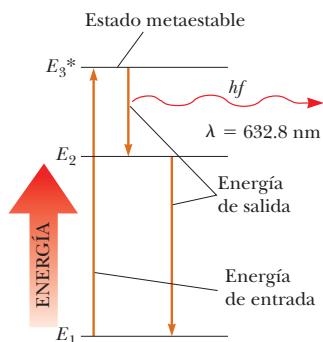



Figura 42.29 Diagrama de nivel de energía para un átomo de neón en un láser de helio-neón. El átomo emite fotones de 632.8 nm a través de la emisión estimulada en la transición E_3* − E_2, que es la fuente de luz coherente en el láser.

Aplicaciones

Desde el desarrollo del primer láser en 1960, la tecnología láser ha tenido un crecimiento significativo. Ahora están disponibles láser que utilizan longitudes de onda en las regiones infrarroja, visible y ultravioleta. Algunas aplicaciones incluyen la "soldadura" quirúrgica de retinas desprendidas, la agrimensura y medición de longitudes de precisión, los cortes precisos de metales y de otros materiales (como por ejemplo en la fábrica que muestra la figura 42.30) y la comunicación telefónica mediante fibras ópticas. Estas y otras aplicaciones han resultado posibles debido a las características únicas de la luz láser. Además de ser altamente

monocromática, la luz láser también es altamente direccional y puede ser concentrada exactamente para producir regiones con una energía luminosa muy intensa (con densidades de energía 10^{12} veces mayores que la de la llama de un soplete de corte representativo).

Los láser se aplican en la medición de precisión a distancia (telemetría). En años recientes se ha vuelto importante, para fines astronómicos y geofísicos, medir con la mayor precisión posible las distancias desde diferentes puntos en la superficie de la Tierra a un punto en la superficie de la Luna. Para hacer esto más fácil, los astronautas del Apolo colocaron en la Luna prismas reflectores cuadrados de 0.5 m de lado, con lo que se consigue que las emisiones de láser dirigidas desde una estación de la Tierra sean reflejadas de regreso a la misma estación (véase la figura 35.8a). Utilizando la rapidez conocida de la luz y el tiempo medido de viaje redondo de un pulso láser, la distancia Tierra-Luna puede determinarse con una precisión de más de 10 cm.

Figura 42.30 Estas tijeras láser robóticas, que pueden cortar hasta 50 lienzos de tela en una sola pasada, es una de las muchas aplicaciones de la tecnología láser.

Las aplicaciones médicas aprovechan el hecho de que diferentes longitudes de onda del láser son absorbidas por tejidos biológicos específicos. Por ejemplo, ciertos procedimientos láser han reducido de manera importante la ceguera en pacientes con glaucoma y con diabetes. El glaucoma es una enfermedad bastante común del ojo humano, caracterizada por una alta presión en el fluido en el ojo, que puede conducir a la destrucción del nervio óptico. Una operación láser simple (iridectomía) puede "quemar" abriendo una pequeña perforación en un membrana obstruida, mitigando la presión destructiva. Un efecto secundario serio de la diabetes es la neovascularización, la proliferación de vasos sanguíneos débiles que con frecuencia sangran. Cuando la neovascularización se presenta en la retina, la visión se deteriora (retinopatía diabética) y finalmente se destruye. Hoy en día es posible dirigir la luz verde de un láser de un ion de argón a través del cristalino y del fluido del ojo, enfocarla en los bordes de la retina, y fotocoagular los vasos sangrantes. Incluso las personas que sólo tienen defectos menores de visión, como la miopía, se benefician del uso del láser para modificar la forma de la córnea, cambiando su distancia focal y reduciendo la necesidad de anteojos.

La cirugía láser es ahora algo cotidiano en hospitales de todo el mundo. La luz infrarroja a 10 μm proveniente de un láser de dióxido de carbono puede cortar el tejido muscular, principalmente mediante la vaporización del agua contenida en el tejido celular. Para esta técnica se requiere una potencia de láser de alrededor de 100 W. La ventaja del "bisturí láser" sobre otros métodos convencionales es que la radiación láser corta tejido y coagula la sangre al mismo tiempo, lo que lleva a una reducción sustancial en pérdida de sangre. Además, la técnica elimina virtualmente la migración celular, una consideración importante cuando se retiran tumores.

Un haz láser puede ser atrapado en una fina guía de luz de fibras ópticas (endoscopios) utilizando una reflexión interna total. Un endoscopio puede introducirse a través de orificios naturales del cuerpo, conducirse alrededor de órganos internos y dirigirse a ubicaciones específicas en el interior del cuerpo, eliminando la necesidad de cirugía invasiva. Por ejemplo, el sangrado del tracto gastrointestinal puede cauterizarse de manera óptica por medio de endoscopios insertos a través de la boca.

Figura 42.31 Se forma una trampa óptica para átomos en la intersección de seis haces láser que se contrapropagan a lo largo de ejes mutuamente perpendiculares. La frecuencia de la luz láser se sintoniza para que esté justo por debajo de la absorción de los átomos atrapados. Si un átomo se mueve alejándose de la trampa, absorbe luz láser desplazada por el efecto Doppler, y el momentum de la luz empuja al átomo de regreso hacia la trampa.

En la investigación médica y biológica es a menudo importante aislar y recolectar células extrañas para su estudio y cultivo. Un separador láser de células explota el resultado de células específicas con tintes fluorescentes. En tal caso, todas las células se dejan caer de una diminuta boquilla cargada y son rastreadas por un láser para identificar la anilina. Si se detectan las marcas emisoras correctas, un pequeño voltaje aplicado a placas paralelas desvía la célula eléctricamente cargada a fin de que caiga en un vaso de recolección.

Un área emocionante de investigación y de aplicaciones tecnológicas surgió en los años noventa con el desarrollo del *láser atrapador de átomos.* Un procedimiento, conocido como *melaza óptica* y desarrollado por Steven Chu y sus colegas de la Universidad de Stanford, consiste en el enfoque de seis haces láser sobre una región pequeña, en la cual se atrapan los átomos. Cada par de láser está a lo largo de los ejes *x, y* y *z,* y emite luz en direcciones opuestas (figura 42.31). La frecuencia de la luz láser se sintoniza de manera que quede justo por debajo de la frecuencia de absorción del átomo sometido. Imagine que un átomo ha sido colocado en la región de la trampa y que se mueve a lo largo del eje positivo *x,* hacia el láser que está emitiendo una luz hacia el átomo (el láser más a la derecha en la figura 42.31). Ya que el átomo está en movimiento, la luz del láser se observa desplazada por el efecto Doppler hacia arriba en la frecuencia del marco de referencia del

Figura 42.32 Un empleado del National Institute of Standards and Technology contempla una muestra de átomos de sodio atrapados (el pequeño punto amarillo en el centro de la de vacío), enfriada a una temperatura menor a 1 mK.

átomo. Debido a eso, existe un equilibro entre la frecuencia del láser desplazado por el efecto Doppler con la frecuencia de absorción del átomo, y el átomo absorbe fotones.[12] La cantidad de movimiento de estos fotones hace que el átomo sea empujado de regreso hacia la trampa. Al incorporar seis haces láser, los átomos son empujados hacia la trampa sin importar en qué dirección se muevan o a lo largo de cualquier eje.

En 1986 Chu desarrolló las *pinzas ópticas,* un dispositivo que usa un solo haz láser concentrado estrechamente para atrapar y manipular partículas pequeñas. En combinación con los microscopios, las pinzas ópticas han abierto toda clase de nuevas posibilidades para los biólogos. Las pinzas ópticas han sido utilizadas para manipular bacterias vivas sin causar daños, mover cromosomas dentro del núcleo de una célula y medir las propiedades elásticas de una sola molécula de ADN. Steven Chu compartió el premio Nobel de física de 1997 con dos de sus colegas por el desarrollo de las técnicas de trampas ópticas.

Una extensión de las trampas láser, el *enfriamiento por láser*, es posible debido a que las altas magnitudes de velocidad de los átomos se reducen cuando se limitan dentro de la región de la trampa. Como resultado, la temperatura del grupo de átomos puede reducirse a unos cuantos microkelvin. La técnica del enfriamiento por láser permite a los científicos estudiar el comportamiento de los átomos a temperaturas extremadamente bajas (figura 42.32).

[12] La luz láser que viaja en la misma dirección que el átomo tiene su frecuencia desplazada por el efecto Doppler más hacia abajo, por lo que no existe absorción. Por lo tanto, el láser diametralmente opuesto no empuja al átomo afuera de la trampa.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Las longitudes de onda de las líneas espectrales del hidrógeno, llamadas **series de Balmer**, se describen mediante la ecuación

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 3, 4, 5, \ldots \qquad \textbf{(42.1)}$$

donde R_{H} es la **constante de Rydberg**. Las líneas espectrales que corresponden a los valores de n desde 3 hasta 6 están en el intervalo visible del espectro electromagnético. Los valores de n mayores que 6 corresponden a líneas espectrales en la región ultravioleta del espectro.

El modelo de Bohr del átomo con precisión describe los espectros del hidrógeno atómico y de iones parecidos a hidrógeno. Una suposición básica del modelo es que el electrón puede existir sólo en órbitas discretas, de tal modo que la cantidad de movimiento angular del electrón es un múltiplo entero de $h/2\pi = \hbar$. Cuando se suponen órbitas circulares y una atracción de Coulomb simple entre electrón y protón, las energías de los estados cuánticos para el hidrógeno se calculan como

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(42.13)}$$

donde n es un entero llamado **número cuántico**, k_e es la constante de Coulomb, e es la carga del electrón y $a_0 = 0.052\,9$ nm es el **radio de Bohr**.

Si el electrón en un átomo de hidrógeno realiza una transición de una órbita cuyo número cuántico es n_i a una cuyo número cuántico es n_f, donde $n_f < n_i$, el átomo emite un fotón. La frecuencia de este fotón es

$$f = \frac{k_e e^2}{2a_0 h}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad \textbf{(42.15)}$$

(*continúa*)

La mecánica cuántica se puede aplicar al átomo de hidrógeno mediante el uso de la función de energía potencial $U(r) = 2k_e e^2/r$ en la ecuación de Schrödinger. La solución a esta ecuación produce funciones de onda para estados permitidos y energías permitidas:

$$E_n = -\left(\frac{k_e e^2}{2a_0}\right)\frac{1}{n^2} = -\frac{13.606 \text{ eV}}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(42.21)}$$

donde n es el **número cuántico principal**. Las funciones de onda permitidas dependen de tres números cuánticos: n, ℓ y m_ℓ, donde ℓ es el **número cuántico orbital** y m_ℓ es el **número cuántico magnético orbital**. Las restricciones sobre los números cuánticos son

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell - 1, \ell$$

Todos los estados que tengan el mismo número cuántico principal n forman una **capa**, que se identifica por las letras K, L, M,... (que corresponden a $n = 1, 2, 3,$...). Todos los estados que tienen los mismos valores de n y ℓ forman una **subcapa**, designada por las letras *s*, *p*, *d*, *f*,... (que corresponden a $\ell = 0, 1, 2, 3,$...).

Un átomo en un estado caracterizado por un valor específico de n puede tener los siguientes valores de L, la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital del átomo $\vec{\mathbf{L}}$:

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar$$

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots, n - 1 \qquad \textbf{(42.27)}$$

Los valores permitidos de la proyección de $\vec{\mathbf{L}}$ sobre el eje z son:

$$L_z = m_\ell \hbar \qquad \textbf{(42.28)}$$

Sólo se permiten valores discretos de L_z, como determinan las restricciones sobre m_ℓ. Esta cuantización de L_z se conoce como **cuantización del espacio**.

El electrón tiene una cantidad de movimiento angular intrínseca llamada **cantidad de movimiento angular de espín**. El espín del electrón se puede describir mediante un solo número cuántico $s = \frac{1}{2}$. Para describir por completo un estado cuántico, es necesario incluir un cuarto número cuántico m_s, llamado **número cuántico magnético de espín**. Este número cuántico puede tener sólo dos valores, $\pm\frac{1}{2}$. La magnitud de la cantidad de movimiento angular de espín es

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \qquad \textbf{(42.30)}$$

y la componente z de $\vec{\mathbf{S}}$ es

$$S_z = m_s \hbar = \pm\tfrac{1}{2}\hbar \qquad \textbf{(42.31)}$$

Es decir, la cantidad de movimiento angular de espín también está cuantizada en el espacio, como se especifica mediante el número cuántico magnético de espín $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

El **principio de exclusión** afirma que **dos electrones en un átomo no pueden estar en el mismo estado cuántico.** En otras palabras, dos electrones no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s. Con este principio se pueden determinar las configuraciones electrónicas de los elementos. Este principio sirve como una base para comprender la estructura atómica y las propiedades químicas de los elementos.

El momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{espín}}$ asociado con la cantidad de movimiento angular de espín de un electrón es

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{espín}} = -\frac{e}{m_e}\vec{\mathbf{S}} \qquad \textbf{(42.32)}$$

La componente z de $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\text{espín}}$ puede tener los valores

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{espín}, z} = \pm\frac{e\hbar}{2m_e} \qquad \textbf{(42.33)}$$

El espectro de rayo X de un objetivo metálico consiste en un conjunto de líneas características definidas sobrepuestas en un amplio espectro continuo. La **bremsstrahlung** (radiación de frenado) es radiación X con su origen en el frenado de los electrones de alta energía conforme encuentran el objetivo. Los átomos emiten **rayos X característicos** cuando un electrón se somete a una transición de una capa exterior a una vacante en una capa interna.

Las transiciones atómicas se pueden describir con tres procesos: **absorción estimulada**, en la que un fotón entrante lleva el átomo a un estado de energía superior; **emisión espontánea**, en la que el átomo hace una transición a un estado de energía menor y emite un fotón; y **emisión estimulada**, en la que un fotón incidente hace que un átomo excitado realice una transición descendente y emita un fotón idéntico al incidente.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. Suponga que el electrón del átomo de hidrógeno obedece a la mecánica clásica en vez de a la mecánica cuántica. ¿Por qué un gas de tales átomos hipotéticos emite un espectro continuo en vez de la línea espectral observada?

2. **O** a) ¿Un átomo de hidrógeno en el estado fundamental puede absorber un fotón de energía menor que 13.6 eV? y b) mayor que 13.6 eV?

3. **O** Compare esta pregunta con la pregunta rápida 42.1. Cuando un electrón choca con un átomo, puede transferir toda o parte de su energía al átomo. Un átomo de hidrógeno está en su estado fundamental. Incide el átomo varios electrones que tienen cada uno energía cinética de 10.5 eV. ¿Cuál es el resultado? a) El átomo se excita a un estado permitido superior. b) El átomo se ioniza. c) Los electrones pasan por el átomo sin interacción.

4. **O** Sea $-E$ la energía de un átomo de hidrógeno. **i)** ¿Cuál es la energía cinética del electrón? a) $2E$, b) E, c) $E/2$, d) 0, e) $-E/2$, f) $-E$, g) $-2E$. **ii)** ¿Cuál es la energía potencial del átomo? Elija entre las mismas posibilidades de la a) a la g).

5. **O** **i)** Clasifique las siguientes transiciones para un átomo de hidrógeno, de la transición con la mayor ganancia de energía a la que tiene la mayor pérdida, y muestre cualquier caso de igualdad: a) $n_i = 2$; $n_f = 5$, b) $n_i = 5$; $n_f = 3$, c) $n_i = 7$; $n_f = 4$, d) $n_i = 4$; $n_f = 7$. **ii)** Clasifique las mismas transiciones de acuerdo con la longitud de onda del fotón absorbido o emitido por un átomo aislado de otra forma, de mayor a menor longitud de onda.

6. **O** a) En el átomo de hidrógeno, ¿el número cuántico n aumenta sin límite? b) ¿La frecuencia de las posibles líneas en el espectro del hidrógeno puede aumentar sin límite? c) ¿La longitud de onda de las posibles líneas en el espectro del hidrógeno puede aumentar sin límite?

7. De acuerdo con el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, ¿cuál es la incertidumbre en la coordenada radial del electrón? ¿Cuál es la incertidumbre en la componente radial de la velocidad del electrón? ¿De qué manera viola el modelo el principio de incertidumbre?

8. **O** Considere los números cuánticos a) n, b) ℓ, c) m_ℓ, y d) m_s. **i)** ¿Cuál de estos números cuánticos son fraccionarios, en oposición a ser enteros? **ii)** ¿Cuál puede ser negativo en oposición a ser positivo? **iii)** ¿Cuál puede ser cero?

9. ¿Por qué se necesitan los tres números cuánticos para describir el estado de un átomo con un solo electrón (ignorando el espín)?

10. Compare la teoría de Bohr y el tratamiento de Schrödinger del átomo de hidrógeno. Comente sobre la energía total y el momento angular orbital.

11. ¿Podría realizar el experimento Stern-Gerlach con iones en vez de átomos neutros? Explique por qué.

12. ¿Por qué se utiliza un campo magnético *no uniforme* en el experimento Stern-Gerlach?

13. Analice algunas de las consecuencias del principio de exclusión.

14. Para excitar un electrón en un átomo de helio del estado $1s$ al estado $2s$ se requiere una energía de alrededor de 21 eV. La misma transición para el ion He^+ requiere aproximadamente el doble de energía. Explique esto.

15. ¿Por qué el litio, el potasio y el sodio tienen propiedades químicas similares?

16. Es fácil entender cómo dos electrones (uno espín arriba, uno espín abajo) llenan la capa $n = 1$ o la capa K para un átomo de helio. ¿Cómo ocho electrones más puedan encajar en la capa $n = 2$ y llenar las capas K y L para un átomo de neón?

17. **O** **i)** ¿Cuál es el número cuántico principal del estado inicial de un átomo conforme emite una línea M_β en un espectro de rayos X? a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 5, f) ninguna de estas respuestas. **ii)** ¿Cuál es el número cuántico principal del estado inicial para esta transición? Elija entre las mismas posibilidades.

18. ¿Cómo es que la intensidad de la luz de un láser disminuye en función de $1/r^2$?

19. ¿Por qué es tan importante la emisión estimulada en el funcionamiento de un láser?

20. a) "Tan pronto como defina una dirección particular como el eje z, precisamente una mitad de los electrones en esta parte del Universo tiene sus vectores de momento magnético orientados a 54.735 61° con ese eje, y el resto tiene sus momentos magnéticos a 125.264 39°." Argumente a favor o en contra de esta afirmación. b) "El Universo no es simplemente extraño como lo suponemos; es más extraño de lo que *podemos* suponer." Argumente a favor o en contra de esta afirmación.

21. Un mensaje dice: "*¡Toda su base nos pertenece!*". Argumente a favor o en contra de que un descubrimiento científico es como una comunicación proveniente de una fuente absolutamente extraña y necesita interpretación y es susceptible de malas interpretaciones. Argumente a favor o en contra de que la mente humana no necesariamente está bien adaptada para comprender el Universo. Argumente a favor o en contra de que la educación en ciencia es la mejor preparación para la vida en un mundo que cambia muy rápido.

Problemas

Sección 42.1 Espectros atómicos de los gases

1. a) ¿Qué valor de n_i se asocia con la línea espectral 94.96 nm en la serie de Lyman del hidrógeno? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Podría asociarse esta longitud de onda con la serie de Paschen o con la de Balmer?

2. a) Un átomo aislado de cierto elemento emite luz de 520 nm de longitud de onda cuando el átomo cae de su quinto estado excitado a su segundo estado excitado. El átomo emite un fotón de 410 nm de longitud de onda cuando cae de su sexto estado excitado a su segundo estado excitado. Encuentre la longitud de onda de la luz radiada cuando el átomo hace una transición de su sexto a su quinto estado excitado. b) Resuelva de nuevo el mismo problema pero en términos simbólicos. Con λ_{BA} como la longitud de onda emitida en la transición de B a A y λ_{CA} la longitud de onda más corta emitida en la transición de C a A, encuentre λ_{CB}. Este problema ejemplifica el *principio de combinación de Ritz*, una regla empírica formulada en 1908.

Sección 42.2 Los primeros modelos del átomo

3. De acuerdo con la física clásica, una carga e móvil con una aceleración a emite con una rapidez de

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{e^2a^2}{c^3}$$

a) Demuestre que un electrón en un átomo de hidrógeno clásico (véase la figura 42.5) se mueve en espiral hacia el núcleo con una rapidez de

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2\epsilon_0{}^2r^2m_e{}^2c^3}$$

b) Determine el intervalo de tiempo al final del cual el electrón alcanzará $r = 0$, empezando desde $r_0 = 2.00 \times 10^{-10}$ m.

4. **Problema de repaso.** En el experimento de dispersión de Rutherford, existen partículas alfa de 4.00 MeV (núcleos de ^{4}He que contienen 2 protones y 2 neutrones) que se dispersan en núcleos de oro (que contienen 79 protones y 118 neutrones). Suponga que una partícula alfa en particular colisiona directamente con el núcleo de oro y se dispersa de regreso a 180°. Determine a) la distancia del máximo acercamiento de la partícula alfa al núcleo de oro y b) la fuerza máxima ejercida sobre la partícula alfa. Suponga que el núcleo de oro permanece fijo en todo el proceso.

Sección 42.3 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno

5. La serie de Balmer para el átomo de hidrógeno corresponde a las transiciones electrónicas que terminan en el estado con número cuántico $n = 2$, como se muestra en la figura 42.2 y la figura 42.8. a) Considere el fotón de longitud de onda más larga. Determine su energía y longitud de onda. b) Considere la línea espectral de longitud de onda más corta. Encuentre su energía fotónica y longitud de onda.

6. Para un átomo de hidrógeno en su estado fundamental, utilice el modelo de Bohr para calcular a) la rapidez orbital del electrón, b) la energía cinética del electrón y c) la energía potencial eléctrica del átomo.

7. Un átomo de hidrógeno está en su primer estado excitado ($n = 2$). Utilizando la teoría de Bohr del átomo, calcule a) el radio de la órbita, b) la cantidad de movimiento lineal del electrón, c) la cantidad de movimiento angular del electrón, d) la energía cinética del electrón, e) la energía potencial del sistema y f) la energía total del sistema.

8. ● Un conjunto de átomos de hidrógeno en estado fundamental absorbe un haz de luz monocromático de tal forma que se observan seis longitudes de onda cuando el hidrógeno se relaja de vuelta al estado fundamental. a) ¿Cuál es la longitud de onda del haz incidente? Explique las etapas en su solución. b) ¿Cuál es la longitud de onda más larga en el espectro de emisión de estos átomos? ¿A qué porción del espectro electromagnético y a qué serie pertenece? c) ¿Cuál es la longitud de onda más corta? ¿A qué serie pertenece?

9. a) Elabore un diagrama de nivel de energía para el ion He^+, en el cual $Z = 2$. b) ¿Cuál es la ionización de energía para He^+?

10. Un fotón con 2.28 eV de energía apenas es capaz de causar un efecto fotoeléctrico cuando golpea una placa de sodio. Suponga que, en vez de ello, el fotón es absorbido por hidrógeno. Encuentre a) el mínimo n para un átomo de hidrógeno que se puede ionizar por tal fotón y b) la rapidez del electrón liberado más alejado del núcleo.

11. El positrón es la antipartícula del electrón. Tiene la misma masa y una carga eléctrica positiva de la misma magnitud que la del electrón. El positronio es un átomo parecido al hidrógeno que consiste en un positrón y un electrón que dan vuelta uno alrededor del otro. Use el modelo de Bohr y encuentre las distancias permitidas entre las dos partículas y las energías permitidas del sistema.

12. ● Un electrón está en la n-ésima órbita de Bohr del átomo de hidrógeno. a) Demuestre que el periodo del electrón es $T = t_0n^3$ y determine el valor numérico de t_0. b) En promedio, un electrón permanece en la órbita $n = 2$ durante aproximadamente 10 μs antes de saltar hacia la órbita $n = 1$ (estado fundamental). ¿Cuántas revoluciones hace el electrón en el estado excitado? c) Defina el periodo de una revolución como un año electrón, análogo a un año Tierra como el periodo del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Explique si debe considerar al electrón en la órbita $n = 2$ como "viviendo durante un largo tiempo".

Sección 42.4 Modelo cuántico del átomo de hidrógeno

13. Una expresión general para los niveles de energía de los átomos y iones de un electrón es

$$E_n = -\frac{\mu k_e^2 q_1^2 q_2^2}{2\hbar^2 n^2}$$

Aquí μ es la masa reducida, conocida por $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ donde m_1 es la masa del electrón y m_2 es la masa del núcleo; k_e es la constante de Coulomb, y q_1 y q_2 son las cargas del electrón y el núcleo respectivamente. La longitud de onda para la transición $n = 3$ a $n = 2$ del átomo de hidrógeno es 656.3 nm (luz roja visible). **¿Qué pasaría si?** ¿Cuáles son las longitudes de onda para esta misma transición en a) positronio, que está constituido por un electrón y un positrón, y b) helio con una sola ionización? *Nota*: Un positrón es un electrón de carga positiva.

14. El gas hidrógeno ordinario es una mezcla de dos tipos de átomos (isótopos) que contiene un núcleo de una partícula o de dos. Estos isótopos son hidrógeno-1 con un núcleo protón, e hidrógeno-2, llamado deuterio, con un núcleo deuterón. Un deuterón es un protón y un neutrón enlazados. El hidrógeno-1 y el deuterio tienen idénticas propiedades químicas, pero pueden estar separados mediante una ultracentrifugadora o mediante otros métodos. Sus espectros de emisión muestran líneas de los mismos colores a longitudes de onda ligeramente diferentes. a) Use la ecuación dada en el problema 13 para demostrar que la diferencia en longitud de onda entre el hidrógeno-1 y las líneas espectrales del deuterio asociadas con una transición electrónica particular se determina por

$$\lambda_H - \lambda_D = \left(1 - \frac{\mu_H}{\mu_D}\right)\lambda_H$$

b) Evalúe la diferencia en longitud de onda para la línea alfa Balmer del hidrógeno, con longitud de onda 656.3 nm, emitida por un átomo que realiza una transición de un estado $n = 3$ a un estado $n = 2$. Harold Urey observó esta diferencia en longitud de onda en 1931 y por tanto confirmó su descubrimiento del deuterio.

15. ● Un electrón de cantidad de movimiento p está a una distancia r de un protón estacionario. El electrón tiene una energía cinética $K = p^2/2m_e$. El átomo tiene una energía potencial $U = -k_e e^2/r$ y una energía total $E = K + U$. Si un electrón está ligado al protón para formar un átomo de hidrógeno, su posición promedio es en el protón, pero la incertidumbre en su posición es aproximadamente igual al radio r de su órbita. El vector promedio de la cantidad de movimiento del electrón es igual a cero, pero su cantidad de movimiento al cuadrado promedio es aproximadamente igual a la incertidumbre al cuadrado en su cantidad de movimiento, como lo dice el principio de incertidumbre. Tratando el átomo como un sistema de una sola dimensión, a) estime la incertidumbre de la cantidad de movimiento del electrón en función de r. b) Estime las energías cinética, potencial y total en función de r. c) El valor real de r es el que *minimiza la energía total*, lo que da como resultado un átomo estable. Determine ese valor de r y la energía total resultante. Compare su respuesta con las predicciones de la teoría de Bohr.

Sección 42.5 Las funciones de onda para el hidrógeno

16. Dibuje la función de onda $\psi_{1s}(r)$ en función de r (véase la ecuación 42.22) y la función de densidad de probabilidad radial $P_{1s}(r)$ en función de r (véase la ecuación 42.25) para el hidrógeno. Establezca los valores de r en el intervalo desde 0 hasta 1.5 a_0, donde a_0 es el radio de Bohr.

17. La función de onda de estado fundamental para el electrón en un átomo de hidrógeno es igual a

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

donde r es la coordenada radial del electrón y a_0 es el radio de Bohr. a) Demuestre que la función de onda, como se ha dado, está normalizada. b) Determine la probabilidad de localizar al electrón entre $r_1 = a_0/2$ y $r_2 = 3a_0/2$.

18. La función de onda para un electrón en el estado $2p$ del hidrógeno es igual a

$$\psi_{2p} = \frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$$

¿Cuál es la distancia más probable desde el núcleo para poder encontrar un electrón en el estado $2p$?

19. Para un estado esféricamente simétrico de un átomo de hidrógeno, la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas es igual a

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right) - \frac{k_e e^2}{r}\psi = E\psi$$

Demuestre que la función de onda $1s$ para un electrón en el hidrógeno

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

satisface la ecuación de Schrödinger.

20. En un experimento, los electrones son disparados hacia una muestra de átomos de hidrógeno neutros y se observa la forma en que las partículas incidentes se dispersan. Se puede pensar en un gran conjunto de pruebas si éstas contienen 1000 observaciones del electrón en el estado fundamental de un átomo de hidrógeno que está momentáneamente a una distancia $a_0/2$ del núcleo. En este conjunto de pruebas, ¿cuántas veces será observado el electrón del átomo a una distancia $2a_0$ del núcleo?

Sección 42.6 Interpretación física de los números cuánticos

21. Menciona todos los conjuntos posibles de números cuánticos para átomos de hidrógeno asociados con a) la subcapa $3d$ y b) la subcapa $3p$.

22. Calcule la cantidad de movimiento angular orbital para un átomo de hidrógeno en a) el estado $4d$ y b) el estado $6f$.

23. a) Establezca un problema para el que la siguiente ecuación aparezca en la solución:

$$4.714 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s} = \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}(6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})}{2\pi}$$

b) Resuelva la ecuación para la incógnita que aparece en ella y establezca el nombre de esta cantidad.

24. Un átomo de hidrógeno está en su quinto estado excitado, cuyo número cuántico principal es 6. El átomo emite un fotón con una longitud de onda de 1090 nm. Determine la cantidad de movimiento angular orbital máxima posible del átomo después de la emisión.

25. ¿Cuántos conjuntos de números cuánticos son posibles para un átomo de hidrógeno en el cual a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$, d) $n = 4$ y e) $n = 5$? Verifique sus resultados para demostrar que están de acuerdo con la regla general de que el número de conjuntos de números cuánticos para una capa es igual a $2n^2$.

26. Determine todos los valores posibles de L, L_z y θ para un electrón de hidrógeno en un estado $3d$.

27. ● a). Determine la densidad de masa de un protón, representándolo como una esfera sólida de radio 1.00×10^{-15} m. b) **¿Qué pasaría si?** Considere un modelo clásico de un electrón como una esfera sólida con la misma densidad que el protón. Determine su radio. c) Imagine que este electrón posee una cantidad de movimiento angular de espín $I\omega = \hbar/2$ debido a la rotación clásica alrededor del eje z. Determine la rapidez de un punto en el ecuador del electrón y d) compare esta rapidez con la rapidez de la luz.

28. Un electrón está en la capa N. Determine el valor máximo de la componente en z de su cantidad de movimiento angular que puede tener.

29. El mesón ρ^- tiene una carga de $-e$, un número cuántico de espín igual a 1, y una masa 1507 veces mayor que la del electrón. Los valores posibles para su número cuántico magnético del espín son -1, 0 y 1. **¿Qué pasaría si?** Imagine que los electrones en los átomos fueran reemplazados con mesones ρ^-. Haga una lista de los posibles conjuntos de números cuánticos para mesones ρ^- en la subcapa $3d$.

Sección 42.7 El principio de exclusión y la tabla periódica

30. a) Escriba la configuración electrónica para el estado fundamental del oxígeno ($Z = 8$). b) Escriba un conjunto de valores posibles para los números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s para cada electrón en el oxígeno.

31. ● Conforme recorre la tabla periódica, ¿qué subcapa se llena primero, la subcapa $3d$ o la $4s$? ¿Qué configuración electrónica tiene una energía más baja: $[Ar]3d^44s^2$ o $[Ar]3d^54s^1$? ¿Cuál tiene el mayor número de espines no apareados? Identifique este elemento y analice la regla de Hund en este caso. *Nota*: La notación [Ar] representa la configuración llena del argón.

32. Configure una tabla parecida a la que se muestra en la figura 42.18 para los átomos que contiene de 11 a 19 electrones. Utilice la regla de Hund y una estimación con base en sus conocimientos.

33. Un cierto elemento tiene su electrón más externo en una subcapa $3p$. Tiene una valencia $+3$, ya que tiene tres electrones más que cierto gas noble. ¿Qué elemento es?

34. Dos electrones en el mismo átomo tienen ambos $n = 3$ y $\ell = 1$. a) Haga una lista de los números cuánticos para los estados posibles del átomo. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuántos estados serían posibles si el principio de exclusión no fuera operativo?

35. ● a) Al examinar la figura 42.19 del menor al mayor número atómico, los electrones llenan las subcapas de tal manera que las que se llenan primero son las subcapas con valores $n + \ell$ más pequeños. Si dos subcapas tienen el mismo valor de $n + \ell$, se llena primero aquella que tiene el menor valor de n. Utilizando estas dos reglas, escriba el orden en que se llenan las subcapas hasta $n + \ell = 7$. b) Haga una predicción de la valencia química de los elementos con números atómicos 15, 47 y 86, y compare sus predicciones con las valencias reales (puede encontrarlas en un libro de química).

36. En un átomo neutro del elemento 110, ¿cuál sería la configuración electrónica de estado fundamental más probable?

37. **Problema de repaso.** En la sección 29.5 se muestra lo siguiente para un electrón con momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}_S$ en un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. El sistema campo electrón puede encontrarse en un estado de energía superior con la componente z de su momento magnético en el lado opuesto del campo, o en un estado de energía menor con la componente z del momento magnético en dirección del campo. La diferencia en energía entre los dos estados es $2\mu_B B$.

Al examinarlas con alta resolución, resulta que muchas de las líneas espectrales son dobletes. El ejemplo más famoso son las dos líneas amarillas que aparecen en el espectro del sodio (las líneas D), con longitudes de onda de 588.995 nm y 589.592 nm. Goudsmit y Uhlenbeck explicaron su existencia en el año de 1925, al postular que el electrón tiene una cantidad de movimiento angular de espín intrínseco. Cuando el átomo de sodio es excitado con su electrón exterior en el estado $3p$, el movimiento orbital de este electrón crea un campo magnético. La energía del átomo varía en cierta medida, dependiendo de si el electrón tiene un espín hacia arriba o hacia abajo en este campo. Después, la energía del fotón que radia el átomo cuando vuelve al estado fundamental depende de la energía del estado excitado. Calcule la magnitud del campo magnético interno, teniendo en cuenta este acoplamiento de espín-órbita.

Sección 42.8 Más sobre los espectros atómicos: el visible y el rayo X

38. a) Determine los valores posibles de los números cuánticos ℓ y m_ℓ para el ion He^+ en el estado correspondiente a $n = 3$. b) ¿Cuál es la energía de este estado?

39. ● El nivel $3p$ del sodio tiene una energía de -3.0 eV y el nivel $3d$ tiene una energía de -1.5 eV. Determine Z_{efec} para cada uno de estos estados. Explique la diferencia.

40. ● En la producción de rayo X, los electrones se aceleran a través de un alto voltaje y luego se desaceleran al golpear un objetivo. a) Para hacer posible la producción de rayo X de longitud de onda λ, ¿cuál es la mínima diferencia de potencial ΔV a través de la cual se deben acelerar los electrones? b) Establezca cómo depende de la longitud de onda la diferencia de potencial requerida. c) Explique si su resultado concuerda con la información de la figura 42.22. d) ¿La correspondencia del inciso a) se aplica a otros tipos de radiación electromagnética además de los rayos X? ¿A qué tiende la diferencia de potencial conforme λ tiende a cero? ¿A qué tiende la diferencia de potencial conforme λ aumenta sin límite?

41. Emplee el método explicado en el ejemplo 42.5 para calcular la longitud de onda del rayo X emitido de un objetivo de molibdeno ($Z = 42$) cuando un electrón se traslada de la capa L ($n = 2$) a la capa K ($n = 1$).

42. La serie K del espectro de rayo X discreto para el tungsteno contiene longitudes de onda de 0.018 5 nm, 0.020 9 nm y 0.021 5 nm. La energía de ionización de la capa K es de 69.5 keV. Determine las energías de ionización para las capas L, M y N. Dibuje un diagrama de las transiciones.

43. La longitud de onda del rayo X característicos en la línea K_β de una fuente particular es de 0.152 nm. Determine el material el objetivo.

Sección 42.9 Transiciones espontáneas y estimuladas

Sección 42.10 Láser

44. La figura P42.44 muestra parte de los diagramas de los niveles de energía para los átomos de helio y neón. Una descarga eléctrica excita el átomo de He desde su estado fundamental a un estado excitado de 20.61 eV. El átomo excitado de He choca

con un átomo de Ne en su estado fundamental y lo excita hasta el estado de 20.66 eV. Ocurren emisiones de láser en las transiciones electrónicas de E_3^* a E_2 en los átomos de Ne. A partir de los datos en la figura, demuestre que la longitud de onda de la luz roja láser He-Ne es de aproximadamente 633 nm.

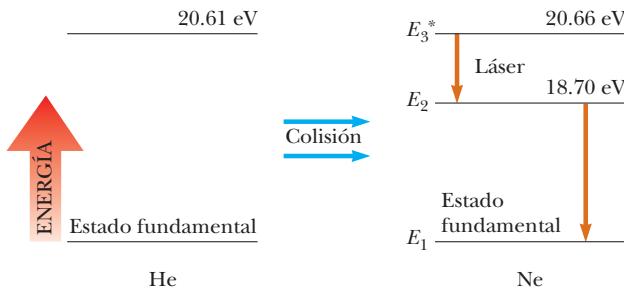



Figura P42.44

45. El láser de dióxido de carbono es uno de los más poderosos que se han desarrollado. La diferencia de energía entre los dos niveles de láser es 0.117 eV. Determine la frecuencia y longitud de onda de la radiación que emite este láser. ¿En qué porción del espectro electromagnético se encuentra esta radiación?

46. El láser Nd:YAG empleado en la cirugía óptica emite un pulso de 3.00 mJ en 1.00 ns, enfocado en un punto de 30.0 μm de diámetro en la retina. a) Averigüe la potencia por unidad de área en la retina (en unidades SI). (Esta cantidad se conoce en la industria óptica como *irradiancia.*) b) ¿Cuál es la energía que recibe un área de tamaño molecular, siendo ésta un área circular de 0.600 nm de diámetro?

47. Un láser de rubí entrega un pulso de 10.0 ns con una potencia promedio de 1.00 MW. Si los fotones tienen una longitud de onda de 694.3 nm, ¿cuántos fotones contiene el pulso?

48. ● La cantidad N de átomos en un estado en particular se conoce como la población de este estado. Esta cantidad depende de la energía del estado y de la temperatura. En condiciones de equilibrio térmico, la población de átomos en un estado de energía E_n se obtiene a partir de la expresión de distribución de Boltzmann

$$N = N_g e^{-(E_n - E_g)/k_B T}$$

en donde T es la temperatura absoluta y N_g es la población del estado fundamental, con energía E_g. Para simplificar el análisis, suponga que cada nivel de energía sólo tiene un estado cuántico asociado. a) Antes de conectar la energía, los átomos de neón del láser se encuentran en equilibrio térmico, a 27.0°C. Encuentre la relación de equilibrio para la población de los estados E_3^* y E_2 que aparecen en la figura 42.29. El láser funciona gracias a una ingeniosa producción artificial de una "inversión de población" entre los estados de energía superiores e inferiores del átomo involucrados en su transición. Esto significa que existen más átomos en un estado superior de excitación que en los estados inferiores. Considere una transición de láser helio-neón a 632.8 nm. Suponga que hay una incidencia 2% mayor de átomos en el estado superior que en el inferior. b) Con el fin de demostrar lo poco natural de esta situación, encuentre la temperatura a la cual la distribución de Boltzmann describe una inversión de población de 2.00%. c) ¿Por qué no ocurren de manera natural situaciones como ésta?

49. **Problema de repaso.** Un láser de helio-neón puede producir un haz verde en vez de rojo. Consulte la figura 42.29, la cual omite algunos niveles de energía entre E_2 y E_1. Después de establecer la inversión de población, los átomos de neón realizarán una diversidad de transiciones hacia abajo cuando caen del estado definido con E_3^* hasta llegar finalmente al nivel E_1. Los átomos emitirán tanto luz roja, con una longitud de onda de 632.8 nm, como luz verde, con una longitud de onda de 543 nm en una transición competidora. Suponga que los átomos se encuentran en una cavidad entre espejos diseñados para reflejar la luz verde con gran eficiencia, pero que permite que la luz roja abandone la cavidad de inmediato. De esta forma, la emisión estimulada puede llevar a la acumulación de un haz de luz verde entre los espejos, con mayor intensidad que la luz roja. Se permite que escape una pequeña cantidad de luz verde al realizar la transmisión a través de uno de los espejos, convirtiéndolo en un haz láser radiado. Los espejos que forman la cavidad resonante pueden estar fabricados de capas alternas de dióxido de silicio y dióxido de titanio. a) ¿Qué espesor debe tener la capa de dióxido de silicio entre las capas de dióxido de titanio, para minimizar la reflexión de la luz roja? b) ¿Cuál debe ser el grosor de una capa similar, pero separada del dióxido de silicio, de manera que maximice la reflexión de la luz verde?

Problemas adicionales

50. ● Conforme la Tierra gira alrededor del Sol, sus órbitas están cuantizadas. a) Siga las etapas de Bohr del análisis del átomo de hidrógeno para demostrar que los radios permitidos para la órbita de la Tierra están definidos mediante

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{G M_S M_E^{\,2}}$$

en donde M_s es la masa del Sol, M_E es la masa de la Tierra y n es un número cuántico entero. b) Calcule el valor numérico de n. c) Encuentre la distancia entre la órbita del número cuántico n y la siguiente órbita del Sol, correspondiente al número cuántico $n + 1$. Analice el significado de sus resultados.

51. LENINGRADO, 1930. Cuatro años después de la publicación de la ecuación de Schrödinger, Lev Davidovich Landau, de veintitrés años, resolvió la ecuación para una partícula cargada moviéndose dentro de un campo magnético uniforme. Un solo electrón, con movimiento perpendicular respecto a un campo $\vec{\mathbf{B}}$ puede ser considerado un átomo modelo sin núcleo, o como el límite cuántico irreducible del ciclotrón. Landau demostró que su energía está cuantizada en pasos uniformes de $e\hbar B/m_e$.

CAMBRIDGE MA., 1999. Gerald Gabriel logra atrapar un solo electrón dentro de un recipiente de metal de tamaño centimétrico al vacío, enfriado hasta una temperatura de 80 mK. En un campo magnético con magnitud de 5.26 T, el electrón circula durante horas en su nivel de energía más bajo, generando, conforme se mueve, una señal mesurable. a) Evalúe el salto cuántico en la energía del electrón. b) Para efectos de comparación, evalúe $k_B T$ como una medida de la energía disponible para el electrón por radiación de cuerpo negro proveniente de las paredes del recipiente. c) Es posible introducir radiación de microondas para excitar el electrón. Calcule la frecuencia y longitud de onda del fotón que absorbe al electrón y que le permite saltar al segundo nivel de energía. La medición de la frecuencia resonante de absorción confirma la teoría y permite determinar con precisión las propiedades del electrón.

52. El ejemplo 42.3 calcula el valor más probable, así como el valor promedio, de la coordenada radial r del electrón de un átomo de hidrógeno en el estado fundametal. **¿Qué pasaría si?** Para efectos de comparación con estos valores modales y medios, encuentre el valor medio de r. Siga este procedimiento. a) Deduzca una ex-

presión en función de r de la probabilidad de que el electrón del hidrógeno en estado fundamental sea encontrado fuera de una esfera con radio r con centro en el núcleo. b) Elabore una gráfica de la probabilidad en función de r/a_0. Elija valores de r/a_0 que vayan de 0 a 4.00 en intervalos de 0.250. c) Encuentre el valor de r para el cual la probabilidad de encontrar el electrón fuera de la esfera de radio r sea igual a la probabilidad de encontrarlo dentro de la esfera. Usted debe resolver una ecuación trascendental numéricamente, y la gráfica es un buen lugar para empezar.

53. *Ejemplo del principio de correspondencia.* Use el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno para demostrar que cuando el electrón se mueve del estado n al estado $n-1$, la frecuencia de la luz emitida es

$$f = \left(\frac{2\pi^2 m_e k_e{}^2 e^4}{h^3 n^2}\right)\frac{2n-1}{(n-1)^2}$$

Demuestre que conforme $n \to \infty$, esta expresión varía en función de $1/n^3$ y se reduce hasta la frecuencia clásica esperada en la emisión del átomo. *Sugerencia:* para calcular la frecuencia clásica, observe que la frecuencia de revolución es $v/2\pi r$, en donde v es la rapidez del electrón y r está dado por la ecuación 42.10.

54. **Problema de repaso**. a) ¿Cuánta energía es necesaria para hacer que un electrón del hidrógeno efectúe la transición entre el estado $n=1$ y $n=2$? b) Suponga que el electrón obtiene esta energía por medio de colisiones entre átomos de hidrógeno con alta temperatura. ¿A qué temperatura se produciría una energía cinética atómica promedio $3k_BT/2$ (en donde k_B es la constante de Boltzmann) lo suficientemente alta para excitar el electrón?

55. ● Astrónomos observan una serie de líneas espectrales en la luz que emite una galaxia lejana. Partiendo de la hipótesis de que las líneas forman una serie de Lyman para un átomo con un solo electrón (¿tal vez nuevo?), comienzan a construir el diagrama de niveles de energía que aparece en la figura P42.55, el cual proporciona las longitudes de onda de las primeras cuatro líneas y el límite de longitud de onda corta de esta serie. De acuerdo con esta información, calcule a) las energías para el estado fundamental y los cuatro primeros estados excitados de este átomo de un solo electrón, así como b) las longitudes de onda de las primeras tres líneas y el límite de la longitud de onda más corta en la serie de Balmer para este átomo. c) Demuestre que las longitudes de onda de las primeras cuatro líneas, así como el límite de longitud de onda más corta para la serie de Lyman del átomo de hidrógeno son todas 60.0% de las longitudes de onda para la serie de Lyman del átomo de un solo electrón descrito en el inicio b). d) Según estas observaciones, explique por qué este átomo bien podría ser hidrógeno.

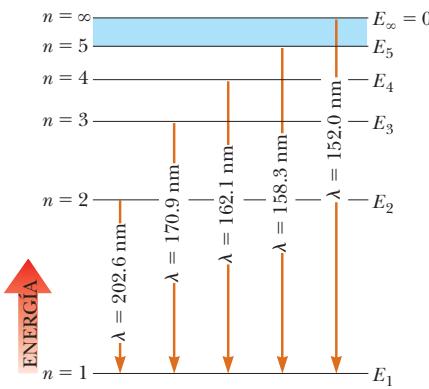



Figura P42.55

56. a) Para un átomo de hidrógeno que hace una transición desde el estado $n=4$ al estado $n=2$, determine la longitud de onda del fotón creado en el proceso. b) Si supone que el átomo inicialmente estaba en reposo, determine la rapidez de retroceso del átomo de hidrógeno cuando emite este fotón.

57. Suponga que un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado $2s$, con una función de onda dada por la ecuación 42.26. Si $r = a_0$, calcule los valores para a) $\psi_{2s}(a_0)$, b) $|\psi_{2s}(a_0)|^2$ y c) $P_{2s}(a_0)$.

58. Un teorema elemental en estadística afirma que la incertidumbre cuadrática media en una cantidad r está dada por $\Delta r = \sqrt{\langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2}$. Evalúe la incertidumbre en la posición radial del electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno. Use el valor promedio de r encontrado en el ejemplo 42.3: $\langle r\rangle = 3a_0/2$. El valor promedio de la distancia al cuadrado entre el electrón y el protón está dado por

$$\langle r^2\rangle = \int_{\text{en todo el espacio}} |\psi|^2\, r^2\, dV = \int_0^\infty P(r)\, r^2\, dr$$

59. Un pulso de láser de rubí emite luz a 694.3 nm. Para un pulso de 14.0 ps que contiene 3.00 J de energía, encuentre a) la distancia física del pulso conforme se desplaza por el espacio y b) la cantidad de fotones que contiene. c) El haz tiene una sección transversal circular de 0.600 cm de diámetro. Encuentre el número de fotones por milímetro cúbico.

60. Un pulso de láser emite una luz con longitud de onda λ. Para un pulso de duración Δt y energía E, encuentre a) la distancia física del pulso conforme se desplaza por el espacio y b) la cantidad de fotones que contiene. c) El haz tiene una sección transversal circular de diámetro d. Encuentre el número de fotones por unidad de volumen.

61. Suponga que tres partículas sin carga idénticas con una masa m y un espín 1/2 están contenidas dentro de una caja unidimensional de longitud L. ¿Cuál es la energía de estado fundamental de este sistema?

62. La fuerza de un momento magnético μ_z en un campo magnético no uniforme B_z está dada por $F_z = \mu_z(dB_z/dz)$. Si un haz de átomos de plata se desplaza a una distancia horizontal de 1.00 m a través de un campo semejante y cada átomo tiene una rapidez de 100 m/s, ¿qué tan intenso debe ser el gradiente de campo dB_z/dz a fin de desviar el haz 1.00 mm?

63. a) Demuestre que la posición radial más probable de un electrón en el estado $2s$ del hidrógeno es $r = 5.236a_0$. b) Demuestre que la función de onda proporcionada por la ecuación 42.26 está normalizada.

64. **Problema de repaso.** Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y William Phillips recibieron el premio Nobel de física en 1997 por "el desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos por medio de luz láser". Una parte de su trabajo fue realizado con un haz de átomos (masa $\sim 10^{-25}$ kg) moviéndose a una rapidez alrededor de 1 km/s, similar a la rapidez de las moléculas del aire a temperatura ambiente. Un haz de luz láser intensa, sintonizada a una transición atómica visible (suponga 500 nm) es dirigido directamente al haz de átomos. Es decir, el haz de átomos y el haz de luz se desplazan en direcciones opuestas. Un átomo en estado fundamental absorbe de inmediato un fotón. La cantidad de movimiento total del sistema es conservado durante el proceso de absorción. Después de un intervalo de 10^{-8} s, el átomo excitado radia gracias a la emisión espontánea. Tiene iguales probabilidades de emitir un átomo en cualquier dirección. Por tanto, el promedio de "retroceso" del átomo es cero

después de muchos ciclos de absorción y emisión. a) Calcule la desaceleración promedio del haz atómico. b) ¿Cuál es el orden de magnitud de la distancia en la cual serán detenidos los átomos del haz?

65. Un electrón de un átomo de cromo se mueve del estado $n = 2$ al estado $n = 1$ sin emitir un fotón. En vez de ello, el exceso de energía es transferido a un electrón exterior (uno del nivel $n = 4$), el cual a su vez es expulsado del átomo. Esto se conoce como el proceso de Auger, y al electrón expulsado se le conoce como electrón Auger. Use la teoría de Bohr para encontrar la energía cinética del electrón Auger.

66. Suponga que la energía de ionización de un átomo es de 4.10 eV. En el espectro de este mismo átomo, se observan líneas de emisión con longitudes de onda de 310 nm, 400 nm y 1377.8 nm. Con esta información, elabore el diagrama de los niveles de energía con el mínimo de niveles. Suponga que los niveles superiores están más cercanos entre sí.

67. Para el hidrógeno en el estado 1*s*, ¿cuál es la probabilidad de encontrar al electrón más allá de $2.50a_0$ del núcleo?

68. Todos los átomos tienen el mismo tamaño, en un orden de magnitud. a) Para demostrar esto, estime los diámetros de los átomos de aluminio (con masa molar de 27.0 g/mol y densidad de 2.70 g/cm^3) y de uranio (con masa molar de 238 g/mol y densidad de 18.9 g/cm^3). b) ¿Qué implican los resultados del inciso a) sobre las funciones de onda para los electrones de capas interiores conforme avanza hacia átomos con una masa atómica cada vez mayor? *Sugerencia:* el volumen molar es aproximadamente D^3N_A, en donde D es el diámetro atómico y N_A es el número de Avogadro).

69. En la técnica conocida como resonancia de espín del electrón, se coloca una muestra con electrones no apareados dentro de un campo magnético. Considere la situación más simple, en la cual sólo hay un electrón presente, y por tanto únicamente hay dos estados de energía posibles, correspondientes a $m_s = \pm\frac{1}{2}$. En la ESR, la absorción de un fotón hace que el momento magnético de espín del electrón cambie del estado de energía inferior al superior. De acuerdo con la sección 29.5, el cambio en energía es igual a $2\mu_B B$. (El estado de energía inferior corresponde a los casos en los cuales la componente z del momento magnético $\mu_{\text{espín}}$ está alineado con el campo magnético, y el estado de energía superior ocurre cuando la componente z de $\mu_{\text{espín}}$ se alinea en oposición al campo.) ¿Cuál es la frecuencia de fotones necesaria para excitar una transición ESR en un campo magnético de 0.350 T?

Respuestas a las preguntas rápidas

42.1 c) Ya que la energía de 10.5 eV no corresponde a la elevación del átomo del estado fundamental a un estado excitado permitido, no existe interacción entre el fotón y el átomo.

42.2 a) El fotón con mayor longitud de onda está asociado con la transición de energía más baja, la cual es $n = 3$ a $n = 2$.

42.3 b) La cantidad de subcapas es la misma que el número de valores permitidos de ℓ. Los valores permitidos de ℓ para $n = 4$ son $\ell = 0, 1, 2$ y 3, por tanto, hay cuatro subcapas.

42.4 a) Cinco valores de ℓ (0, 1, 2, 3, 4) y b) nueve valores diferentes de m_ℓ (−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4) como sigue:

ℓ	m_ℓ
0	0
1	−1, 0, 1
2	−2, −1, 0, 1, 2
3	−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3
4	−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4

42.5 c) Las longitudes de onda de los rayos X característicos están determinadas por la separación entre los niveles de energía en los átomos del objetivo, lo cual no está relacionado con la energía a la cual los electrones son disparados hacia dicho objetivo. La única dependencia es que los electrones que están por llegar deben tener suficiente energía para expulsar un electrón atómico de una capa interior.

42.6 Cierto. Si los electrones llegan al objetivo con muy poca energía, los electrones atómicos no pueden ser expulsados y los rayos X característicos no aparecerán. Puesto que los electrones incidentes experimentan aceleraciones, aparecerá un espectro continuo.

La comprensión de la física del estado sólido ha llevado a la tecnología de circuitos integrados, la cual se encuentra en un sinnúmero de dispositivos electrónicos empleados por los consumidores en las sociedades actuales. En esta fotografía, el microchip que se ve en la punta del dedo contiene millones de componentes eléctricos. (Bruce Dale/Getty Images)

43 Moléculas y sólidos

El ordenamiento atómico en su mayor parte al azar, de un gas, era bien entendido en el siglo XIX, como se explicó en el capítulo 21. En un sólido cristalino, los átomos no están dispuestos al azar; de preferencia, forman un conjunto uniforme. La simetría del arreglo de átomos estimuló y permitió el rápido avance en el campo de la física del estado sólido en el siglo XX. Recientemente, ha avanzado la comprensión sobre líquidos y sólidos amorfos. (En un sólido amorfo, como el vidrio o la parafina, los átomos no forman un conjunto uniforme.) El reciente interés en la física de los materiales amorfos de bajo costo ha sido impulsado por su uso en dispositivos como son las celdas solares, los elementos de memoria y las guías de onda de fibras ópticas.

En este capítulo se estudian los agregados de átomos, conocidos como moléculas. Se describen los mecanismos de enlaces en las moléculas, los diversos modos de excitación molecular y la radiación emitida o absorbida por las moléculas. A continuación, se muestra la forma en que las moléculas se combinan para formar sólidos. Después, al examinar las estructuras de sus niveles de energía, se explican las diferencias entre materiales aislantes, conductores, semiconductores y superconductores. El capítulo también incluye explicaciones de uniones semiconductoras y varios dispositivos semiconductores.

43.1 Enlaces moleculares

Los mecanismos de enlace en una molécula se deben fundamentalmente a las fuerzas eléctricas entre los átomos (o iones). Las fuerzas entre los atomos del sistema están relacionadas con una función de energía potencial. Se esperaría una molécula estable en una configuración para la cual la función de energía potencial tiene su valor mínimo. (Véase la sección 7.9)

Una función de la energía potencial que se usa para modelar una molécula explica dos características conocidas de los enlaces moleculares:

1. La fuerza entre átomos es de repulsión en separaciones muy pequeñas. Cuando dos átomos se acercan uno al otro, algunas de sus capas electrónicas se traslapan y se genera una repulsión entre las capas. Esta repulsión es parcialmente de origen electrostática y también en parte es resultado del principio de exclusión. Ya que todos los electrones deben obedecer el principio de exclusión, algunos electrones de las capas que se traslapan son forzados a pasar a estados de energía más altos, y la energía del sistema aumenta, como si existiera una fuerza de repulsión entre los átomos.
2. A separaciones un poco mayores, la fuerza entre átomos es de atracción. Si esto no fuera cierto, los átomos de una molécula no se ligarían.

Si tomamos en cuenta estas dos características, la energía potencial en un sistema de dos átomos se puede representar por una expresión de la forma:

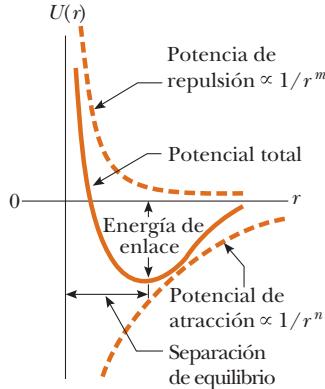
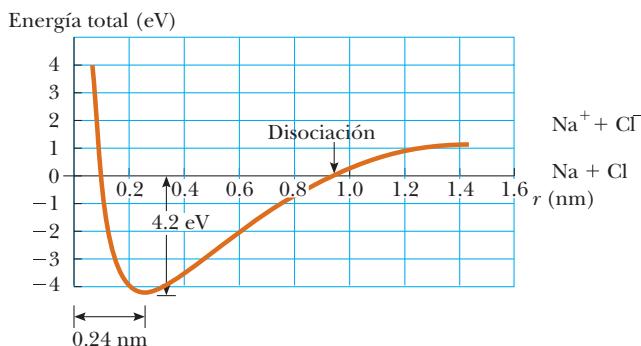



Figura 43.1 Energía potencial total como función de la distancia de separación entre núcleos en un sistema de dos átomos.

$$U(r) = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m} \qquad \textbf{(43.1)}$$

donde r es la distancia de separación internuclear entre los dos átomos, y n y m son enteros pequeños. El parámetro A está asociado con la fuerza de atracción y el parámetro B con la fuerza de repulsión. El ejemplo 7.9 presenta un modelo común para esta función de energía potencial, el potencial de Lennard–Jones.

La figura 43.1 muestra una gráfica de la energía potencial en función de la distancia de separación para un sistema de dos átomos. A distancias de separación grandes entre dos átomos, la pendiente de la curva es positiva, que corresponde a una fuerza neta de atracción. A la distancia de separación de equilibrio, las fuerzas de atracción y repulsión están equilibradas. En este punto la energía potencial tiene su valor mínimo, y la pendiente de la curva es cero.

Una descripción completa de los mecanismos de enlace en moléculas es altamente compleja, porque el enlace incluye interacciones mutuas de numerosas partículas. En esta sección, se explican sólo algunos modelos simplificados.

Enlace iónico

Cuando dos átomos se combinan en forma tal que uno o más electrones exteriores se transfieren de un átomo al otro, el enlace formado se denomina **enlace iónico.** Los enlaces iónicos se deben fundamentalmente a la atracción de Coulomb entre iones de cargas contrarias.

Un ejemplo conocido de un sólido enlazado en forma iónica es el cloruro de sodio, NaCl, que es la sal de mesa común. El sodio, que tiene la configuración electrónica $1s^22s^22p^63s^1$, se ioniza con relativa facilidad, al ceder su electrón $3s$ para formar un ion Na^+. La energía necesaria para ionizar el átomo para formar Na^+ es 5.1 eV. El cloro, que tiene la configuración $1s^22s^22p^5$, tiene un electrón menos que la estructura de capa completa del argón. Si compara la energía de un sistema de un electrón libre y un átomo de Cl con uno en el que el electrón se une al átomo para formar un ion Cl^-, encontrará que la energía del ion es menor. Cuando el electrón hace una transición del estado $E = 0$ al estado de energía negativa asociada con la capa disponible en el átomo, se libera energía. Esta cantidad de energía recibe el nombre de **afinidad electrónica** del átomo. Para el cloro, la afinidad electrónica es de 3.6 eV. Por lo tanto, la energía necesaria para formar Na^+ y Cl^- de átomos aislados es $5.1 - 3.6 = 1.5$ eV, lo que quiere decir que son necesarios 5.1 eV para refinar el electrón del átomo de Na, pero se recuperan 3.6 eV al permitir que ese electrón se una con el átomo de Cl.

Figura 43.2 Energía total en función de la distancia de separación para iones de Na^+ y Cl^-. El eje horizontal está marcado Na + Cl porque se definió la energía del sistema de *átomos* de sodio y cloro neutros como cero energía. La asíntota de la curva para valores grandes de r está marcada $Na^+ + Cl^-$, porque esa es la energía del sistema de *iones* de sodio y cloro.

Ahora imagine que estos dos iones cargados interactúan entre sí para formar una "molécula"[1] de NaCl. La energía total de la molécula de NaCl en función de la distancia de separación entre núcleos está representada en la figura 43.2. A distancias de separación muy grandes, la energía del sistema de iones es 1.5 eV, como se calculó antes. La energía total tiene un valor mínimo de −4.2 eV a la distancia de separación de equilibrio, que es de unos 0.24 nm. Esto significa que la energía necesaria para romper el enlace de Na^+-Cl^- y formar átomos neutros de sodio y cloro, llamada **energía de disociación,** es de 4.2 eV. Observe que la energía de la molécula es menor que la del sistema de dos átomos neutros. En consecuencia, es **energéticamente favorable** para la molécula a formar; si existe un estado de energía menor de un sistema, el sistema tenderá a emitir energía para alcanzar el estado menor de energía. El sistema de átomos neutros de sodio y cloro puede reducir su energía total al transferir energía fuera del sistema (por radiación electromagnética, por ejemplo) y formar la molécula de NaCl.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.1
Enlaces iónicos y covalentes

En la práctica, estas descripciones de enlaces iónicos y covalentes representan extremos finales de un espectro de enlaces que incluye transferencia electrónica. En un enlace real el electrón no puede ser transferido por *completo* como en un enlace iónico o *igualmente* compartido como en un enlace covalente. En consecuencia, los enlaces reales se encuentran entre estos extremos.

Enlace covalente

Un **enlace covalente** entre dos átomos es aquel en el que los electrones proporcionados por cualquiera de los átomos, o por ambos, son compartidos por los dos átomos. Muchas moléculas diatómicas, por ejemplo el H_2, F_2 y CO, deben su estabilidad a enlaces covalentes. Se describen los enlaces covalentes por medio de funciones de onda atómicas. La función de onda del estado fundamental para un átomo de hidrógeno (capítulo 42) es

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}\, e^{-r/a_0}$$

Esta función de onda está graficada en la figura 43.3a para el caso de dos átomos de hidrógeno que están alejados uno del otro. Observe que hay muy poco traslape de las funciones de onda $\psi_1(r)$ para el átomo 1, situado en $r = 0$, y $\psi_2(r)$ para el átomo 2, situado a cierta distancia. Suponga que ahora los dos átomos están más cerca uno del otro. Cuando esto sucede, sus funciones de onda se traslapan y forman la función de onda compuesta $\psi_1(r) + \psi_2(r)$, que se ilustra en la figura 43.3b. Advierta que la amplitud de probabilidad es mayor entre los átomos de lo que es en cualquier lado de la combinación de átomos. Como resultado, la probabilidad de que los electrones asociados con los átomos estén situados entre los átomos es más alta que en las regiones exteriores del sistema. En consecuencia, la posición promedio de carga negativa en el sistema se encuentra a la mitad entre los átomos. Este escenario se modela como si hubiera una carga negativa fija entre los átomos que ejerce fuerzas de atracción de Coulomb en ambos núcleos. El resultado es una fuerza de atracción global entre los átomos, que se manifiesta en un enlace covalente.

Debido al principio de exclusión, los dos electrones en el estado fundamental de H_2 deben tener espines antiparalelos. También, debido al principio de exclusión, si un tercer átomo de H se acerca a la molécula de H_2, el tercer electrón tendría que ocupar un nivel

Figura 43.3 Funciones de onda de estado fundamental $\psi_1(r)$ y $\psi_2(r)$ para dos átomos que forman un enlace covalente. a) Los átomos están separados y sus funciones de onda se traslapan en forma mínima. b) Los átomos están juntos, formando una función de onda compuesta $\psi_1(r) + \psi_2(r)$ para el sistema. La amplitud de probabilidad para que un electrón se encuentre entre los átomos es alta.

[1] El NaCl no existe como molécula aislada. En estado solido, el NaCl forma un arreglo cristalino de iones, como se describe en la sección 43.3. En estado liquido, o en una solución con agua, los iones de Na^+ y Cl^- se disocian y quedan libres para moverse uno respecto al otro.

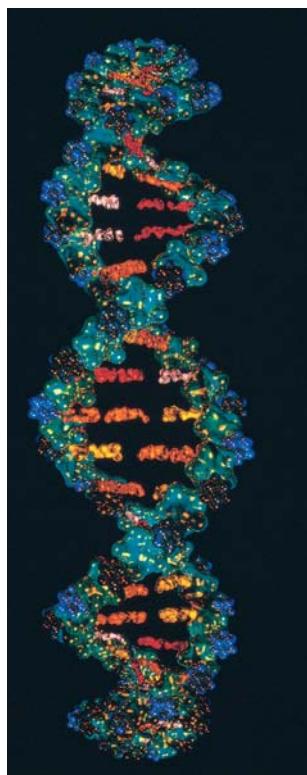
de energía más alto, que no es una situación energéticamente favorable. Por esta justificación, la molécula H_3 no es estable y no se forma.

Enlace van der Waals

Entre átomos se presentan enlaces iónicos y covalentes para formar moléculas o sólidos iónicos, de modo que se pueden describir como enlaces *dentro* de las moléculas. Hay dos tipos adicionales de enlaces, los enlaces van der Waals y los de hidrógeno, que pueden presentarse *entre* moléculas.

Podría esperar que dos moléculas neutras no interactúen mediante fuerza eléctrica porque cada una de ellas tiene carga neta cero. No obstante, son atraídas mutuamente por fuerzas electrostáticas débiles denominadas **fuerzas van der Waals.** Del mismo modo, los átomos que no forman enlaces iónicos o covalentes son atraídos entre sí por estas fuerzas. Los átomos de gases inertes, por ejemplo, debido a su estructura de capa llena, por lo general no forman moléculas o enlaces entre sí para formar líquidos. De cualquier modo, debido a las fuerzas van der Waals, a temperaturas suficientemente bajas, en las cuales las excitaciones térmicas son insignificantes, los gases inertes primero se condensan en su forma líquida y luego se solidifican (con la excepción del helio, que no se solidifica a la presión atmosférica).

La fuerza van der Waals se debe al hecho de que, si bien es eléctricamente neutra, una molécula tiene una distribución de carga con centros positivos y negativos en diferentes posiciones en la molécula. Como un resultado, puede actuar como dipolo eléctrico (véase sección 23.4). Debido a los campos del dipolo eléctrico, dos moléculas pueden interactuar en forma tal que exista una fuerza de atracción entre ellas.

Hay tres tipos de fuerzas van der Waals. El primer tipo, llamado *fuerza de dipolo-dipolo,* se trata de una interacción entre dos moléculas donde cada una tiene un momento de dipolo eléctrico permanente. Por ejemplo, moléculas polares como el HCl tienen momentos de dipolo eléctrico permanentes y atraen otras moléculas polares.

El segundo tipo, la *fuerza de dipolo-dipolo inducido,* resulta cuando una molécula polar que tiene un momento de dipolo eléctrico permanente induce un momento de dipolo en una molécula no polar. En este caso, el campo eléctrico de la molécula polar crea el momento de dipolo en la molécula no polar, que resulta en tal caso una fuerza de atracción entre las moléculas.

El tercer tipo se denomina *fuerza de dispersión,* que es una fuerza de atracción que se presenta entre dos moléculas no polares. En este caso, aun cuando el momento de dipolo promedio de una molécula no polar es cero, el promedio del cuadrado del momento de dipolo es diferente de cero debido a las fluctuaciones de carga. Dos moléculas no polares cerca una de otra tienden a tener momentos de dipolo que están correlacionados en el tiempo para producir una fuerza de atracción de van der Waals.

Douglas Struthers/Getty Images.

Figura 43.4 Las moléculas de ADN se mantienen juntas por enlaces de hidrógeno.

Enlace de hidrógeno

Porque el hidrógeno tiene sólo un electrón, se espera que forme un enlace covalente con sólo otro átomo dentro de una molécula. Un átomo de hidrógeno en una molécula también puede formar un segundo tipo de enlace entre moléculas, llamado **enlace de hidrógeno.** Utilice la molécula de agua H_2O como ejemplo. En los dos enlaces covalentes de esta molécula es más probable que los electrones de los átomos de hidrógeno se encuentren cerca del átomo de oxígeno que cerca de los átomos de hidrógeno. Esto deja esencialmente protones desnudos en las posiciones de los átomos de hidrógeno. Esta carga positiva sin protección puede ser atraída al extremo negativo de la otra molécula polar. Como el protón no está protegido por electrones, el extremo negativo de la otra molécula puede aproximarse mucho al protón para formar un enlace que sea lo suficientemente fuerte como para formar una estructura cristalina sólida, por ejemplo la del hielo. Los enlaces dentro de una molécula de agua son covalentes, pero los enlaces entre moléculas de agua en hielo son enlaces de hidrógeno.

El enlace de hidrógeno es relativamente débil en comparación con otros enlaces químicos; puede romperse con una energía de entrada de alrededor de 0.1 eV. Debido a esto, el hielo se derrite a una temperatura de 0°C. De cualquier modo, a pesar de que este enlace es muy débil, el enlace de hidrógeno es un mecanismo fundamental para provocar la unión de moléculas biológicas y polímeros. Por ejemplo, en el caso de la molécula de ADN (ácido desoxirribonucleico), que tiene una estructura en doble hélice (figura 43.4), los enlaces

de hidrógeno formados por compartir un protón entre dos átomos crean uniones entre las vueltas de la hélice.

Pregunta rápida 43.1 Para cada uno de los siguientes casos, identifique el tipo de enlace que sea más probable que se presente entre los átomos o entre las moléculas. Escoja entre la siguiente lista: iónico, covalente, van der Waals o de hidrógeno. a) Átomos de kriptón, b) átomos de potasio y cloro, c) moléculas de fluoruro de hidrógeno (HF) o d) átomos de cloro y oxígeno en un ion de hipoclorito (ClO^-).

43.2 Estados de energía y espectros de moléculas

Considere una molécula individual en la fase gaseosa de una sustancia. La energía E de la molécula se puede dividir en cuatro categorías: 1) energía electrónica, a causa de las interacciones entre los electrones y núcleos de la molécula; 2) energía de traslación, a causa del movimiento del centro de masa de la molécula en el espacio; 3) energía rotacional, a causa de la rotación de la molécula alrededor de su centro de masa; y 4) energía de vibraciones, a causa de la vibración de los átomos constitutivos de la molécula:

$$E = E_{\text{el}} + E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}}$$

◀ Energía total de una molécula

Se explora la función de las energías de traslación, rotacional y de vibración de moléculas al determinar los calores específicos molares de los gases en las secciones 21.2 y 21.4. Porque la energía de traslación no está relacionada con la estructura interna, esta energía molecular no es importante al interpretar los espectros moleculares. La energía electrónica de una molécula es muy compleja porque incluye la interacción de numerosas partículas cargadas; pero se han creado diferentes técnicas para aproximar sus valores. Mientras se logra estudiar las energías electrónicas, es posible determinar información importante acerca de una molécula al analizar sus estados de energía rotacional y de vibración. Las transiciones entre estos estados dan líneas espectrales en las regiones de microondas e infrarrojas del espectro electromagnético, respectivamente.

Movimiento rotacional de moléculas

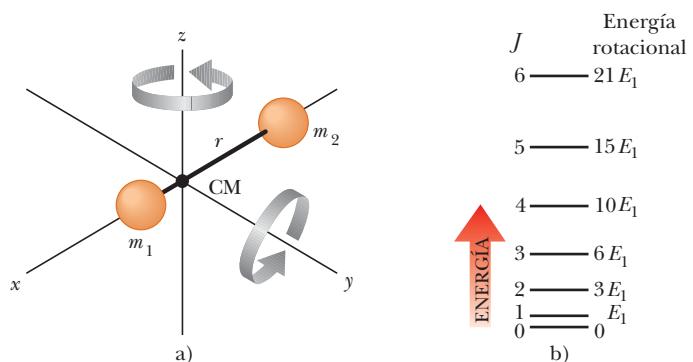
Considere la rotación de una molécula alrededor de su centro de masa, limitando la explicación para la molécula diatómica (figura 43.5a), pero observando que las mismas ideas se pueden aplicar a moléculas poliatómicas. Una molécula diatómica alineada a lo largo del eje x tiene sólo dos grados de libertad rotacional, que corresponden a rotaciones alrededor de los ejes y y z que pasan a través del centro de masa de la molécula. Si ω es la frecuencia angular de rotación alrededor de uno de estos ejes, la energía cinética rotacional de la molécula alrededor de dicho eje se expresa como

$$E_{\text{rot}} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \tag{43.2}$$

En esta ecuación, I es el momento de inercia de la molécula cerca del centro de masa dado por

$$I = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)r^2 = \mu r^2 \tag{43.3}$$

◀ Momento de inercia para una molécula diatómica

donde m_1 y m_2 son las masas de los átomos que conforman la molécula, r es la separación atómica y μ es **la masa reducida** de la molécula (véase el ejemplo 41.5 y el problema 39 en el capítulo 41):

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{43.4}$$

◀ Masa reducida de una molécula diatómica

La magnitud de la cantidad de movimiento angular de la molécula cerca del centro de masa es $L = I\omega$, que en fisica clásica puede tener cualquier valor. De cualquier modo,

Figura 43.5 Rotación de una molécula diatómica alrededor de su centro de masa a) Una molécula diatómica orientada a lo largo del eje x tiene dos grados de libertad rotacional que corresponde a la rotación alrededor de los ejes y y z. b) Energías rotacionales permitidas de una molécula diatómica calculada con la ecuación 43.6, donde $E_1 = \hbar^2/2I$

la mecánica cuántica restringe la molécula a ciertas frecuencias rotacionales cuantizadas, tales que la cantidad de movimiento angular de la molécula tiene los valores[2]

Valores permitidos de la cantidad de movimiento angular rotacional

$$L = \sqrt{J(J+1)}\hbar \qquad J = 0, 1, 2, \ldots \tag{43.5}$$

donde J es un entero llamado **número cuántico rotacional.** Al combinar las ecuaciones 43.5 y 43.2, obtiene una expresión para los valores permitidos de la energía cinética rotacional de la molécula:

$$E_{\text{rot}} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2I}(I\omega)^2 = \frac{L^2}{2I} = \frac{(\sqrt{J(J+1)}\hbar)^2}{2I}$$

Valores permitidos de energía rotacional

$$E_{\text{rot}} = E_J = \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1) \qquad J = 0, 1, 2, \ldots \tag{43.6}$$

Las energías rotacionales permitidas de una molécula diatómica se muestran gráficamente en la figura 43.5b. Cuando el número cuántico J aumenta, los estados se separan más, como se indicó antes para los niveles de energía rotacional de la figura 21.8.

En casi todas las moléculas, las transiciones entre niveles de energía rotacional adyacentes resultan en radiación, la cual se encuentra en la escala de microondas de frecuencias ($f \sim 10^{11}$ Hz). Cuando una molécula absorbe un fotón de microondas, la molécula salta de un nivel de energía rotacional menor a uno más alto. Las transiciones rotacionales permitidas de moléculas lineales son reguladas por la regla de selección $\Delta J = \pm 1$. A partir de esta regla de selección, todas las líneas de absorción del espectro de una molécula lineal corresponden a separaciones de energía igual a $E_J - E_{J-1}$, donde $J = 1, 2, 3, \ldots$ A partir de la ecuación 43.6, las energías de los fotones absorbidos se proporcionan mediante

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E_{\text{rot}} = E_J - E_{J-1} = \frac{\hbar^2}{2I}[J(J+1) - (J-1)J]$$

Energía de un fotón absorbida en una transición entre niveles rotacionales adyacentes

$$E_{\text{fotón}} = \frac{\hbar^2}{I}J = \frac{h^2}{4\pi^2 I}J \qquad J = 1, 2, 3, \ldots \tag{43.7}$$

donde J es el número cuántico rotacional del estado de energía más alto. Como $E_{\text{fotón}} = hf$, donde f es la frecuencia del fotón absorbida, la frecuencia permitida para la transición $J = 0$ a $J = 1$ es $f_1 = h/4\pi^2 I$. La frecuencia correspondiente a la transición $J = 1$ a $J = 2$ es $2f_1$, y así sucesivamente. Estas predicciones están en excelente acuerdo con las frecuencias observadas.

Pregunta rápida 43.2 Un gas de moléculas diatómicas idénticas absorbe radiación electromagnética en una amplia gama de frecuencias. La molécula 1 está en el estado de rotación $J = 0$ y hace una transición al estado $J = 1$. La molécula 2 está en el estado $J = 2$ y hace una transición al estado

[2] La ecuación 43.5 es semejante a la ecuación 42.27 para la cantidad de movimiento angular orbital de un átomo. En realidad, la correspondencia entre la magnitud de la cantidad del movimiento angular de un sistema y el número cuántico asociado es igual a la que se tiene en estas ecuaciones para *cualquier* sistema que exhiba rotación, mientras la función de energía potencial para el sistema sea esféricamente simétrica.

$J = 3$. La relación entre la frecuencia del fotón que excitó la molécula 2 y la frecuencia del fotón que excitó la molécula 1 es a) 1, b) 2, c) 3, d) 4 o e) imposible de determinar.

EJEMPLO 43.1 Rotación de la molécula de CO

La transición rotacional de $J = 0$ a $J = 1$ de la molécula de CO se presenta con una frecuencia de 1.15×10^{11} Hz.

A) Use esta información para calcular el momento de inercia de la molécula.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los dos átomos en la figura 43.5a son carbono y oxígeno. El centro de masa de la molécula no está a la mitad entre los átomos debido a la diferencia en masas de los átomos C y O.

Categorizar El enunciado del problema pide clasificar este ejemplo como uno que involucra un tratamiento mecánico cuántico y restringe la investigación al movimiento rotacional de una molécula diatómica.

Analizar Use la ecuación 43.7 para encontrar la energía de un fotón que excita la molécula del nivel rotacional $J = 0$ a $J = 1$:

$$E_{\text{fotón}} = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 I}(1) = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 I}$$

Iguale esta energía a $E = hf$ para el fotón absorbido y resuelva para I:

$$\frac{\hbar^2}{4\pi^2 I} = hf \quad \rightarrow \quad I = \frac{h}{4\pi^2 f}$$

Sustituya la frecuencia proporcionada en el enunciado del problema:

$$I = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{4\pi^2(1.15 \times 10^{11}\ \text{s}^{-1})} = \boxed{1.46 \times 10^{-46}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

B) Calcule la distancia de enlace de la molécula.

SOLUCIÓN

Encuentre la masa reducida μ de la molécula CO:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(12\ \text{u})(16\ \text{u})}{12\ \text{u} + 16\ \text{u}} = 6.86\ \text{u}$$

$$= (6.86\ \text{u})\left(\frac{1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \text{u}}\right) = 1.14 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

Resuelva la ecuación 43.3 para r y sustituya para la masa reducida y el momento de inercia del inciso A):

$$r = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{1.46 \times 10^{-46}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}{1.14 \times 10^{-26}\ \text{kg}}}$$

$$= 1.13 \times 10^{-10}\ \text{m} = \boxed{0.113\ \text{nm}}$$

Finalizar El momento de inercia de la molécula y la distancia de separación entre los átomos son ambos muy pequeños, como se esperaba para un sistema microscópico.

¿Qué pasaría si? ¿Y si otro fotón de 1.15×10^{11} Hz de frecuencia incide sobre la molécula CO mientras dicha molécula está en el estado $J = 1$? ¿Qué sucede?

Respuesta Porque los estados cuánticos rotacionales no están igualmente espaciados en energía, la transición de $J = 1$ a $J = 2$ no tiene la misma energía que la transición de $J = 0$ a $J = 1$. Por lo tanto, la molécula *no* se excitará al estado $J = 2$. Existen dos posibilidades. El fotón podría pasar por la molécula sin interacción, o el fotón podría inducir una emisión estimulada, similar a la de los átomos y explicada en la sección 42.9. En este caso, la molécula hace una transición de regreso al estado $J = 0$ y el fotón original y un segundo fotón idéntico deja la escena de la interacción.

Movimiento de vibración de las moléculas

Si considera que una molécula es una estructura flexible en la cual los átomos están ligados entre sí por "resortes efectivos", como se muestra en la figura 43.6a, modele la molécula como un oscilador armónico simple en tanto los átomos de la molécula no estén demasiado lejos de sus posiciones de equilibrio. Recuerde de la sección 15.3, que la función de energía potencial para un oscilador armónico simple es parabólica y que varía con el cuadrado del desplazamiento a partir del equilibrio. (Véase la ecuación 15.20.) La figura 43.6b muestra una gráfica de la energía potencial en función de la separación atómica para una molécula diatómica, donde r_0 es la separación atómica de equilibrio. Para separaciones cercanas a r_0, la forma de la curva de energía potencial se asemeja en gran medida a una parábola.

Según la mecánica clásica, la frecuencia de vibración para el sistema que se ilustra en la figura 43.6a se conoce por la ecuación 15.14:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \textbf{(43.8)}$$

donde k es la constante de resorte efectiva y μ es la masa reducida que proporciona la ecuación 43.4.

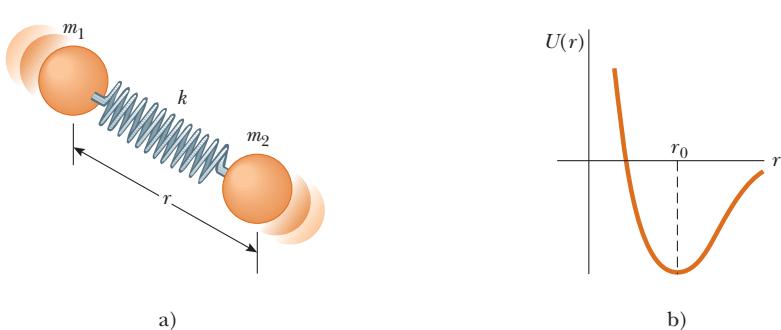
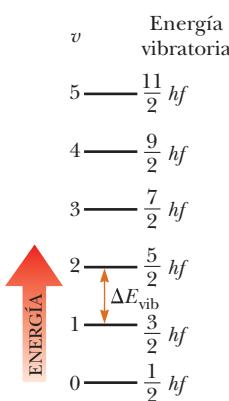
La mecánica cuántica predice que una molécula vibrará en estados cuantizados, como se describe en la sección 41.7. El movimiento de vibración y energía de vibración cuantizada se pueden alterar si la molécula adquiere energía del valor apropiado para hacer una transición entre estados de vibración cuantizados. Como se explicó en la sección 41.7, las energías de vibración permitidas son

$$E_{\text{vib}} = \left(v + \tfrac{1}{2}\right)hf \qquad v = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(43.9)}$$

donde v es un entero llamado **número cuántico de vibración.** (Se usó n en la sección 41.7 para un oscilador armónico general, pero v se usa a veces para el número cuántico cuando se explican vibraciones moleculares.) Si el sistema está en el estado de vibración más bajo, para el cual $v = 0$, su energía de estado fundamental es $\frac{1}{2}hf$. La vibración acompañante está siempre presente, incluso si la molécula no está excitada. En el primer estado de vibración excitado, $v = 1$ y la energía de vibración es $\frac{3}{2}hf$, y así sucesivamente.

Al sustituir la ecuación 43.8 en la ecuación 43.9, proporciona la expresión siguiente para las energías de vibración permitidas:

Valores permitidos de energía rotacional ►

$$E_{\text{vib}} = \left(v + \tfrac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad v = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(43.10)}$$

La regla de selección para las transiciones de vibración permitidas es $\Delta v = \pm 1$. Las transiciones entre los niveles de vibración son originadas por la absorción en la región infraroja del espectro. La energía de un fotón absorbido es igual a la diferencia de energía entre dos niveles de vibración sucesivas cualesquiera. Debido a eso, la energía del fotón se conoce por

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E_{\text{vib}} = \frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \textbf{(43.11)}$$

a)

b)

Figura 43.6
a) Modelo de resorte efectivo de una molécula diatómica. La vibración se da a lo largo del eje molecular. b) Gráfica de la energía potencial de una molécula diatómica en función de la distancia de separación atómica, donde r_0 es la distancia de separación de equilibrio entre los átomos. Compare con la figura 15.12.

v	Energía vibratoria
5	$\frac{11}{2}hf$
4	$\frac{9}{2}hf$
3	$\frac{7}{2}hf$
2	$\frac{5}{2}hf$
1	$\frac{3}{2}hf$
0	$\frac{1}{2}hf$

ΔE_{vib} ENERGÍA

Figura 43.7 Energías de vibración permitidas de una molécula diatómica, donde f es la frecuencia de vibración de la molécula, dada por la ecuación 43.8. Las separaciones entre los niveles adyacentes de vibración son iguales si la molécula se comporta como un oscilador armónico.

Las energías de vibración de una molécula diatómica se grafican en la figura 43.7. A temperaturas ordinarias, casi todas las moléculas tienen energías de vibración correspondientes al estado $v = 0$, porque la separación entre estados de vibración es mucho mayor que $k_B T$, donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura.

Pregunta rápida 43.3 Un gas de moléculas diatómicas idénticas absorbe radiación electromagnética en una gama amplia de frecuencias. La molécula 1, inicialmente en el estado de vibración $v = 0$, hace una transición al estado $v = 1$. La molécula 2, inicialmente en el estado $v = 2$, hace una transición al estado $v = 3$. La relación de la frecuencia del fotón que excitó a la molécula 2 y la del fotón que excitó a la molécula 1 es a) 1, b) 2, c) 3, d) 4 o e) imposible de determinar.

EJEMPLO 43.2 Vibración de la molécula de CO

La frecuencia del fotón que causa la transición de $v = 0$ a $v = 1$ en la molécula de CO es 6.42×10^{13} Hz. Ignore cualquier cambio en la energía rotacional para este ejemplo.

A) Calcule la constante de fuerza k para esta molécula.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los dos átomos en la figura 43.6a son carbono y oxígeno. Conforme la molécula vibra, un punto determinado en el resorte imaginario está en reposo. Este punto no está a la mitad del camino entre los átomos debido a la diferencia en masa de los átomos C y O.

Categorizar El enunciado del problema pide clasificar este ejemplo como uno que involucra un tratamiento mecánico cuántico y restringe la investigación al movimiento vibratorio de una molécula diatómica.

Analizar Iguale la ecuación 43.11 a la energía del fotón hf y resuelva para la constante de fuerza:

$$\frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = hf \quad \rightarrow \quad k = 4\pi^2 \mu f^2$$

Sustituya la frecuencia conocida en el enunciado del problema y la masa reducida del ejemplo 43.1:

$$k = 4\pi^2(1.14 \times 10^{-26}\ \text{kg})(6.42 \times 10^{13}\ \text{s}^{-1})^2 = \boxed{1.85 \times 10^3\ \text{N/m}}$$

B) ¿Cuál es la amplitud clásica A de vibración para esta molécula en el estado vibratorio $v = 0$?

SOLUCIÓN

Iguale la energía potencial elástica máxima $\frac{1}{2}kA^2$ en la molécula (ecuación 15.21) con la energía vibratoria dada por la ecuación 43.10 con $v = 0$ y resuelva para A:

$$\tfrac{1}{2}kA^2 = \frac{h}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{h}{2\pi}}\left(\frac{1}{\mu k}\right)^{1/4}$$

Sustituya el valor para k del inciso A) y el valor para μ:

$$A = \sqrt{\frac{6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{2\pi}}\left[\frac{1}{(1.14 \times 10^{-26}\,\text{kg})(1.85 \times 10^{3}\,\text{N/m})}\right]^{1/4}$$

$$= 4.79 \times 10^{-12}\,\text{m} = 0.004\,79\,\text{nm}$$

Finalizar Al comparar este resultado con la distancia de enlace de 0.113 nm calculada en el ejemplo 43.1 muestra que la amplitud de vibración clásica es aproximadamente 4% de la distancia de enlace.

Espectros moleculares

En general, una molécula vibra y gira simultáneamente. En una primera aproximación, estos movimientos son independientes entre sí de tal manera que la energía total de la molécula para estos movimientos es la suma de las ecuaciones 43.6 y 43.9:

$$E = (v + \tfrac{1}{2})hf + \frac{\hbar^2}{2I}J(J + 1) \qquad \textbf{(43.12)}$$

Los niveles de energía de cualquier molécula se calculan a partir de esta expresión, y cada nivel está clasificado por los dos números cuánticos v y J. A partir de estos cálculos, se puede construir un diagrama de niveles de energía como el que se ilustra en la figura 43.8a. Para cada valor permitido del número cuántico v de vibración, hay un conjunto completo de niveles rotacionales que corresponden a $J = 0, 1, 2, \ldots$ La separación de energía entre niveles sucesivos rotacionales es mucho menor que la separación entre niveles sucesivos de vibración. Como se observó antes, casi todas las moléculas a temperaturas ordinarias están en el estado de vibración $v = 0$; estas moléculas pueden estar en diferentes estados rotacionales, como muestra la figura 43.8a.

Cuando una molécula absorbe un fotón con la energía apropiada, el número cuántico v de vibración aumenta en una unidad, mientras que el número cuántico rotacional J aumenta o se reduce en una unidad, como se puede ver en la figura 43.8. Por lo tanto, el espectro de absorción molecular consta de dos grupos de líneas: un grupo a la derecha del centro que satisface las reglas de selección $\Delta J = +1$ y $\Delta v = +1$, y el otro grupo a la izquierda del centro que satisface las reglas de selección $\Delta J = -1$ y $\Delta v = +1$.

Las energías de los fotones absorbidos se pueden calcular con la ecuación 43.12:

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E = hf + \frac{\hbar^2}{I}(J + 1) \quad J = 0, 1, 2, \ldots \quad (\Delta J = +1) \qquad \textbf{(43.13)}$$

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E = hf - \frac{\hbar^2}{I}J \quad J = 1, 2, 3, \ldots \quad (\Delta J = -1) \qquad \textbf{(43.14)}$$

Figura 43.8
a) Transiciones de absorción entre los estados de vibración $v = 0$ y $v = 1$ de una molécula diatómica. Las transiciones obedecen la regla de selección $\Delta J = \pm 1$ y caen en dos secuencias, las de $\Delta J = +1$ y las de $\Delta J = -1$. Las energías de transición están dadas por las ecuaciones 43.13 y 43.14. Compare los niveles de energía de esta figura con los de la figura 21.8. b) Líneas esperadas del espectro de absorción de una molécula. Las líneas a la derecha de la marca del centro corresponden a transiciones en las que J cambia por +1; las líneas a la izquierda de la marca del centro corresponden a transiciones en las cuales J cambia en –1. Estas líneas aparecen en el espectro de emisión.

donde J es el número cuántico rotacional del estado *inicial*. La ecuación 43.13 genera la serie de líneas igualmente espaciadas *más altas* de la frecuencia f, en tanto que la ecuación 43.14 genera la serie *más baja* de esta frecuencia. Las líneas adyacentes están separadas en frecuencia por la unidad fundamental $\hbar/2\pi I$. La figura 43.8b muestra las frecuencias esperadas del espectro de absorción de la molécula, las cuales aparecen en el espectro de emisión.

El espectro experimental de absorción de la molécula de HCl que se ilustra en la figura 43.9 sigue muy bien este patrón y refuerza el modelo. No obstante, es evidente una peculiaridad: cada línea está dividida en un doblete. Este doblez se presenta porque dos isótopos de cloro (véase la sección 44.1) estaban presentes en la muestra que fue empleada para obtener este espectro. Porque los isótopos tienen masas diferentes, las dos moléculas de HCl tienen diferentes valores de I.

La intensidad de las líneas espectrales de la figura 43.9 sigue un patrón interesante, subiendo primero cuando uno se aleja de la brecha central (a unos 8.65×10^{13} Hz, que corresponde a la transición prohibida de $J = 0$ a $J = 1$) y luego cayendo. Esta intensidad está determinada por el producto de dos funciones de J. La primera función corresponde al número de estados disponibles para un valor dado de J. Esta función es $2J + 1$, correspondiente al número de valores de m_J, la rotación molecular análoga a m_ℓ para estados atómicos. Por ejemplo, el estado $J = 2$ tiene cinco subestados con cinco valores de m_J ($m_J = -2, -1, 0, 1, 2$), mientras que el estado $J = 1$ tiene sólo tres subestados ($m_J = -1, 0, 1$).

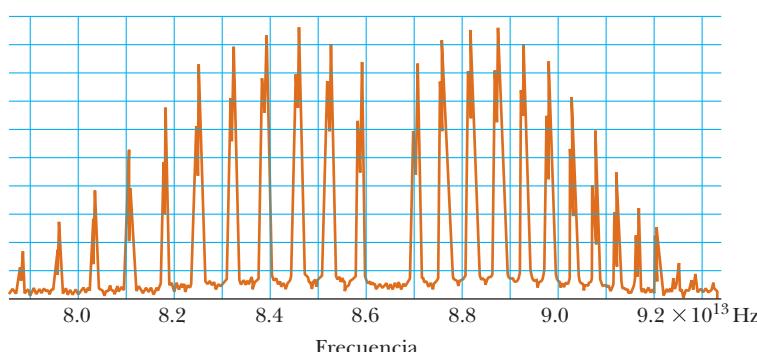



Figura 43.9 Espectro de absorción de la molécula de HCl. Cada línea está dividida en un doblete porque la muestra contiene dos isótopos de cloro que tienen diferentes masas y, por tanto, diferentes momentos de inercia.

En consecuencia, en promedio y sin considerar la segunda función que se describe a continuación, cinco tercios de moléculas harán la transición del estado $J = 2$ así como del estado $J = 1$.

La segunda función que determina la envolvente de la intensidad de las líneas espectrales es el factor de Boltzmann, introducido en la sección 21.5. El número de moléculas en un estado rotacional excitado está dado por

$$n = n_0 e^{-\hbar^2 J(J+1)/(2Ik_BT)}$$

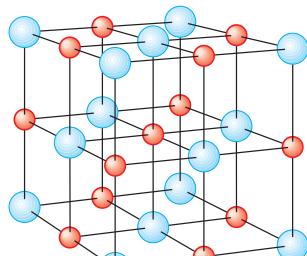
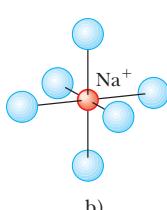
donde n_0 es el número de moléculas en el estado $J = 0$.

La multiplicación de estos factores indica que la intensidad de las líneas espectrales debe ser descrita por una función de J como sigue:

$$I \propto (2J + 1)e^{-\hbar^2 J(J+1)/(2Ik_BT)} \qquad \textbf{(43.15)}$$

◀ Variación de la intensidad del espectro de vibración-rotación de una molécula

El factor $(2J + 1)$ aumenta con J en tanto que el segundo factor exponencial disminuye. El producto de los dos factores da un comportamiento que describe muy bien la envolvente de las líneas espectrales de la figura 43.9.

La excitación de niveles de energía rotacional y de vibración es una consideración importante en modelos de corriente para el calentamiento global. La mayoría de las líneas de absorción para CO_2, está en la sección infrarroja del espectro. Debido a eso, la luz visible del Sol no es absorbida por el CO_2 atmosférico sino que incide en la superficie de la Tierra, calentándola. A su vez, la superficie de la Tierra, con una temperatura mucho menor que el Sol, emite radiación térmica que es máxima en la porción infrarroja del espectro electromagnético (sección 40.1). Esta radiación infrarroja es absorbida por las moléculas de CO_2 del aire en lugar de emitirlas al espacio. El CO_2 atmosférico actúa como una válvula de una sola dirección para la energía a causa del Sol y es responsable, junto con algunas otras moléculas atmosféricas, de la elevación de la temperatura de la superficie terrestre en ausencia de una atmósfera. Este fenómeno se conoce comúnmente como "efecto invernadero". Quemar combustibles fósiles en la sociedad industrializada actual agrega más CO_2 a la atmósfera. Esta adición de CO_2 aumenta la absorción de radiación infrarroja, lo que aumenta aún más la temperatura de la Tierra. A su vez, este aumento en temperatura causa cambios climáticos sustanciales. Además el aumento de temperatura resulta en la fusión del hielo de las capas de hielo ártico, lo que eleva los niveles del mar a nivel mundial y pone en peligro los centros poblacionales costeros. En febrero de 2007, el Panel Intergubernamental para el Cambio Climático de las Naciones Unidas emitió "Cambio Climático 2007: La base de la ciencia física". Esta encuesta, según la obra de más de 2500 científicos de más de 130 países, contiene escalofriantes nuevas afirmaciones de que el calentamiento global está claramente vinculado con la actividad humana y que el calentamiento global ya no es más un tema de debate.

EJEMPLO 43.3 **Comparación de las figuras 43.8 y 43.9**

En la figura 43.8a, las transiciones indicadas corresponden a líneas espectrales que están igualmente espaciadas, como se muestra en la figura 43.8b. Sin embargo, el espectro actual en la figura 43.9 muestra líneas que se acercan más conforme aumenta la frecuencia. ¿Por qué el espaciamiento de las líneas espectrales reales difiere de las del diagrama en la figura 43.8?

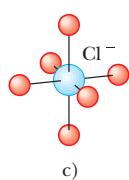
SOLUCIÓN

En la figura 43.8, la molécula diatómica giratoria se modeló como un objeto rígido (capítulo 10). De cualquier modo, en realidad, conforme la molécula gira cada vez más rápido, el resorte efectivo en la figura 43.6a se estira y proporciona la fuerza aumentada que se asocia con la mayor aceleración centrípeta de cada átomo. Conforme la molécula se estira a lo largo de su longitud, su momento de inercia I aumenta. Por lo tanto, la parte rotacional de la expresión de energía en la ecuación 43.12 tiene una dependencia adicional en J en el momento de inercia I. Porque el creciente momento de inercia está en el denominador, conforme J aumenta, las energías no aumentan tan rápidamente con J como se indica en la ecuación 43.12. Con cada nivel de energía superior siendo menor que el indicado por la ecuación 43.12, la energía asociada con una transición a dicho nivel es menor, como lo es la frecuencia del fotón absorbido, lo que destruye el intervalo uniforme de las líneas espectrales y da el intervalo disparejo que se ve en la figura 43.9.

Figura 43.10 a) Estructura cristalina de NaCl. b) Cada ion positivo de sodio (esferas de color anaranjado) está rodeado por seis iones negativos de cloro (esferas azules). c) Cada ion de cloro está rodeado por seis iones de sodio.

43.3 Enlaces en sólidos

Un sólido cristalino consta de gran número de átomos dispuestos en un conjunto regular, que forman una estructura periódica. Los iones en un cristal de NaCl están enlazados en forma iónica, como ya se hizo notar, y los átomos de carbono en diamante, forman enlaces covalentes entre ellos. El enlace metálico descrito al final de esta sección es responsable de la cohesión del cobre, plata, sodio y otros metales sólidos.

Sólidos iónicos

Numerosos cristales se forman por enlace iónico, en que la interacción dominante entre los iones es la fuerza de Coulomb. Considere el cristal de NaCl de la figura 43.10. Cada ion de Na^+ tiene seis iones de Cl^- vecinos más cercanos, y cada ion de Cl^- tiene seis iones de Na^+ vecinos más cercanos. Cada ion de Na^+ es atraído por sus seis vecinos de Cl^-. La energía potencial correspondiente es $-6k_e e^2/r$, donde k_e es la constante de Coulomb y r es la distancia de separación entre cada ion de Na^+ y Cl^-. Además, hay 12 iones de Na^+ vecinos más cercanos a una distancia de $\sqrt{2}r$ del ion de Na^+, y estos 12 iones positivos ejercen fuerzas más débiles de repulsión en el Na^+ central. Además, más allá de estos 12 iones de Na^+ hay más iones de Cl^- que ejercen una fuerza de atracción, y así sucesivamente. El efecto neto de todas estas interacciones es la energía potencial eléctrica negativa resultante

$$U_{\text{atracción}} = -\alpha k_e \frac{e^2}{r} \qquad \textbf{(43.16)}$$

donde α es un número sin dimensiones, conocido como **constante de Madelung.** El valor de α depende sólo de la estructura cristalina particular del sólido. Por ejemplo, α = 1.747 6 para la estructura de NaCl. Cuando los iones constitutivos de un cristal se acercan entre sí, existe una fuerza de repulsión debida a fuerzas electrostáticas y al principio de exclusión, como se explica en la sección 43.1. El término B/r^m de energía potencial de la ecuación 43.1 explica esta fuerza repulsiva. No se incluyen aquí vecinos que no estén lo más cerca posible en este caso porque las fuerzas de repulsión se presentan sólo en aquellos iones que están muy cerca unos de otros. (Las capas de electrones deben traslaparse para efectos del principio de exclusión para que tengan importancia.) Por lo tanto, la energía potencial total del cristal se expresa como

$$U_{\text{total}} = -\alpha k_e \frac{e^2}{r} + \frac{B}{r^m} \qquad \textbf{(43.17)}$$

donde m, en esta expresión, es algún entero pequeño.

Figura 43.11 Energía potencial total en función de la distancia de separación de iones en un sólido iónico, donde U_0 es la energía de cohesión iónica y r_0 es la distancia de separación de equilibrio entre iones.

En la figura 43.11 se ilustra una gráfica de la energía potencial total en función de la distancia de separación entre iones. La energía potencial tiene su valor mínimo U_0 en la separación de equilibrio, cuando $r = r_0$. El problema 57 se deja al estudiante para demostrar que

$$U_0 = -\alpha k_e \frac{e^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \qquad \textbf{(43.18)}$$

Esta energía mínima U_0 se denomina **energía cohesiva iónica** del sólido, y su valor absoluto representa la energía necesaria para separar el sólido en un conjunto de iones aislados positivos y negativos. Su valor para NaCl es –7.84 eV por par de iones.

Para calcular la **energía cohesiva atómica,** que es la energía de enlace relativa a la energía de los átomos neutros, debe sumar 5.14 eV al valor de energía cohesiva iónica para explicar la transición de Na^+ a Na, y debe restar 3.62 eV para explicar la conversión de Cl^- a Cl. Por lo tanto, la energía cohesiva atómica de NaCl es

$$-7.84 \text{ eV} + 5.14 \text{ eV} - 3.62 \text{ eV} = -6.32 \text{ eV}$$

En otras palabras, se requieren 6.32 eV de energía por par de iones para separar el sólido en átomos aislados neutros de Na y Cl.

◀ Cristales iónicos de propiedades

Los cristales iónicos forman cristales duros relativamente estables. Son malos conductores de electricidad porque no contienen electrones libres; cada electrón del sólido está fuertemente ligado a uno de los iones, de modo que no tiene suficiente movilidad para llevar corriente. Los cristales iónicos tienen altos puntos de fusión; por ejemplo, el punto de fusión del NaCl es 801°C. Los cristales iónicos son transparentes a la radiación visible porque las capas formadas en sólidos iónicos por los electrones están tan fuertemente ligadas, que la radiación visible no posee suficiente energía para trasladar electrones a la siguiente capa permitida. La radiación infrarroja se absorbe intensamente porque las vibraciones de los iones tienen frecuencias resonantes naturales en la región infrarroja de baja energía.

Sólidos covalentes

El carbono sólido, en la forma de diamante, es un cristal cuyos átomos están enlazados de manera covalente. Porque el carbono atómico tiene la configuración electrónica $1s^2 2s^2 2p^2$, le faltan cuatro electrones para llenar su capa $n = 2$, que puede ajustar ocho electrones. En consecuencia, dos átomos de carbono tienen una fuerte atracción uno con otro, con una energía de cohesión de 7.37 eV. En la estructura de diamante, cada átomo de carbono está ligado de manera covalente a otros cuatro átomos de carbono situados en las cuatro esquinas de un cubo, como se ilustra en la figura 43.12a.

La estructura cristalina de diamante se ilustra en la figura 43.12b. Observe que cada átomo forma enlaces covalentes con los cuatro átomos más cercanos. La estructura básica de diamante se denomina tetraedro (cada átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular), y el ángulo entre los enlaces es de 109.5°. Otros cristales como el silicio y el germanio tienen la misma estructura.

El carbono es interesante dado que puede formar varios tipos diferentes de estructuras. Además de la estructura de diamante, forma grafito que tiene propiedades completamente diferentes. En esta forma, los átomos de carbono forman capas planas con conjuntos hexagonales de átomos. Una interacción muy débil entre las capas, permite retirar con facilidad las capas bajo fricción, como ocurre en el grafito que se usa en las minas de los lápices.

Los átomos de carbono también forman una gran estructura hueca; en este caso, el compuesto se llama **buckminsterfullereno** en honor al arquitecto R. Buckminster

© Thomson Learning/Charles D. Winters.

Cilindro de silicio (Si) cristalino casi puro, de aproximadamente 25 cm de largo. Estos cristales se cortan en obleas y se procesan para construir diversos dispositivos semiconductores.

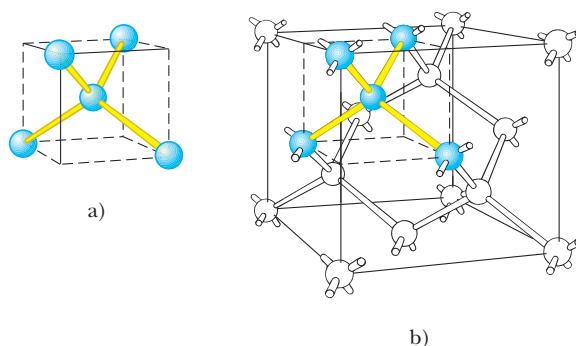
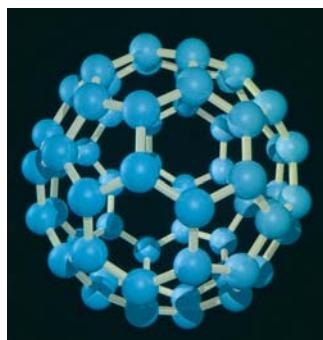



Figura 43.12 a) Cada átomo de carbono en un cristal de diamante está enlazado de manera covalente a otros cuatro átomos de carbono y forma una estructura de tetraedro. b) Estructura del cristal de diamante, que muestra una distribución de enlace tetraédrica.

TABLA 43.1

Energías atómicas cohesivas de algunos sólidos covalentes

Sólido	Energía cohesiva (eV por par iónico)
C (diamante)	7.37
Si	4.63
Ge	3.85
InAs	5.70
SiC	6.15
ZnS	6.32
CuCl	9.24

Charles D. Winters.

Figura 43.13 Estas estructuras moleculares casi esféricas, que se asemejan a balones de futbol, se llaman así en honor al inventor de la cúpula geodésica. Esta forma de carbono, C_{60}, fue descubierta por astrofísicos que investigaban el gas carbono que existe entre algunas estrellas. La ciencia está estudiando activamente las propiedades y los usos potenciales de estas formas de carbono y moléculas relacionadas.

Fuller, quien inventó la cúpula geodésica. La forma singular de esta molécula (figura 43.13) proporciona una "jaula" para contener otros átomos o moléculas. Estructuras relacionadas, llamadas "buckytubos" debido a sus largas estructuras cilíndricas y angostas de átomos de carbono, pueden ser la base para materiales extremadamente fuertes pero ligeros.

Las energías atómicas cohesivas de algunos sólidos covalentes se presentan en la tabla 43.1. La dureza de los sólidos covalentes se explica por sus grandes energías. El diamante es particularmente duro y tiene un punto de fusión muy alto (alrededor de 4000 K). Los sólidos enlazados de manera covalente suelen ser muy duros, tienen altas energías de enlace y altos puntos de fusión, y son buenos aislantes eléctricos.

Sólidos metálicos

Los enlaces metálicos son, por lo general, más débiles que los iónicos o covalentes. Los electrones exteriores de los átomos de un metal están relativamente libres para moverse por el material, y existe una gran cantidad de estos electrones móviles en un metal. La estructura metálica puede verse como un "mar" o un "gas" de electrones casi libres que rodea una red de iones positivos (figura 43.14). El mecanismo de enlace en un metal es la fuerza de atracción entre el conjunto total de iones positivos y el gas de electrones. Los metales tienen una energía de cohesión en una escala de 1 a 3 eV por átomo, que es menor que las energías de cohesión de sólidos iónicos o covalentes.

La luz interactúa fuertemente con los electrones libres de los metales. En consecuencia, la luz visible es absorbida y reemitida muy cerca de la superficie de un metal, lo cual explica la naturaleza brillante de las superficies metálicas. Además de su alta conductividad eléctrica producida por los electrones libres, la naturaleza no direccional del enlace permite que numerosos tipos diferentes de átomos metálicos se disuelvan en diversos metales en cantidades variables. Las resultantes *soluciones sólidas,* o *aleaciones,* pueden diseñarse por tener propiedades particulares, como son resistencia a la tracción, ductilidad, conductividad eléctrica y térmica, y resistencia a la corrosión.

Porque el enlace en los metales se da entre todos los electrones y todos los iones positivos, los metales tienden a doblarse conforme se someten a esfuerzos. Esto contrasta con los sólidos no metálicos, los cuales tienden a fracturarse cuando se someten a esfuerzos. Esta última propiedad se debe a que el enlace en sólidos no metálicos es básicamente entre los iones o átomos vecinos más cercanos. Cuando la distorsión produce suficiente esfuerzo entre alguno de los vecinos más cercanos, se presenta una fractura.

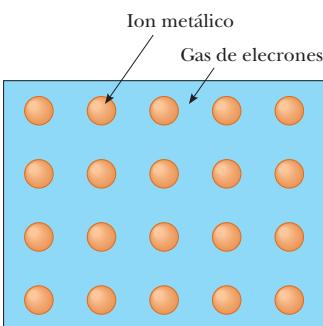



Figura 43.14 Diagrama altamente esquemático de un metal. El área azul representa el gas de electrones y los círculos anaranjados representan los iones metálicos positivos.

43.4 Teoría de electrones libres en metales

En la sección 27.3 se describió una teoría clásica de electrones libres para la conducción eléctrica en metales que llevó a la ley de Ohm. Según esta teoría, un metal se modela como un gas clásico de electrones conductores que se mueven en una red fija de iones. Aun

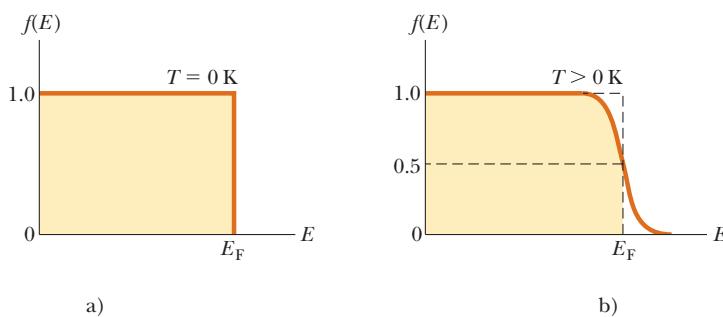



Figura 43.15

Gráfica de la función de distribución Fermi-Dirac $f(E)$ en función de la energía a a) $T = 0$ K y b) $T > 0$ K. La energía E_F es la energía de Fermi.

cuando esta teoría pronostica la forma funcional correcta de la ley de Ohm, no predice los valores correctos de conductividades eléctrica y térmica.

La teoría de electrones libres de base cuántica en metales resuelve los defectos del modelo clásico al tomar en cuenta la naturaleza ondulatoria de los electrones. En este modelo, uno se imagina que los electrones de la capa exterior están libres para moverse a través del metal, pero en realidad están atrapados dentro de una caja tridimensional formada por las superficies del metal. Debido a eso, cada electrón está representado como una partícula en una caja. Como se explicó en la sección 41.2, las partículas en una caja están restringidas a niveles de energía cuantificados.

La física estadística se puede aplicar a un conjunto de partículas en un esfuerzo por relacionar las propiedades microscópicas a las propiedades macroscópicas, como se afirmó con la teoría cinética de los gases en el capítulo 21. En el caso de los electrones es necesario usar *estadísticas cuánticas,* con el requisito de que cada estado del sistema puede ser ocupado sólo por dos electrones (uno con el espín arriba y el otro con el espín abajo) como consecuencia del principio de exclusión. La probabilidad de que un estado particular con energía E sea ocupado por uno de los electrones en un sólido está dada por

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT} + 1} \qquad \textbf{(43.19)}$$

◄ Función de distribución Fermi-Dirac

donde $f(E)$ se denomina **función de distribución Fermi-Dirac** y E_F se llama **energía de Fermi.** En la figura 43.15a se ilustra una gráfica de $f(E)$ en función de E en $T = 0$ K. Observe que $f(E) = 1$ para $E < E_F$ y $f(E) = 0$ para $E > E_F$. Esto es, a 0 K todos los estados que tienen energías menores que la energía de Fermi están ocupados, y todos los estados que tienen energías mayores que la energía de Fermi están libres. En la figura 43.15b se muestra una gráfica de $f(E)$ en función de E a cierta temperatura $T > 0$ K. Esta curva muestra que, cuando T aumenta, la distribución se redondea ligeramente. Con estados cerca y por debajo de E_F perdiendo población, y estados cerca y por encima de E_F ganando población, debido a la excitación térmica. La energía de Fermi E_F también depende de la temperatura, pero la dependencia es débil en los metales.

Continúe ahora con el análisis de la partícula en una caja similar al expuesto en el capítulo 41, para generalizar los resultados a una caja tridimensional. Recuerde que si una partícula de masa m está confinada a moverse en una caja unidimensional de longitud L, los estados permitidos tienen niveles de energía cuantificada dados por la ecuación 41.14:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ahora imagine una pieza de metal en forma de cubo sólido con lados L y volumen L^3, y concentre su atención en un electrón que es libre de moverse en cualquier parte de este volumen. Por lo tanto, el electrón se modela como una partícula en una caja tridimensional. En este modelo, se requiere que $\psi(x, y, z) = 0$ en las fronteras del metal. Se puede demostrar (véase el problema 38) que la energía para este electrón es

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_eL^2}(n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2) \qquad \textbf{(43.20)}$$

donde m_e es la masa del electrón y n_x, n_y y n_z son números cuánticos. Como se esperaba, las energías están cuantizadas, y cada valor permitido de la energía está caracterizado por

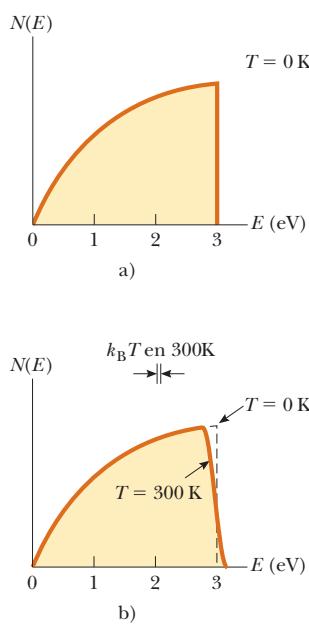



Figura 43.16 Gráfica de la función de distribución electrónica en función de la energía en un metal a a) $T = 0$ K y b) $T = 300$ K. La energía de Fermi E_F es 3 eV.

este conjunto de tres números cuánticos (uno por cada grado de libertad) y el número cuántico de espín m_s. Por ejemplo, el estado fundamental, correspondiente a $n_x = n_y = n_z = 1$, tiene una energía igual a $3\hbar^2\pi^2/2m_eL^2$ y puede ser ocupado por dos electrones, correspondientes a espín alto y espín bajo.

Debido al tamaño macroscópico L de la caja, los niveles de energía para los electrones están muy cerca entre sí. En consecuencia, se pueden tratar los números cuánticos como variables continuas. Bajo esta suposición, el número de estados permitidos por volumen unitario que tienen energías entre E y $E + dE$ es

$$g(E)\,dE = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}E^{1/2}dE \tag{43.21}$$

(Véase el ejemplo 43.5.) La función $g(E)$ se denomina **función de densidad de estados.**

Para un metal en equilibrio térmico, el número de electrones por volumen unitario $N(E)\ dE$ que tienen energía entre E y $E + dE$ es igual al producto del número de estados permitido y la probabilidad de que un estado esté ocupado, es decir, $N(E)\ dE = g(E)f(E)\,dE$:

$$N(E)\,dE = \left(\frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}E^{1/2}\right)\left(\frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1}\right)dE \tag{43.22}$$

Las gráficas de N(E) en fución de E para dos temperaturas se dan en la figura 43.16.

Si n_e es el número total de electrones por volumen unitario, requiere

$$n_e = \int_0^{\infty} N(E)\,dE = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}\int_0^{\infty}\frac{E^{1/2}dE}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1} \tag{43.23}$$

Esta condición es útil para calcular la energía de Fermi. A $T = 0$ K, la función de distribución de Fermi-Dirac $f(E) = 1$ para $E < E_F$ y $f(E) = 0$ para $E > E_F$. Por lo tanto, a $T = 0$ K, la ecuación 43.23 se convierte en

$$n_e = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_F}E^{1/2}dE = \tfrac{2}{3}\frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}E_F^{3/2} \tag{43.24}$$

Al resolver para la energía de Fermi a 0 K

Energía de Fermi a $T = 0$ K ►

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3} \tag{43.25}$$

El orden de magnitud de la energía de Fermi para metales es alrededor de 5 eV. En la tabla 43.2 se dan valores representativos para diferentes metales. El problema 35 se deja para demostrar que la energía promedio de un electrón libre en un metal a 0 K es

$$E_{\text{prom}} = \tfrac{3}{5}E_F \tag{43.26}$$

TABLA 43.2

Valores calculados de la energía de Fermi para metales a 300 K en función de la teoría del electrón libre

Metal	Concentracion de electrones (m^{-3})	Energía de Fermi (eV)
Li	4.70×10^{28}	4.72
Na	2.65×10^{28}	3.23
K	1.40×10^{28}	2.12
Cu	8.46×10^{28}	7.05
Ag	5.85×10^{28}	5.48
Au	5.90×10^{28}	5.53

En resumen, un metal es un sistema que comprende un número muy grande de niveles de energía disponibles para los electrones libres. Estos electrones llenan dichos niveles de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli, comenzando con $E = 0$ y terminando con E_F. A $T = 0$ K, todos los niveles por debajo de la energía de Fermi están llenos y todos los niveles por arriba de la energía de Fermi están vacíos. A 300 K, una muy pequeña fracción de los electrones libres está excitada por arriba de la energía de Fermi.

EJEMPLO 43.4 La energía de Fermi del oro

Cada átomo de oro (Au) aporta un electrón libre al metal. Calcule la energía de Fermi para el oro.

SOLUCIÓN

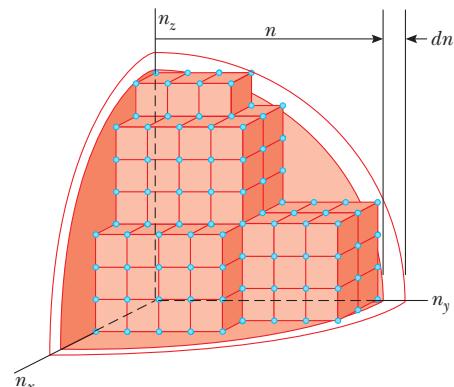
Conceptualizar Imagine electrones que llenan los niveles disponibles en el oro a $T = 0$ K, hasta que el sólido es neutro. La energía más alta de llenado es la energía de Fermi.

Categorizar El resultado se evalúa con un resultado de esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya la concentración de electrones libres en el oro, de la tabla 43.2, en la ecuación 43.25 para calcular la energía de Fermi a 0 K:

$$E_F(0) = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}\left[\frac{3(5.90 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})}{8\pi}\right]^{2/3}$$

$$= 8.85 \times 10^{-19}\ \text{J} = 5.53\ \text{eV}$$

EJEMPLO 43.5 Deducción de la ecuación 43.21

A partir de los estados permitidos de una partícula en una caja tridimensional, deducir la ecuación 43.21.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una partícula confinada a una caja tridimensional sometida a condiciones frontera en tres dimensiones.

Categorizar Este problema se clasifica como el de un sistema cuántico en el que las energías de la partícula están cuantizadas. Además, la solución del problema se puede basar en la comprensión de la partícula en una caja unidimensional.

Figura 43.17 (Ejemplo 43.5) Los estados permitidos de las partículas en una caja tridimensional se pueden representar mediante puntos (círculos azules) en un número cuántico de espacio. Este espacio no es un espacio tradicional en el que una posición se especifique mediante coordenadas *x*, *y* y *z*; en vez de ello, es un espacio en el que los estados permitidos se pueden especificar mediante coordenadas que representan los números cuánticos. Los puntos que representan los estados permitidos se ubican en valores enteros de n_x, n_y y n_z y por lo tanto son las esquinas de cubos con lados de "longitud" 1. El número de estados permitidos que tienen energías entre E y $E + dE$ corresponde al número de puntos en la envolvente esférica de radio n y grosor dn.

Analizar Como se notó anteriormente, los estados permitidos de la partícula en una caja tridimensional se describen mediante tres números cuánticos n_x, n_y y n_z. Imagine un *número cuántico* de *espacio* tridimensional cuyos ejes representan *nx*, *ny* y *nz*. Los estados permitidos en este espacio se pueden representar como puntos ubicados en valores enteros de los tres números cuánticos, como en la figura 43.17.

Al sistituir $E_0 = \hbar^2\pi^2/2m_eL^2$ y $n = (E/E_0)^{1/2}$, reescriba la ecuación 43.20:

$$1)\quad {n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2 = \frac{2m_eL^2}{\hbar^2\pi^2}E = \frac{E}{E_0} = n^2$$

En el número cuántico de espacio, la ecuación 1) es la ecuación de una esfera de radio n. Por lo tanto, el número de estados permitidos que tienen energías entre E y $E + dE$ es igual al número de puntos en una envolvente esférica de radio n y grosor dn.

Encuentre el "volumen" de esta cubierta, que representa el número total de estados $G(E)\ dE$:

$$2)\quad G(E)dE = \tfrac{1}{8}(4\pi n^2 dn) = \tfrac{1}{2}\pi n^2 dn$$

Se tomó un octavo del volumen total porque se está restringido al octante de un espacio tridimensional en el que los tres números cuánticos son positivos.

Sustituya n en la ecuación 2) con su equivalente en términos de E usando la relación $n^2 = E/E_0$ de la ecuación 1):

$$G(E)dE = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{E}{E_0}\right)d\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^{1/2}\right] = \tfrac{1}{2}\pi\frac{E}{(E_0)^{3/2}}\,d[(E)^{1/2}]$$

Evalúe la diferencial:

$$G(E)dE = \tfrac{1}{2}\pi\left[\frac{E}{(E_0)^{3/2}}\right](\tfrac{1}{2}E^{-1/2}dE) = \tfrac{1}{4}\pi E_0^{-3/2}E^{1/2}dE$$

Sustituya para E_0 de su definición anterior:

$$G(E)dE = \tfrac{1}{4}\pi\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2m_eL^2}\right)^{-3/2}E^{1/2}dE$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{m_e^{3/2}L^3}{\hbar^3\pi^2}E^{1/2}dE$$

Sea $g(E)$ el número de estados por unidad de volumen, donde L^3 es el volumen V de la caja cúbica en espacio normal, encuentre $g(E) = G(E)/V$:

$$g(E)dE = \frac{G(E)}{V}dE = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{m_e^{3/2}}{\hbar^3\pi^2}E^{1/2}dE$$

Sustituya $\hbar = h/2\pi$:

$$g(E)dE = \frac{4\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}E^{1/2}\,dE$$

Multiplique por 2 para los dos posibles estados de espín en cada estado de partícula en una caja:

$$g(E)dE = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}E^{1/2}\,dE$$

Finalizar Este resultado es la ecuación 43.21, que es lo que se quería derivar.

43.5 Teoría de banda en sólidos

En la sección precedente se modelaron los electrones de un metal como partículas con movimiento libre dentro de una caja tridimensional y no se puso atención a la influencia de los átomos padres. En esta sección se refina el modelo al incorporar la contribución de los átomos padres que forman el cristal.

Recuerde de la sección 41.1 que la densidad de probabilidad $|\psi|^2$ para un sistema es físicamente significativa, mientras que la amplitud de probabilidad ψ no lo es. Considere como ejemplo un átomo que tiene un solo electrón s fuera de una capa cerrada. Las dos funciones de onda siguientes son válidas para este átomo con número atómico Z:

$$\psi_s^{+}(r) = +Af(r)e^{-Zr/na_0} \qquad \psi_s^{-}(r) = -Af(r)e^{-Zr/na_0}$$

donde A es la constante de normalización y $f(r)$ es una función[3] de r que varía con el valor de n. Seleccionar cualquiera de estas funciones de onda que conduce al mismo valor de $|\psi|^2$, de modo que ambas opciones son equivalentes. No obstante, aparece una diferencia, cuando se combinan dos átomos.

Si dos átomos idénticos están muy separados, no interactúan, y se puede considerar que sus niveles de energía electrónica son los de átomos aislados. Suponga que estos átomos son de sodio, cada uno con un electrón solitario 3s que está en un estado cuántico bien definido. Cuando los dos átomos de sodio se acerquen entre sí, sus funciones de onda comenzarán a

[3] Las funciones $f(r)$ se denominan *polinomios de Laguerre.* Se pueden hallar en textos de física moderna en el tratamiento cuántico del átomo de hidrógeno.

traslaparse, como se explicó con el enlace covalente, en la sección 43.1. Las propiedades del sistema combinado difieren, dependiendo de si se combinan dos átomos con funciones de onda $\psi_s^+(r)$, como en la figura 43.18a, o uno con función de onda $\psi_s^+(r)$ y el otro con $\psi_s^-(r)$, como en la figura 43.18b. La opción de dos átomos con función de onda $\psi_s^-(r)$ es físicamente equivalente al caso de dos funciones de onda positivas, de modo que no se consideran por separado. Cuando se combinan dos funciones de onda $\psi_s^+(r)$, el resultado es una función de onda compuesta en la que las amplitudes de probabilidad se suman entre los átomos. De cualquier modo si $\psi_s^+(r)$ se combina con $\psi_s^-(r)$ las funciones de onda entre los núcleos se restan. Por lo tanto, las amplitudes de probabilidad combinadas para las dos posibilidades son diferentes. **Estas dos posibles combinaciones de funciones de onda representan dos estados posibles del sistema de dos átomos.** Estas curvas se interpretan como aquellas que representan la amplitud de probabilidad de hallar un electrón. La curva positiva-positiva muestra alguna probabilidad de hallar el electrón en el punto medio entre los átomos. La función positiva-negativa no muestra esta probabilidad. Un estado con una elevada probabilidad de que haya un electrón *entre* dos núcleos positivos debe tener una energía diferente ¡que un estado en donde el electrón tenga una alta probabilidad de encontrarse en otra parte! En consecuencia, los estados son *divididos* en dos niveles de energía a causa de las dos formas de combinar las funciones de onda. La diferencia de energía es relativamente pequeña, de modo que los dos estados están cerca uno del otro en una escala de energía.

Figura 43.18 Las funciones de onda de dos átomos se combinan para formar una función de onda compuesta para el sistema de dos átomos cuando los átomos están cercanos entre sí. a) Se combinan dos átomos con funciones de onda $\psi_s^+(r)$. b)Se combinan dos átomos con funciones de onda $\psi_s^+(r)$ y $\psi_s^-(r)$.

La figura 43.19a muestra este efecto divisor como función de la distancia de separación. Para separaciones r grandes, las nubes de electrones no se traslapan y no hay división. Cuando los átomos se acercan entre sí de modo que r disminuye, las nubes de electrones se traslapan y es necesario considerar el sistema de dos átomos.

Cuando gran número de átomos se acercan entre sí para formar un sólido, se presenta un fenómeno semejante. Las funciones de onda individuales se pueden acercar en varias combinaciones de $\psi_s^+(r)$ y $\psi_s^-(r)$, donde cada posible combinación corresponde a una energía diferente. Cuando los átomos se acercan uno al otro, los diversos niveles de energía del átomo aislado se dividen en varios niveles de energía para el sistema combinado. Esta división de niveles para cinco átomos muy próximos entre sí se ilustra en la figura 43.19b. En este caso hay cinco niveles de energía que corresponden a cinco combinaciones diferentes de funciones de onda de átomo aislado.

Si extiende este argumento al gran número de átomos que se encuentran en los sólidos (del orden de 10^{23} átomos por cm^3), obtiene una enorme cantidad de niveles de energía variable con tan poco espacio entre sí que se les puede considerar una **banda** continua de niveles de energía, como se muestra en la figura 43.19c. En el caso del sodio, se acostumbra denominar bandas s a las distribuciones continuas de niveles de energía permitidos, porque las bandas se originan de los niveles s de los átomos individuales de sodio.

La figura 43.20 muestra las bandas de energía permitidas de sodio. Observe que las brechas de energía, correspondientes a *energías prohibidas,* se presentan entre las bandas permitidas. Además, algunas bandas exhiben tanta dispersión de energía que existe un traslape entre bandas que aparecen de diferentes estados cuánticos ($3s$ y $3p$).

Las bandas $1s$, $2s$ y $2p$ de sodio están llenas de electrones, como indican las áreas sombreadas de azul en la figura 43.20. Esto es porque los estados $1s$, $2s$ y $2p$ de cada

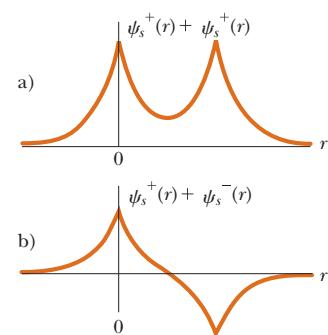
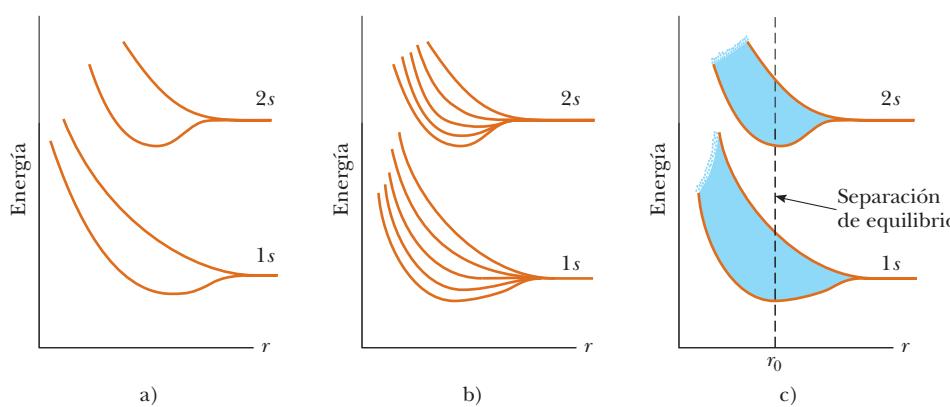



Figura 43.19 a) División de los niveles $1s$ y $2s$ cuando dos átomos de sodio se acercan entre sí. b) División de los niveles $1s$ y $2s$ cuando cinco átomos de sodio se acercan entre sí. c) Formación de bandas de energía cuando un gran número de átomos de sodio se ensamblan para formar un sólido.

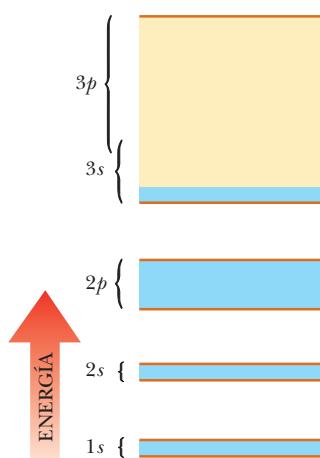
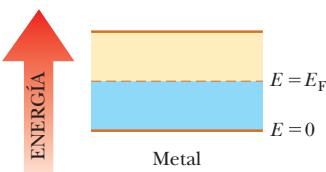



Figura 43.20 Bandas de energía de un cristal de sodio. Observe las brechas de energía (regiones blancas) entre las bandas permitidas; los electrones no pueden ocupar estados que se encuentren en estas brechas. El azul representa bandas de energía ocupadas por los electrones de sodio cuando el átomo está en su estado fundamental. El color oro representa bandas de energía vacías.

átomo están llenos. Un nivel de energía en el que la cantidad de movimiento angular orbital es ℓ puede contener $2(2\ell + 1)$ electrones. El factor 2 aparece de las dos posibles orientaciones electrónicas del espín, y el factor $2\ell + 1$ corresponde al número de posibles orientaciones de la cantidad de movimiento angular orbital. La capacidad de cada banda para un sistema de N átomos es $2(2\ell + 1)$ N electrones. Por lo tanto, las bandas $1s$ y $2s$ contienen, cada una, $2N$ electrones ($\ell = 0$), y la banda $2p$ contiene $6N$ electrones ($\ell = 1$). Porque el sodio tiene sólo un electrón $3s$ y existe un total de N átomos en el sólido, la banda $3s$ contiene sólo N electrones y está parcialmente llena, como se indica mediante color azul en la figura 43.20. La banda $3p$, que es la región más alta de las bandas que se traslapan, está completamente vacía (en la figura aparece en color oro).

La teoría de bandas permite construir modelos sencillos para comprender el comportamiento de conductores, aislantes y semiconductores, así como de dispositivos semiconductores, como en las siguientes secciones.

43.6 Conducción eléctrica en metales, aislantes y semiconductores

Los buenos conductores eléctricos contienen una alta densidad de portadores de carga libres, y la densidad de portadores de carga libres en aislantes es casi cero. Los semiconductores, presentados en la sección 23.2, son una clase de materiales tecnológicamente importantes, en que las densidades de los portadores de carga son intermedias entre la de los aislantes y la de los conductores. En esta sección se explican los mecanismos de conducción en estas tres clases de materiales en términos de un modelo basado en bandas de energía.

Metales

Si un material puede ser un buen conductor eléctrico, los portadores de carga del material deberán estar libres de moverse en respuesta a un campo eléctrico aplicado. Considere los electrones de un metal como los portadores de carga. El movimiento de los electrones, en respuesta a un campo eléctrico, representa un aumento en la energía del sistema (la red metálica y los electrones libres) correspondiente a la energía cinética adicional de los electrones en movimiento. Debido a eso, cuando se aplica un campo eléctrico a un conductor, los electrones deben moverse hacia arriba a un estado de energía más alto, disponible en un diagrama de nivel del energía.

Figura 43.21 Banda semillena de un metal, un conductor eléctrico. A $T = 0$ K, la energía de Fermi se encuentra a la mitad de la banda.

La figura 43.21 muestra una banda semillena en un metal a $T = 0$ K, donde la región azul representa niveles llenos de electrones. Porque los electrones obedecen la estadística de Fermi-Dirac, todos los niveles abajo de la energía de Fermi están llenos de electrones y todos los niveles arriba de la energía de Fermi están vacíos. La energía de Fermi se encuentra en la banda en el estado lleno más alto. A temperaturas ligeramente mayores que 0 K, algunos electrones son excitados térmicamente a niveles por arriba de E_F, pero sobre todo hay poco cambio respecto al caso de 0 K. No obstante, **si al metal se le aplica una diferencia de potencial, los electrones que tengan energías cercanas a la energía de Fermi requieren sólo de una pequeña cantidad de energía adicional del campo aplicado para alcanzar estados de energía cercanos, vacíos, por arriba de la energía de Fermi.** Por lo tanto, los electrones de un metal que experimente sólo un pequeño campo eléctrico aplicado están libres para moverse porque hay numerosos niveles vacíos disponibles cerca de los niveles de energía ocupados. El modelo de metales según la teoría de banda muestra que los metales son excelentes conductores eléctricos.

Aislante

Ahora considere las dos bandas de energía más externas de un material en que la banda inferior baja está llena de electrones y la banda más alta está vacía a 0 K (figura 43.22). La banda llena más baja se denomina **banda de valencia,** y la banda vacía superior se conoce como **banda de conducción.** (La banda de conducción es la que está parcialmente llena en un metal.) Es común llamar **brecha de energía** E_g del material a la separación de energía

entre las bandas de valencia y de conducción. La energía de Fermi se encuentra en alguna parte entre la brecha de energía,[4] como se ve en la figura 43.22.

Suponga que un material tiene una brecha de energía relativamente grande, por ejemplo, unos 5 eV. A 300 K (temperatura ambiente) $k_B T = 0.025$ eV, que es mucho menor que la brecha de energía. A estas temperaturas, la distribución de Fermi-Dirac pronostica que hay muy pocos electrones térmicamente excitados dentro de la banda de conducción. No existen estados disponibles que se encuentren cerca en energía y dentro de la cual los electrones puedan moverse hacia arriba, para explicar la energía cinética extra asociada con el movimiento por el material en respuesta a un campo eléctrico. En consecuencia, los electrones no se mueven y el material es un aislante. Aun cuando un aislante tiene muchos estados vacantes en su banda de conducción que pueden aceptar electrones, dichos estados están separados de los estados llenos por una gran brecha de energía. Sólo unos pocos electrones ocupan tales estados, de modo que la conductividad eléctrica global de los aislantes es muy pequeña.

Figura 43.22 Un aislante eléctrico a $T = 0$ K tiene una banda de valencia llena y una banda de conducción vacía. El nivel de Fermi se encuentra entre estas bandas en la región conocida como brecha de energía (también *separación de energía*).

Semiconductores

Los semiconductores tienen el mismo tipo de estructura de banda que un aislante, pero la brecha de energía es mucho menor, del orden de 1 eV. La tabla 43.3 muestra las brechas de energía para algunos materiales representativos. La estructura de banda de un semiconductor se ilustra en la figura 43.23. Porque el nivel de Fermi está situado cerca de la mitad de la brecha para un semiconductor y E_g es pequeña, un considerable número de electrones son térmicamente excitados de la banda de valencia a la banda de conducción. Debido a que hay muchos niveles vacíos arriba de los niveles térmicamente llenos en la banda de conducción, una pequeña diferencia de potencial aplicada puede elevar fácilmente la energía de los electrones de la banda de conducción, lo cual resulta en una corriente moderada.

A $T = 0$ K, todos los electrones en estos materiales están en la banda de valencia y no hay energía que los excite a cruzar la banda de energía. Por lo tanto, los semiconductores son malos conductores a temperaturas muy bajas. Porque la excitación térmica de los electrones al otro lado de la brecha angosta es más probable a temperaturas más altas, la conductividad de los semiconductores aumenta rápidamente con la temperatura. Esto contrasta claramente con la conductividad de los metales, que disminuye poco a poco al aumentar la temperatura.

Los portadores de carga de un semiconductor pueden ser negativos, positivos o ambos. Cuando un electrón se mueve de la banda de valencia y entra a la banda de conducción,

TABLA 43.3

Valores de brecha de energía para algunos semiconductores

Cristal	**E_g (eV) 0 K**	**300 K**
Si	1.17	1.14
Ge	0.74	0.67
InP	1.42	1.34
GaP	2.32	2.26
GaAs	1.52	1.42
CdS	2.58	2.42
CdTe	1.61	1.56
ZnO	3.44	3.2
ZnS	3.91	3.6

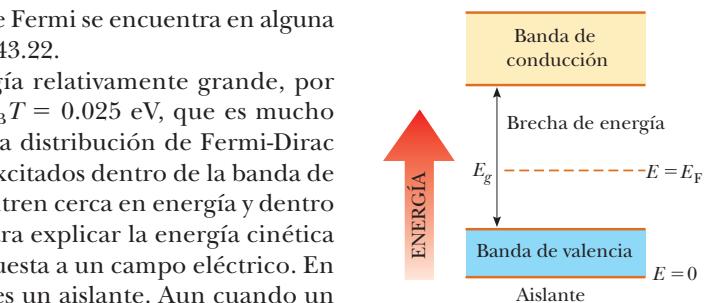
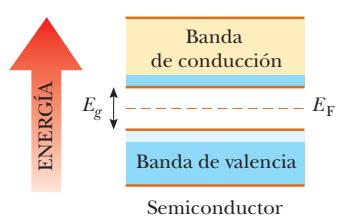
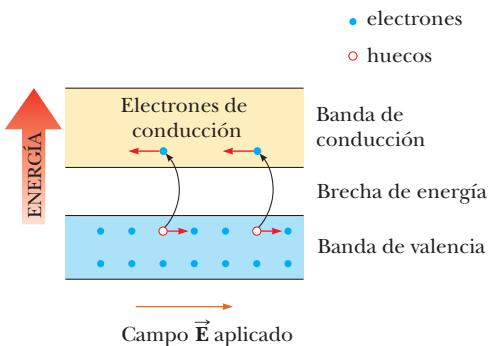
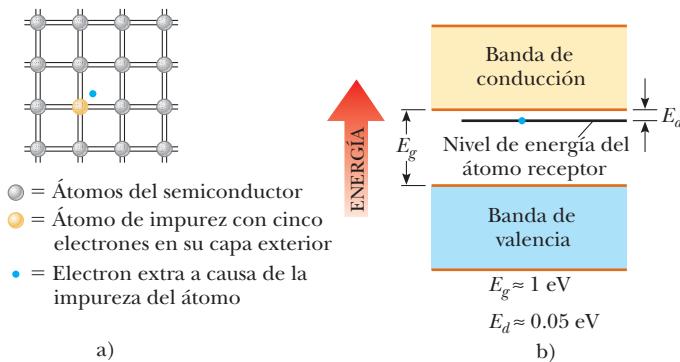



Figura 43.23 Estructura de banda de un semiconductor a temperaturas ordinarias ($T \approx 300$ K). La brecha de energía es mucho menor que en un aislante, y algunos electrones de la banda de valencia ocupan estados de la banda de conducción.

[4] Ya antes se definió la energía de Fermi del estado lleno más alto en $T = 0$, esto podría sugerir que la energía de Fermi debería estar en lo alto de la banda de valencia de la figura 43.22. De cualquier modo, un tratamiento general más refinado de la energía de Fermi, muestra que está situada en la energía a la que la probabilidad de ocupación es un medio (veáse la figura 43.15b). Según esta definición, la energía de Fermi se encuentra en la brecha de energía entre las bandas.

Figura 43.24 Movimiento de cargas (huecos y electrones) en un semiconductor intrínseco. Los electrones se mueven en dirección opuesta a la del campo eléctrico externo, y los huecos se mueven en la dirección del campo.

deja tras de sí un sitio vacío, llamado **hueco,** en la banda de valencia que de otro modo estaría llena. Este hueco (deficiente en electrones) actúa como portador de carga en el sentido de que un electrón libre de un lugar cercano puede entrar en el hueco. Siempre que un electrón ingrese en un hueco, crea un nuevo hueco en el lugar que abandonó. Debido a eso, el efecto neto se puede ver como el hueco que emigra por el material en dirección opuesta a la del movimiento de electrones. El hueco se comporta como si fuera una partícula con una carga positiva $+e$.

Un cristal semiconductor puro que contiene sólo un elemento o un compuesto se denomina **semiconductor intrínseco.** En este semiconductor existe igual número de electrones y huecos de conducción. Estas combinaciones de cargas se llaman **par electrón-hueco.** En presencia de un campo eléctrico externo, los huecos se mueven en la dirección del campo y los electrones de conducción en la dirección opuesta al campo (figura 43.24). Porque los electrones y huecos tienen signos contrarios, estos dos movimientos corresponden a una corriente en la misma dirección.

Pregunta rápida 43.4 Considere los datos de los tres materiales proporcionados en la tabla:

Material	Banda de conducción	E_g
A	vacío	1.2 eV
B	semilleno	1.2 eV
C	vacío	8.0 eV

Identifique cuál de estos materiales es conductor, aislante o semiconductor.

Semiconductores que contienen impurezas

Cuando se agregan impurezas a un semiconductor, la estructura de banda del semiconductor y su resistividad se modifican. El proceso de agregar impurezas, llamado **adición de impurezas,** es importante para controlar la conductividad de los semiconductores. Por ejemplo, cuando un átomo que contiene cinco electrones en la capa exterior, como el arsénico, se agrega a un semiconductor del Grupo IV, cuatro de los electrones forman enlaces covalentes con los átomos del semiconductor y uno queda sobrante (figura 43.25a). Este electrón extra está casi libre de su átomo padre y puede modelarse con un nivel de energía que se encuentre en la brecha de energía, apenas por debajo de la banda de conducción (figura 43.25b). Este átomo pentavalente dona, en efecto, un electrón a la estructura y, por esto, se conoce como **átomo donador.** Porque la separación entre el nivel de energía del electrón del átomo donador y el fondo de la banda de conducción es muy pequeña (por lo general de unos 0.05 eV), es necesaria sólo una pequeña cantidad de excitación térmica para hacer que este electrón se mueva y entre en la banda de conducción. (Recuerde que el promedio de energía de un electrón a temperatura ambiente es de unos $k_BT \approx 0.025$ eV.) Los semiconductores a los que se agregan impurezas con átomos donadores se llaman **semiconductores tipo *n*,** porque la mayoría de los portadores de carga son electrones que tienen carga ***n***egativa.

Figura 43.25 a) Representación en dos dimensiones de un semiconductor formado por átomos del Grupo IV (gris) y un átomo de impureza (amarillo) que tiene cinco electrones en su capa exterior. Cada línea doble entre los átomos representa un enlace covalente en el que dos electrones están compartidos. b) Diagrama de banda de energía para un semiconductor en el que el electrón casi libre del átomo de impureza se encuentra en la brecha de energía, apenas por debajo del fondo de la banda de conducción. Una pequeña cantidad de energía puede excitar el electrón a entrar en la banda de conducción.

Si un semiconductor del Grupo IV se hace impuro por átomos que contengan tres electrones en su capa externa, por ejemplo el indio o el aluminio, los tres electrones forman enlaces covalentes con átomos semiconductores vecinos, lo que deja una deficiencia de electrón –un hueco– donde estaría el cuarto enlace si hubiera un electrón disponible de un átomo de impureza para formarlo (figura 43.26a). Esta situación puede modelarse colocando un nivel de energía en la brecha de energía, justo por encima de la banda de valencia, como en la figura 43.26b. Un electrón desde la banda de valencia tiene suficiente energía a temperatura ambiente para llenar este nivel de impureza, dejando tras de sí un hueco en la banda de valencia. Este hueco puede llevar corriente en presencia de un campo eléctrico. Porque un átomo trivalente acepta un electrón de la banda de valencia, tales impurezas se conocen como **átomos aceptores.** Un semiconductor en estado impuro con impurezas trivalentes (aceptores) se conoce como **semiconductor de tipo *p*** porque la mayoría de los portadores de carga son huecos cargados *p*ositivamente.

Cuando la conducción en un semiconductor es resultado de impurezas aceptoras o donadoras, el material se llama **semiconductor extrínseco.** El intervalo representativo típico de densidades impuras para semiconductores extrínsecos es de 10^{13} a 10^{19} cm^{-3}, mientras que la densidad de electrones en un semiconductor es aproximadamente de 10^{21} cm^{-3}.

43.7 Dispositivos semiconductores

La electrónica de la primera mitad del siglo XX estuvo en función de tubos de vacío, en donde los electrones pasaban a través del espacio vacío entre un cátodo y un ánodo. Ha visto tubos de vacío en la figura 29.5 (cinescopios), en la figura 29.9 (haz electrónico circular), en la figura 29.14 (aparato de Thomson para medir e/m_e para el electrón), y en la figura 40.9 (aparato de efecto fotoeléctrico).

El transistor que se inventó en 1948, llevó a un cambio respecto a los tubos de vacío y hacia los semiconductores como la base de los dispositivos electrónicos. Esta fase de la electrónica ha estado en evolución durante varias décadas. Como se explicó en el capítulo 41, puede que en el futuro cercano haya una nueva fase de la electrónica con dispositivos de nanotecnología que utilice puntos cuánticos y otras estructuras a nanoescala.

Figura 43.26 a) Representación en dos dimensiones de un semiconductor formado por átomos del Grupo IV (gris) y un átomo de impureza (amarillo) que tiene tres electrones en su capa exterior. La línea entre el átomo de impureza y el átomo semiconductor que está bajo ella representa el hecho de que hay sólo un electrón compartido en este enlace. b) Diagrama de banda de energía para un semiconductor en el que el nivel de energía asociado con el átomo trivalente de impureza se encuentra en la brecha de energía, apenas por encima de la parte superior de la banda de valencia. Este diagrama muestra un electrón excitado entrando en el nivel de energía del átomo aceptor, que deja un hueco en la banda de valencia.

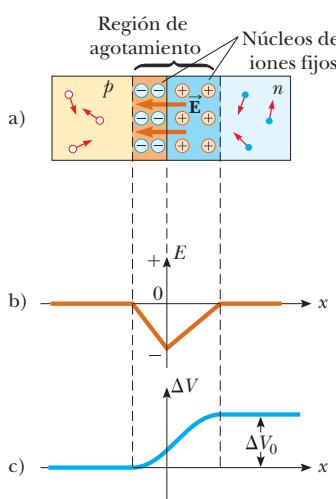



Figura 43.27 a) Distribución física de una unión p–n. b) Magnitud del campo eléctrico interno en función de x para la unión p–n. c) Diferencia de potencial eléctrico interno ΔV en función de x para la unión p–n. ΔV_0 representa la diferencia de potencial en las terminales de la unión, en ausencia de un campo eléctrico aplicado.

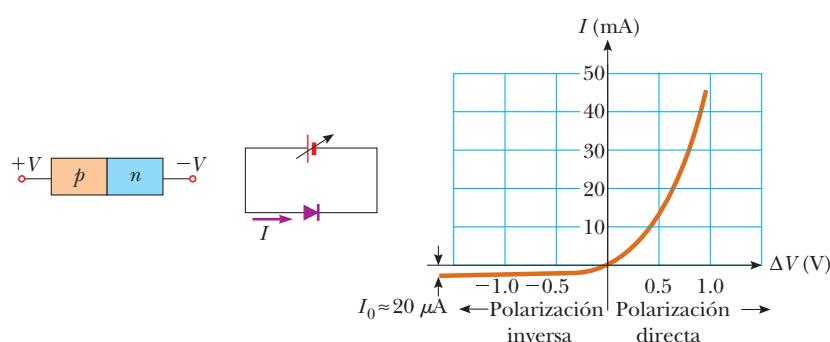
En esta sección se explican los dispositivos electrónicos a partir de semiconductores, que tienen todavía amplio uso y lo tendrán por muchos años más.

El diodo de unión

Una unidad fundamental de un dispositivo semiconductor se forma cuando un semiconductor tipo p se une a un semiconductor tipo n para formar una **unión p–n.** Un **diodo de unión** es un dispositivo que está a partir de una sola unión p–n. La función de un diodo de cualquier tipo es pasar corriente en una dirección pero no en la otra. Por lo tanto, actúa como válvula unidireccional para la corriente.

La unión p-n se ilustra en la figura 43.27a y consiste en tres regiones diferentes: una región p, una región n y una pequeña área que se extiende varios micrómetros de lado a lado de la interfase, llamada *región de agotamiento*.

La región de agotamiento se puede visualizar tal como surgen cuando las dos mitades de la unión se unen. Los electrones donadores móviles del lado n más cercanos a la unión (área de color azul oscuro de la figura 43.27a) se difunden al lado p y llenan huecos ahí localizados, dejando tras de sí iones positivos inmóviles. Cuando esto sucede, es posible modelar los huecos que son llenados tal como si se extendiera al lado n, dejando detrás una región (área de color café en la figura 43.27a) de iones negativos fijos.

Porque los dos lados de la región de agotamiento llevan cada uno una carga neta, existe un campo eléctrico interno del orden de 10^4 a 10^6 V/cm en la región de agotamiento (véase la figura 43.27b). Este campo produce una fuerza eléctrica sobre portadores de carga móviles cualesquiera restantes que despejan la región de agotamiento. La región de agotamiento recibe ese nombre porque está agotada de portadores de carga móviles. Este campo eléctrico interno produce una diferencia de potencial interno ΔV_0 que impide más difusión de huecos y electrones por la unión y, por tanto, asegura una corriente cero en la unión cuando no se aplica diferencia de potencial.

La operación de la unión como diodo es más fácil de comprender en términos de la gráfica de diferencia de potencial que se ilustra en la figura 43.27c. Si se aplica un voltaje ΔV a la unión, tal que el lado p se conecte a la terminal positiva de una fuente de voltaje, como se ve en la figura 43.28a, se reduce la diferencia de potencial interna ΔV_0 en las terminales de la unión; la disminución resulta en una corriente que aumenta exponencialmente con un voltaje directo en aumento, o *polarización directa*. Para *polarización inversa* (donde el lado n de la unión se conecta a la terminal positiva de una fuente de voltaje), la diferencia de potencial interna ΔV_0 aumenta con un polarización inversa creciente; el aumento resulta en una corriente inversa muy pequeña que rápidamente llega al valor de saturación I_0. La correspondencia corriente-voltaje para un diodo ideal es

$$I = I_0(e^{e\Delta V/k_B T} - 1) \quad \textbf{(43.27)}$$

donde la primera e es la base de los logaritmos naturales, la segunda e representa la magnitud de la carga electrónica, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta. La figura 43.28b muestra un diagrama del circuito para un diodo bajo polarización directa y la figura 43.28c muestra una gráfica I–ΔV característica de una unión p–n real, que demuestra el comportamiento del diodo.

Figura 43.28 a) Unión p–n bajo polarización directa. b) Diagrama del circuito para un diodo bajo polarización directa, que muestra una batería con voltaje ajustable. Es posible aplicar voltaje positivo y negativo al diodo para estudiar su comportamiento no lineal. c) Curva característica para una unión p–n real.

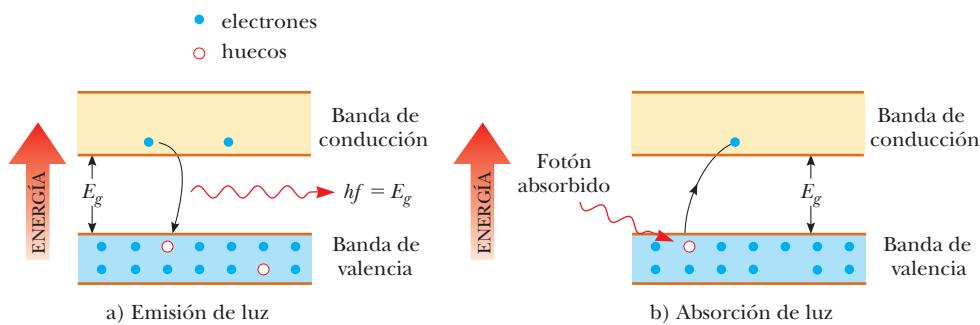



Figura 43.29 a) Emisión de luz desde un semiconductor. b)Absorción de luz mediante un semiconductor.

Diodos emisores de luz y de absorción de luz

Los diodos emisores de luz (LED, light-emitting diodes) y los láser semiconductores son ejemplos comunes de dispositivos que dependen del comportamiento de los semiconductores. Los LED se emplean por lo general en señales de tránsito, pantallas electrónicas y como luces indicadoras para equipo electrónico. Los láser semiconductores se usan con frecuencia como apuntadores en presentaciones y en equipos reproductores de DVD y discos compactos.

La emisión y la absorción de luz en los semiconductores es semejante a la de los átomos gaseosos, excepto que en la explicación de los primeros se debe incorporar el concepto de bandas de energía en lugar de niveles discretos de energía en átomos individuales. Como se ve en la figura 43.29a, un electrón excitado eléctricamente para entrar en la banda de conducción puede recombinarse con facilidad en un hueco (en especial si el electrón se inyecta hacia una región *p*). Cuando tiene lugar esta recombinación, se emite un fotón de energía E_g. Con un diseño apropiado del semiconductor y la envoltura plástica asociada o espejos, la luz de un gran número de estas transiciones servirá como fuente de un LED o un láser semiconductor.

Por el contrario, un electrón de la banda de valencia puede absorber un fotón de luz que está por llegar y ser promovido a la banda de conducción, dejando un hueco detrás (figura 43.29b). Esta energía absorbida se puede usar para operar un circuito eléctrico. Un dispositivo que opera bajo este principio es la celda solar fotovoltaica, que aparece en muchas calculadoras de mano. Se usan conjuntos de celdas solares para generar energía eléctrica en vehículos espaciales y en lugares remotos del planeta.

EJEMPLO 43.6 ¿Dónde está el remoto?

Estime la brecha de banda del semiconductor en el LED infrarrojo de un control remoto de televisión representativo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los electrones en la figura 43.29a caen de la banda de conducción a la banda de valencia y emiten fotones infrarrojos en el proceso.

Categorizar Se usan los conceptos explicados en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

En el capítulo 34 se aprendió que la longitud de onda de la luz infrarroja varía de 700 nm a 1 mm. Escoja un número con el que sea fácil trabajar, como 1000 nm (que no es una mala estimación porque los controles remoto por lo general operan en el intervalo de 880 a 950 nm.)

Estime la energía hf de los fotones del control remoto:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\text{ eV}\cdot\text{nm}}{1000\text{ nm}} = \boxed{1.2\text{ eV}}$$

Este valor corresponde a una brecha de energía E_g de aproximadamente 1.2 eV en el semiconductor del LED.

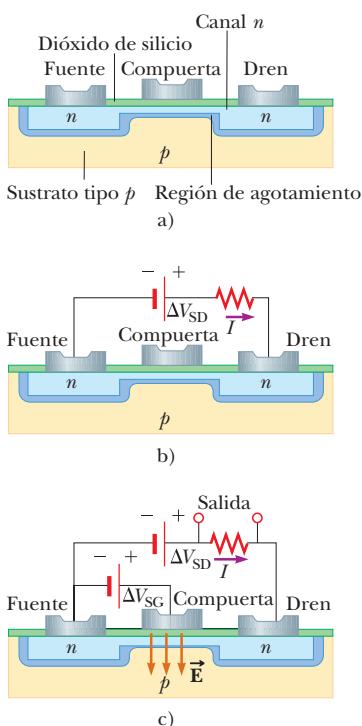



Figura 43.30 a) Estructura de un transistor de efecto de campo de semiconductor de metal óxido (MOSFET). b) Se aplica un voltaje de fuente dren para obtener corriente en el circuito. c) Se aplica un voltaje de compuerta. El voltaje de compuerta se puede usar para controlar la corriente entre la fuente y el dren, de modo que el MOSFET actúa como amplificador.

El transistor

La invención del transistor por John Bardeen (1908-1991), Walter Brattain (1902-1987) y William Shockley (1910-1989) en 1948 revolucionó totalmente el mundo de la electrónica. Por su obra, estos tres hombres compartieron el premio Nobel de física en 1956. Para 1960, el transistor había sustituido al tubo de vacío en numerosas aplicaciones electrónicas. El advenimiento del transistor creó una industria multimillonaria que produce aparatos portátiles que gozan de la preferencia del público, como reproductores de MP3, calculadoras de mano, computadoras, receptores de TV, teléfonos inalámbricos y juegos electrónicos.

Un **transistor de unión** está formado por un material semiconductor en el que una región n muy angosta se intercala entre dos regiones p o una región p se intercala entre dos regiones n. En cualquier caso, el transistor se forma de dos uniones p–n. Estos tipos de transistores tuvieron un uso generalizado en los primeros días de la electrónica con los semiconductores.

Durante los sesenta, la industria electrónica convirtió muchas aplicaciones electrónicas del transistor de unión al **transistor de efecto de campo,** que es mucho más fácil de fabricar y es igual de eficiente. La figura 43.30a muestra la estructura de un dispositivo muy común, el **MOSFET,** o **transistor de efecto de campo de semiconductor metal óxido.** Es probable que usted utilice millones de dispositivos MOSFET cuando trabaja en su computadora.

Hay tres conexiones metálicas (la M de MOSFET) en el transistor: *fuente, dren* y *compuerta.* La fuente y el dren están conectados a regiones semiconductoras tipo n (la S de MOSFET) a ambos lados de la estructura. Estas regiones están conectadas por un angosto canal de material adicional tipo n, el canal n. Las regiones de la fuente, el dren y el canal n están incrustados en un material de sustrato de tipo p, que forman una región de agotamiento, igual que en el diodo de unión, por la parte inferior del canal n. (Las regiones de agotamiento también existen en las uniones bajo las regiones de la fuente y el dren, pero se ignoran porque la operación del dispositivo depende básicamente del comportamiento en el canal.)

La compuerta está separada del canal n por una capa aislante de dióxido de silicio (la O de MOSFET, por el óxido). En consecuencia, no tiene contacto eléctrico con el resto del material semiconductor.

Imagine que se aplica un voltaje de fuente ΔV_{SD} en las terminales de la fuente y el dren, como se muestra en la figura 43.30b. Con esta situación, fluirán electrones por la región superior del canal n. No pueden fluir electrones por la región de agotamiento en la parte inferior del canal n porque esta región está agotada de portadores de carga. Ahora se aplica un segundo voltaje ΔV_{SG} en las terminales de la fuente y la compuerta, como se muestra en la figura 43.30c. El potencial positivo en el electrodo de la compuerta resulta en un campo eléctrico por debajo de la compuerta que está dirigido hacia abajo en el canal n (el campo en "efecto de campo"). Este campo eléctrico ejerce fuerzas hacia arriba sobre los electrones que están abajo de la compuerta, haciendo que ingresen en el canal n. Esto provoca que la región de agotamiento se haga más pequeña, ensanchando el área en donde hay corriente entre la parte superior del canal n y la región de agotamiento. Cuando el área se hace más ancha, el valor de la corriente aumenta.

Si se aplica un voltaje variable a la compuerta, por ejemplo el que se genera a causa de música almacenada en un disco compacto, el área por la que atraviesa la corriente fuente–dren varía en tamaño, de acuerdo con el voltaje variable de la compuerta. Una pequeña variación en el voltaje de la compuerta resulta en una gran variación de corriente y, por consiguiente, un gran voltaje en las terminales del resistor de la figura 43.30c. Por lo tanto, el MOSFET actúa como amplificador de voltaje. Un circuito formado por una cadena de estos transistores puede hacer que una señal inicial muy pequeña desde un micrófono se amplifique lo suficiente para accionar los potentes altavoces en un concierto al aire libre.

El circuito integrado

Inventado independientemente por Jack Kilby (nacido en 1923, premio Nobel, 2000) para Texas Instruments a fines de 1958 y por Robert Noyce (1927-1990) para Fairchild Camera and Instrument a principios de 1959, el circuito integrado ha sido llamado con toda justicia "la más notable tecnología que haya llegado a la humanidad". El primer dispositivo de Kilby

se muestra en la figura 43.31. Los circuitos integrados han iniciado una "segunda revolución industrial", y se encuentran en el corazón de computadoras, relojes, cámaras, automóviles, aviones, robots, vehículos espaciales y todo tipo de redes de comunicaciones y de conmutación.

En los términos más sencillos, un **circuito integrado** es un conjunto de transistores, diodos, resistores y capacitadores interconectados, construidos en una sola pieza de silicio conocida como *chip*. Los dispositivos electrónicos contemporáneos con frecuencia contienen muchos circuitos integrados (figura 43.32). Los chips de diseño más avanzado contienen fácilmente varios millones de componentes dentro de un área de 1 cm^2, en donde el número de componentes por pulgada cuadrada aumenta continuamente desde que se inventó el circuito integrado. La figura 43.33a ilustra los impresionantes avances logrados en tecnología de chips desde que Intel introdujo el primer microprocesador en 1971.

Los circuitos integrados fueron inventados en parte para resolver el problema de la interconexión de los transistores. En la era de los tubos de vacío, consideraciones de potencia y tamaño de componentes individuales establecieron límites modestos sobre el número de componentes que podían ser interconectados en un circuito dado. Con el advenimiento del diminuto transistor, de baja potencia y altamente confiable, los límites de diseño sobre el número de componentes desaparecieron y fueron sustituidos por el problema de alambrar juntos cientos de miles de componentes. La magnitud de este problema se puede apreciar cuando se considera que las computadoras de segunda generación (formadas por transistores discretos en lugar de circuitos integrados) contenían varios cientos de miles de componentes que requerían más de un millón de uniones que tenían que soldarse a mano y probarse.

Además de resolver el problema de la interconexión, los circuitos integrados poseen las ventajas de la miniaturización y de una rápida respuesta, dos atributos importantes para computadoras de alta velocidad. Porque el tiempo de respuesta de un circuito depende del intervalo necesario de tiempo para que las señales eléctricas viajen con la rapidez de la luz para pasar de un componente a otro, la miniaturización y el empaquetado de componentes da por resultado un ritmo de respuesta rápida.

Cortesía de Texas Instruments, Inc.

Figura 43.31 Primer circuito integrado de Jack Kilby, probado el 12 de septiembre de 1958.

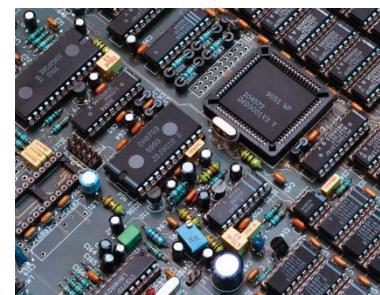



Figura 43.32 Los circuitos integrados funcionan en muchos dispositivos electrónicos. Todos los elementos planos de circuito con superficies negras en esta fotografía son circuitos integrados.

43.8 Superconductividad

En la sección 27.5 aprendió que hay una clase de metales y compuestos conocidos como **superconductores,** cuya resistencia eléctrica disminuye a prácticamente cero por debajo de cierta temperatura T_c llamada *temperatura crítica* (tabla 27.3). Ahora se analizan con más detalle estos asombrosos materiales, a partir de lo que recién aprendió acerca de las propiedades de sólidos para poder entender el comportamiento de los superconductores.

Primero se examina el efecto Meissner, descrito en la sección 30.6 como la exclusión de flujo magnético desde el interior de un superconductor. El efecto Meissner se ilustra en la figura 43.34 para un material semiconductor en la forma de un cilindro largo. Observe

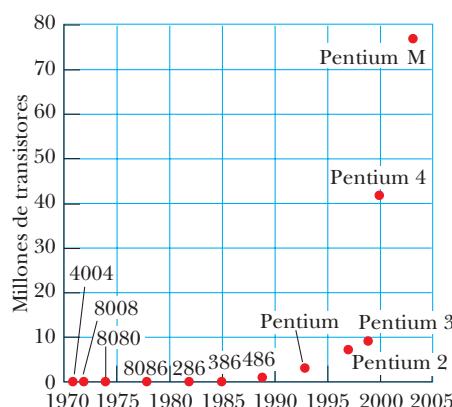



Figura 43.33 Impresionantes avances en la tecnología de chips relacionados con microchips de computadoras fabricados por Intel, gráfica del número de transistores en un solo chip de computadora en función de su año de manufactura.

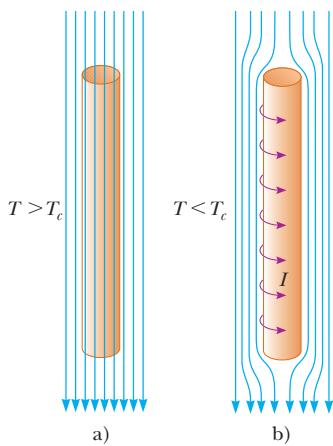



Figura 43.34 Superconductor en forma de un cilindro largo en presencia de un campo magnético externo. a) A temperaturas por arriba de T_c, las líneas de campo penetran el cilindro porque se encuentra en su estado normal. b) Cuando el cilindro se enfría a $T < T_c$ y se vuelve un superconductor, el flujo magnético es expulsado de su interior por la inducción de corrientes superficiales.

que el campo penetra al cilindro cuando su temperatura es mayor que T_c (figura 43.34a). Cuando la temperatura desciende por abajo de T_c, sin embargo, las líneas de campo se expulsan espontáneamente del interior del superconductor (figura 43.34b). Por lo tanto, el superconductor es más que un conductor perfecto (resistividad $\rho = 0$); se trata también de un diamagnético perfecto ($\vec{\mathbf{B}} = 0$). La propiedad de que $\vec{\mathbf{B}} = 0$ en el interior de un superconductor es tan fundamental como la propiedad de resistencia cero. Si la magnitud del campo magnético aplicado excede de un valor crítico B_c, definido como el valor de B que destruye las propiedades superconductores de un material, el campo penetra de nuevo la muestra.

Porque un superconductor es un diamagnético perfecto, repele un imán permanente. De hecho, se puede demostrar el efecto Meissner haciendo flotar un pequeño imán permanente sobre un superconductor, como se ve en la figura 30.27.

Recuerde del estudio de la electricidad que un buen conductor expulsa campos eléctricos estáticos al mover cargas a su superficie. En efecto, las cargas de superficie producen un campo eléctrico que cancela exactamente dentro del conductor al campo aplicado desde el exterior. De un modo semejante, un superconductor expulsa campos magnéticos al formar corrientes de superficie. Para ver por qué sucede esto, considere de nuevo el superconductor que se ilustra en la figura 43.34. Suponga que la muestra está inicialmente a una temperatura $T > T_c$, como se ilustra en la figura 43.34a, de modo que el campo magnético penetra al cilindro. Cuando el cilindro se enfría a una temperatura $T < T_c$, el campo es expulsado, como se ilustra en la figura 43.34b. Las corrientes de superficie inducidas en la superficie del superconductor producen un campo magnético que cancela exactamente, dentro del superconductor, al campo aplicado desde el exterior. Como es de esperarse, las corrientes de superficie desaparecen cuando se retira el campo magnético externo.

Una teoría satisfactoria para la superconductividad en los metales fue publicada en 1957 por J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer, y por lo general se conoce como teoría BCS, por las primeras letras de sus apellidos. Esta teoría les redituó a los tres científicos un premio Nobel en física en 1972. En esta teoría dos electrones pueden interactuar mediante distorsiones en el conjunto de iones de red, de manera que exista una fuerza neta de atracción entre los electrones.[5] Como resultado de esto, los dos electrones quedan enlazados en una entidad llamada *par de Cooper*, que se comporta como una partícula con espín integral. Este tipo de partículas se denominan *bosones.* (Como se hizo notar en la prevención de riesgos ocultos 42.6, los *fermiones* constituyen otra clase de partículas, las que tienen espín semientero.) Una característica importante de los bosones es que no obedecen el principio de exclusión de Pauli. En consecuencia, a temperaturas muy bajas, es posible que todos los bosones de un conjunto de estas partículas estén en el estado cuántico más bajo. Por tanto, el conjunto total de pares de Cooper del metal se describe mediante una sola función de onda. Arriba del nivel de energía asociado con esta función de onda está una brecha de energía igual a la energía de enlace de un par de Cooper. Bajo la acción de un campo eléctrico aplicado, los pares de Cooper experimentan una fuerza eléctrica y se mueven por el metal. Un evento aleatorio de dispersión de un par de Cooper desde un ion de la red representaría resistencia a la corriente eléctrica. Esta colisión cambiaría la energía del par de Cooper porque parte de la energía sería transferida al ion de la red. De cualquier modo, no hay niveles de energía disponibles por debajo del nivel del par de Cooper (ya está, en el estado más bajo) y ninguno por encima, debido a la brecha de energía. Por lo tanto, no se presentan colisiones y no hay resistencia al movimiento de pares de Cooper.

Un importante desarrollo en física que provocó gran emoción en la comunidad científica fue el descubrimiento de superconductores de alta temperatura a partir de óxido de cobre. La emoción empezó con una publicación de J. Georg Bednorz (nacido en 1950) y K. Alex Müller (nacido en 1927), científicos del laboratorio de investigación IBM en

[5] Una explicación muy simplificada de esta atracción entre los electrones es como sigue: la fuerza de Coulomb de atracción entre un electrón y el ion de red con carga positiva de los alrededores ocasiona que el ion se mueva ligeramente al interior del electrón. En consecuencia, hay una concentración más alta de carga positiva en esta región que en otra parte de la red. Un segundo electrón es atraído a la concentración más alta de carga positiva.

Zurich, Suiza, en 1986. En su ensayo,[6] Bednorz y Müller reportaron una fuerte evidencia de superconductividad a 30 K en un óxido de bario, lantano y cobre. En 1987 se les otorgó el premio Nobel de física por su notable descubrimiento. Poco después, una nueva familia de compuestos se abrió a la investigación, y la actividad en el campo de la superconductividad prosiguió con gran ímpetu. A principios de 1987, algunos grupos de investigación en la Universidad de Alabama en Huntsville y en la Universidad de Houston anunciaron superconductividad a unos 92 K en un óxido de itrio, bario y cobre ($YBa_2Cu_3O_7$). Más adelante en ese mismo año, equipos de científicos de Japón y Estados Unidos reportaron superconductividad a 105 K en un óxido de bismuto, estroncio, calcio y cobre. Más recientemente, la ciencia ha reportado superconductividad a temperaturas de hasta 150 K en un óxido que contiene mercurio. En la actualidad, no se puede descartar la posibilidad de superconductividad a temperatura ambiente, y los mecanismos que provocan este comportamiento en los superconductores a alta temperatura están todavía en investigación. La búsqueda de nuevos materiales superconductores continúa por razones científicas y porque las aplicaciones prácticas se hacen más probables y generalizadas a medida que sube la temperatura crítica.

Si bien la teoría BCS fue muy exitosa para explicar la superconductividad en los metales, en la actualidad no hay una teoría ampliamente aceptada de la superconductividad a altas temperaturas. Esto continúa en el campo de la investigación activa.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Dos o más átomos se combinan para formar moléculas debido a una fuerza atractiva neta entre los átomos. Los mecanismos responsables del enlace molecular se pueden clasificar del modo siguiente:

- Los **enlaces iónicos** se forman principalmente debido a la atracción coulombiana entre iones con carga opuesta. El cloruro de sodio (NaCl) es un ejemplo.
- Los **enlaces covalentes** se forman cuando los átomos constituyentes de una molécula comparten electrones. Por ejemplo, los dos electrones de la molécula de H_2 se comparten igualmente entre los dos núcleos.
- Los **enlaces de Van der Waals** son enlaces electrostáticos débiles entre moléculas o entre átomos que no forman enlaces iónicos o covalentes. Estos enlaces son responsables de la condensación de los átomos de gas noble y las moléculas no polares en la fase líquida.
- Los **enlaces de hidrógeno** se forman entre el centro de carga positiva en una molécula polar, que incluye uno o más átomos de hidrógeno, y el centro de carga negativa en otra molécula polar.

Los valores permitidos de la energía rotacional de una molécula diatómica son

$$E_{\text{rot}} = E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \quad J = 0, 1, 2, \ldots \quad \textbf{(43.6)}$$

donde I es el momento de inercia de la molécula y J es un entero llamado **número cuántico rotacional**. La regla de selección para transiciones entre estados rotacionales es $\Delta J = \pm 1$.

Los valores permitidos de la energía vibratoria de una molécula diatómica son

$$E_{\text{vib}} = \left(v + \tfrac{1}{2}\right) \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad v = 0, 1, 2, \ldots \quad \textbf{(43.10)}$$

donde v es el **número cuántico vibratorio**, k es la constante de fuerza del "resorte efectivo" que enlaza la molécula y μ es la **masa reducida** de la molécula. La regla de selección para transiciones vibratorias permitidas es $\Delta v = \pm 1$, y la diferencia de energía entre cualesquier dos niveles adyacentes es la misma, sin importar cuáles dos niveles estén involucrados.

(*continúa*)

[6] J. G. Bednorz y K. A. Müller, *Z. Phys. B* **64:**189, 1986.

Los mecanismos de enlace en los sólidos se pueden clasificar en una forma similar para los esquemas de las moléculas. Por ejemplo, los iones Na^+ y Cl^- en NaCl forman **enlaces iónicos**, mientras que los átomos de carbono en el diamante forman **enlaces covalentes**. El **enlace metálico** se caracteriza por una fuerza atractiva neta entre núcleos iónicos positivos y los electrones libres móviles de un metal.

En la **teoría de electrón libre de los metales**, los electrones libres llenan los niveles cuantizados en concordancia con el principio de exclusión de Pauli. El número de estados por unidad de volumen disponible a los electrones de conducción que tienen energías entre E y $E + dE$ es

$$N(E)\,dE = \left(\frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}E^{1/2}\right)\left(\frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1}\right)dE \qquad \textbf{(43.22)}$$

donde E_F es la **energía Fermi**. En $T = 0$ k, todos los niveles por abajo de E_F están llenos, todos los niveles arriba de E_F están vacíos y

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3} \qquad \textbf{(43.25)}$$

donde n_e es el número total de electrones de conducción por unidad de volumen. Sólo aquellos electrones que tienen energías cercanas a E_F pueden contribuir con la conductividad eléctrica del metal.

En un sólido cristalino, los niveles de energía del sistema forman un conjunto de **bandas**. Los electrones ocupan los estados de energía más bajos, sin más que un electrón por estado. Las brechas de energía están presentes entre las bandas de estados permitidos.

Un **semiconductor** es un material que tiene una brecha de energía de aproximadamente 1 eV y una banda de valencia que está llena en $T = 0$ K. Debido a la brecha de energía pequeña, un número significativo de electrones puede excitarse térmicamente a causa de la banda de valencia dentro de la banda de conducción. Las estructuras de banda y las propiedades eléctricas de un semiconductor del Grupo IV se pueden modificar mediante la adición de átomos donadores que contengan cinco electrones en la capa exterior, o con átomos aceptores que contengan tres electrones en la capa exterior. Un semiconductor **con impurezas** con átomos donadores de impureza se llama **semiconductor tipo *n***, y uno dopado con átomos aceptores de impureza se llama **semiconductor de tipo *p***.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

Nota: Las preguntas 6 y 8 del capítulo 27 se pueden asignar a este capítulo.

1. Probar los modelos para los diferentes enlaces que forman moléculas estables.

2. Probar las tres formas principales de excitación de una molécula (que no sea movimiento de traslación) y las energías relativas asociadas con estas tres formas.

3. **O** Considere un material representativo compuesto de moléculas diatómicas enlazadas de manera covalente. Clasifique las siguientes energías, de mayor a menor en magnitud: a) el calor latente de fusión por molécula, b) la energía de enlace molecular, c) la energía del primer estado excitado de rotación molecular, d) la energía del primer estado excitado de vibración molecular.

4. ¿Cómo puede el análisis del espectro rotacional de una molécula llevar a una estimación del tamaño de esa molécula?

5. O Un espectro de absorción infrarroja, como el de la figura 43.9, se toma cuando la muestra de HCl está a una temperatura mucho más alta. En comparación con la figura 43.9, en este nuevo espectro los picos de absorción están más altos, ¿a) a las mismas frecuencias, b) más lejos de la brecha o c) más cerca de la brecha?

6. **O** ¿Qué tipo de enlace probablemente mantiene juntos los átomos en los siguientes sólidos **i)**, **ii)** y **iii)**? Elija sus respuestas entre estas posibilidades: a) enlace iónico, b) enlace covalente y c) enlace metálico. **i)** El cristal es transparente, quebradizo y soluble en agua. Es un pobre conductor de electricidad. **ii)** El cristal es opaco, quebradizo, muy duro y un buen aislador eléctrico. **iii)** El sólido es opaco, brillante, flexible y un buen conductor eléctrico.

7. **O** La energía Fermi para la plata es 5.48 eV. En un trozo de plata sólida, los niveles de energía de electrón libre se miden cerca de 2 eV y cerca de 6 eV. **i)** ¿Cerca de cuál de estas energía los niveles de energía están más juntos? a) 2 eV, b) 6 eV, c) El espaciamiento es el mismo. **ii)** ¿Cerca de cuál de estas energías hay más electrones ocupando niveles de energía? a) 2 eV, b) 6 eV, c) El número de electrones es el mismo.

8. Pruebe las diferencias en las estructuras de banda de metales, aislantes y semiconductores. ¿Cómo es que el modelo de estructura de banda permite entender mejor las propiedades eléctricas de estos materiales?
9. **O** Como se discutió en el capítulo 27, la conductividad de los metales disminuye con el aumento de temperatura debido a colisiones de electrones con átomos en vibración. En contraste, la conductividad de los semiconductores aumenta con la temperatura creciente. ¿Qué propiedad de un semiconductor es responsable de este comportamiento? a) Las vibraciones atómicas disminuyen conforme aumenta la temperatura. b) El número de electrones de conducción y el número de huecos aumenta de manera pronunciada con la temperatura creciente. c) La brecha de energía disminuye con el aumento en temperatura. d) Los electrones no chocan con los átomos en un semiconductor.
10. Cuando un fotón es absorbido por un semiconductor, se crea un par electrón-hueco. Explique físicamente este fenómeno, usando para ello el modelo de banda de energía como la base para su explicación.
11. Átomos pentavalentes como el arsénico son átomos donadores en un semiconductor como el silicio, mientras que átomos trivalentes como el indio son aceptores. Revise la tabla periódica del apéndice C, y determine qué otros elementos podrían ser buenos donadores o aceptores.
12. ¿Cuáles son las suposiciones esenciales de la teoría de electrones libres en los metales? ¿Cómo difiere el modelo de banda de energía respecto a esta teoría al describir las propiedades de los metales?
13. ¿Cómo se comparan los niveles de vibración y rotación del hidrógeno pesado (D_2) respecto a los niveles de moléculas de H_2?
14. La energía de los fotones de luz visible oscila entre 1.8 y 3.1 eV. ¿Esto explica por qué el silicio, con una brecha de energía de 1.1 eV (véase tabla 43.3) se ve opaco, mientras que el diamante, con una brecha de energía de 5.5 eV aparece transparente?
15. **O i)** ¿Debe esperar que un semiconductor con impureza tipo *n* tenga a) mayor, b) menor o c) la misma conductividad que un semconductor intrínseco (puro)? **ii)** ¿Debe esperar que un semiconductor con impureza tipo *p* tenga a) mayor, b) menor o c) la misma conductividad que un semiconductor intrínseco (puro)?
16. **O** ¿Cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso para un superconductor por abajo de su temperatura crítica? a) Puede portar corriente infinita. b) Debe portar alguna corriente distinta de cero. c) Su campo eléctrico interior debe ser cero. d) Su campo magnético interno debe ser cero. e) No aparece energía interna cuando porta corriente eléctrica.

Problemas

Sección 43.1 Enlaces moleculares

1. **Problema de repaso.** Un ion K^+ y un ion Cl^- están separados una distancia de 5.00×10^{-10} m. Si se supone que los dos iones actúan como cargas puntuales, determine a) la fuerza que cada ion ejerce sobre el otro y b) la energía potencial del sistema de dos iones en electrón volts.
2. El cloruro de potasio es una molécula enlazada de modo iónico, que se vende como sustituto de sal para dietas bajas en sodio. La afinidad electrónica del cloro es 3.6 eV. Se necesita una entrada de energía de 0.7 eV para formar iones de K^+ y Cl^- separados a partir de átomos separados de K y Cl. ¿Cuál es la energía de ionización del K?
3. El potencial de Lennard−Jones proporciona una descripción de la energía potencial de una molécula diatómica,

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

donde A y B son constantes. Encuentre, en términos de A y B, a) el valor r_0 al cual la energía es mínima y b) la energía E necesaria para romper una molécula diatómica. c) Evalúe r_0 en metros y E en electrón volts para la molécula H_2, tome $A = 0.124 \times 10^{-120}$ eV · m^{12} y $B = 1.488 \times 10^{-60}$ eV · m^6. *Nota:* aun cuando este potencial se utiliza ampliamente para modelar, se sabe que tiene serios defectos. Por ejemplo, su comportamiento a valores pequeños y grandes de r es significativamente erróneo.
4. En la molécula de yoduro de potasio, suponga que los átomos de K y I se enlazan de manera iónica por la transferencia de un electrón del potasio al yodo. a) La energía de ionización del potasio es 4.34 eV, y la afinidad electrónica del yodo es 3.06 eV. ¿Qué energía se necesita para transferir un electrón del potasio al yodo, para formar iones K^+ y I^- a partir de átomos neutros? Esto recibe a veces el nombre de energía de activación E_a. b) Un modelo de función de la energía potencial para la molécula de KI es el potencial de Lennard-Jones:

$$U(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right] + E_a$$

donde r es la distancia de separación internuclear, y σ y ϵ son parámetros ajustables. El término E_a se agrega para asegurar el correcto comportamiento asintótico a una r grande. A la distancia de separación de equilibrio, $r = r_0 = 0.305$ nm, $U(r)$ es mínima y $dU/dr = 0$. Ahora $U(r_0)$ es el negativo de la energía de disociación: $U(r_0) = -3.37$ eV. Evalúe σ y ϵ. c) Calcule la fuerza necesaria para romper una molécula de KI. d) Calcule la constante de fuerza para pequeñas oscilaciones alrededor de $r = r_0$. *Sugerencia:* sea $r = r_0 + s$ donde $s/r_0 \ll 1$, y expanda $U(r)$ en potencias de s/r_0 hasta términos de segundo orden.
5. Una fuerza de dispersión de Van der Waals entre átomos de helio produce un pozo de potencial muy poco profundo, con una profundidad del orden de 1 meV. ¿Aproximadamente a qué temperatura esperaría usted que el helio se condense?

Sección 43.2 Estados de energía y espectros de moléculas

6. Suponga que la distancia entre los protones en la molécula de H_2 es de 0.750×10^{-10} m. a) Encuentre la energía del primer estado rotacional, con $J = 1$. b) Encuentre la longitud de onda de la radiación emitida en la transición de $J = 1$ a $J = 0$.

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

7. La molécula del yoduro de cesio (CsI) tiene una separación atómica de 0.127 nm. a) Determine la energía del estado rotacional excitado más bajo y la frecuencia del fotón absorbido en la transición de $J = 0$ a $J = 1$. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál sería el cambio fraccionario en esta frecuencia si el estimado de la separación atómica está fuera en un 10%?

8. ● La frecuencia del fotón que absorbería la molécula de NO en una transición del estado de vibración $v = 0$ al $v = 1$, sin cambio en estado de rotación, es 56.3 THz. El enlace entre los átomos tiene una constante de resorte efectiva de 1530 N/m. Use esta información para calcular la masa reducida de la molécula de NO. Luego calcule un valor para μ usando la ecuación 43.4. Establezca cómo se comparan los dos resultados.

9. Una molécula de HCl se ha excitado a su primer nivel de energía rotacional, correspondiente a $J = 1$. Si la distancia entre sus núcleos es 0.127 5 nm, ¿cuál es la rapidez angular de la molécula respecto de su centro de masa?

10. La molécula de CO hace una transición del estado rotacional de $J = 1$ a $J = 2$ cuando absorbe un fotón de frecuencia 2.30×10^{11} Hz. Encuentre el momento de inercia de esta molécula a partir de estos datos.

11. Una molécula diatómica está formada por dos átomos que tienen masas m_1 y m_2 separadas una distancia r. Demuestre que el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa de la molécula se conoce por la ecuación 43.3, $I = \mu r^2$.

12. a) Calcule el momento de inercia de una molécula de NaCl alrededor de su centro de masa. Los átomos están separados por una distancia $r = 0.28$ nm. b) Calcule la longitud de onda de la radiación emitida cuando una molécula de NaCl se somete a una transición de $J = 2$ a $J = 1$.

13. El espectro rotacional de la molécula de HCl contiene líneas con una longitud de onda de 0.060 4, 0.069 0, 0.080 4, 0.096 4 y 0.120 4 mm. ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula?

14. ● La constante de resorte efectiva que describe la energía potencial de la molécula de HI es 320 N/m. La de la molécula de HF es 970 N/m. Calcule la amplitud de vibración mínima para a) la molécula de HI y b) la molécula de HF. c) ¿Cuál molécula tiene el enlace más débil? Explique cómo puede decirlo.

15. Con la constante de fuerza efectiva de una molécula de HCl en vibración como $k = 480$ N/m, encuentre la diferencia de energía entre el estado fundamental y el primer nivel de vibración.

16. Los núcleos de la molécula de O_2 están separados por 1.20×10^{-10} m. La masa de cada átomo de oxígeno de la molécula es 2.66×10^{-26} kg. a) Determine las energías rotacionales de una molécula de oxígeno en electrón volts para los niveles correspondientes a $J = 0$, 1 y 2. b) La constante de fuerza efectiva k entre los átomos de la molécula de oxígeno es 1177 N/m. Determine las energías de vibración (en electrón volts) correspondientes a $v = 0$, 1 y 2.

17. La figura P43.17 es el modelo de una molécula de benceno. Todos los átomos se encuentran en un plano, y los átomos de carbono forman un hexágono regular, igual que los átomos de hidrógeno. Los átomos de carbono tienen una separación de 0.110 nm de centro a centro. Determine las energías permitidas de rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del papel que pasa por el punto central O. Los átomos de hidrógeno y carbono tienen masas de 1.67×10^{-27} kg y 1.99×10^{-26} kg, respectivamente.

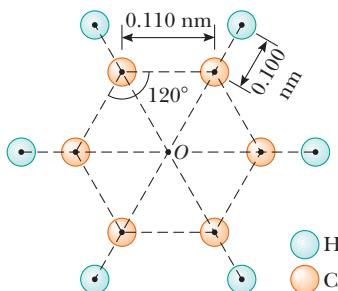



Figura P43.17

18. a) Calcule la longitud de onda más larga en el espectro rotacional del HCl. Tome el átomo de Cl como el isótopo ^{35}Cl. La separación de equilibrio de los átomos de H y Cl es de 0.127 46 nm. La masa atómica del átomo de H es 1.007 825 u y la del átomo de ^{35}CL es 34.968 853 u. b) **¿Qué pasaría si?** Repita el cálculo en a), pero considere el átomo de Cl como el isótopo ^{37}Cl, que tiene una masa atómica de 36.965 903 u. La distancia de separación de equilibrio es la misma que en a). c) El cloro que se presenta de manera natural contiene aproximadamente tres partes de ^{35}Cl por una parte de ^{37}Cl. Debido a las dos diferentes masas del Cl, cada línea del espectro rotacional de microondas del HCl se divide en un doblete. Calcule la separación del doblete para la longitud de onda más larga. (La figura 43.9 muestra los dobletes del espectro de vibración infrarrojo.)

19. Calcule el momento de inercia de una molécula de HCl del espectro de absorción infrarrojo que se muestra en la figura 43.9.

20. Una molécula de H_2 está en sus estados fundamentales de vibración y rotación. Absorbe un fotón con una longitud de onda de 2.211 2 μm y salta al nivel de energía $v = 1$, $J = 1$. Después cae al nivel de energía $v = 0$, $J = 2$, mientras emite un fotón con una longitud de onda de 2.405 4 μm. Calcule a) el momento de inercia de la molécula de H_2 alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular al enlace H–H, b) la frecuencia de vibración de la molécula de H_2 y c) la distancia de separación de equilibrio para esta molécula.

21. ¿Fotones de qué frecuencia pueden ser emitidos espontáneamente por moléculas de CO en el estado $v = 1$ y $J = 0$?

22. La mayor parte de la masa de un átomo está en su núcleo. Modele la distribución de masa de una molécula diatómica como dos esferas, cada una de radio 2.00×10^{-15} m y masa 1.00×10^{-26} kg, ubicada en determinados puntos a lo largo del eje x en la figura 43.5a, y separadas por 2.00×10^{-10} m. La rotación alrededor del eje que une a los núcleos de la molécula diatómica por lo general se desprecia debido a que el primer estado excitado tendría una energía demasiado alta para tener acceso a ella. Para ver por qué, calcule la relación entre la energía del primer estado excitado para la rotación alrededor del eje x y la energía del primer estado excitado para la rotación alrededor del eje y.

Sección 43.3 Enlaces en sólidos

23. Utilice la ecuación 43.18 para calcular la energía de cohesión iónica para el NaCl. Tome $\alpha = 1.747\,6$, $r_0 = 0.281$ nm y $m = 8$.

24. Utilice una lente de aumento para ver la sal de mesa que sale de un salero. Compare lo que vea con la figura 43.10a. La distancia

entre un ion de sodio y el ion de cloro vecino más cercano es 0.261 nm. a) Haga una estimación del orden de magnitud del número N de átomos en un grano de sal. b) **¿Qué pasaría si?** Si tiene un número de granos de sal igual a este número N. ¿Cuál sería su volumen?

25. Considere una cadena unidimensional de iones alternos positivos y negativos. Demuestre que la energía potencial asociada con uno de los iones y sus interacciones con el resto de este cristal hipotético es

$$U(r) = -k_e \alpha \frac{e^2}{r}$$

donde la constante de Madelung es $\alpha = 2 \ln 2$ y r es la separación entre iones. *Sugerencia:* utilice la expansión en serie para $\ln(1 + x)$.

26. La distancia entre iones K^+ y Cl^- en un cristal de KCl es 0.314 nm. Calcule las distancias de un ion de K^+ a sus iones de K^+ más cercanos, a sus segundos iones K^+ más cercanos, y a sus terceros iones K^+ más cercanos.

Sección 43.4 Teoría de electrones libres en metales

Sección 43.5 Teoría de banda en sólidos

27. La energía de Fermi para la plata es 5.48 eV. La plata tiene una densidad de 10.6×10^3 kg/m^3 y una masa atómica de 108 u. Utilice esta información para demostrar que la plata tiene un electrón libre por átomo.

28. ● a) Establezca de qué depende la energía de Fermi de acuerdo con la teoría de electrón libre de los metales y cómo la energía de Fermi depende de dicha cantidad. b) Demuestre que la ecuación 43.25 se puede expresar como $E_F = (3.65 \times 10^{-19}) n_e^{2/3}$ eV, donde E_F está en electrón volts cuando ne está en electrones por metro cúbico. c) De acuerdo con la tabla 43.2, ¿en qué factor la concentración de electrones libres en el cobre supera la del potasio? ¿Cuál de estos metales tiene la mayor energía de Fermi? ¿En qué factor es mayor la energía de Fermi? Explique si este comportamiento está predicho por la ecuación 43.25.

29. ● a) Encuentre la rapidez representativa de un electrón de conducción en el cobre, tomando su energía cinética como igual a la energía de Fermi, 7.05 eV. b) ¿Cómo se compara esto con una rapidez de arrastre de 0.1 mm/s?

30. Para el cobre a 300 K, calcule la probabilidad de que un estado con energía igual a 99.0% de la energía de Fermi esté ocupada.

31. La energía de Fermi del cobre a 300 K es 7.05 eV. a) ¿Cuál es la energía promedio de un electrón de conducción en cobre a 300 K? b) ¿A qué temperatura la energía promedio de una molécula en un gas ideal sería igual a la energía calculada en el inciso a)?

32. El sodio es un metal monovalente que tiene una densidad de 0.971 g/cm^3 y una masa molar de 23.0 g/mol. Utilice esta información para calcular a) la densidad de los portadores de carga y b) la energía de Fermi de sodio.

33. Calcule la energía de un electrón de conducción en la plata a 800 K, suponiendo que la probabilidad de hallar un electrón en ese estado es 0.950. La energía de Fermi es 5.48 eV a esta temperatura.

34. Cuando la plata sólida empieza a fundirse, ¿cuál es la fracción aproximada de los electrones de conducción que están térmicamente excitados por arriba del nivel de Fermi?

35. Demuestre que la energía cinética promedio de un electrón de conducción en un metal a 0 K es $E_{prom} = \frac{3}{5}E_F$. *Sugerencia:* en general, la energía cinética promedio es

$$E_{prom} = \frac{1}{n_e}\int EN(E)\, dE$$

donde n_e es la densidad de partículas, $N(E)\, dE$ se conoce por la ecuación 43.22, y la integral está por encima de todos los valores posibles de la energía.

36. Considere un cubo de oro de 1.00 mm por lado. Calcule el número aproximado de electrones de conducción en este cubo, cuyas energías se encuentran en el intervalo de 4.000 a 4.025 eV.

37. ● a) Considere un sistema de electrones confinados a una caja tridimensional. Calcule la relación entre el número de niveles de energía permitidos a 8.50 eV y el número a 7.00 eV. b) **¿Qué pasaría si?** El cobre tiene una energía de Fermi de 7.0 eV a 300 K. Calcule la relación entre el número de niveles ocupados a una energía de 8.50 eV y el número a la energía de Fermi. Compare su respuesta con la obtenida en el inciso a).

38. **Problema de repaso.** Un electrón se mueve en una caja tridimensional de longitud L en sus lados y volumen L^3. La función de onda de la partícula es $\psi = A \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y) \operatorname{sen}(k_z z)$. Demuestre que su energía está dada por la ecuación 43.20

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L^2}\left(n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2\right)$$

donde los números cuánticos (n_x, n_y, n_z) son enteros ≥ 1. *Sugerencia:* la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones puede escribirse como

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = (U - E)\psi$$

Para confinar al electrón dentro de la caja, tome $U = 0$ en el interior y $U = \infty$ en el exterior.

Sección 43.6 Conducción eléctrica en metales, aislantes y semiconductores

39. La brecha de energía para el silicio a 300 K es 1.14 eV. (a) Encuentre el fotón de más baja frecuencia que promoverá un electrón de la banda de valencia a la banda de conducción. (b) ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón?

40. La luz de un tubo de descarga de hidrógeno incide sobre un cristal de CdS. ¿Cuáles líneas espectrales de la serie de Balmer son absorbidas y cuáles son transmitidas?

41. ● La mayor parte de la radiación solar tiene una longitud de onda de 1 μm o menos. ¿Qué brecha de energía debe tener el material de una celda solar para absorber esta radiación? ¿Es apropiado el silicio (véase la tabla 43.5)? Explique su respuesta.

42. Un diodo emisor de luz (LED) hecho del semiconductor GaAsP emite luz roja ($\lambda = 650$ nm). Determine la brecha de banda de energía E_g del semiconductor.

43. Suponga que usted debe construir un instrumento científico térmicamente aislado de sus alrededores, pero en forma tal que se pueda usar un láser externo para elevar la temperatura del objetivo que está dentro. (Podría ser un calorímetro, pero estos criterios de diseño podrían aplicarse también a otros dispositivos.) Usted sabe que el diamante es transparente y que es un buen aislante térmico, por lo que decide usar una ventana de diamante en el aparato. El diamante tiene una brecha

de energía de 5.5 eV entre sus bandas de valencia y de conducción. ¿Cuál es la longitud de onda más corta del láser que se puede usar para calentar la muestra que se encuentra en el interior?

44. **Problema de repaso.** El silicio es un semiconductor que se utiliza mucho en chips de computadora y otros dispositivos electrónicos. Sus propiedades más importantes resultan de adicionar impurezas para controlar su conductividad eléctrica. El fósforo, que está adyacente al silicio en la tabla periódica, tiene cinco electrones de valencia externos en comparación con cuatro para el silicio. Cuando un átomo de fósforo es sustituido por un átomo de silicio en un cristal, cuatro de los electrones de valencia del fósforo forman enlaces con átomos vecinos y el electrón restante se encuentra ligado mucho más débilmente. Es posible modelar un electrón libre para moverse por la red cristalina. De cualquier modo, el núcleo de fósforo tiene una carga positiva más que el núcleo de silicio, de modo que el electrón extra proporcionado por el átomo de fósforo es atraído a esta carga nuclear individual $+e$. Los niveles de energía del electrón extra son semejantes a los del electrón del átomo de hidrógeno de Bohr con dos excepciones importantes. Primero, la atracción de Coulomb entre el electrón y la carga positiva en el núcleo del átomo de fósforo se reduce en un factor de $1/\kappa$ de lo que sería en el espacio libre (véase la ecuación 26.21), de modo que los radios orbitales se aumentan en gran medida. En este caso, κ es la constante dieléctrica del cristal, con un valor de 11.7 en el silicio. En segundo término, la influencia del potencial eléctrico periódico de la red hace que el electrón se mueva como si tuviera una masa efectiva m^*, muy diferente de la masa m_e de un electrón libre. Es posible usar el modelo de Bohr del hidrógeno para obtener valores bastante precisos para los niveles de energía permitidos del electrón extra. Estos niveles de energía, llamados estados donadores, desempeñan un papel importante en los dispositivos electrónicos. Suponga que $m^* = 0.220\ m_e$. Calcule la energía y los radios para un electrón extra en la primera órbita de Bohr alrededor de un átomo donador en el silicio.

Sección 43.7 Dispositivos semiconductores

45. ¿Para qué valor de voltaje de polarización ΔV en la ecuación 43.27 da a) $I = 9.00I_0$? b) **¿Qué pasaría si?** $I = -0.900I_0$? Suponga que $T = 300$ K.

46. El diodo que se ilustra en la figura 43.28 está conectado en serie con una batería y un resistor de 150 Ω. ¿Qué fuerza electromotriz de la batería se necesita para obtener una corriente de 25.0 mA?

47. Se coloca un diodo en un circuito microelectrónico para proteger el sistema en caso de que una persona no capacitada instale la batería al revés. En la situación correcta de polarización directa, la corriente es de 200 mA con una diferencia de potencial de 100 mV en las terminales del diodo a temperatura ambiente (300 K). Si la batería se invierte, ¿cuál sería la magnitud de la corriente a través el diodo?

48. ● Un diodo, un resistor y una batería se conectan en un circuito serie. El diodo está a una temperatura a la que $k_BT = 25.0$ meV, y el valor de saturación I_0 de la corriente es 1.00 μA. La resistencia del resistor es de 745 Ω, y la batería mantiene una diferencia de potencial constante entre sus terminales de 2.42 V. a) Encuentre gráficamente la corriente en el circuito. Continúe como sigue. En los mismos ejes, trace gráficas de la corriente I_D del diodo y la corriente en el alambre I_W en función del voltaje en las terminales del diodo ΔV. Seleccione valores de ΔV que vayan de 0 a 0.250 V escalonados cada 0.025 V. Determine el valor de ΔV en la intersección de las dos líneas de la gráfica, y calcule las corrientes correspondientes I_D e I_W. Explique cómo concuerdan. b) Encuentre la resistencia óhmica del diodo, que se define como la razón $\Delta V/I_D$. c) Encuentre la resistencia dinámica del diodo, que se define como la derivada $d(\Delta V)/dI_D$.

Sección 43.8 Superconductividad

Nota: El problema 30 del capítulo 30, así como los problemas del 64 al 67 del capítulo 32, se pueden asignar a esta sección.

49. Determine la corriente generada en un anillo superconductor de niobio metálico de 2.00 cm de diámetro, cuando un campo magnético de 0.020 0 T dirigido perpendicularmente al anillo se reduce de pronto a cero. La inductancia del anillo es 3.10×10^{-8} H.

50. ● *Una demostración convincente de la resistencia cero.* Una demostración directa y relativamente sencilla de resistencia a CD cero se puede realizar con el uso del método de la sonda de cuatro puntas. La sonda que se ilustra en la figura P43.50 está formada por un disco de $YBa_2Cu_3O_7$ (un superconductor de alta T_c), al que están unidos cuatro alambres con soldadura de indio o algún otro material de contacto apropiado. La corriente se mantiene a través de la muestra al aplicar un voltaje de CD entre los puntos a y b, y se mide con un amperímetro de CD. La corriente puede variar con la resistencia variable R. La diferencia de potencial ΔV_{cd} entre c y d se mide con un voltímetro digital. Cuando la sonda se sumerge en nitrógeno líquido, la muestra se enfría con rapidez a 77 K, por debajo de la temperatura crítica del material, 92 K. La corriente permanece aproximadamente constante, pero ΔV_{cd} *cae en forma abrupta a cero.* a) Explique esta observación con base en su conocimiento sobre los superconductores. b) Los datos de la tabla representan valores reales de ΔV_{cd} para valores diferentes de I tomados sobre la muestra a temperatura ambiente. Una batería de 6–V en serie con un resistor variable R suministra la corriente. Los valores de R varían de 10 Ω a 100 Ω. Los datos fueron proporcionados por el laboratorio del autor. Elabore una gráfica de $I-\Delta V$ con los datos y determine si la muestra se comporta de una manera lineal. Con los datos obtenga un valor para la resistencia de CD de la muestra a temperatura ambiente. c) A temperatura ambiente se encuentra que $\Delta V_{cd} = 2.234$ mV para $I = 100.3$ mA, pero después de que la muestra se enfría a 77 K, $\Delta V_{cd} = 0$ e $I = 98.1$ mA. ¿Qué piensa usted que podría causar el ligero descenso de la corriente?

Corriente con diferencia de potencial ΔV_{cd} medida en un volumen de muestra cerámica de $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ a temperatura ambiente

I (mA)	ΔV_{cd} (mV)
57.8	1.356
61.5	1.441
68.3	1.602
76.8	1.802
87.5	2.053
102.2	2.398
123.7	2.904
155	3.61

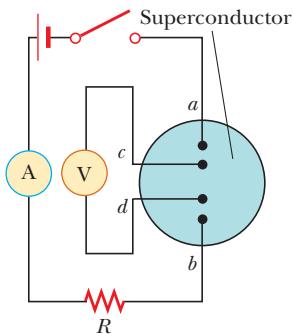



Figura P43.50

51. Una varilla delgada de material superconductor, de 2.50 cm de largo, se coloca en un campo magnético de 0.540 T con su eje cilíndrico a lo largo de las líneas del campo magnético. a) Trace las direcciones del campo aplicado y la corriente superficial inducida. b) Encuentre la magnitud de la corriente en la superficie sobre la superficie curva de la varilla.

Problemas adicionales

52. La constante de resorte efectiva asociada con enlaces en la molécula de N_2 es 2297 N/m. Los átomos de nitrógeno tienen cada uno una masa de 2.32×10^{-26} kg, y sus núcleos están a 0.120 nm uno de otro. Suponga que la molécula es rígida y se encuentra en el estado fundamental de vibración. Calcule el valor J del estado rotacional que tenga la misma energía que el primer estado excitado de vibración.

53. Como usted podrá ver en el capítulo 44, el carbono 14 (^{14}C) es un isótopo de carbono. Tiene las mismas propiedades químicas y estructura electrónica que el isótopo de carbono 12 (^{12}C), que es mucho más abundante pero tiene diferentes propiedades nucleares. Su masa es 14 u, que es mayor porque tiene dos neutrones extra en su núcleo. Suponga que la energía potencial molecular del CO es el mismo para ambos isótopos de carbono, y que las tablas y ejemplos de la sección 43.2 se refieren al monóxido de carbono con átomos de carbono 12. a) ¿Cuál es la frecuencia de vibración del ^{14}CO? b) ¿Cuál es el momento de inercia del ^{14}CO? c) ¿Cuáles longitudes de onda de luz pueden ser absorbidas por el ^{14}CO en el estado ($v = 0, J = 10$) establezca qué hará que termine en el nivel $v = 1$?

54. Bajo presión, el helio líquido puede solidificarse cuando cada uno de sus átomos se enlaza con otros cuatro, y cada enlace tiene una energía promedio de 1.74×10^{-23} J. Encuentre el calor latente de fusión del helio en joules por gramo. (La masa molar del He es 4.00 g/mol.)

55. La molécula de hidrógeno se separa (se disocia) cuando es excitada internamente por 4.5 eV. Si se supone que esta molécula se comporta como un oscilador armónico que tiene una frecuencia angular clásica de $\omega = 8.28 \times 10^{14}$ rad/s, encuentre el número cuántico de vibración máximo para un estado por debajo de la energía de disociación de 4.5 eV.

56. La energía de disociación del hidrógeno molecular en estado fundamental es 4.48 eV, mientras que sólo se necesitan 3.96 eV para disociarlo cuando inicia en el primer estado excitado de vibración con $J = 0$. Con esta información, determine la profundidad de la función de energía potencial del H_2 molecular.

57. Demuestre que la energía iónica de cohesión de un sólido enlazado de forma iónica está dada por la ecuación 43.18. *Sugerencia:* empiece con la ecuación 43.17, y tome nota que $dU/dr = 0$ a $r = r_0$.

58. a) Demuestre que la fuerza ejercida sobre un ión en un sólido iónico se puede escribir como

$$F = -k_e \alpha \frac{e^2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{m-1}\right]$$

donde α es la constante de Madelung y r_0 es la separación de equilibrio. *Sugerencia:* comience con la ecuación 43.17 y note que $F = -dU/dr = 0$ en $r = r_0$. b) Imagine que un ión en el sólido se desplaza una pequeña distancia x desde r_0. Demuestre que el ion experimenta una fuerza restauradora $F = -Kx$, donde

$$K = \frac{k_e \alpha e^2}{r_0{}^3}(m - 1)$$

c) Use el resultado del inciso b) para encontrar la frecuencia de vibración de un ion de Na^+ en NaCl. Sea $m = 8$ y use el valor $\alpha = 1.747\,6$.

59. Una partícula se mueve con movimiento unidimensional por un campo en el que la energía potencial del sistema partícula-campo es

$$U(x) = \frac{A}{x^3} - \frac{B}{x}$$

donde $A = 0.150$ eV · nm^3 y $B = 3.68$ eV · nm. La forma general de esta función se muestra en la figura 43.11, donde x sustituye a r. a) Encuentre la posición de equilibrio estático x_0 de la partícula. b) Determine la profundidad U_0 de este pozo de potencial. c) Al moverse a lo largo del eje x, ¿cuál es la máxima fuerza hacia la dirección x negativa que experimenta la partícula?

60. Una partícula de masa m se mueve con movimiento unidimensional por un campo en el que la energía potencial del sistema partícula-campo es

$$U(x) = \frac{A}{x^3} - \frac{B}{x}$$

donde A y B son constantes con unidades apropiadas. La forma general de esta función se ilustra en la figura 43.11, donde x sustituye r. a) Encuentre la posición de equilibrio estático x_0 de la partícula en términos de m, A y B. b) Determine la profundidad U_0 de este pozo de potencial. c) Al moverse a lo largo del eje x, ¿cuál es la fuerza máxima hacia la dirección x negativa que experimenta la partícula?

61. Como alternativa para la ecuación 43.1, otro modelo útil para la energía potencial de una molécula diatómica es el potencial de Morse

$$U(r) = B\left[e^{-a(r-r_0)} - 1\right]^2$$

donde B, a y r_0 son parámetros empleados para ajustar la forma del potencial y su profundidad. a) ¿Cuál es la separación de equilibrio de los núcleos? b) ¿Cuál es la profundidad del pozo de potencial, es decir, la diferencia en energía entre el mínimo valor del potencial y su asíntota cuando r se aproxima al infinito? c) Si μ es la masa reducida del sistema de dos núcleos, ¿cuál es la frecuencia de vibración de la molécula diatómica en su estado fundamental? (Suponga que el potencial es casi parabólico alrededor del mínimo del pozo.) d) ¿Qué cantidad de energía es

necesario suministrar a la molécula en estado fundamental para separar los dos núcleos al infinito?

62. La función de distribución de Fermi-Dirac se puede escribir como

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT} + 1} = \frac{1}{e^{(E/E_F-1)T_F/T} + 1}$$

donde T_F es la *temperatura de Fermi,* definida de acuerdo con

$$k_BT_F \equiv E_F$$

Escriba una hoja de cálculo para calcular y graficar $f(E)$ con E/E_F a una temperatura T fija. Examine las curvas obtenidas para $T = 0.1T_F$, $0.2T_F$ y $0.5T_F$.

Respuestas a las preguntas rápidas

43.1 a) Van der Waals, b) iónico, c) hidrógeno y d) covalente.

43.2 c) La ecuación 43.7 muestra que la separación de energía entre estados adyacentes es proporcional a J, el número cuántico del estado más alto en la transición. Porque la frecuencia del fotón absorbido es proporcional a la separación de energía de los estados, las frecuencias están en la misma proporción que las separaciones de energía.

43.3 a) Esto es semejante a la pregunta rápida 43.2, excepto que todos los estados de vibración están separados por la misma diferencia de energía.

43.4 A: semiconductor; B: conductor; C: aislante

Oetzi, el Hombre de Hielo, encontrado en 1991 cuando un glaciar en Italia se descongeló lo suficiente para dejar al descubierto sus restos. Sus pertenencias, en particular sus herramientas, han servido para conocer como vivían las personas en la Era de Bronce. Para determinar hace cuánto tiempo vivió esta persona se utilizó la radiactividad. (Paul Hanny/Gamma Liaison)

44 Estructura nuclear

En el año de 1896 ocurre el nacimiento de la física nuclear, cuando el físico francés Antoine Henri Becquerel (1852-1908) descubrió la radiactividad en los compuestos del uranio. Este descubrimiento impulsó a los científicos a investigar los detalles de la radiactividad y, finalmente, la estructura del núcleo. El trabajo pionero desarrollado por Ernest Rutherford demostró que la radiación emitida por las sustancias radiactivas corresponde a tres tipos: rayos alfa, beta y gamma, clasificados en función de la naturaleza de sus cargas eléctricas y de su capacidad de penetrar la materia y de ionizar el aire. Experimentos posteriores demostraron que los rayos alfa son núcleos de helio, los beta electrones y los gamma fotones de alta energía.

En 1911 Rutherford, Hans Geiger y Ernest Marsden realizaron los experimentos de dispersión de partículas alfa que se describieron en la sección 42.2. Estos experimentos pusieron de manifiesto que el núcleo de un átomo se puede modelar como una masa puntual y una carga puntual y que la mayor parte de la masa atómica está contenida en el núcleo. Estudios consecutivos revelaron la presencia de un nuevo tipo de fuerza, la fuerza nuclear a corta distancia, que es predominante a distancias de separación entre partículas inferiores a aproximadamente 10^{-14} m, y de cero para distancias mayores.

En este capítulo se explican las propiedades y la estructura del núcleo atómico. Primero se describen las propiedades básicas de los núcleos, y a continuación las fuerzas nucleares y la energía de enlace, los modelos nucleares y el fenómeno de la

radiactividad. Por último, se exploran las reacciones nucleares y los diferentes procesos mediante los cuales decae el núcleo.

44.1 Algunas propiedades de los núcleos

Todos los núcleos están constituidos por dos tipos de partículas: protones y neutrones. La única excepción es el núcleo del hidrógeno ordinario, que está constituido por un solo protón. El núcleo atómico se describe con el número de protones y neutrones que contiene, utilizando las cantidades siguientes:

- el **número atómico** Z, que es igual al número de protones en el núcleo (conocidos a veces como el *número de carga*);
- el **número de neutrones** N, que es igual al número de neutrones en el núcleo;
- el **número de masa** $A = Z + N$ que es igual al número de **nucleones** (neutrones más protones) en el núcleo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 44.1

El número de masa no es la masa atómica

El número de masa A no debe confundirse con la masa atómica. El número de masa es un entero específico para un isótopo y carece de unidades; se trata simplemente de la cuenta del número de nucleones. La masa atómica tiene unidades y no es un entero, ya que se trata de un promedio de las masas de los isótopos de existencia natural de un elemento determinado.

Cuando se representan los núcleos, resulta conveniente utilizar el símbolo $^{A}_{Z}X$ para mostrar cuántos protones y neutrones están presentes, donde X representa el símbolo químico del elemento. Por ejemplo, $^{56}_{26}Fe$ (hierro) tiene número de masa 56 y número atómico 26; por lo tanto, contiene 26 protones y 30 neutrones. Cuando no existe la posibilidad de confusión, se omite el subíndice Z, ya que siempre es posible utilizar el símbolo químico para determinarlo. Por lo tanto, $^{56}_{26}Fe$, es lo mismo que ^{56}Fe, y también se puede identificar como "hierro-56".

Los núcleos de todos los átomos de un elemento particular contienen el mismo número de protones, pero con frecuencia contienen diferentes cantidades de neutrones. Los núcleos que así se relacionan se conocen como **isótopos.** Los isótopos de un elemento tienen el mismo valor Z pero valores N y A distintos.

La abundancia natural de isótopos puede variar de manera sustancial. Por ejemplo, $^{11}_{6}C$, $^{12}_{6}C$, $^{13}_{6}C$ y $^{14}_{6}C$ son cuatro isótopos del carbono. La abundancia natural del isótopo $^{12}_{6}C$ es de aproximadamente 98.9%, en tanto que la del isótopo $^{13}_{6}C$ es de sólo cerca de 1.1%. Algunos isótopos como el $^{11}_{6}C$ y $^{14}_{6}C$ no se obtienen de manera natural, pero es posible producirlos utilizando reacciones nucleares en el laboratorio o mediante rayos cósmicos.

Incluso el más simple de los elementos, el hidrógeno, tiene isótopos: $^{1}_{1}H$, el núcleo de hidrógeno ordinario; $^{2}_{1}H$, el deuterio; y $^{3}_{1}H$, el tritio.

Pregunta rápida 44.1 Para cada parte de esta pregunta rápida, elija de las siguientes respuestas: a) protones, b) neutrones, c) nucleones. **i)** ¿Los tres núcleos ^{12}C, ^{13}N y ^{14}O tienen el mismo número de qué tipo de partícula? **ii)** ¿Los tres núcleos de ^{12}N, ^{13}N y ^{14}N tienen el mismo número de qué tipo de partícula? **iii)** ¿Los tres núcleos ^{14}C, ^{14}N y ^{14}O tienen el mismo número de qué tipo de partícula?

Carga y masa

El protón tiene una carga positiva individual e, igual en magnitud a la carga $-e$ del electrón ($e = 1.6 \times 10^{-19}$C). El neutrón es eléctricamente neutro, como implica su nombre. Porque el neutrón no tiene carga, resultó difícil de detectar con los primeros aparatos experimentales y las primeras técnicas. Hoy día los neutrones se detectan con relativa facilidad utilizando centelladores plásticos.

Es posible medir las masas nucleares con gran precisión utilizando el espectrómetro de masas (véase la sección 29.3) y mediante el análisis de las reacciones nucleares. El protón tiene una masa de aproximadamente 1836 veces la del electrón, y las masas del protón y del neutrón son casi idénticas. La **unidad de masa atómica** u, se define de forma tal que la masa de un átomo de isótopo ^{12}C es exactamente 12 u, donde

TABLA 44.1

Masas de partículas seleccionadas en diferentes unidades de medición

Partícula	Masa kg	Masa u	Masa MeV/c^2
Protón	$1.672\,62 \times 10^{-27}$	1.0072 76	938.28
Neutrón	$1.674\,93 \times 10^{-27}$	1.0086 65	939.57
Electrón	$9.109\,39 \times 10^{-31}$	$5.4857\,9 \times 10^{-4}$	0.510999
Átomo $^1_1$H	$1.673\,53 \times 10^{-27}$	1.0078 25	938.783
Núcleo $^4_2$He	$6.644\,66 \times 10^{-27}$	4.0015 06	3727.38
Átomo $^{12}_6$C	$1.992\,65 \times 10^{-27}$	12.0000 00	11177.9

$1\text{ u} = 1.660\,539 \times 10^{-27}$ kg. Según esta definición, el protón y el neutrón tienen cada uno una masa de aproximadamente 1 u, y el electrón tiene una masa que es sólo una pequeña fracción de este valor. Las masas de estas partículas y otras importantes para los fenómenos explicados en este capítulo se proporcionan en la tabla 44.1.

Es interesante preguntarse cómo seis protones y seis neutrones, cada uno de ellos con una masa superior a 1 u, pueden combinar seis electrones entre sí para formar un átomo de carbono-12 con una masa de exactamente 12 u. El sistema de enlace del ^{12}C tiene una energía en reposo inferior (sección 39.8) que la correspondiente a seis protones y seis neutrones, todos ellos por separado. De acuerdo con la ecuación 39.24, $E_R = mc^2$, esta menor energía en reposo corresponde a una masa también menor para el sistema de enlace. La diferencia en masa explica la energía de union cuando las partículas se combinan para formar el núcleo. Este punto se explica con mayor detalle en la sección 44.2.

A menudo resulta conveniente expresar la unidad de masa atómica en función de su *equivalente de energía en reposo*. Para la unidad de masa atómica

$$E_R = mc^2 = (1.660\,539 \times 10^{-27}\text{ kg})(2.997\,92 \times 10^8\text{ m/s})^2 = 931.494\text{ MeV}$$

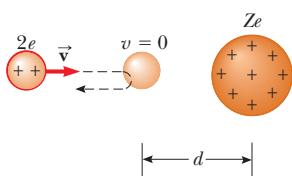
en donde se ha utilizado la conversión $1\text{ eV} = 1.602\,176 \times 10^{-19}$ J.

A partir de la expresión de la energía en reposo de la ecuación 39.24, los físicos nucleares a menudo expresan la masa en términos de la unidad MeV/c^2.

EJEMPLO 44.1 La unidad de masa atómica

Use el número de Avogadro para demostrar que $1\text{ u} = 1.66 \times 10^{-27}$ kg.

SOLUCIÓN

Conceptualizar A partir de la definición de mol dada en la sección 19.5, se sabe que exactamente 12 g (= 1 mol) de ^{12}C contiene el número de átomos de Avogadro.

Categorizar Se evalúa la unidad de masa atómica que se introdujo en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre la masa m de un átomo de ^{12}C:

$$m = \frac{0.012\text{ kg}}{6.02 \times 10^{23}\text{ átomos}} = 1.99 \times 10^{-26}\text{ kg}$$

Puesto que se define que un átomo de ^{12}C tiene una masa de 12.0 u, divida entre 12.0 para encontrar la masa equivalente a 1 u:

$$1\text{ u} = \frac{1.99 \times 10^{-26}\text{ kg}}{12.0} = 1.66 \times 10^{-27}\text{ kg}$$

El tamaño y la estructura de los núcleos

Figura 44.1 Una partícula alfa en una colisión de frente con un núcleo de carga Ze. Debido a la repulsión de Coulomb que se presenta entre cargas del mismo signo, la partícula alfa se acerca hasta una distancia d del núcleo, la cual se conoce como la distancia de acercamiento más próximo.

En los experimentos de dispersión de Rutherford se lanzaban núcleos con carga positiva de átomos de helio (partículas alfa) contra una delgada laminilla de metal. Conforme las partículas alfa pasaban a través de ella, a menudo pasaban cerca de un núcleo metálico. Debido a las cargas positivas presentes tanto en las partículas incidentes como en los núcleos, las partículas se desviaban de sus trayectorias en línea recta debido a la fuerza de repulsión de Coulomb.

Rutherford aplicó la conservación de energía en un sistema aislado para determinar una expresión para la distancia de separación d a la cual una partícula alfa que se acerca de frente a un núcleo es lanzada hacia atrás por la repulsión de Coulomb. En una colisión frontal, la energía cinética de la partícula que está por llegar debe convertirse completamente en energía potencial eléctrica del sistema partícula alfa–núcleo cuando se detiene un momento en el punto de acercamiento más próximo (la configuración final del sistema) antes de desplazarse hacia atrás a lo largo de la misma trayectoria (figura 44.1). Al aplicar el principio de conservación de energía al sistema

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + k_e \frac{q_1 q_2}{d}$$

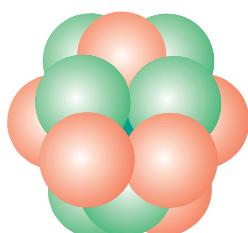
donde m es la masa de la partícula alfa y v es la rapidez inicial. resolviendo para d, obtiene

$$d = 2k_e \frac{q_1 q_2}{mv^2} = 2k_e \frac{(2e)(Ze)}{mv^2} = 4k_e \frac{Ze^2}{mv^2}$$

y Z es el número atómico del núcleo objetivo. De esta expresión, Rutherford descubrió que las partículas alfa se acercaban a los núcleos hasta una distancia de 3.2×10^{-14} m cuando la laminilla estaba hecha de oro. Debido a eso, el radio de los núcleos de oro deben ser inferiores a este valor. De los resultados de sus experimentos de dispersión, Rutherford llegó a la conclusión de que la carga positiva en un átomo está concentrada en una pequeña esfera que él llamó núcleo, y cuyo radio no es superior a aproximadamente 10^{-14} m.

Porque en la física nuclear estas minúsculas dimensiones son comunes, una unidad de longitud conveniente que se usa con frecuencia es el femtómetro (fm), que a veces es conocido como **fermi** y que se define

$$1 \text{ fm} \equiv 10^{-15} \text{ m}$$

Figura 44.2 Es posible modelar un núcleo como un agrupamiento de esferas muy apretadas donde cada una de las esferas es un nucleón.

A principios de los años veinte se sabía que el núcleo de un átomo contiene Z protones y tiene una masa casi equivalente a la de A protones, donde en promedio $A \approx 2Z$ para el caso de núcleos ligeros ($Z \leq 20$) y $A > 2Z$ para núcleos más pesados. Para explicar la masa nuclear, Rutherford propuso que cada núcleo debe también contener $A - Z$ partículas neutras, que llamó neutrones. En el año de 1932, el físico británico James Chadwick (1891-1974) descubrió el neutrón, razón por la cual se le otorgó el premio Nobel.

A partir de los experimentos de dispersión de Rutherford, otros experimentos han demostrado que la mayor parte de los núcleos son aproximadamente esféricos y tienen un radio promedio dado por

Radio del núcleo ▶

$$r = r_0 A^{1/3} \quad \textbf{(44.1)}$$

donde r_0 es una constante con un valor de 1.2×10^{-15} m y A es el número de masa. En vista de que el volumen de una esfera es proporcional al cubo de su radio, se concluye de la ecuación 44.1 que el volumen de un núcleo (que se supone esférico) es directamente proporcional a A, que es el número total de nucleones. Esta proporcionalidad sugiere que *todos los núcleos tienen prácticamente la misma densidad.* Cuando los nucleones se combinan para formar un núcleo, lo hacen como si se tratara de esferas muy apretadas (figura 44.2). Este hecho ha conducido a una analogía entre el núcleo y una gota de líquido, en la cual la densidad es independiente de su tamaño. En la sección 44.3 se explica el modelo de gota líquida del núcleo.

EJEMPLO 44.2 **Volumen y densidad de un núcleo**

Considere un núcleo con número de masa A.

A) Encuentre una expresión aproximada para la masa del núcleo.

SOLUCIÓN

Categorizar Suponga que A es lo suficientemente grande como para imaginar que el núcleo es esférico.

Analizar La masa del protón es aproximadamente igual a la del neutrón. Por lo tanto, si la masa de una de estas partículas es m, la masa del núcleo es aproximadamente Am.

B) Encuentre una expresión para el volumen de este núcleo en términos de A.

SOLUCIÓN

Suponga que el núcleo es esférico y use la ecuación 44.1:

$$1)\quad V_{\text{núcleo}} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi {r_0}^3 A$$

C) Encuentre un valor numérico para la densidad de este núcleo.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 1.1 y sustituya la ecuación 1):

$$\rho = \frac{m_{\text{núcleo}}}{V_{\text{núcleo}}} = \frac{Am}{\tfrac{4}{3}\pi {r_0}^3 A} = \frac{3m}{4\pi {r_0}^3}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\rho = \frac{3(1.67\times10^{-27}\ \text{kg})}{4\pi(1.2\times10^{-15}\ \text{m})^3} = 2.3\times10^{17}\ \text{kg/m}^3$$

Finalizar La densidad nuclear es aproximadamente 2.3×10^{14} veces la densidad del agua ($\rho_{\text{agua}} = 1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$).

¿Que pasaría sí? ¿Y si la Tierra se pudiera comprimir hasta que tuviese esta densidad? ¿Qué tan grande sería?

Respuesta Ya que esta densidad es muy grande, se predice que la Tierra de esta densidad sería muy pequeña.

Use la ecuación 1.1 y la masa de la Tierra para encontrar el volumen de la Tierra comprimida:

$$V = \frac{M_E}{\rho} = \frac{5.98\times10^{24}\ \text{kg}}{2.3\times10^{17}\ \text{kg/m}^3} = 2.6\times10^{7}\ \text{m}^3$$

A partir de este volumen, encuentre el radio:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad\rightarrow\quad r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} = \left[\frac{3(2.6\times10^{7}\ \text{m}^3)}{4\pi}\right]^{1/3}$$

$$= 1.8\times10^{2}\ \text{m}$$

¡Una Tierra de este radio de hecho es una Tierra pequeña!

Estabilidad nuclear

Puede esperar que la considerable fuerza de Coulomb de repulsión entre los protones de un núcleo estrechamente empacados origine que el núcleo flote separado.

Como esto no ocurre, existe una fuerza de atracción que actúa en sentido opuesto. La fuerza nuclear es de atracción a muy corta distancia (aproximadamente 2 fm) que actúa entre todas las partículas nucleares. Los protones se atraen entre sí mediante la fuerza nuclear y, al mismo tiempo, se repelen debido a la fuerza de Coulomb. La fuerza nuclear también actúa entre pares de neutrones y entre protones y neutrones. La fuerza nuclear domina la fuerza de repulsión de Coulomb dentro del núcleo (a corta distancia), por lo que pueden existir núcleos estables.

La fuerza nuclear es independiente de la carga. En otras palabras, las fuerzas asociadas con las interacciones entre protón–protón, protón–neutrón y neutrón–neutrón son

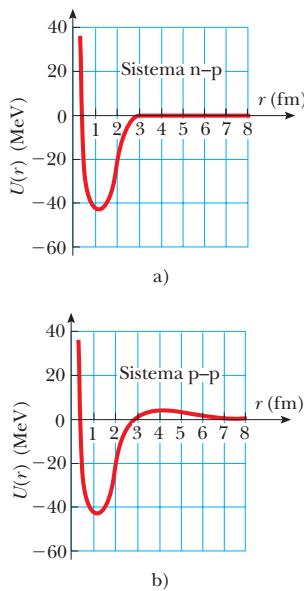



Figura 44.3 a) Energía potencial en función de la distancia de separación en un sistema neutrón–protón. b) Energía potencial en función de la distancia de separación para un sistema protón–protón. La diferencia entre ambas curvas se debe a la fuerte repulsión de Coulomb en el caso de la interacción protón–protón. La altura del pico de la curva protón–protón se ha exagerado en un factor de 10, a fin de poder desplegar la diferencia entre curvas a esta escala.

iguales, independientemente de la fuerza Coulomb de repulsión adicional debida a la interacción protón–protón.

La evidencia del intervalo limitado de fuerzas nucleares proviene de experimentos de dispersión y de estudios de energías de enlace nuclear. El corto alcance de la fuerza nuclear se muestra en la gráfica de energía potencial neutrón–protón (n–p) de la figura 44.3a, que se obtiene dispersando neutrones de un objetivo con hidrógeno. La profundidad del pozo de energía potencial n–p es de 40 a 50 MeV, y existe un poderoso componente de repulsión que impide que los nucleones se acerquen a distancias menores de 0.4 fm.

La fuerza nuclear no afecta a los electrones, lo que permite que los más energéticos sirvan como sondas parecidas a puntos de los núcleos. La independencia de la carga que tiene la fuerza nuclear también significa que la diferencia principal entre las interacciones n–p y p–p es que la energía potencial p–p está constituida por la *sobreposición* de interacciones nucleares y de Coulomb, según se muestra en la figura 44.3b. A distancias inferiores a 2 fm, tanto la energía potencial p–p como la n–p son prácticamente idénticas, pero para distancias de 2 fm o mayores, el potencial p–p se encuentra con una barrera de energía positiva con un máximo en 4 fm.

La existencia de la fuerza nuclear da como resultado aproximadamente 270 núcleos estables; se han observado cientos de núcleos diferentes, pero no son estables. En la figura 44.4 se muestra una gráfica del número de neutrones N en función del número atómico Z para varios núcleos estables. Los núcleos estables han sido representados por puntos azules, mismos que están situados en un estrecho intervalo conocido como *línea de estabilidad*. Observe que los núcleos estables ligeros contienen un número igual de protones y de neutrones; es decir, $N = Z$. También, advierta que en los núcleos estables pesados el número de neutrones excede al número de protones; por encima de $Z = 20$, la línea de estabilidad se desvía hacia arriba en comparación con la línea que representa $N = Z$. Es posible comprender esta desviación si se reconoce que, conforme se incrementa el número de protones, la fuerza de Coulomb aumenta, lo que tiende a romper y separar el núcleo. Como resultado, son necesarios más neutrones para mantener al núcleo estable, ya que estos últimos solamente experimentan fuerza nuclear de atracción. A final de cuentas, las fuerzas de repulsión de Coulomb entre los protones no pueden ser compensadas mediante la adición de más neutrones. Esto se presenta cuando $Z =$

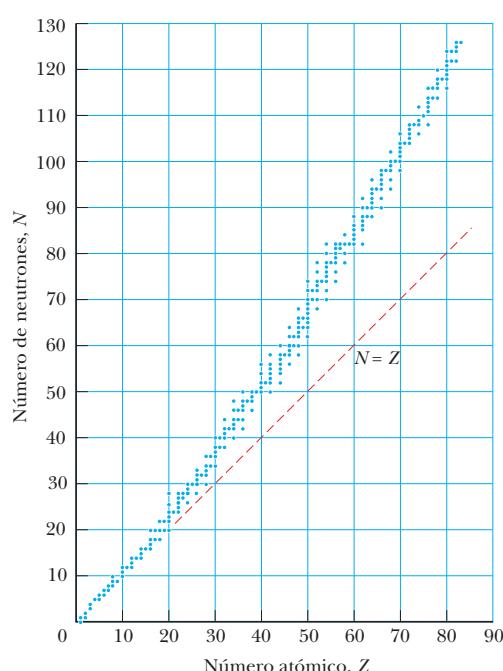



Figura 44.4 Número de neutrones N en función del número atómico Z para núcleos estables (puntos de color azul). Estos núcleos se encuentran en una banda angosta conocida como línea de estabilidad. La línea discontinua corresponde al estado $N = Z$.

83, lo que significa que aquellos elementos que contienen más de 83 protones no tienen núcleos estables.

44.2 Energía de enlace nuclear

Como se mencionó en el análisis del ^{12}C de la sección anterior, la masa total de un núcleo es inferior a la suma de las masas de sus nucleones individuales. Por lo tanto, **la energía de reposo del sistema ligado (el núcleo) es inferior a la energía de reposo combinada de los nucleones independientes.** Esta diferencia en energía se conoce como la **energía de enlace** del núcleo y se puede interpretar como la energía que debe agregarse a un núcleo para que se separe en sus componentes. Por lo tanto, a fin de poder separar un núcleo en protones y neutrones, debe entregársele energía al sistema.

La correspondencia de la conservación de energía y la equivalencia einsteniana de masa–energía muestran que la energía de enlace E_b de cualquier núcleo de masa M_A es

$$E_b\,(\text{MeV}) = [ZM(\text{H}) + Nm_n - M(^{A}_{Z}\text{X})] \times 931.494\ \text{MeV/u} \qquad \textbf{(44.2)}$$

◀ Energía de enlace de un núcleo

donde M(H) es la masa atómica del átomo de hidrógeno neutro, $M(^{A}_{Z}\text{X})$ representa la masa atómica de un átomo del isótopo $^{A}_{Z}$X, m_n es la masa del neutrón y todas las masas están en unidades de masa atómica. La masa de los Z electrones incluidos en M(H) se cancelan con la masa de los Z electrones incluidos en el término $M(^{A}_{Z}\text{X})$ dentro de una pequeña diferencia asociada con la energía de enlace atómico de los electrones. Porque las energías de enlace atómico por lo general son de varios electrón volts y las energías de enlace nuclear son de muchos millones de electrón volts, esta diferencia es despreciable.

En la figura 44.5 se muestra una gráfica de la energía de enlace por cada nucleón E_b/A como una función del número de masa A para diferentes núcleos estables. Observe que la curva de la figura tiene un pico en las cercanías de $A = 60$. Es decir, los núcleos que tienen números de masa mayores o menores de 60 no están unidos con tanta fuerza como aquellos cercanos a la mitad de la tabla periódica. La reducción de la energía de enlace para nucleones en $A > 60$ implican que se liberará energía cuando el núcleo pesado se divida o *se fisione*, en dos núcleos más ligeros. Se libera energía en la fisión porque los nucleones de cada núcleo producido están unidos más estrechamente entre sí que los nucleones del núcleo original. En el capítulo 45 se verán en detalle los importantes

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 44.2
Energía de enlace

Cuando se combinan nucleones individuales para formar un núcleo, la energía del sistema se ve reducida, por lo que el cambio en energía es negativo. El valor absoluto de este cambio se denomina energía de enlace. Esta diferencia en el signo puede dar origen a confusión. Por ejemplo, un *incremento* en la energía de enlace corresponde a una *reducción* en la energía del sistema.

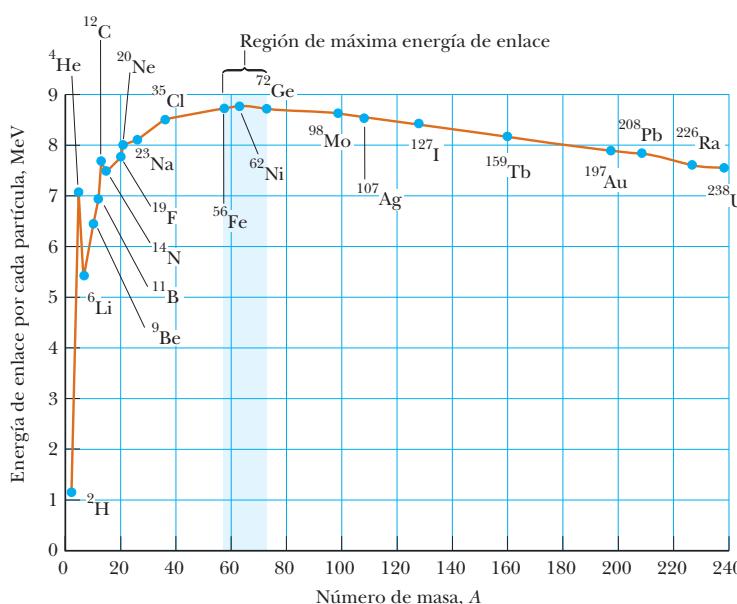



Figura 44.5 Energía de enlace por cada nucleón en función del número de masa para núcleos que se hallan a lo largo de la línea de estabilidad de la figura 44.4. Algunos núcleos representativos se muestran como puntos azules con una leyenda. (Los núcleos a la derecha de ^{208}Pb son inestables. La curva representa la energía de enlace para los isótopos más estables.)

procesos de la fisión y un segundo proceso fundamental de la *fusión*, en el que la energía es liberada al combinar núcleos ligeros.

Otra característica importante de la figura 44.5 es que la energía de enlace por nucleón es aproximadamente constante y de casi 8 MeV por cada nucleón para todos los núcleos con $A > 50$. Para estos núcleos se dice que las fuerzas nucleares están *saturadas*, lo que quiere decir que, en la estructura empacada en forma apretada que se muestra en la figura 44.2, un nucleón en particular puede servir para formar uniones atractivas con sólo un número limitado de otros nucleones.

La figura 44.5 aporta el discernimiento necesario respecto a las incógnitas fundamentales del origen de los elementos químicos. En las primeras eras del Universo, los únicos elementos existentes eran el hidrógeno y el helio. Bajo la fuerza gravitacional se aglutinaron las nubes de gas cósmico formando las estrellas. Conforme éstas se hacen viejas, producen elementos más pesados a partir de los más ligeros de su interior, empezando por fusionar los átomos de hidrógeno para formar helio. Este proceso continúa durante la vida de la estrella, generando átomos con números atómicos cada vez más grandes, hasta del pico de la curva mostrada en la figura 44.5.

El núclido $^{62}_{28}$Ni tiene la energía de enlace más grande por nucleón con un valor de 8.794 5 MeV por nucleón. Para crear elementos con números de masa superiores a 62 se necesita energía adicional en vista de sus menores energías de enlace por nucleón. Esta energía proviene de la explosión de supernovas que se presenta al finalizar la vida de algunas estrellas grandes. Debido a eso, todos los átomos pesados que existen en nuestro cuerpo fueron producidos por la explosión de estrellas ancestrales. ¡Literalmente estamos hechos de polvo de estrellas!

44.3 Modelos nucleares

Los detalles de las fuerzas nucleares siguen siendo un área de investigación activa. Se han propuesto varios modelos nucleares, resultando éstos útiles para la comprensión de las características generales de los datos experimentales nucleares y de los mecanismos responsables para la energía de enlace. Dos de estos modelos, el modelo de gota de líquido y el modelo de capa se explican enseguida.

Modelo de gota de líquido

En el año de 1936 Bohr propuso tratar los nucleones como si fueran moléculas en una gota de líquido. En este **modelo de gota de líquido,** los nucleones interactúan con fuerza entre sí y se someten a colisiones frecuentes conforme zigzaguean de un lugar a otro dentro del núcleo. Este movimiento de zigzagueo es similar al movimiento de agitación térmica de las moléculas en una gota de líquido.

Cuatro efectos principales tienen influencia en la energía de enlace del núcleo en el modelo de gota de líquido:

- **El efecto de volumen.** La figura 44.5 muestra que, para $A > 50$, la energía de enlace por cada nucleón es aproximadamente constante, esto indica que la fuerza nuclear de un nucleón dado se debe únicamente a unos cuantos de sus vecinos más cercanos y no a todos los otros nucleones que existen en el núcleo. En tal caso, en promedio, la energía de enlace asociada con la fuerza nuclear para cada nucleón es la misma en todos los núcleos: asociada a la interacción con unos cuantos vecinos. Esta propiedad indica que la energía de enlace total del núcleo es proporcional a A y, por lo tanto, al volumen nuclear. La contribución de la energía de enlace a todo el núcleo es igual a C_1A, donde C_1 es una constante ajustable que puede ser determinada si se hace coincidir la predicción de un modelo con los resultados experimentales.
- **El efecto superficie.** Porque los nucleones de la superficie de la gota tienen menos vecinos que los del interior, los nucleones superficiales reducen la energía de enlace en una cantidad proporcional a su número. Ya que el número de nucleones superficiales es proporcional al área de la superficie $4\pi r^2$ del núcleo (modelado como esfera), y porque $r^2 \propto A^{2/3}$ (ecuación 44.1), el término de la superficie se puede expresar de la forma $-C_2A^{2/3}$, donde C_2 es una segunda constante ajustable.
- **El efecto de repulsión de Coulomb.** Cada protón repele a los otros protones del núcleo. La energía potencial correspondiente por cada par de protones de interacción

es igual a $k_e e^2/r$, siendo k_e la constante de Coulomb. La energía potencial eléctrica total es equivalente al trabajo requerido para ensamblar Z protones, inicialmente separados por una distancia infinita, en una esfera de volumen V. Esta energía es proporcional al número de pares de protones $Z(Z-1)/2$ y es inversamente proporcional al radio nuclear. En consecuencia, la reducción en la energía de enlace resultante debida al efecto de Coulomb es igual a $-C_3 Z(Z-1)/A^{1/3}$, donde C_3 es también otra constante ajustable.

- **El efecto de simetría.** Otro efecto que reduce la energía de enlace está relacionado con la simetría del núcleo en función de valores N y Z. Para valores pequeños de A, los núcleos estables se inclinan a tener $N \approx Z$. Cualquier asimetría de importancia entre N y Z para núcleos ligeros reduce la energía de enlace y hace que el núcleo sea menos estable. Para A más grandes, el valor de N para núcleos estables naturalmente es mayor que Z. Este efecto puede ser descrito por un término de energía de enlace de la forma $-C_4(N-Z)^2/A$, siendo C_4 otra constante ajustable.[1] Para A pequeñas, cualquier asimetría de importancia entre los valores de N y de Z hace que este término sea relativamente grande y reduzca la energía de enlace. Para valores A grandes, este término reduce su valor de manera que causa poco efecto en la energía de enlace global.

Si suma estas contribuciones, llega a una expresión para la energía de enlace total.

$$E_b = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \tag{44.3}$$

◄ Fórmula semiempírica para la energía de enlace

Esta ecuación, denominada a menudo la **fórmula semiempírica para la energía de enlace,** contiene cuatro constantes que deben ajustarse para adecuar la expresión teórica con los datos experimentales. Para núcleos con $A \geq 15$, las constantes tienen los siguientes valores:

$$C_1 = 15.7 \text{ MeV} \qquad C_2 = 17.8 \text{ MeV}$$
$$C_3 = 0.71 \text{ MeV} \qquad C_4 = 23.6 \text{ MeV}$$

La ecuación 44.3, además de estas constantes, se ajusta bastante bien a los valores de las masas nucleares conocidas. Sin embargo, el modelo de gota de líquido no explica algunos de los detalles más delicados de la estructura nuclear, como por ejemplo las reglas de estabilidad y la cantidad de movimiento angular. La ecuación 44.3 es una ecuación *teórica* para la energía de enlace, a partir del modelo de la gota de líquido, donde las energías de enlace calculadas con la ecuación 44.2 son valores *experimentales* de acuerdo con medidas de masa.

EJEMPLO 44.3 Aplicación de la fórmula semiempírica de energía de enlace

El núcleo ^{64}Zn tiene una energía de enlace tabulada de 559.09 MeV. Use la fórmula semiempírica de energía de enlace para generar una estimación teórica de la energía de enlace para este núcleo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine juntar los protones y neutrones separados para formar un núcleo de ^{64}Zn. La energía en reposo del núcleo es menor que la energía en reposo de las partículas individuales. La diferencia en energía en reposo es la energía de enlace.

Categorizar A partir del texto del problema, se sabe que se aplica el modelo de gota de líquido. Este ejemplo es un problema de sustitución.

[1] El modelo de gota de líquido *describe* el hecho de que los núcleos pesados tienen $N > Z$. El modelo de capa que se ve después *explica* cómo es posible esto utilizando un argumento físico.

Para el núcleo de ^{64}Zn, $Z = 30$, $N = 34$ y $A = 64$. Evalúe los cuatro términos de la fórmula semiempírica de la energía de enlace:

$$C_1A = (15.7 \text{ MeV})(64) = 1005 \text{ MeV}$$

$$C_2A^{2/3} = (17.8 \text{ MeV})(64)^{2/3} = 285 \text{ MeV}$$

$$C_3\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = (0.71 \text{ MeV})\frac{(30)(29)}{(64)^{1/3}} = 154 \text{ MeV}$$

$$C_4\frac{(N-Z)^2}{A} = (23.6 \text{ MeV})\frac{(34-30)^2}{64} = 5.90 \text{ MeV}$$

Sustituya estos valores en la ecuación 44.3:

$$E_b = 1005 \text{ MeV} - 285 \text{ MeV} - 154 \text{ MeV} - 5.90 \text{ MeV} = 560 \text{ MeV}$$

Este valor difiere del valor tabulado en menos de 0.2%. Note cómo los tamaños de los términos disminuyen del primero al cuarto término. El cuarto término es particularmente pequeño para este núcleo, que no tiene un número excesivo de neutrones.

El modelo en capas

El modelo de gota de líquido describe relativamente bien el comportamiento general de las energías de enlace nuclear. De cualquier modo, al estudiar las energías de enlace con mayor detalle, aparecen las siguientes características:

- La mayor parte de los núcleos estables tiene un valor par para A. Además, sólo ocho núcleos estables tienen valores impares tanto para Z como para N.
- La figura 44.6 muestra una gráfica de la diferencia entre la energía de enlace por cada nucleón calculada según la ecuación 44.3 y la energía de enlace observada. Existe evidencia en los datos de picos uniformemente espaciados no descritos por la fórmula semiempírica de la energía de enlace. Los picos se presentan en valores de N o de Z, que se conocen como **números mágicos:**

Números mágicos ►

$$Z \text{ o } N = 2, 8, 20, 28, 50, 82 \quad \textbf{(44.4)}$$

- Estudios de alta precisión de los radios nucleares muestran desviaciones con la expresión simple de la ecuación 44.1. Las gráficas de los datos experimentales muestran picos en la curva del radio en función de N en valores de N que corresponden a los números mágicos.
- Un grupo de *isótonos* es un grupo de núcleos que tienen el mismo valor de N y diferentes valores de Z. Cuando se grafica el número de isótonos estables en función de N, se presentan picos en la gráfica, otra vez en los números mágicos de la ecuación 44.4.

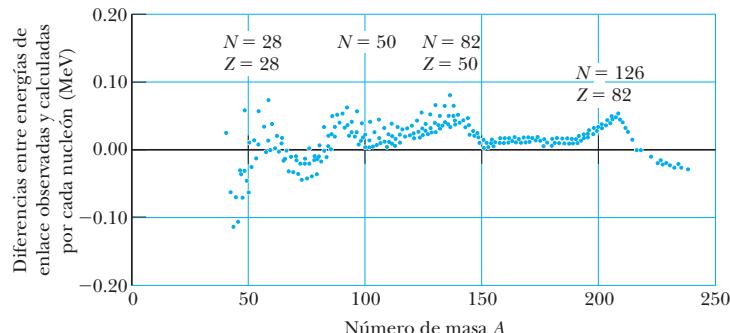



Figura 44.6 Diferencia entre las energías de enlace observadas en comparación con las calculadas según el modelo de gota de líquido como una función de A. La presencia de picos periódicos en los datos experimentales sugiere un comportamiento que el modelo de gota de líquido no contempla. (Adaptado de R. A. Dunlap, *The Physics of Nuclei and Particles,* Brooks/Cole, Belmont, CA, 2004.)

- Otras varias mediciones nucleares muestran un comportamiento anómalo en los números mágicos.[2]

Estos picos en las gráficas de datos experimentales recuerdan los picos de la figura 42.20 relativos a la energía de ionización de los átomos, que se presentan debido a la estructura en capas del átomo. El **modelo en capas** del núcleo, también conocido como **modelo de partículas independientes,** fue desarrollado de forma independiente por dos científicos alemanes, María Goeppert-Mayer en 1949 y Hans Jensen en 1950, Goeppert-Mayer y Jensen compartieron el premio Nobel en Física en 1963. En este modelo se supone que cada nucleón existe en una capa similar a la capa atómica de un electrón. Los nucleones existen en estados de energía cuantizados, y existen pocas colisiones entre ellos. Evidentemente las hipótesis de este modelo difieren de manera importante de las correspondientes para el modelo de la gota de líquido.

Los estados cuantizados ocupados por los nucleones pueden describirse mediante un juego de números cuánticos. Tanto el protón como el neutrón tienen un espín de $\frac{1}{2}$, por lo tanto se puede aplicar el principio de exclusión para describir los estados permitidos (como se hizo para los electrones en el capítulo 42). Es decir, cada estado puede contener sólo dos protones (o dos neutrones) con espines *opuestos* (figura 44.7). Los protones tienen un conjunto de estados permitidos y difieren de los neutrones porque las dos especies se mueven en pozos de potencial diferentes. Los niveles de energía del protón están más separados que los niveles del neutrón, porque los protones experimentan una sobreposición de la fuerza de Coulomb y de la fuerza nuclear, en tanto que los neutrones sólo están sujetos a la fuerza nuclear.

Un factor que tiene influencia sobre las características observadas de los estados fundamentales nucleares es el efecto *espín–órbita–nuclear.* La interacción espín–órbita entre el espín de un electrón y su movimiento orbital en un átomo genera el doblete del sodio que se analizó en la sección 42.6 y que en su origen es magnético. En contraste, el efecto espín–órbita para los nucleones en un núcleo es provocado por la fuerza nuclear. Es mucho más poderoso que en el caso atómico, y tiene signo opuesto. Cuando se toman en consideración estos efectos, el modelo en capas es capaz de explicar los números mágicos observados.

El modelo en capas ayuda a comprender por qué aquellos núcleos que contienen un número par de protones y de neutrones son más estables que otros núcleos. (Existen 160 isótopos estables par–par). Cualquier estado particular está lleno si contiene dos protones (o dos neutrones) con espines opuestos. Se puede agregar un protón o neutrón adicional al núcleo sólo si se incrementa la energía del núcleo. Este incremento en la energía genera un núcleo que es menos estable que el original. Una inspección cuidadosa de los núcleos estables muestra que la mayoría tiene una estabilidad especial cuando sus nucleones se combinan por pares, lo que da como resultado un momentum angular total igual a cero.

El modelo en capas también ayuda a comprender por qué los núcleos se inclinan a tener más neutrones que protones. Como se ve en la figura 44.7, los niveles de energía de los protones son más elevados que para los neutrones, debido a la energía adicional asociada con la repulsión de Coulomb. Este efecto se hace más pronunciado conforme se incrementa Z. Como resultado, conforme Z aumenta y se llenan estados más elevados, el nivel del protón para un número cuántico dado tendrá mucha más energía que el nivel de neutrones con el mismo número cuántico. De hecho, resultará incluso superior en energía a los niveles de neutrones correspondientes a números cuánticos más elevados. Por esto, es más favorable energéticamente que el núcleo se forme con neutrones de niveles inferiores de energía en vez de protones con elevados niveles de energía, por lo que el número de neutrones es mayor que el número de protones.

Se han desarrollado y se seguirán desarrollando modelos del núcleo más complejos. Por ejemplo, el *modelo colectivo* combina características de los modelos de gota de líquido y de capa. El desarrollo de modelos teóricos del núcleo sigue siendo un campo activo de investigación.

[2] Para detalles adicionales véase el capítulo 5 *The Physics of Nuclei and Particles,* de R. A. Dunlap (Belmont, CA: Brooks/Cole, 2004).

Cortesía de Louise Barker/AIP Niels.

MARÍA GOEPPERT-MAYER
Científica alemana (1906-1972)
Goeppert-Mayer nació y se educó en Alemania. Se le conoce mejor por su desarrollo del modelo en capas (modelo de partículas independientes) del núcleo, mismo que fue publicado en 1950. Un modelo similar fue desarrollado de manera simultánea por Hans Jensen, otro científico alemán. A Goeppert-Mayer y a Jensen se les otorgó el premio Nobel de física en 1963 por su trabajo extraordinario para la comprensión de la estructura del núcleo.

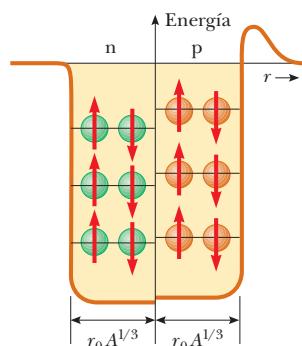
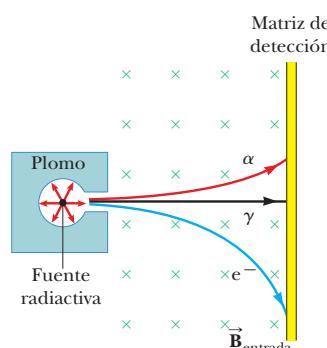
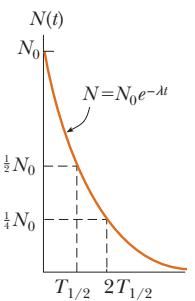



Figura 44.7 Pozo de potencial cuadrado que contiene doce nucleones. Los círculos naranja representan los protones y los verdes los neutrones. Los niveles de energía para los protones son ligeramente más elevados que los correspondientes a los neutrones, debido a la energía potencial eléctrica asociada con el sistema de protones. La diferencia en los niveles se incrementa conforme Z aumenta. Observe que sólo dos nucleones de espines opuestos pueden ocupar un nivel dado, según requiere el principio de exclusión.

MARIE CURIE
Científica polaca (1867-1934)
En el año de 1903 Marie Curie compartió el premio Nobel en Física con su esposo Pierre y con Becquerel por sus estudios sobre las sustancias radiactivas. En 1911 se le otorgó otro premio Nobel en Química por el descubrimiento del radio y del polonio. "Sigo creyendo que las ideas que en aquel entonces nos guiaron, son las únicas que pueden conducir a un progreso social verdadero. No podemos esperar construir un mundo mejor sin mejorar al individuo. Para esta finalidad, cada uno de nosotros debe trabajar para lograr su propio desarrollo óptimo, aceptando al mismo tiempo su parte de responsabilidad en la vida general de la humanidad."

44.4 Radiactividad

En el año de 1896 Henri Becquerel descubrió por accidente que los cristales de sulfato de potasio de uranilo emiten una radiación invisible que puede oscurecer una placa fotográfica cuando está protegida de la luz. Después de una serie de experimentos, llegó a la conclusión de que la radiación que emitían los cristales era de un nuevo tipo, que no requiere de estimulación externa y que era tan penetrante que podía oscurecer placas fotográficas protegidas y ionizar gases. Este proceso de la emisión espontánea de la radiación por el uranio pronto se conocería como **radiactividad.**

Experimentos consecutivos, realizados por otros científicos, demostraron que existían otras sustancias que eran más radiactivas. Las investigaciones de mayor importancia de ese tipo fueron realizadas por Marie y Pierre Curie. Después de varios años de procesos químicos de separación cuidadosos y laboriosos efectuados sobre toneladas de pechblenda, un mineral radiactivo, los Curie pudieron informar del descubrimiento de dos elementos antes desconocidos y ambos radiactivos. Éstos fueron el polonio y el radio. Experimentos adicionales, incluyendo el notable trabajo de Rutherford sobre la dispersión de partículas alfa, sugirieron que la radiactividad es el resultado del *decaimiento*, es decir, la desintegración de núcleos inestables.

En la sustancias radiactivas se presentan tres tipos de decaimiento: decaimiento alfa (α), en el que las partículas emitidas son núcleos de ^{4}He; decaimiento beta (β), en el que las partículas emitidas son electrones o positrones; y el decaimiento gamma (γ), en el que las partículas emitidas son fotones de alta energía. Un **positrón** es una partícula parecida al electrón en todos los aspectos, excepto que el positrón tiene una carga $+e$. (El positrón es *antipartícula* del electrón; véase la sección 46.2.) El símbolo e^- se usa para designar un electrón y el e^+ designa un positrón.

Es posible distinguir entre estas tres formas de radiación utilizando el esquema que se ilustra en la figura 44.8. La radiación a causa de muestras radiactivas que emiten los tres tipos de partículas se dirige dentro de una región en donde existe un campo magnético. El haz de radiaciones se divide en tres componentes, dos de ellos que se desvían en direcciones opuestas y el tercero que no cambia de trayectoria. Esta simple observación muestra que la radiación del haz no desviado no contiene una carga (el rayo gamma); el componente desviado hacia arriba corresponde a partículas cargadas positivamente (partículas alfa) y el componente desviado hacia abajo corresponde a partículas de carga negativa (e^-). Si el haz contiene un positrón (e^+), éste será desviado hacia arriba como partícula alfa pero siguiendo una trayectoria diferente debida a su menor masa.

Los tres tipos de radiación tienen poderes de penetración completamente diferentes. Las partículas alfa apenas penetran una hoja de papel, las partículas beta penetran unos cuantos milímetros de aluminio y los rayos gamma penetran varios centímetros de plomo.

El proceso de decaimiento es de naturaleza probabilística y es posible expresarlo mediante cálculos estadísticos en el caso de una sustancia radiactiva de tamaño macroscópico, que contiene un gran número de núcleos radiactivos. Para grandes cantidades la rapidez a la cual se presenta un proceso particular de decaimiento en una muestra es proporcional al número de núcleos radiactivos presentes (es decir, el número de núcleos que aún no

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 44.3
¿Rayos o partículas?
En los primeros momentos de la historia de la física nuclear se utilizó el término *radiación* para describir emanaciones de de núcleos radiactivos. Ahora se sabe que la radiación alfa y la radiación beta involucran la emisión de partículas con una energía en reposo diferente de cero. Aun cuando no se trata de ejemplos de radiación electromagnética, el uso del término *radiación* para los tres tipos de emisiones está profundamente enraizado en el lenguaje, así como en la comunidad científica.

Figura 44.8 La radiación a causa de las fuentes radiactivas pueden separarse en tres componentes aplicando un campo magnético para desviar las partículas con carga. El detector colocado a la derecha del esquena registra los sucesos. El rayo gamma no es desviado por el campo magnético.

Figura 44.9

Gráfica de la ley de decaimiento exponencial para núcleos radiactivos. El eje vertical representa la cantidad de núcleos radiactivos sin decaer presentes en cualquier tiempo t, y el eje horizontal es el tiempo. El tiempo $T_{1/2}$ es el tiempo correspondiente a la vida media de la muestra.

han sido objeto de decaimiento). Si N es el número de núcleos sin decaimiento radiactivos presentes en un momento determinado, la rapidez de cambio de N es

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \textbf{(44.5)}$$

donde λ, conocida como la **constante de decaimiento,** es la probabilidad de decaimiento por cada núcleo por cada segundo. El signo negativo indica que dN/dt es negativo; esto es, N se va reduciendo con el transcurso del tiempo.

La ecuación 44.5 puede ser escrita de la forma

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

misma que, al integrarse, da

$$N = N_0e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(44.6)}$$

◀ Comportamiento exponencial del número de núcleos sin decaer

donde la constante N_0 representa la cantidad de núcleos radiactivos aún sin decaer en el instante $t = 0$. La ecuación 44.6 demuestra que la cantidad de núcleos radiactivos todavía sin decaer en una muestra se reduce exponencialmente con el tiempo. La gráfica de N en función de t de la figura 44.9 ilustra la naturaleza exponencial del decaimiento.

La **rapidez de decaimiento** R, que representa el número de descomposiciones por cada segundo, puede obtenerse combinando las ecuaciones 44.5 y 44.6:

$$R = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N = \lambda N_0e^{-\lambda t} = R_0e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(44.7)}$$

◀ Comportamiento exponencial de la rapidez de decaimiento

donde $R_0 = \lambda N_0$ es la rapidez de decaimiento en $t = 0$. La rapidez de decaimiento R de una muestra se conoce con frecuencia como su **actividad.** Observe que tanto N como R disminuyen exponencialmente con el transcurso del tiempo.

Otro parámetro de utilidad para la caracterización del decaimiento nuclear es la **vida media** $T_{1/2}$:

La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo durante el cual decae la mitad de un número conocido de núcleos radiactivos.

Para encontrar una expresión para la vida media, primero $N = N_0/2$ y $t = T_{1/2}$ en la ecuación 44.6 para conseguir

$$\frac{N_0}{2} = N_0e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Al cancelar los factores en N_0 y después calcular la inversa de ambos lados, obtiene $e^{\lambda T_{1/2}} = 2$. Si se saca el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \qquad \textbf{(44.8)}$$

◀ Vida media

Después de un intervalo de tiempo igual a la vida media, existen $N_0/2$ núcleos radiactivos restantes (por definición); después de dos vidas medias, la mitad de estos núcleos restantes habrá decaído, quedando $N_0/4$ núcleos radiactivos; después de tres vidas medias

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 44.4

Advertencia en relación con la notación utilizada

En la sección 44.1 se introdujo el símbolo N como un entero que representaba el número de neutrones en un núcleo. En el presente análisis, el símbolo N representa el número de núcleos que quedan aún sin decaer de una muestra radiactiva después de algún intervalo de tiempo. Conforme vaya avanzando en su lectura, asegúrese de comprender el contexto a fin de poder determinar el significado apropiado del símbolo N.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 44.5

Vida media

¡*No* es verdad que después de dos vidas medias todos los núcleos originales hayan sufrido el proceso de decaimiento! En la segunda vida media, *la mitad de los núcleos restantes* decaerá dejando 1/4 del número original.

quedan $N_0/8$, y así sucesivamente. En general, después de n vidas medias, el número de núcleos radiactivos sin decaer que quedan es igual a $N_0/(\frac{1}{2})^n$.

Una unidad de la actividad de uso frecuente es el **curie** (Ci), que se define como

El curie ▶

$$1 \text{ Ci} \equiv 3.7 \times 10^{10} \text{ descomposiciones/s}$$

Este valor fue seleccionado originalmente por tratarse de la actividad aproximada de 1 g de radio. La unidad SI de la actividad es el **becquerel** (Bq):

El becquerel ▶

$$1 \text{ Bq} \equiv 1 \text{ descomposiciones/s}$$

Por lo tanto, $1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10}$ Bq. El curie es una unidad algo grande y las unidades de actividad utilizadas con más frecuencia son el milicurie y el microcurie.

Pregunta rápida 44.2 El día de su cumpleaños, mida la actividad de una muestra de ^{210}Bi, que tiene una vida media de 5.01 días. La actividad medida es 1.000 μCi. ¿Cuál será la actividad de esta muestra en su siguiente cumpleaños? a) 1.000 μCi, b) 0, c) ~ 0.2 μCi, d) ~ 0.01 μCi, e) ~ 10^{22} μCi.

EJEMPLO 44.4 ¿Cuántos núcleos quedan?

El isótopo de carbono 14, $^{14}_{6}$C, es radiactivo y tiene una vida media de 5730 años. Si usted comienza con una muestra de 1000 núcleos de carbono 14, ¿cuántos núcleos quedarán sin decaer después de 25 000 años?

SOLUCIÓN

Conceptualizar El intervalo de tiempo de 25 000 años es mucho más largo que la vida media, así que sólo permanecerá una pequeña fracción de los núcleos originales sin decaer.

Categorizar El texto del problema permite clasificar este ejemplo como un problema de decaimiento radiactivo.

Analizar Divida el intervalo de tiempo por la vida media para determinar el número de vidas medias:

$$n = \frac{25\,000 \text{ años}}{5730 \text{ años}} = 4.363$$

Determine cuántos núcleos sin decaer quedan después de 4.363 vidas medias:

$$N = N_0(\tfrac{1}{2})^n = 1000(\tfrac{1}{2})^{4.363} = 49$$

Finalizar Como se mencionó, el decaimiento radiactivo es un proceso probabilístico y sólo son posibles predicciones estadísticas precisas con un número muy grande de átomos. La muestra original en este ejemplo sólo contiene 1000 núcleos, que ciertamente no es un número muy grande. Por lo tanto, si contó el número de núcleos sin decaer que permanecen después de 25 000 años, puede no ser exactamente 49.

EJEMPLO 44.5 La actividad del carbono

En el tiempo $t = 0$, una muestra radiactiva contiene 3.50 μg de $^{11}_{6}$C puro, que tiene una vida media de 20.4 min.

A) Determine el número N_0 de núcleos en la muestra en $t = 0$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La vida media es relativamente corta, así que el número de núcleos sin decaer disminuye rápidamente. La masa molar de $^{11}_{6}$C es aproximadamente 11.0 g/mol.

Categorizar Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre el número de moles en 3.50 μg de ${}^{11}_{6}$C puro:

$$n = \frac{3.50 \times 10^{-6}\text{ g}}{11.0\text{ g/mol}} = 3.18 \times 10^{-7}\text{ mol}$$

Encuentre el número de núcleos sin decaer en esta cantidad de ${}^{11}_{6}$C puro:

$$N_0 = 3.18 \times 10^{-7}\text{ mol}(6.02 \times 10^{23}\text{ núcleos/mol}) = \boxed{1.92 \times 10^{17}\text{ núcleos}}$$

B) ¿Cuál es la actividad de la muestra, inicialmente y después de 8.00 h?

SOLUCIÓN

Encuentre la constante de decaimiento:

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{20.4\text{ min}}\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right) = 5.66 \times 10^{-4}\text{ s}^{-1}$$

Encuentre la actividad inicial de la muestra:

$$R_0 = \lambda N_0 = (5.66 \times 10^{-4}\text{ s}^{-1})(1.92 \times 10^{17}) = \boxed{1.08 \times 10^{14}\text{ Bq}}$$

Use la ecuación 44.7 para encontrar la actividad en $t = 8.00\text{ h} = 2.88 \times 10^4\text{ s}$:

$$R = R_0 e^{-\lambda t} = (1.08 \times 10^{14}\text{ Bq})e^{-(5.66\times10^{-4}\text{ s}^{-1})(2.88\times10^{4}\text{ s})} = \boxed{8.96 \times 10^{6}\text{ Bq}}$$

EJEMPLO 44.6 Un isótopo radiactivo de yodo

Una muestra del isótopo ^{131}I, que tiene una vida media de 8.04 días, tiene una actividad de 5.0 mCi en el tiempo de embarque. Al recibir la muestra en un laboratorio médico, la actividad es de 2.1 mCi. ¿Cuánto tiempo transcurrió entre las dos mediciones?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La muestra decae continuamente conforme está en tránsito. La disminución en la actividad es 58% durante el intervalo de tiempo entre el embarque y la recepción, así que se espera que el tiempo transcurrido sea mayor que la vida media de 8.04 d.

Categorizar La actividad establecida corresponde a muchas descomposiciones por segundo, así que N es grande y este problema se puede clasificar como uno en el que se puede usar el análisis estadístico de la radiactividad.

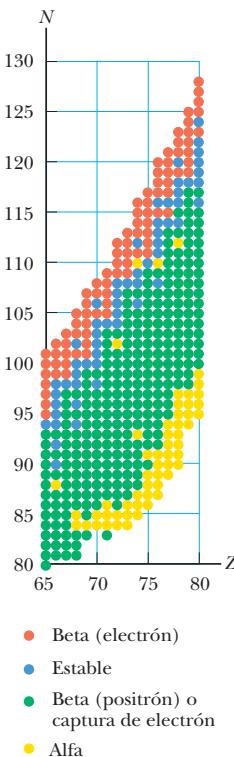
Analizar Resuelva la ecuación 44.7 para la relación de la actividad final a la actividad inicial:

$$\frac{R}{R_0} = e^{-\lambda t}$$

Halle el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = -\lambda t$$

Resuelva para el tiempo t:

$$1)\quad t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

Use la ecuación 44.8 para encontrar λ:

$$2)\quad \lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{8.04\text{ d}} = 8.62 \times 10^{-2}\text{ d}^{-1}$$

Sustituya la ecuación 2) en la ecuación 1):

$$t = -\left(\frac{1}{8.62 \times 10^{-2}\text{ d}^{-1}}\right)\ln\left(\frac{2.1\text{ mCi}}{5.0\text{ mCi}}\right) = \boxed{10\text{ d}}$$

Finalizar Este resultado de hecho es mayor que la vida media, como se esperaba. Este ejemplo demuestra la dificultad de embarcar muestras radiactivas con vidas medias cortas. Si el embarque se demora varios días, sólo una pequeña fracción de la muestra puede permanecer en el recipiente. Esta dificultad se puede superar al embarcar una combinación de isótopos en la que el isótopo deseado sea el producto de un decaimiento que se presente dentro de la muestra. Es posible que el isótopo deseado esté en *equilibrio*, en cuyo caso se produce a la misma rapidez que conforme decae. Por lo tanto, la cantidad del isótopo deseado permanece constante durante el proceso de embarque y el almacenamiento posterior. Cuando se necesita, el isótopo deseado se puede separar del resto de la muestra; su decaimiento desde la actividad inicial comienza en este punto en lugar de al embarcar.

Figura 44.10

Acercamiento de la línea de estabilidad de la figura 44.4 desde $Z = 65$ hasta $Z = 80$. Los puntos azules representan los núcleos estables de la figura 44.4. Los otros puntos de colores representan isótopos inestables por arriba y por debajo de la línea de estabilidad, donde el color del punto indica el procedimiento principal de decaimiento.

44.5 Los procesos de decaimiento

Como se estableció en la sección precedente, un núcleo radiactivo decae de manera espontánea según alguno de tres procesos: decaimiento alfa, decaimiento beta o decaimiento gamma. La figura 44.10 muestra el acercamiento de una parte de la figura 44.4 de $Z = 65$ hasta $Z = 80$. Los círculos azules en esta figura son núcleos estables. Además, se muestran los núcleos inestables por encima y por debajo de la línea de estabilidad para cada valor de Z. Por encima de la línea de estabilidad, los círculos rojos muestran núcleos inestables ricos en neutrones y que se someten a un proceso de decaimiento beta en el cual se emite un electrón. Por debajo de los círculos azules aparecen los círculos verdes, que corresponden a núcleos inestables ricos en protones que principalmente se someten a un proceso de decaimiento beta en el cual se emite un positrón, o si no es el caso, un proceso competidor que se llama captura de electrón. El decaimiento beta y la captura del electrón se describirán con mayor detalle más adelante. Todavía más abajo de la línea de estabilidad (con algunas excepciones) aparecen círculos amarillos que representan núcleos muy ricos en protones en los cuales el decaimiento principal es el decaimiento alfa, que será el que se explica a continuación.

Decaimiento alfa

Un núcleo que emite una partícula alfa ($^4_2$He) pierde dos protones y dos neutrones. Por lo tanto, el número atómico Z se reduce en 2, el número de masa A disminuye en 4 y el número de neutrones disminuye en 2. El decaimiento puede expresarse de la forma

$$^{A}_{Z}\text{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{Y} + {}^{4}_{2}\text{He} \qquad \textbf{(44.9)}$$

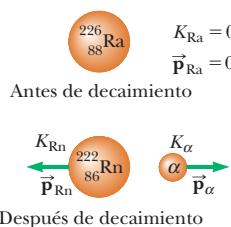
donde X se conoce como el **núcleo padre** y Y el **núcleo hija.** Como regla general para cualquier expresión de decaimiento como ésta, 1) la suma de los números de masa A debe ser igual en ambos términos del decaimiento y 2) la suma de los números atómicos Z también debe ser igual en ambos términos. Como ejemplos, ^{238}U y ^{226}Ra son ambos emisores alfa y decaen según los siguientes planteamientos:

$$^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He} \qquad \textbf{(44.10)}$$

$$^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He} \qquad \textbf{(44.11)}$$

El decaimiento del ^{226}Ra se ilustra en la figura 44.11.

Cuando el núcleo de un elemento cambia dentro del núcleo de otro, como ocurre en el caso del decaimiento alfa, el proceso se conoce como **decaimiento espontáneo.** En cualesquiera decaimientos espontáneos, deben conservarse la energía relativista y la cantidad de movimiento de los núcleos padre aislados. Si identifican M_X como a la masa del núcleo padre, M_Y como la masa del núcleo hija y M_α como la masa de la partícula alfa, la **energía de desintegración** Q del sistema se dfine como

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 \qquad \textbf{(44.12)}$$

La energía Q está en joules cuando las masas se dan en kilogramos y c es la rapidez de la luz, es decir, 3.00×10^8 m/s. Sin embargo, cuando las masas se expresan en la unidad de mas atómica u, es posible calcular Q en MeV con la expresión

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) \times 931.494 \text{ MeV/u} \qquad \textbf{(44.13)}$$

La tabla 44.2 (página 1310) contiene información de isótopos seleccionados, incluyendo masas de átomos neutrales que pueden ser usados en la ecuación 44.13 y en ecuaciones similares.

La energía de desintegración Q aparece en forma de energía cinética en el núcleo hija y en la partícula alfa, y a veces se conoce como el valor Q del decaimiento nuclear. En el caso del decaimiento del ^{226}Ra descrito en la figura 44.11, si el núcleo padre está en reposo antes del decaimiento, la energía cinética total de los productos será de 4.87 MeV (véase el ejemplo 44.7). La mayor parte de esta energía cinética está asociada con la partícula alfa, ya que esta última tiene una masa mucho menor que el núcleo hija ^{222}Rn. Es decir, porque la cantidad de movimiento se debe conservar, la partícula alfa más ligera retrocede a una rapidez mucho más elevada que el núcleo hija. En general, en los decaimientos nucleares, las partículas de menor masa se llevan la mayor parte de la energía.

Figura 44.11

Decaimiento alfa del radio–226. El núcleo de radio inicialmente está en reposo. Después del decaimiento, el núcleo de radón tiene una energía cinética K_{Rn} y una cantidad de movimiento $\vec{p}_{Rn}$, y la partícula alfa tiene una energía cinética K_α y una cantidad de movimiento $\vec{p}_\alpha$.

Observaciones experimentales de las energías de las partículas alfa muestran una cantidad de energías discretas en lugar de una sola energía, porque el núcleo hija puede

quedar en un estado cuántico excitado después del decaimiento. Como resultado, no toda la energía de desintegración está disponible como energía cinética tanto de la partícula alfa como del núcleo hija. A la emisión de una partícula alfa sigue la emisión de uno o dos fotones de rayos gamma (véase más abajo) conforme los núcleos excitados decaen hasta el estado fiundamental. Las energías discretas observadas de partículas alfa representan una evidencia de la naturaleza cuantizada del núcleo y permiten una determinación de las energías en los estados cuánticos.

Si uno supone que el ^{238}U (o cualquier otro emisor alfa), decae emitiendo ya sea un protón o un neutrón, la masa de los productos del decaimiento podría exceder la masa del núcleo padre, lo que correspondería a un valor Q negativo. Un valor Q negativo indica que un decaimiento como el propuesto no se presenta de manera espontánea.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 44.6

Otro tipo de *Q*

Antes ha visto el símbolo Q pero éste es un significado totalmente nuevo: la energía de desintegración. En este contexto no se trata de calor ni de carga ni del factor de calidad para una resonancia, en los que antes se ha utilizado la Q.

Pregunta rápida 44.3 ¿Cuál de los siguientes es el núcleo hija correcto asociado con el decaimiento alfa del $^{157}_{72}$Hf? a) $^{153}_{72}$Hf, b) $^{153}_{70}$Yb o c) $^{157}_{70}$Yb.

EJEMPLO 44.7 Energía liberada cuando decae radio

El núcleo de ^{226}Ra experimenta decaimiento alfa de acuerdo con la ecuación 44.11. Calcule el valor Q para este proceso. A partir de la tabla 44.2, las masas son 226.025 403 u para ^{226}Ra, 222.017 570 u para ^{222}Rn, y 4.002 603 u para $^{4}_{2}$He.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura activa 44.11 para entender el proceso del decaimiento alfa en este núcleo.

Categorizar Se usa una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe Q con la ecuación 44.13:

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) \times 931.494 \text{ MeV/u}$$
$$= (226.025\,403 \text{ u} - 222.017\,570 \text{ u} - 4.002\,603 \text{ u}) \times 931.494 \text{ MeV/u}$$
$$= (0.005\,230 \text{ u}) \times 931.494 \text{ MeV/u} = \boxed{4.87 \text{ MeV}}$$

¿Que pasaría sí? Suponga que usted mide la energía cinética de la partícula alfa a partir de este decaimiento. ¿Mediría 4.87 MeV?

Respuesta El valor de 4.87 MeV es la energía de desintegración para el decaimiento. Incluye la energía cinética de la partícula alfa y del núcleo hija después del decaimiento. Por lo tanto, la energía cinética de la partícula alfa sería *menor* que 4.87 MeV.

Determine matemáticamente esta energía cinética. El núcleo padre es un sistema aislado que decae en una partícula alfa y un núcleo hija. En consecuencia, se debe conservar la cantidad de movimiento para el sistema.

Configure una ecuación de conservación de la cantidad de movimiento y observe que la cantidad de movimiento inicial del sistema es cero:

$$1)\quad 0 = M_Y v_Y - M_\alpha v_\alpha$$

Iguale la energía de desintegración a la suma de las energías cinéticas de la partícula alfa y el núcleo hija (si supone que el núcleo hija se deja en el estado fundamental):

$$2)\quad Q = \tfrac{1}{2}M_\alpha {v_\alpha}^2 + \tfrac{1}{2}M_Y {v_Y}^2$$

Resuelva la ecuación 1) para v_Y y sustituya en la ecuación 2):

$$Q = \tfrac{1}{2}M_\alpha {v_\alpha}^2 + \tfrac{1}{2}M_Y\left(\frac{M_\alpha v_\alpha}{M_Y}\right)^2 = \tfrac{1}{2}M_\alpha {v_\alpha}^2\left(1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}\right)$$
$$= K_\alpha\left(\frac{M_Y + M_\alpha}{M_Y}\right)$$

Resuelva para la energía cinética de la partícula alfa:

$$K_\alpha = Q\left(\frac{M_Y}{M_Y + M_\alpha}\right)$$

Evalúe esta energía cinética para el decaimiento específico de ^{226}Ra que se explora en este ejemplo:

$$K_\alpha = (4.87 \text{ MeV})\left(\frac{222}{222 + 4}\right) = 4.79 \text{ MeV}$$

TABLA 44.2

Información química y nuclear para isótopos seleccionados

Número atómico Z	Elemento	Símbolo químico	Número de masa A (* significa radiactivo)	Masa de átomo neutro (u)	Abundancia porcentual	Vida media, si es radiactivo $T_{1/2}$
−1	electrón	e^-	0	0.000 549		
0	neutrón	n	1*	1.008 665		614 s
1	hidrógeno	$^1H = p$	1	1.007 825	99.988 5	
	[deuterio	$^2H = D$]	2	2.014 102	0.011 5	
	[tritio	$^3H = T$]	3*	3.016 049		12.33 años
2	helio	He	3	3.016 029	0.000 137	
	[partícula alfa	$\alpha = {}^4He$]	4	4.002 603	99.999 863	
			6*	6.018 888		0.81 s
3	litio	Li	6	6.015 122	7.5	
			7	7.016 004	92.5	
4	berilio	Be	7*	7.016 929		53.3 d
			9	9.012 182	100	
5	boro	B	10	10.012 937	19.9	
			11	11.009 306	80.1	
6	carbono	C	11*	11.011 434		20.4 min
			12	12.000 000	98.93	
			13	13.003 355	1.07	
			14*	14.003 242		5730 años
7	nitrógeno	N	13*	13.005 739		9.96 min
			14	14.003 074	99.632	
			15	15.000 109	0.368	
8	oxígeno	O	14*	14.008 595		70.6 s
			15*	15.003 065		122 s
			16	15.994 915	99.757	
			17	16.999 132	0.038	
			18	17.999 160	0.205	
9	flúor	F	18*	18.000 938		109.8 min
			19	18.998 403	100	
10	neón	Ne	20	19.992 440	90.48	
11	sodio	Na	23	22.989 770	100	
12	magnesio	Mg	23*	22.994 125		11.3 s
			24	23.985 042	78.99	
13	aluminio	Al	27	26.981 539	100	
14	silicio	Si	27*	26.986 705		4.2 s
15	fósforo	P	30*	29.978 314		2.50 min
			31	30.973 762	100	
			32*	31.973 907		14.26 d
16	azufre	S	32	31.972 071	94.93	
19	potasio	K	39	38.963 707	93.258 1	
			40*	39.963 999	0.011 7	1.28×10^9 años
20	calcio	Ca	40	39.962 591	96.941	
			42	41.958 618	0.647	
			43	42.958 767	0.135	
25	manganeso	Mn	55	54.938 050	100	
26	hierro	Fe	56	55.934 942	91.754	
			57	56.935 399	2.119	

(*continúa*)

TABLA 44.2

Información química y nuclear para isótopos seleccionados (*continuación*)

Número atómico Z	Elemento	Símbolo químico	Número de masa A (* significa radiactivo)	Masa de átomo neutro (u)	Abundancia porcentual	Vida media, si es radiactivo $T_{1/2}$
27	cobalto	Co	57*	56.936 296		270 d
			59	58.933 200	100	
			60*	59.933 822		5.27 años
28	níquel	Ni	58	57.935 348	68.076 9	
			60	59.930 790	26.223 1	
29	cobre	Cu	63	62.929 601	69.17	
			64*	63.929 599		12.7 h
			65	64.927 794	30.83	
30	cinc	Zn	64	63.929 147	48.63	
37	rubidio	Rb	87*	86.909 184	27.83	
38	estroncio	Sr	87	86.908 880	7.00	
			88	87.905 614	82.58	
			90*	89.907 738		29.1 años
41	niobio	Nb	93	92.906 378	100	
42	molibdeno	Mo	94	93.905 088	9.25	
44	rutenio	Ru	98	97.905 287	1.87	
55	cesio	Cs	137*	136.907 074		30 años
56	bario	Ba	137	136.905 821	11.232	
58	cerio	Ce	140	139.905 434	88.450	
59	praseodimio	Pr	141	140.907 648	100	
60	neodimio	Nd	144*	143.910 083	23.8	2.3×10^{15} años
61	prometio	Pm	145*	144.912 744		17.7 años
79	oro	Au	197	196.966 552	100	
80	mercurio	Hg	198	197.966 752	9.97	
			202	201.970 626	29.86	
82	plomo	Pb	206	205.974 449	24.1	
			207	206.975 881	22.1	
			208	207.976 636	52.4	
			214*	213.999 798		26.8 min
83	bismuto	Bi	209	208.980 383	100	
84	polonio	Po	210*	209.982 857		138.38 d
			216*	216.001 905		0.145 s
			218*	218.008 966		3.10 min
86	radón	Rn	220*	220.011 384		55.6 s
			222*	222.017 570		3.823 d
88	radio	Ra	226*	226.025 403		1600 años
90	torio	Th	232*	232.038 050	100	1.40×10^{10} años
			234*	234.043 596		24.1 d
92	uranio	U	235*	235.043 923	0.720 0	7.04×10^{8} años
			236*	236.045 562		2.34×10^{7} años
			238*	238.050 783	99.274 5	4.47×10^{9} años
93	neptunio	Np	236*	236.046 560		1.15×10^{5} años
			237*	237.048 167		2.14×10^{6} años
94	plutonio	Pu	239*	239.052 156		24 120 años

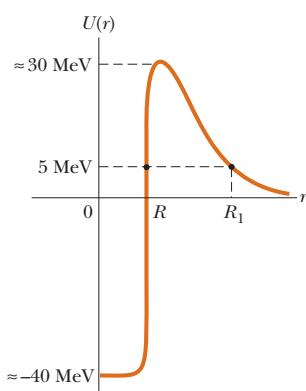



Figura 44.12 Gráfica de la energía potencial en función de la distancia de separación en un sistema que consiste en una partícula alfa y un núcleo hija. De acuerdo con la física clásica, la energía de la partícula alfa no es suficiente para superar la barrera de energía y, por lo tanto, la partícula no debe ser capaz de escapar del núcleo. En realidad, la partícula alfa sí escapa mediante filtración cuántica a través de la barrera.

A fin de comprender el mecanismo del decaimiento alfa, considere un modelo del núcleo padre como un sistema constituido por 1) la partícula alfa, ya formada como una entidad dentro del núcleo, y 2) el núcleo hija que resultará cuando sea emitida la partícula alfa. La figura 44.12 muestra una gráfica de la energía potencial en función de la distancia de separación r entre la partícula alfa y el núcleo hija, en donde la distancia marcada como R es el alcance de la fuerza nuclear. La curva representa los efectos combinados de 1) la fuerza de repulsión de Coulomb, la cual proporciona la parte positiva de la curva para $r > R$ y 2) la fuerza de atracción del núcleo, la cual produce una curva negativa cuando $r < R$. Como en el ejemplo 44.7, la energía de desintegración Q representativa es casi 5 MeV, que es la energía cinética aproximada de la partícula alfa, representada por la línea discontinua inferior en la figura 44.12.

De acuerdo con la física clásica, la partícula alfa está atrapada dentro de un pozo de potencial. En tal caso, ¿cómo es que llega a escaparse del núcleo? El primero en responder esta pregunta fue George Gamow (1904-1968) en el año de 1928, simultáneamente con R. W. Gurney y E. U. Condon en 1929, usando la mecánica cuántica. Una característica de la mecánica cuántica es que siempre existe la posibilidad de que una partícula pueda perforar túneles a través de una barrera. Esta es la descripción exacta del decaimiento alfa: la partícula alfa perfora un túnel a través de la barrera en la figura 44.12, escapando del núcleo. Además, este modelo coincide con la observación de que las partículas alfa con mayor energía provienen de núcleos con vidas medias más cortas. Para partículas alfa de mayor energía en la figura 44.12, la barrera es más estrecha y hay mayores probabilidades de que se presente filtración cuántica. El aumento en las probabilidades se transforma en vidas medias más cortas.

Como un ejemplo, considere el decaimiento de ^{238}U y ^{226}Ra en las ecuaciones 44.10 y 44.11, junto con las vidas medias correspondientes y las energías de las partículas alfa:

$$^{238}\text{U:} \quad T_{1/2} = 4.47 \times 10^9 \text{ años} \quad K_\alpha = 4.20 \text{ MeV}$$

$$^{226}\text{Ra:} \quad T_{1/2} = 1.60 \times 10^3 \text{ años} \quad K_\alpha = 4.79 \text{ MeV}$$

Observe que una diferencia relativamente menor en la energía de la partícula alfa se asocia con una enorme diferencia de seis órdenes de magnitud en la vida media. El origen de este efecto puede explicarse de la siguiente manera. Primero, en la figura 44.12, observe que la curva por debajo de una partícula alfa con energía de 5 MeV tiene una pendiente con magnitud relativamente pequeña. Por lo tanto, una pequeña diferencia de la energía sobre el eje vertical tiene un efecto relativamente mayor sobre el ancho de la barrera de potencial. En segundo lugar, recuerde la ecuación 41.22, la cual describe la dependencia exponencial de la probabilidad de transmisión en relación con el ancho de la barrera. Estos dos factores se combinan para otorgar la sensible correspondencia entre vida media y energía de la partícula alfa, que sugieren los datos presentados arriba.

Una aplicación del decaimiento alfa que ayuda a salvar vidas es el detector de humo doméstico, que se muestra en la figura 44.13. El detector está constituido por una cámara de ionización, un detector de corriente sensible y una alarma. Una débil fuente radiactiva (por lo general el $^{241}_{95}$Am) ioniza el aire dentro de la cámara del detector, creando partículas cargadas. Entre las placas dentro de la cámara existe un voltaje que establece una corriente pequeña pero detectable en el circuito externo, porque los iones actúan como portadores de carga entre las placas. Mientras exista corriente, la alarma

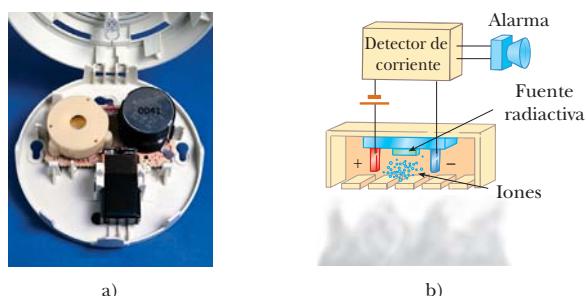
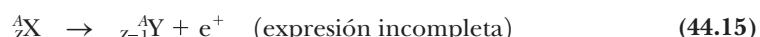
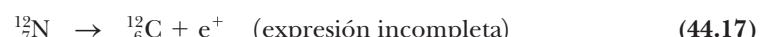
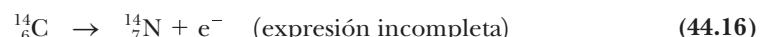



Figura 44.13 a) Un detector de humo se vale del decaimiento alfa para determinar si hay humo presente en el aire. La fuente alfa se encuentra en el cilindro negro, del lado derecho. b) El humo que entra a la cámara reduce la corriente detectada, lo cual activa la alarma.

permanece desactivada. Sin embargo, si entra humo en la cámara, los iones se adhieren a sus partículas. Estas partículas más pesadas no se mueven con tanta libertad como los iones, más ligeros, lo que hace que la corriente dentro del detector disminuya. El circuito externo detecta esta reducción en la corriente y activa la alarma.

Decaimiento beta

Cuando un núcleo radiactivo se somete a decaimiento beta, el núcleo hija contiene el mismo número de nucleones que el núcleo padre, pero el número atómico cambia en 1, por lo que el número de protones también cambia:

$$^{A}_{Z}\text{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\text{Y} + e^{-} \quad \text{(expresión incompleta)} \tag{44.14}$$

$$^{A}_{Z}\text{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\text{Y} + e^{+} \quad \text{(expresión incompleta)} \tag{44.15}$$

en donde, como se mencionó en la sección 44.4, se utiliza e^- para designar un electrón y e^+ para designar un positrón, siendo la *partícula beta* el término general usado para referirse a ambos. *El decaimiento beta no es descrito totalmente mediante estas expresiones.* Enseguida se explican las razones.

Al igual que en el decaimiento alfa, el número de nucleones y la carga total son conservados durante el decaimiento beta. Puesto que A no cambia y, sin embargo, Z sí, se concluye que en el decaimiento beta un neutrón cambia a un protón (ecuación 44.14) o un protón cambia a un neutrón (ecuación 44.15). Observe que el electrón o positrón emitidos en estas desintegraciones no se encuentran presentes desde antes dentro del núcleo; son creados durante la desintegración utilizando la energía de reposo de la desintegración del núcleo. Dos procesos representativos del decaimiento beta son:

$$^{14}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\text{N} + e^{-} \quad \text{(expresión incompleta)} \tag{44.16}$$

$$^{12}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + e^{+} \quad \text{(expresión incompleta)} \tag{44.17}$$

Figura 44.14

a) Distribución de las energías de partículas beta en un decaimiento beta característico. Se observan todas las energías hasta un valor máximo. b) En contraste, las energías de las partículas alfa en un decaimiento alfa son discretas.

Considere la energía del sistema sometido a decaimiento beta antes y después de decaimiento. Al igual que en el decaimiento alfa, debe conservarse la energía dentro del sistema aislado. Se ha encontrado experimentalmente que las partículas beta de un solo tipo de núcleo son emitidas en un intervalo continuo de energías (figura 44.14a), a diferencia del decaimiento alfa en el que las partículas alfa son emitidas con energías discretas (figura 44.14b). La energía cinética del sistema después del decaimiento es igual a la reducción en la energía en reposo del sistema, es decir, el valor Q. Sin embargo, ya que todos los núcleos en la muestra que se desintegran tienen la misma masa inicial, *el valor Q debe ser el mismo para cada uno de ellos.* Tomando esto en consideración, ¿por qué las partículas emitidas tienen el intervalo de energías cinéticas que aparece en la figura 44.14a? ¡Parece haberse violado la ley de conservación de energía! Y se pone peor: ¡conforme se avanza en el análisis de los procesos de desintegración descritos en las ecuaciones 44.14 y 44.15 se descubre que, aparentemente, también se han roto las leyes de conservación tanto de la cantidad de movimiento angular (espín) como de la cantidad de movimiento lineal!

En 1930, después de muchos estudios experimentales y teóricos, Pauli propuso que es obligatorio que exista una tercera partícula presente en los productos de la desintegración para llevarse la energía y la cantidad de movimiento "faltantes". Más adelante, Fermi llamó a esta partícula **neutrino** (pequeño y neutro), porque debía ser eléctricamente neutro y poseer ninguna o muy poca masa. Aunque durante muchos años el neutrino se resistió a ser detectado (símbolo ν, nu griega), finalmente fue detectado en 1956 en un experimento realizado por Frederick Reines, quien recibió el premio Nobel por este trabajo en 1995. El neutrino tiene las siguientes propiedades:

◀ Propiedades del neutrino

- Tiene carga eléctrica igual a cero.
- Su masa es ya sea cero (en cuyo caso se traslada a la rapidez de la luz) o muy pequeña; existe mucha evidencia experimental reciente que sugiere fuertemente que la masa del neutrino es distinta de cero. Los experimentos actuales ubican el límite superior de la masa del neutrino en alrededor de 7 eV/c^2.
- Tiene un espín de $\frac{1}{2}$, lo cual permite que la ley de conservación de cantidad de movimiento angular se satisfaga durante el decaimiento beta.
- Interactúa en forma muy débil con la materia y, por lo tanto, es muy difícil de detectar.

Ahora puede escribir los procesos del decaimiento beta (ecuaciones 44.14 y 44.15) en su forma correcta y completa:

Procesos del decaimiento beta

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu} \quad \text{(expresión completa)} \tag{44.18}$$

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z-1}^{A}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^{+} + \nu \quad \text{(expresión completa)} \tag{44.19}$$

así como los procesos para el carbono 14 y el nitrógeno 12 (ecuaciones 44.16 y 44.17):

$$ {}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu} \quad \text{(expresión completa)} \tag{44.20}$$

$$ {}^{12}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{e}^{+} + \nu \quad \text{(expresión completa)} \tag{44.21}$$

en donde el símbolo $\bar{\nu}$ representa al **antineutrino,** la antipartícula del neutrino. Las antipartículas se analizan con más detalle en el capítulo 46. Por ahora, es suficiente decir que **un neutrino es emitido durante el decaimiento de positrones y un antineutrino es emitido durante el decaimiento de electrones.** Al igual que en el decaimiento alfa, las desintegraciones mencionadas arriba son analizadas aplicando leyes de la conservación, pero para las partículas beta deben utilizarse expresiones relativistas porque su energía cinética es grande (típicamente de 1 MeV) en comparación con la energía en reposo de 0.511 MeV. La figura 44.15 muestra una representación ilustrada de las desintegraciones descritas en las ecuaciones 44.20 y 44.21.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 44.7

Número de masa del electrón

Una notación alterna para el electrón en la ecuación 44.23 es el símbolo ${}_{-1}{}^{0}\mathrm{e}$, lo cual no implica que el electrón tiene cero energía en reposo. No obstante, la masa del electrón es inferior a la del nucleón más pequeño, que se aproxima a cero en el contexto del decaimiento y de las reacciones nucleares.

En la ecuación 44.18, el número de protones ha aumentado en uno y el número de neutrones ha disminuido en uno. El proceso fundamental del decaimiento e^{-} en función de un neutrón que se convierte en protón, se escribe como sigue:

$$ \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu} \tag{44.22}$$

El electrón y el antineutrino son expulsados del núcleo, con el resultado neto de un protón de más y un neutrón de menos, lo cual coincide con los cambios en Z y $A - Z$. Un proceso similar se presentó durante el decaimiento e^{+}, un protón convirtiéndose en neutrón, un positrón y un neutrino. Este proceso puede presentarse sólo dentro del núcleo, con el resultado de que disminuye la masa nuclear. No puede presentarse en un protón aislado, porque su masa es menor a la de un neutrón.

Un proceso que compite con el decaimiento e^{+} es la **captura de electrones,** que se presenta cuando un núcleo padre captura uno de sus propios electrones orbitales y emite un neutrino. El producto final después de la desintegración es un núcleo cuya carga es de $Z - 1$:

Captura de electrón

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{\ 0}_{-1}\mathrm{e} \rightarrow {}_{Z-1}^{A}\mathrm{Y} + \nu \tag{44.23}$$

En la mayor parte de los casos, el electrón capturado está en la capa K, y por esta razón el proceso se conoce como **captura K.** Un ejemplo es la captura de un electrón por ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$:

$$ {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + {}^{\ 0}_{-1}\mathrm{e} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \nu $$

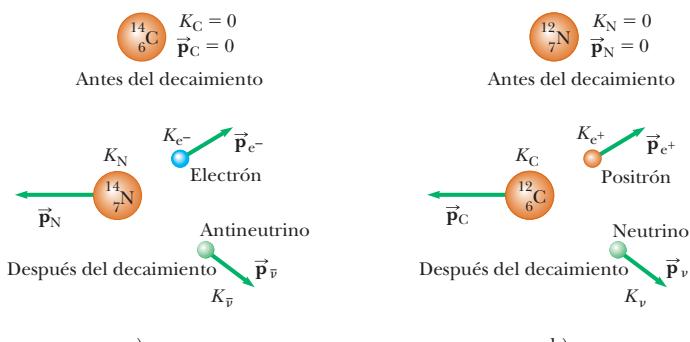



Figura 44.15

a) Decaimiento beta del carbono-14. El producto final de la desintegración es el núcleo del nitrógeno 14, un electrón y un antineutrino. b) Decaimiento beta del nitrógeno-12. El producto final de la desintegración es el núcleo de carbono-12, un positrón y un neutrino.

Ya que el neutrino es tan difícil de detectar, la captura de electrones se observa mediante los rayos X producidos conforme los electrones de capas superiores caen en cascada hacia adentro para llenar el hueco creado en la capa K.

Por último, se definen los valores Q de los procesos del decaimiento beta. Los valores Q para el decaimiento e^- y la captura de electrones están dados por $Q = (M_X - M_Y)c^2$, en donde M_X y M_Y son las masas de los átomos neutros. En el decaimiento e^-, el núcleo padre experimenta un aumento en el número atómico y debe agregar un electrón para que el átomo sea neutro. Si el átomo padre neutro y un electrón (que se combina con la hija para formar un átomo neutro) es el sistema inicial y el sistema final es el átomo hija neutro y el electrón beta expulsado, existe un electrón libre dentro del sistema tanto antes como después de la desintegración. Por lo tanto, al sustraer las masas inicial y final del sistema, las masas de estos electrones se cancelan. Los valores Q para e^+ se obtienen mediante $Q = (M_X - M_Y - 2m_e)c^2$. El término extra en esta expresión, $-2m_ec^2$, es necesario porque el número atómico del padre decrece en uno cuando se forma la hija. Después de ser formado por decaimiento, el átomo hija libera un electrón para formar un átomo neutro. Por lo tanto, el producto final es un átomo hija, un electrón liberado y un positrón expulsado.

Estas correspondencias resultan útiles para determinar si un proceso es posible en términos de energía o no. Por ejemplo, la expresión para el decaimiento e^+ propuesto para un núcleo padre en particular puede resultar negativa. En este caso, no ocurrirá decaimiento. De cualquier modo, la expresión para la captura de electrones de este núcleo padre puede resultar en una cifra positiva, por lo que puede ocurrir la captura de electrones, aun cuando no sea posible el decaimiento e^+. Este es el caso del decaimiento de ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$, que se muestra arriba.

Pregunta rápida 44.4 ¿Cuál de los siguientes es el núcleo hija correcto asociado con el decaimiento beta de ${}^{184}{}_{72}\mathrm{Hf}$? a) ${}^{183}{}_{72}\mathrm{Hf}$, b) ${}^{183}{}_{73}\mathrm{Ta}$ o c) ${}^{184}{}_{73}\mathrm{Ta}$.

Fechado por carbón

El decaimiento beta del ^{14}C (ecuación 44.20) se utiliza comúnmente para establecer la antigüedad de muestras orgánicas. Los rayos cósmicos en la parte superior de la atmósfera provocan reacciones nucleares (sección 44.7) que producen ^{14}C. La proporción de ^{14}C en comparación con el ^{12}C en las moléculas de dióxido de carbono en la atmósfera tiene un valor constante de aproximadamente 1.3×10^{-12}. Los átomos de carbono en los organismos vivientes tienen esta misma relación de $^{14}C/^{12}C$ porque los organismos intercambian dióxido de carbono continuamente con sus alrededores. Sin embargo, cuando un organismo muere deja de absorber el ^{14}C de la atmósfera y, por lo tanto, la relación $^{14}C/^{12}C$ disminuye conforme el ^{14}C decae con una vida media de 5730 años. Por esto, es posible conocer la antigüedad de un material al medir la actividad de ^{14}C. Con ayuda de esta técnica los científicos han sido capaces de identificar muestras de madera, carbón, hueso y concha con antigüedades entre 1000 y 25 000 años. Este conocimiento ha ayudado a reconstruir la historia de los organismos vivientes —incluyendo a los seres humanos— durante este periodo.

Un ejemplo particularmente interesante es la determinación de la antigüedad de los Rollos del Mar Muerto. Este conjunto de manuscritos fue descubierto por un pastor en el año de 1947. La traducción reveló que se trataba de documentos religiosos, incluyendo la mayoría de los libros del Antiguo Testamento. Debido a su importancia histórica y religiosa, los eruditos deseaban conocer su antigüedad. El fechado por carbono aplicado al material en que estaban envueltos determinó que tenían una antigüedad de aproximadamente 1950 años.

EJEMPLO 44.8 La edad del hombre de hielo

En 1991 un turista alemán descubrió los restos bien preservados de un hombre, ahora llamado “Hombre de Hielo”, atrapado en un glaciar en los Alpes italianos. (Véase la fotografía en la apertura de este capítulo.) La datación radiactiva con ^{14}C reveló que esta persona estuvo viva aproximadamente hace 5300 años. ¿Por qué los científicos fecharon una muestra del hombre de hielo usando ^{14}C en lugar de ^{11}C, que es un emisor beta que tiene una vida media de 20.4 min?

SOLUCIÓN

Porque el ^{14}C tiene una vida media de 5730 años, la fracción de núcleos de ^{14}C que permanecen después de una vida media es suficientemente alta como para permitir mediciones precisas de cambios en la actividad de la muestra. Ya que el ^{11}C tiene una vida media muy corta, no es útil; su actividad disminuye a un valor mucho muy pequeño a través de la edad de la muestra, lo que hace imposible detectarlo.

Un isótopo que se usa para fechar una muestra debe estar presente en una cantidad conocida en la muestra cuando se forma. Como regla general, el isótopo elegido para fechar una muestra también debe tener una vida media que esté en el mismo orden de magnitud que la edad de la muestra. Si la vida media es mucho menor que la edad de la muestra, no quedará suficiente actividad para medir porque casi todos los núcleos radiactivos habrán decaído. Si la vida media es mucho mayor que la edad de la muestra, la cantidad de desintegración que tuvo lugar desde que la muestra murió será muy pequeña para medir. Por ejemplo, si usted tiene un espécimen que se estima murió hace 50 años, ni el ^{14}C (5730 años) ni el ^{11}C (20 min) son adecuados. Sin embargo, si usted sabe que su muestra contiene hidrógeno, puede medir la actividad de ^{3}H (tritio), un emisor beta que tiene una vida media de 12.3 años.

EJEMPLO 44.9 Fechador radiactivo

Un trozo de carbón que contiene 25.0 g de carbono se encuentra en algunas ruinas de una ciudad antigua. La muestra presenta una actividad R de ^{14}C de 250 desintegraciones/min. ¿Hace cuánto murió el árbol del que provino este carbón?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que el carbón se encontró en ruinas antiguas, se espera que la actividad actual sea menor que la actividad inicial. Si puede determinar la actividad inicial, puede encontrar hace cuánto murió la madera.

Categorizar El texto de la pregunta ayuda a clasificar este ejemplo como un problema de fechador de carbono.

Analizar Calcule la constante de decaimiento para ^{14}C:

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{(5730 \text{ años})(3.16 \times 10^{7} \text{ s/años})}$$
$$= 3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

Calcule el número de moles en 25.0 g de carbono:

$$n = \frac{25.0 \text{ g}}{12.0 \text{ g/mol}} = 2.083 \text{ mol}$$

Encuentre el número de núcleos de ^{12}C en 25.0 g de carbono:

$$N(^{12}\text{C}) = 2.083 \text{ mol}(6.02 \times 10^{23} \text{ núcleos/mol}) = 1.25 \times 10^{24} \text{ núcleos}$$

Al saber que la proporción de ^{14}C a ^{12}C en la muestra viva era de 1.3×10^{-12}, encuentre el número de núcleos de ^{14}C en 25.0 g *antes* del decaimiento:

$$N_0(^{14}\text{C}) = (1.3 \times 10^{-12})(1.25 \times 10^{24}) = 1.63 \times 10^{12} \text{ núcleos}$$

Halle la actividad inicial de la muestra:

$$R_0 = \lambda N_0 = (3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1})(1.63 \times 10^{12} \text{ núcleos})$$
$$= 6.24 \text{ decaimientos/s} = 374 \text{ decaimientos/min}$$

Resuelva la ecuación 44.7 para t:

$$e^{-\lambda t} = \frac{R}{R_0} \quad \rightarrow \quad -\lambda t = \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \quad \rightarrow \quad t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

Evalúe t con R = 250 desintegraciones/min y R_0 = 368 desintegraciones/min:

$$t = -\frac{1}{3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}} \ln\left(\frac{250 \text{ min}^{-1}}{374 \text{ min}^{-1}}\right)$$
$$= 1.06 \times 10^{11} \text{ s} = \boxed{3.3 \times 10^{3} \text{ años}}$$

Finalizar Note que el intervalo de tiempo que se encontró en este caso está en el orden de magnitud de la vida media, de modo que ^{14}C es un isótopo válido para usar en esta muestra, como se explicó en el ejemplo conceptual 44.8.

Decaimiento gamma

Con mucha frecuencia un núcleo sometido a decaimiento radiactivo queda en un estado de energía excitado. En tal caso, el núcleo puede someterse a un segundo decaimiento a un estado de energía menor, quizá hasta el estado fundamental, mediante la emisión en un fotón de alta energía:

$$ {}^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma \qquad \textbf{(44.24)} $$

◀ Decaimiento gamma

en donde X^* indica un núcleo en estado excitado. La vida media representativa de un estado nuclear excitado es de 10^{-10} s. Los fotones emitidos durante procesos de desexcitación semejantes son conocidos como rayos gamma. Estos fotones tienen una energía muy alta (1 MeV−1 GeV), en relación con la energía de la luz visible (alrededor de 1 eV). Recuerde, de la sección 42.3, que la energía de un fotón emitido o absorbido por un átomo es igual a la diferencia de energía entre los dos estados electrónicos involucrados en la transición. En forma similar, un fotón de rayo gamma tiene una energía hf que es igual a la diferencia de energía ΔE entre dos niveles de energía nuclear. Cuando un núcleo decae al emitir un rayo gamma, el único cambio en el núcleo es que termina en un estado de energía inferior. No hay cambios en Z, N o A.

Un núcleo puede alcanzar un estado excitado como resultado de una colisión violenta con otra partícula. Sin embargo, es más común que el núcleo se encuentre en estado excitado después de haber sufrido decaimiento alfa o beta. La siguiente secuencia de eventos representa una situación típica en la que se presenta decaimiento gamma:

$$ {}^{12}_{5}B \rightarrow {}^{12}_{6}C^{*} + e^{-} + \bar{\nu} \qquad \textbf{(44.25)} $$

$$ {}^{12}_{6}C^{*} \rightarrow {}^{12}_{6}C + \gamma \qquad \textbf{(44.26)} $$

La figura 44.16 muestra el esquema de decaimiento de ^{12}B, sometido a decaimiento beta en cualquiera de los dos niveles de ^{12}C. Puede 1) decaer directamente al estado fundamental de ^{12}C al emitir un electrón de 13.4 MeV o 2) experimentar un decaimiento beta a un estado excitado de ^{12}C*, seguido por un decaimiento gamma hacia el estado fundamental. Este último proceso resulta en la emisión de un electrón de 9.0 MeV y de un fotón de 4.4 MeV.

Las diferentes trayectorias mediante las cuales un núcleo radiactivo puede someterse a decaimiento aparecen resumidas en la tabla 44.3.

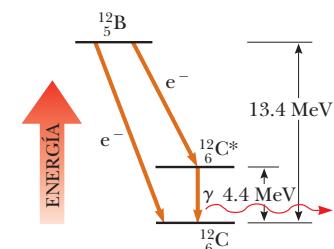



Figura 44.16 Diagrama de niveles de energía que muestra el estado nuclear inicial de un núcleo ^{12}B y dos estados posibles de menor energía del núcleo ^{12}C. El decaimiento beta del núcleo ^{12}B puede resultar en una de dos situaciones: el núcleo ^{12}C en el estado fundamental o bien en estado de excitación, en cuyo caso el núcleo se denota como ^{12}C*. En este último caso, el decaimiento beta a ^{12}C* es seguido por un decaimiento gamma a ^{12}C cuando el núcleo excitado realiza la transición al estado fundamental.

44.6 Radiactividad natural

Los núcleos radiactivos por lo general se clasifican en dos grupos: 1) los núcleos inestables encontrados en la naturaleza, los cuales producen la **radiactividad natural,** y 2) los núcleos inestables producidos en laboratorio a través de reacciones nucleares, los cuales exhiben **radiactividad artificial.**

Como muestra la tabla 44.4, existen tres series de núcleos radiactivos que se presentan en la naturaleza. Cada serie comienza con un isótopo radiactivo cuya vida media excede la de todos sus descendientes inestables. Las tres series naturales comienzan con los isótopos ^{238}U, ^{235}U y ^{232}Th, y los correspondientes productos finales estables son tres isótopos del plomo: ^{206}Pb, ^{207}Pb y ^{208}Pb. La cuarta serie en la tabla 44.4 comienza con ^{237}Np y tiene un producto final estable ^{209}Bi. El elemento ^{237}Np es un elemento *transuránico* (con número

TABLA 44.3

Diversas trayectorias de decaimiento

Decaimiento alfa	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$
Decaimiento beta (e⁻)	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + e^{-} + \bar{\nu}$
Decaimiento beta (e⁺)	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + e^{+} + \nu$
Captura de electrones	${}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + \nu$
Decaimiento gamma	${}^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$

TABLA 44.4

Las cuatro series radiactivas

Series		Isótopo inicial	Vida media (años)	Producto final estable
Uranio	Natural	${}^{238}_{92}U$	4.47×10^{9}	${}^{206}_{82}Pb$
Actinio	Natural	${}^{235}_{92}U$	7.04×10^{8}	${}^{207}_{82}Pb$
Torio	Natural	${}^{232}_{90}Th$	1.41×10^{10}	${}^{208}_{82}Pb$
Neptunio		${}^{237}_{93}Np$	2.14×10^{6}	${}^{209}_{83}Bi$

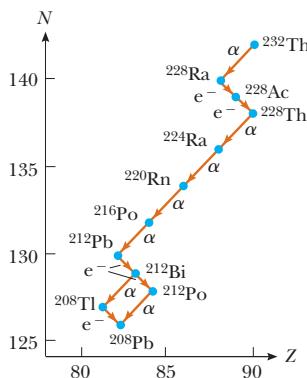
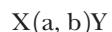



Figura 44.17 Decaimientos sucesivos para la serie ^{232}Th.

atómico mayor al del uranio), que no se encuentra en la naturaleza. Este elemento tiene una vida media de "sólo" 2.14×10^6 años.

La figura 44.17 muestra los decaimientos sucesivos para la serie ^{232}Th. Observe que ^{232}Th atraviesa primero por decaimiento alfa hasta ^{228}Ra. A continuación, ^{228}Ra pasa por dos decaimientos beta sucesivos hasta ^{228}Th. La serie continúa y, finalmente, se divide cuando llega a ^{212}Bi. En este punto, existen dos posibilidades de decaimiento. La secuencia que aparece en la figura 44.17 se caracteriza por un decremento en el número de masa en cuatro (en decaimientos alfa) o 0 (para decaimientos beta o gamma). Las dos series de uranio son más complejas que la serie ^{232}Th. Además, existen varios isótopos radiactivos que ocurren en la naturaleza, tales como ^{14}C y ^{40}K, que no forman parte de ninguna serie de decaimiento.

Gracias a estas series radiactivas, nuestro entorno es reabastecido constantemente de elementos radiactivos, que de lo contrario hubieran desaparecido hace mucho tiempo. Por ejemplo, ya que el sistema solar tiene aproximadamente 5×10^9 años de edad, el suministro de ^{226}Ra (cuya vida media es de solamente 1600 años) se hubiera agotado hace mucho debido al decaimiento radiactivo, si no fuera por las series que comienzan con ^{238}U.

44.7 Reacciones nucleares

Ya ha estudiado la radiactividad, que es un proceso espontáneo en el cual la estructura del núcleo cambia. También es posible estimular cambios en la estructura del núcleo al bombardearlo con partículas energéticas. Estas colisiones, que cambian la identidad del núcleo objetivo, son llamadas **reacciones nucleares.** En 1919 Rutherford fue el primero en observarlas utilizando fuentes naturalmente radiactivas para bombardear las partículas. Desde ese momento se han observado miles de reacciones nucleares después del desarrollo, en los años treinta, de los aceleradores de partículas cargadas. Con la avanzada tecnología actual en aceleradores de partículas y detectores de partículas, es posible alcanzar energías de partícula de por lo menos 1000 GeV = 1 TeV. Estas partículas de alta energía se utilizan para crear nuevas partículas cuyas propiedades ayudan a resolver los misterios del núcleo.

Considere una reacción en la cual el núcleo objetivo X es bombardeado por una partícula a, resultando en un núcleo hija Y y una partícula expulsada b:

Reacción nuclear ►

$$\mathrm{a} + \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y} + \mathrm{b} \tag{44.27}$$

A menudo esta reacción se escribe en forma más compacta

$$\mathrm{X(a, b)Y}$$

En la sección 44.5 se definió el valor Q, o energía de desintegración de un decaimiento radiactivo como la energía en reposo transformada en energía cinética como resultado del proceso de decaimiento. En forma similar, se define la **energía de la reacción** Q relacionada con una reacción nuclear como *el cambio total en la energía en reposo resultante de la reacción:*

Energía de la reacción ►

$$Q = (M_\mathrm{a} + M_\mathrm{X} - M_\mathrm{Y} - M_\mathrm{b})c^2 \tag{44.28}$$

Como ejemplo considere la reacción ^{7}Li (p, α)^{4}He. La notación p indica un protón, el cual es un núcleo de hidrógeno. Por lo tanto, la forma extendida de esta reacción es

$$^1_1\mathrm{H} + {}^7_3\mathrm{Li} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He}$$

El valor Q para esta reacción es 17.3 MeV. Una reacción como ésta en la que Q es positiva, se conoce como **exotérmica.** Una reacción en la que Q es negativa se conoce como **endotérmica.** A fin de satisfacer la ley de conservación de la cantidad de movimiento, no se presenta una reacción endotérmica a menos que la partícula bombardeada tenga una energía cinética mayor que Q (véase el problema 49). La energía mínima necesaria para que se presente tal reacción se conoce como **energía de umbral.**

Si las partículas a y b en una reacción nuclear son idénticas, de manera que X y Y son por necesidad también idénticas, la reacción se conoce como **evento de dispersión.** Si la energía cinética del sistema (a y X) antes del evento son las mismas que las del sistema (b y Y) después del evento, se le clasifica como *dispersión elástica.* Si las energías cinéticas

del sistema y después del evento, es menor que antes del evento, la reacción se describe como *dispersión inelástica*. En este caso, la diferencia en energía se explica debido a que el núcleo objetivo ha sido puesto en estado de excitación por el evento. El sistema final está ahora constituido por b y un núcleo excitado Y*, y que finalmente se transformará en b, Y y γ, en donde γ es el fotón de rayo gamma que es emitido cuando el sistema vuelve al estado fundamental. Esta terminología elástica e inelástica es idéntica a la utilizada para describir colisiones entre objetos macroscópicos (sección 9.3).

Además de la energía y cantidad de movimiento, durante todas las reacciones nucleares también deben conservarse la carga total y el número de nucleones. Por ejemplo, considere la reacción ^{19}F(p, α)^{16}O, la cual tiene un valor Q de 8.11 MeV. Esta reacción aparece de forma más completa como

$$^{1}_{1}\mathrm{H} + ^{19}_{9}\mathrm{F} \rightarrow ^{16}_{8}\mathrm{O} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \qquad \textbf{(44.29)}$$

El número total de nucleones antes de la reacción $(1 + 19 = 20)$ es igual al total después de la reacción $(16 + 4 = 20)$. Además, la carga total es la misma antes $(1 + 9)$ y después $(8 + 2)$ de la reacción.

44.8 Resonancia magnética nuclear y formación de imágenes por resonancia magnética

En esta sección se describe una aplicación importante de la física nuclear en la medicina, conocida como formación de imagen por resonancia magnética. A fin de comprender esta aplicación, primero se explica la cantidad de movimiento angular de espín del núcleo. Esta explicación establecerá paralelos con las explicaciones del espín en los electrones atómicos.

En el capítulo 42 se mencionó que el electrón tiene la cantidad de movimiento angular intrínseca, a la cual se le llama espín. Los núcleos también tienen espín, ya que sus partículas componentes —neutrones y protones— tienen cada una un espín $\frac{1}{2}$, así como la cantidad de movimiento angular orbital dentro del núcleo. Todas las clases de cantidad de movimiento angular obedecen las reglas cuánticas definidas para la cantidad de movimiento orbital y angular de espín en el capítulo 42. En particular, se asocian dos números cuánticos con la cantidad de movimiento angular que determinan los valores permitidos de la magnitud del vector de momentum angular, así como su dirección en el espacio. La magnitud del momentum angular nuclear es de $\sqrt{I(I+1)}\hbar$, en donde I se conoce como el **número cuántico de espín nuclear** y puede ser un entero o un semientero, dependiendo de cómo se combinan los espines del neutrón y el protón. Como se explicó en la sección 42.6, el número cuántico I es el análogo a ℓ para el electrón en un átomo. Además, existe un número cuántico m_I que es el análogo a m_ℓ, en que las proyecciones permitidas del vector de cantidad de movimiento angular del espín nuclear en el eje z son $m_I\hbar$. Los valores de m_I en el intervalo desde $-I$ hasta $+I$ en etapas de 1. (En realidad, para cualquier tipo de espín con un número cuántico S, existe un número cuántico m_S que se clasifica en valores desde $-S$ a $+S$ en etapas de 1.) El valor máximo de la componente z en el vector de la cantidad de movimiento angular de espín es $I\hbar$. La figura 44.18 es un modelo de vector (véase la sección 42.6) que ilustra las orientaciones posibles del vector de espín nuclear y sus proyecciones sobre el eje de las z en el caso de que $I = \frac{3}{2}$.

Figura 44.18 Modelo de vector que muestra las orientaciones posibles del vector del momentum angular de espín nuclear y sus proyecciones sobre el eje z en el caso que $I = \frac{3}{2}$.

El espín nuclear está asociado con un momento magnético nuclear correspondiente, similar al del electrón. El momento magnético de espín de un núcleo se mide en términos del **magnetón nuclear** μ_n, una unidad de momento que se define como

$$\mu_n \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27}\ \mathrm{J/T} \qquad \textbf{(44.30)}$$

◄ Magnetón nuclear

en donde m_p es la masa del protón. Esta definición es análoga a la definición de Bohr para el magnetón μ_B, el cual corresponde al momento magnético de espín de un electrón libre (véase la sección 42.6). Observe que μ_n es menor a μ_B $(= 9.274 \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T})$ en un factor de 1836 debido a la gran diferencia entre la masa del protón y la del electrón.

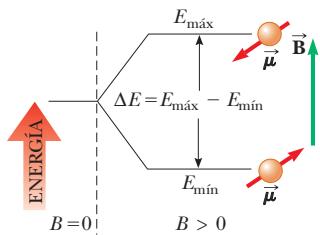



Figura 44.19 Un núcleo con espín de $\frac{1}{2}$ puede ocupar uno de los dos estados de energía cuando se le coloca dentro de un campo magnético externo. El estado $E_{mín}$ de menor energía corresponde al caso del espín alineado con el campo con la mayor precisión posible, de acuerdo con la mecánica cuántica y el estado $E_{máx}$ de mayor energía corresponde al caso del espín lo más opuesto posible al campo.

El momento magnético de un protón libre es de 2.792 8 μ_n. Por desgracia, no existe ninguna teoría general de magnetismo nuclear que explique este valor. El neutrón también tiene un momento magnético, con valor de –1.913 5 μ_n. El signo menos indica que este momento es opuesto a la cantidad de movimiento angular de espín del neutrón. La presencia de momento magnético en el neutrón es en sí sorprendente, considerando que el neutrón no tiene carga alguna. Esto sugiere que el neutrón no es una partícula fundamental, sino que tiene una estructura fundamental formada por elementos cargados. Estudiará esta estructura con mayor profundidad en el capítulo 46.

La energía potencial de un momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ dentro de un campo magnético externo $\vec{B}$ se conoce por $-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ (ecuación 29.18). Cuando el momento magnético $\vec{\mu}$ se alinea con el campo tan precisamente como lo permite la física cuántica, la energía potencial del momento dipolar dentro del campo tiene un valor mínimo $E_{mín}$. Cuando $\vec{\mu}$ se encuentra antiparalelo respecto al campo tanto como sea posible, la energía potencial tiene un valor máximo $E_{máx}$. En general, existen otros estados de energía entre estos valores, que corresponden a las direcciones cuantizadas del momento magnético respecto al campo. Para un núcleo con espín de $\frac{1}{2}$ sólo existen dos estados permitidos, con energías de $E_{mín}$ y $E_{máx}$. Estos dos estados de energía aparecen en la figura 44.19.

Es posible observar las transiciones entre estos dos estados de espín empleando una técnica llamada **resonancia magnética nuclear** (**NMR,** nuclear magnetic resonance). Se introduce un campo magnético constante (**B** en la figura 44.19) para definir un eje *z* y definir las energías de los estados espín. A continuación, se aplica un segundo campo magnético, más débil y oscilante, orientado en sentido perpendicular respecto a **B,** lo que produce una nube de fotones de radio frecuencia alrededor de lo nuestro. Cuando la frecuencia del campo oscilatorio es ajustada de modo que la energía del fotón iguala la diferencia de energía entre los estados del espín, hay una absorción neta de fotones de parte de los núcleos, que puede detectarse en forma electrónica.

Figura 44.20 Aparato experimental para la resonancia magnética nuclear. El campo magnético de radiofrecuencia, producido por la bobina que rodea a la muestra y suministrado por el oscilador de frecuencia variable, está orientado en forma perpendicular respecto al campo magnético constante producido por el electroimán. Cuando los núcleos en la muestra cumplen con la condición de resonancia, absorben energía proveniente del campo de radiofrecuencia de la bobina, y esta absorción modifica las características del circuito del cual forma parte esta última. La mayoría de los espectrómetros RMN modernos se valen de imanes superconductores con intensos campos fijos que funcionan a frecuencias de alrededor de 200 MHz.

En la figura 44.20 aparece un diagrama simplificado del aparato que se utiliza en resonancia magnética nuclear. La energía que absorben los núcleos es suministrada por el generador que produce el campo magnético oscilatorio. La resonancia magnética nuclear, al igual que una técnica relacionada conocida como *resonancia de espín del electrón,* son métodos extremadamente importantes para estudiar los sistemas nucleares y atómicos, así como las formas en que estos sistemas interactúan con sus alrededores.

Una técnica de diagnóstico médico ampliamente utilizada llamada **IRM,** por **formación de imagen por resonancia magnética,** se basa en la resonancia magnética nuclear. Ya que casi dos tercios de los átomos en el cuerpo humano son de hidrógeno (el cual produce una señal NMR fuerte), las IRM funcionan muy bien para ver tejidos internos. Se coloca al paciente dentro de un gran solenoide que suministra un campo magnético constante en el tiempo, pero que varía en magnitud en forma espacial a lo largo del cuerpo. Debido a las variaciones en el campo, los átomos de hidrógeno en distintas partes del cuerpo tienen diferentes energías de separación entre los estados del espín, por lo que puede utilizarse la señal de resonancia para obtener información sobre la posición de los protones. Se utiliza una computadora para analizar la información de posición y proporcionar la información para construir una imagen final. En la figura 44.21 aparece un IRM que muestra con increíble detalle la estructura interna del cuerpo.

Figura 44.21 Rastreo IRM con color mejorado del cerebro humano.

La principal ventaja de las IRM sobre otras técnicas de formación de imagen es que causa un daño celular mínimo. Los fotones asociados con las señales de radiofrecuencia empleados en la obtención de IRM tienen energías de sólo 10^{-7} eV. Ya que la fuerza de unión de las moléculas es mucho mayor (aproximadamente 1 eV), la radiación de radiofrecuencia causa muy poco daño a las células. En comparación, los rayos X tienen energías que se clasifican de 10^4 a 10^6 eV, y pueden provocar daños considerables a las células. Por lo tanto, a pesar de los temores de algunas personas originados por asociar la palabra *nuclear* al IRM, ¡la radiación de radiofrecuencia utilizada es muchísimo más segura que los rayos X que estos mismos individuos podrían aceptar con mayor facilidad! Una desventaja del IRM es que el equipo necesario para llevar a cabo el proceso es muy costoso, por lo que las imágenes IRM son de gran valor.

¡El campo magnético producido por el solenoide es suficiente para levantar un automóvil, y la señal de radio tiene una magnitud semejante a la utilizada por una

pequeña estación de radio comercial! Si bien las IRM son seguras si se utilizan normalmente, el campo magnético intenso que crea el solenoide requiere muchos cuidados para evitar la presencia de materiales ferromagnéticos dentro de la habitación, cerca del aparato de IRM. Han ocurrido varios accidentes, como en el año 2000, cuando una pistola escapó de la mano de un guardia y se disparó al golpear contra la máquina.

Resumen

DEFINICIONES

Un núcleo está representado por el símbolo ${}^{A}_{Z}X$, donde A es el **número de masa** (el número total de nucleones) y Z es el **número atómico** (el número total de protones). El número total de neutrones en un núcleo es el **número de neutrones** N, donde $A = N + Z$. Los núcleos que tienen el mismo valor Z pero diferentes valores A y N son **isótopos** uno del otro.

El momento magnético de un núcleo se mide en términos del **magnetón nuclear** μ_n, donde

$$\mu_n \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27}\ \text{J/T} \quad \textbf{(44.30)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Si supone que los núcleos son esféricos, su radio está determinado por

$$r = r_0 A^{1/3} \quad \textbf{(44.1)}$$

donde $r_0 = 1.2$ fm.

Los núcleos son estables debido a la **fuerza nuclear** entre nucleones. Esta fuerza de corto alcance domina a la fuerza repulsiva de Coulomb a distancias de menos de casi 2 fm y es independiente de la carga. Los núcleos estables ligeros tienen iguales números de protones y neutrones. Los núcleos estables pesados tienen más neutrones que protones. Los núcleos más estables tienen valores Z y N que son ambos pares.

La diferencia entre la suma de las masas de un grupo de nucleones separados y la masa del núcleo compuesto que contiene estos nucleones, cuando se multiplica por c^2, da la **energía de enlace** E_b del núcleo. La energía de enlace del núcleo de masa M_A se puede calcular usando la expresión

$$E_b\,(\text{MeV}) = [ZM(\text{H}) + Nm_n - M({}^{A}_{Z}\text{X})] \times 931.494\ \text{MeV/u} \quad \textbf{(44.2)}$$

donde M(H) es la masa atómica del átomo de hidrógeno neutro, $M({}^{A}_{Z}\text{X})$ representa la masa atómica de un átomo del isótopo ${}^{A}_{Z}\text{X}$ y m_n es la masa del neutrón.

El **modelo de gota líquida** de estructura nuclear trata los nucleones como moléculas en una gota de líquido. Las cuatro principales contribuciones que influyen en la energía de enlace son el efecto volumétrico, el efecto superficial, el efecto de repulsión de coulomb y el efecto de simetría. Al sumar tales aportaciones resulta en la **fórmula semiempírica de energía de enlace**:

$$E_b = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \quad \textbf{(44.3)}$$

El **modelo de capas**, o **modelo de partícula independiente**, supone que cada nucleón existe en una capa y sólo puede tener valores de energía discretos. La estabilidad de ciertos núcleos se puede explicar con este modelo.

(*continúa*)

Una sustancia radiactiva decae mediante **decaimiento alfa**, **decaimiento beta** o **decaimiento gamma**. Una partícula alfa es el núcleo de ^{4}He, una partícula beta es o un electrón (e^-) o un positrón (e^+) y una partícula gamma es un fotón de alta energía.

Si un material radiactivo contiene N_0 núcleos radiactivos en $t = 0$, el número N de los núcleos restantes después de transcurrido un tiempo t es

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(44.6)}$$

donde λ es la **constante de decaimiento**, un número igual a la probabilidad por segundo de que un núcleo decaerá. La **rapidez de decaimiento**, o **actividad**, de una sustancia radiactiva es

$$R = \left|\frac{dN}{dt}\right| = R_0 e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(44.7)}$$

donde $R_0 = \lambda N_0$ es la actividad en $t = 0$. La **vida media** $T_{1/2}$ es el intervalo de tiempo requerido para la mitad de un número determinado de núcleos radiactivos a desintegrarse, donde

$$T_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda} \qquad \textbf{(44.8)}$$

En el decaimiento alfa, un núcleo de helio se expulsa del núcleo padre con un conjunto discreto de energías cinéticas. Un núcleo que experimenta decaimiento beta emite un electrón (e^-) o un antineutrino ($\bar{\nu}$) o un positrón (e^+) y un neutrino (ν). El electrón o positrón se expulsa con un intervalo de energías. En la **captura de electrón**, el núcleo de un átomo absorbe uno de sus propios electrones y emite un neutrino. En el decaimiento gamma, un núcleo en un estado excitado decae a su estado fundamental y emite un rayo gamma.

Las **reacciones nucleares** pueden presentarse cuando un núcleo objetivo X es bombardeado por una partícula a, lo que resulta en un núcleo hija Y y una partícula saliente b:

$$\text{a} + \text{X} \rightarrow \text{Y} + \text{b} \qquad \textbf{(44.27)}$$

La conversión masa-energía en tal reacción, llamada **energía de reacción** Q, es

$$Q = (M_\text{a} + M_\text{X} - M_\text{Y} - M_\text{b})c^2 \qquad \textbf{(44.28)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. En el experimento de Rutherford suponga que la partícula alfa se dirige directamente hacia el núcleo de un átomo. ¿Por qué no entra en contacto físico con el núcleo?
2. **O** La figura 44.17 muestra que el núcleo ^{212}Bi puede decaer tanto mediante emisión de una partícula alfa como por emisión de un electrón (con una probabilidad diferente). Como se formó naturalmente, este isótopo también emite rayos gamma. Sea W tal núcleo, X el núcleo hija producido por su decaimiento alfa, Y el núcleo hija después de decaimiento beta y Z el núcleo después de emisión gamma. a) Clasifique los núcleos W, X, Y y Z de acuerdo con sus números de masa, de mayor a menor. Note en su clasificación cualquier caso de igualdad. b) Clasifique los núcleos de acuerdo con sus números atómicos. c) Clasifique los núcleos de acuerdo con los números de neutrones que contienen.
3. Explique por qué los núcleos que están lejos de la línea de estabilidad en la figura 44.4 tienden a ser inestables.
4. ¿Por qué son inestables los núcleos muy pesados?
5. **O** Considere dos núcleos pesados X y Y, con números de masa similares. Si X tiene una energía de enlace mayor, ¿cuál de ellos tiene más tendencia a ser más inestable?
6. ¿Por qué es que casi todos los isótopos que existen en la naturaleza se encuentran por encima de la línea $N = Z$ en la figura 44.4?
7. **O i)** Para predecir el comportamiento de un núcleo en una reacción de fisión, ¿cuál modelo sería más apropiado: a) el modelo de la gota líquida o b) el modelo de capas? **ii)** ¿Cuál modelo tendría más éxito para predecir el momento magnético de un núcleo dado? **iii)** ¿Cuál podría explicar mejor el espectro de rayo gamma de un núcleo excitado?
8. "Si no nacieran más personas, la ley de crecimiento de la población se asemejaría mucho a la ley de decaimiento radiactivo." Explique qué significa esta aseveración.
9. **O** Se preparan dos muestras del mismo núclido radiactivo. La muestra G tiene el doble de actividad inicial que la muestra H. **i)** ¿Cómo se compara la vida media de G con la vida media de H? a) Es dos veces mayor. b) Es la misma. c) Es la mitad. **ii)** Después de que cada una pasa por cinco vidas medias, ¿cómo se comparan sus actividades? a) G tiene más del doble de actividad que H. b) G tiene el doble de actividad que H. c) G y H tienen la misma actividad. d) G tiene menor actividad que H.
10. *¿Dos mitades hacen un entero?* ¿Qué fracción de una muestra radiactiva decayó después de transcurridas dos vidas medias?

11. El núcleo radiactivo $^{226}_{88}$Ra tiene una vida media de aproximadamente 1.6×10^3 años. Tomando en consideración que el sistema solar ha existido durante aproximadamente 5000 millones de años, ¿por qué todavía podemos encontrar a este núcleo en la naturaleza (figura P44.11)?

© 1990 Richard Megna, Fundamental Photographs.

Figura P44.11 La pintura en las manecillas y los números de este antiguo reloj contiene una cantidad pequeña de radio natural mezclado con un material fosforescente. El decaimiento del radio ocasiona que el fósforo brille de manera continua.

12. **O** Un neutrón libre experimenta decaimiento beta mediante emisión de un electrón con una vida media de 614 s. ¿Un protón libre puede experimentar un decaimiento similar? a) sí, el mismo decaimiento, b) sí, pero mediante emisión de positrón, c) sí, pero con una vida media muy diferente, d) no.

13. Si un núcleo de ^{226}Ra inicialmente en reposo sufre decaimiento alfa, ¿cuál partícula tendrá más energía cinética después del decaimiento, la partícula alfa o el núcleo hija? Explique su respuesta.

14. ¿Puede un núcleo emitir partículas alfa con diferentes energías? Explique su respuesta.

15. **O** ¿Cuál de las siguientes cantidades representa la energía de reacción de una reacción nuclear?
a) (masa final − masa inicial)/c^2.
b) (masa inicial − masa final)/c^2.
c) (masa final − masa inicial)c^2.
d) (masa inicial − masa final)c^2.
e) ninguna de estas opciones.

16. Suponga que fuera posible demostrar que hace 10 000 años la intensidad de los rayos cósmicos sobre la superficie de la Tierra era mucho mayor. ¿Cómo afectaría esta diferencia la validez de los datos obtenidos mediante fechado por carbono a partir de muestras antiguas de material orgánico? Explique su respuesta.

17. ¿Cuántos valores de I_z son posibles para $I = \frac{5}{2}$? ¿Y para $I = 3$?

18. **O** En resonancia magnética nuclear, ¿cómo el aumentar el valor del campo magnético constante cambia la frecuencia del campo de radiofrecuencia que excita una transición particular? a) La frecuencia es proporcional al cuadrado del campo constante. b) La frecuencia es directamente proporcional al campo constante. c) La frecuencia es independiente del campo constante. d) La frecuencia es inversamente proporcional al campo constante. e) La frecuencia es proporcional al recíproco del cuadrado del campo constante.

19. ¿Tienen causa todos los eventos naturales? ¿Tiene sentido el Universo? Justifique su respuesta. *Nota:* Puede considerar de nuevo la pregunta 16 en el capítulo 6, sobre si el futuro está predeterminado.

Problemas

Sección 44.1 Algunas propiedades de los núcleos

1. ¿Cuál es el orden de magnitud del número de protones de su cuerpo?; ¿del número de neutrones?; ¿del número de electrones?

2. **Problema de repaso.** Se acelera un carbono ionizado individualmente a causa de 1000 V y se pasa por un espectrómetro de masa para determinar los isótopos presentes (véase el capítulo 29). La magnitud del campo magnético en el espectrómetro es de 0.200 T. a) Determine el radio orbital para los isótopos de ^{12}C y ^{13}C conforme atraviesan el campo. b) Demuestre que la relación de los radios puede expresarse en la forma
$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$
y verifique que los radios que obtuvo en el inciso a) coincidan con esto.

3. a) ¿Qué fracción del espacio en un tanque de gas hidrógeno a 0°C y 1 atm ocupan las moléculas de hidrógeno? Suponga que cada átomo de hidrógeno es una esfera con 0.100 nm de diámetro y una molécula de hidrógeno consiste en dos de tales esferas en contacto. b) ¿Qué fracción del espacio dentro de un átomo de hidrógeno ocupa su núcleo, de 1.20 fm de radio?

4. ● En un experimento de dispersión Rutherford se disparan partículas alfa con energía cinética de 7.70 MeV hacia un núcleo de oro. a) Use la conservación de la energía para determinar la distancia mínima a la que se pueden encontrar la partícula alfa y el núcleo de oro. Suponga que el núcleo permanece en reposo. b) **¿Qué pasaría si?** Calcule la longitud de onda de De Broglie de la partícula alfa de 7.70 MeV y compárela con la distancia obtenida en el inciso a). c) A partir de esta comparación, ¿por qué en el experimento de dispersión de Rutherford es más apropiado tratar la partícula alfa como si fuera una partícula en vez de una onda?

5. a) Utilice métodos de energía para calcular la distancia mínima de acercamiento para una colisión de frente entre una partícula alfa con energía inicial de 0.500 MeV y un núcleo de oro (^{197}Au) en reposo. (Suponga que el núcleo de oro permanece en reposo durante la colisión.) b) ¿Cuál es la rapidez inicial mínima que debe tener la partícula alfa para poder acercarse hasta 300 fm?

6. Encuentre el radio de a) un núcleo de $^{4}_{2}$He y b) un núcleo de $^{238}_{92}$U.

7. Se espera que una estrella que termina su vida con una masa del doble de la masa del Sol se colapse, combinando sus protones y electrones para formar una estrella de neutrones. Se

podría pensar en esta estrella como un núcleo atómico gigantesco. Si una estrella con masa de $2 \times 1.99 \times 10^{30}$ kg se colapsara en neutrones ($m_n = 1.67 \times 10^{-27}$ kg), ¿cuál sería su radio? (Suponga que $r = r_0 A^{1/3}$.)

8. **Problema de repaso.** ¿Cuál sería la fuerza gravitacional entre dos pelotas de golf fabricadas con material nuclear? Cada una con 4.30 cm de diámetro que se encuentran a 1.00 m de distancia,

Sección 44.2 Energía de enlace nuclear

9. Calcule la energía de enlace por nucleón para a) ^{2}H, b) ^{4}He, c) ^{56}Fe, y d) ^{238}U.

10. ● El isótopo del hierro ^{56}Fe se encuentra cerca del pico de la curva de estabilidad. Esta es la explicación por la cual el hierro es más común en el universo que los elementos más pesados como lo revela en el espectro del Sol y muchas otras estrellas. Demuestre que el ^{56}Fe tiene una energía de enlace mayor por nucleón que sus vecinos ^{55}Mn y ^{59}Co. Compare sus resultados con la figura 44.5.

11. Los núcleos con los mismos números de masa se conocen como *isobaros*. El isótopo $^{139}_{57}$La es estable. Un isobaro radiactivo, $^{139}_{59}$Pr, se localiza por debajo de la línea de los núcleos estables de la figura 44.4 y decae por emisión de e^+. Otro isobaro radiactivo de $^{139}_{57}$La, $^{139}_{55}$Cs, decae por emisión de e^- y se localiza por encima de la línea de los núcleos estables de la figura 44.4. a)¿Cuáles de estos tres isobaros tiene una mayor relación de neutrones a protones? b) ¿Cuál tiene la mayor energía de enlace por nucleón? c) ¿Cuál se espera que sea más pesado, $^{139}_{59}$Pr o $^{139}_{55}$Cs?

12. ● Dos núcleos con un mismo número de masa se conocen como isóbaros. Calcule la diferencia en energías de enlace por nucleón de los isóbaros $^{23}_{11}$Na y $^{23}_{12}$Mg. ¿Cómo explica la diferencia?

13. Un par de núcleos en los cuales $Z_1 = N_2$ y $Z_2 = N_1$ se conocen como *isobaros espejo* (los números atómicos y de neutrones se intercambian). La medición de las energías de enlace en estos núcleos puede utilizarse para obtener evidencia de que la carga es independiente de las fuerzas nucleares (es decir, las fuerzas nucleares protón-protón, protón-neutrón y neutrón-neutrón son iguales). Calcule la diferencia en energías de enlace para los dos isobaros espejo $^{15}_{8}$O y $^{15}_{7}$N. La repulsión eléctrica entre ocho protones, en vez de siete, hace la diferencia.

14. ● La energía necesaria para construir una esfera con carga uniforme total Q y radio R es $U = 3k_eQ^2/5R$, en donde k_e es la constante de Coulomb (véase el problema 64). Suponga que un núcleo de ^{40}Ca contiene 20 protones distribuidos en forma uniforme dentro de un volumen esférico. a) ¿Cuánta energía es necesaria de acuerdo con la ecuación anterior para contrarrestar su repulsión eléctrica? (*Sugerencia*: Primero calcule el radio de un núcleo de ^{40}Ca.) b) Calcule la energía de unión del ^{40}Ca. c) Explique las conclusiones a las que llegó comparando el resultado del inciso b) con el del inciso a).

15. Calcule la energía mínima necesaria para retirar un neutrón del núcleo $^{43}_{20}$Ca.

Sección 44.3 Modelos nucleares

16. ● a) En el modelo de gota de líquido de la estructura nuclear, ¿por qué tiene un signo de menos el término de efecto de superficie, $-C_2A^{2/3}$? b) **¿Qué pasaría si?** La energía de enlace del núcleo aumenta al incrementarse la relación volumen a superficie. Calcule esta relación para formas esféricas y cúbicas, y explique cuál de ellas es más recomendable para núcleos.

17. Con ayuda de la gráfica en la figura 44.5, calcule cuánta energía es liberada cuando un núcleo con número de masa 200 se fisiona en dos núcleos con número de masa 100 cada uno.

18. a) Utilice la fórmula de energía de enlace semiempírica para calcular la energía de unión de $^{56}_{26}$Fe. b) ¿Qué porcentaje del total de la energía de enlace es aportado por cada uno de los cuatro términos?

Sección 44.4 Radiactividad

19. Una muestra de material radiactivo contiene 1.00×10^{15} átomos y tiene una actividad de 6.00×10^{11} Bq. ¿Cuál es su vida media?

20. La vida media de ^{131}I es de 8.04 días. En cierto día, la actividad de una muestra de yodo 131 es de 6.40 mCi. ¿Cuál será su actividad 40.2 días después?

21. Una muestra recién preparada de cierto isótopo radiactivo tiene una actividad de 10.0 mCi. Después de 4.00 h, su actividad es de 8.00 mCi. a) Determine la constante de decaimiento y la vida media. b) ¿Cuántos átomos del isótopo se encontraban en la muestra recién preparada? c) ¿Cuál es la actividad de la muestra 30.0 h después de haber sido preparada?

22. A partir de la ecuación que expresa la ley de decaimiento radiactivo, deducir las siguientes fórmulas útiles para la constante de decaimiento y la vida media, en términos del intervalo de tiempo Δt durante el cual la tasa de decaimiento disminuye de R_0 a R:

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t}\ln\left(\frac{R_0}{R}\right) \qquad T_{1/2} = \frac{(\ln 2)\Delta t}{\ln(R_0/R)}$$

23. El isótopo radiactivo ^{198}Au tiene una vida media de 64.8 h. Una muestra que contiene este isótopo tiene una actividad inicial ($t = 0$) de 40.0 μCi. Calcule la cantidad de núcleos que decaen en el intervalo de tiempo entre $t_1 = 10.0$ h y $t_2 = 12.0$ h.

24. Un núcleo radiactivo tiene una vida media de $T_{1/2}$. Una muestra que contiene a estos núcleos presenta una actividad inicial de R_0. Calcule la cantidad de núcleos que decaen durante el intervalo entre los tiempos t_1 y t_2.

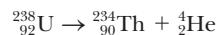
25. Considere una muestra radiactiva. Determine la proporción del número de núcleos que decae durante la primera mitad de su vida media, al número de núcleos que decae durante la segunda mitad de su vida media.

26. ● a) El núcleo hija formado durante el decaimiento es a menudo radiactivo. Sea N_{10} la cantidad de núcleos padre en el tiempo $t = 0$, $N_1(t)$ la cantidad de núcleos padre en el tiempo t, y λ_1 la constante de decaimiento de los núleos padre. Suponga que el número de núcleos hija en el tiempo $t = 0$ es cero, que $N_2(t)$ es el número de núcleos hija en el tiempo t, y que λ_2 es la constante de decaimiento del núcleo hija. Demuestre que $N_2(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

b) Verifique por sustitución que esta ecuación diferencial conduce a la solución

$$N_2(t) = \frac{N_{10}\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}\right)$$

Esta ecuación es la ley de decaimientos radiactivos sucesivos. c) El ^{218}Po decae a ^{214}Pb con una vida media de 3.10 min, y el ^{214}Pb decae a ^{214}Bi con una vida media de 26.8 min. Sobre su mismo eje, trace gráficos de $N_1(t)$ para ^{218}Po y $N_2(t)$ para ^{214}Pb. Suponga que $N_{10} = 1000$ núcleos, y elija valores de t de 0 a 36 min con intervalos de 2 min. La curva para ^{214}Pb primero se eleva hasta un máximo y después comienza a decaer. ¿En qué instante t_m el número de núcleos ^{214}Pb es máximo? d) Aplicando la condición para un máximo $dN_2/dt = 0$, deduzca una ecuación simbólica para t_m en función de λ_1 y λ_2. Explique si el valor obtenido en el inciso c) coincide con esta ecuación.

27. En un experimento sobre la transportación de nutrientes en la estructura de las raíces de una planta se utilizan dos núclidos, X y Y. Inicialmente, hay 2.50 veces más núcleos de tipo X que de tipo Y. Tan sólo tres días después hay 4.20 más núcleos de tipo X que de tipo Y. El isótopo Y tiene una vida media de 1.60 días. ¿Cuál es la vida media del isótopo X?

Sección 44.5 Los procesos de decaimiento

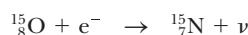
28. Identifique el núclido o partícula (X) que falta:

a) $X \rightarrow {}^{65}_{28}\text{Ni} + \gamma$
b) ${}^{215}_{84}\text{Po} \rightarrow X + \alpha$
c) $X \rightarrow {}^{55}_{26}\text{Fe} + e^+ + \nu$
d) ${}^{109}_{48}\text{Cd} + X \rightarrow {}^{109}_{47}\text{Ag} + \nu$
e) ${}^{14}_{7}\text{N} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow X + {}^{17}_{8}\text{O}$

29. Encuentre la energía liberada durante el decaimiento alfa:

$$ {}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He} $$

Encontrará la tabla A.3 de utilidad.

30. Un espécimen viviente en equilibrio con la atmósfera contiene un átomo de ^{14}C (vida media = 5730 años) por cada 7.7×10^{11} átomos estables de carbono. Una muestra arqueológica de madera (celulosa, $C_{12}H_{22}O_{11}$) contiene 21.0 mg de carbono. Cuando se coloca una muestra dentro de un contador beta blindado con una eficiencia de conteo de 88.0%, se acumulan 837 conteos en una semana. Suponiendo que el flujo del rayo cósmico y la atmósfera terrestre no han cambiado considerablemente desde la formación de la muestra, encuentre la antigüedad de la misma.

31. ● Una muestra consiste en 1.00×10^6 núcleos radiactivos con una vida media de 10.0 h. Ningún otro núcleo está presente en el momento $t = 0$. Los núcleos hija estables se acumulan en la muestra conforme pasa el tiempo. a) Deducir una ecuación que dé el número de núcleos hija N_d como función del tiempo. b) Bosqueje o describa una gráfica del número de núcleos hija como función del tiempo. ¿Cuáles son los números máximo y mínimo de los núcleos hija y cuándo se presentan? ¿Cuáles son las relaciones máxima y mínima de cambio en el número de núcleos hija y cuándo se presentan?

32. Un núcleo de ^{3}H decae en ^{3}He produciendo un electrón y un antineutrino, de acuerdo con la reacción

$$ {}^{3}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + e^- + \bar{\nu} $$

Los símbolos en esta reacción se refieren a los núcleos. Escriba la reacción refiriéndose a los átomos neutros, agregando un electrón a ambos lados. A continuación use la tabla 44.2 para determinar la energía total liberada en esta reacción.

33. El núcleo ${}^{15}_{8}$O decae mediante captura de electrones. La reacción nuclear se escribe como

$$ {}^{15}_{8}\text{O} + e^- \rightarrow {}^{15}_{7}\text{N} + \nu $$

a) Escriba el proceso de comportamiento para una sola partícula dentro del núcleo. b) Escriba el proceso de desintegración atribuido a átomos neutros. c) Determine la energía del neutrino. Ignore el retroceso del núcleo hija.

34. Determine cuál de las siguientes desintegraciones pueden presentarse en forma espontánea:

a) ${}^{40}_{20}\text{Ca} \rightarrow e^+ + {}^{40}_{19}\text{K}$
b) ${}^{98}_{44}\text{Ru} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{94}_{42}\text{Mo}$
c) ${}^{144}_{60}\text{Nd} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{140}_{58}\text{Ce}$

Sección 44.6 Radiactividad natural

35. Escriba el símbolo del isótopo correcto en cada uno de los cuadros en blanco de la figura P44.35, la cual muestra las secuencias de desintegraciones en las series radiactivas naturales, comenzando por el isótopo de vida más larga, el uranio 235, y terminando con el núcleo de plomo 207 estable.

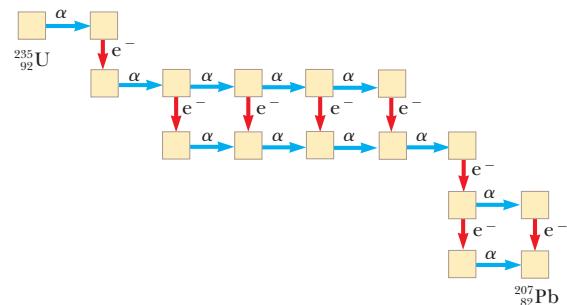
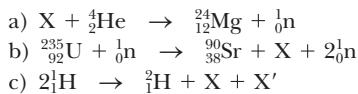
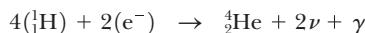
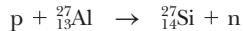



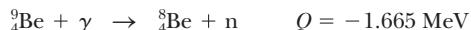
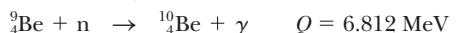
Figura P44.35

36. Una muestra de roca contiene rastros de ^{238}U, ^{235}U, ^{232}Th, ^{208}Pb, ^{207}Pb y ^{206}Pb. Un análisis a profundidad revela que la relación de la cantidad de ^{238}U a la de ^{206}Pb es de 1.164. a) Suponga que la roca originalmente no contenía plomo, y determine la antigüedad de la misma. b) ¿Cuáles deben ser las relaciones de ^{235}U a ^{207}Pb y de ^{232}Th a ^{208}Pb, de forma que produzcan la misma antigüedad para esta roca? Ignore las diminutas cantidades de productos intermedios en las cadenas de desintegración. Observe que esta forma de fechado múltiple produce determinaciones geológicas confiables.

37. *Contaminación del aire en interiores.* El uranio se encuentra presente naturalmente en las rocas y en la tierra. En una de las etapas de su serie de decaimientos radiactivos, el ^{238}U produce el gas radón 222, químicamente inerte, el cual tiene una vida media de 3.82 días. El radón se desprende de la tierra para mezclarse en la atmósfera, haciendo que el aire exterior adquiera una actividad radiactiva de 0.3 pCi/L. Dentro de los hogares, el ^{222}Rn puede ser un contaminante serio, acumulándose para alcanzar actividades mucho mayores en espacios cerrados. Si la radiactividad del radón supera 4 pCi/L, la Agencia de Protección del Ambiente sugiere dar los pasos necesarios para disminuirla, como reducir la infiltración del aire desde la tierra. a) Convierta la actividad de 4 pCi/L a unidades de becquerel por metro cúbico. b) ¿Cuántos átomos de ^{222}Rn existen en un metro cúbico de aire que presenta esta actividad? c) ¿Qué fracción de la masa del aire constituye el radón?

38. ● El isótopo más común del radón es ^{222}Rn, que tiene una vida media de 3.82 días. a) ¿Qué fracción de los núcleos de radón existentes en la tierra hace una semana ahora se están desintegrando? b) ¿Qué fracción de éstos existían hace un año? c) En vista de estos resultados, explique por qué el radón sigue siendo un problema que contribuye de forma importante a nuestra exposición a la radiación.

Sección 44.7 Reacciones nucleares

39. Identifique los núcleos y partículas X y X′ desconocidas en las siguientes reacciones nucleares:

a) $X + {}^4_2He \rightarrow {}^{24}_{12}Mg + {}^1_0n$
b) ${}^{235}_{92}U + {}^1_0n \rightarrow {}^{90}_{38}Sr + X + 2{}^1_0n$
c) $2{}^1_1H \rightarrow {}^2_1H + X + X'$

40. Después de determinar que el Sol existe desde hace cientos de millones de años, pero antes del descubrimiento de la física nuclear, los científicos no podían explicar por qué el Sol continuaba ardiendo durante un intervalo de tiempo tan prolongado. Por ejemplo, si fuese un fuego de carbón, se habría extinguido en aproximadamente 3000 años. Suponga que el Sol, cuya masa es 1.99×10^{30} kg, originalmente consistía por completo en hidrógeno y su potencia de salida total es 3.85×10^{26} W. a) Si supone que el mecanismo generador de energía del Sol es la fusión de hidrógeno en helio mediante la reacción neta

$$4({}^1_1H) + 2(e^-) \rightarrow {}^4_2He + 2\nu + \gamma$$

calcule la energía (en joules) entregada por esta reacción. d) Determine cuántos átomos de hidrógeno constituyen al Sol. Considere que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg. c) Si la potencia de salida total permanece constante, ¿después de qué intervalo de tiempo todo el hidrógeno se convertirá en helio y hará que muera el Sol? El tiempo de vida real proyectado del Sol es aproximadamente 10 mil millones de años, porque sólo el hidrógeno, un núcleo relativamente pequeño, está disponible como combustible. Sólo en el núcleo hay temperaturas y densidades suficientemente altas para que la reacción de fusión sea autosostenible.

41. El oro natural tiene sólo un isótopo, ${}^{197}_{79}Au$. Si se irradia el oro natural con un flujo de neutrones lentos, se produce una emisión de electrones. a) Escriba la ecuación de esta reacción. b) Calcule la energía máxima de los electrones emitidos.

42. Se hace incidir un haz de protones de 6.61 MeV sobre un objetivo de ${}^{27}_{13}Al$. Los protones que hacen colisión producen la reacción

$$p + {}^{27}_{13}Al \rightarrow {}^{27}_{14}Si + n$$

Sin tomar en cuenta algún retroceso del núcleo producto, determine la energía cinética de los neutrones emergentes.

43. Se observan las siguientes reacciones:

$${}^9_4Be + n \rightarrow {}^{10}_4Be + \gamma \qquad Q = 6.812 \text{ MeV}$$

$${}^9_4Be + \gamma \rightarrow {}^8_4Be + n \qquad Q = -1.665 \text{ MeV}$$

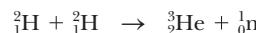
Use la masa de ${}^9Be$ de la tabla 44.2 y calcule las masas de ${}^8Be$ y ${}^{10}Be$ en unidades de masa unificadas a cuatro cifras decimales.

44. a) Suponga que un núcleo de ${}^{10}_5B$ es golpeado por una partícula alfa, liberando en la reacción un protón y un núcleo producto. ¿Cuál es el núcleo producto? b) Una partícula alfa y un núcleo producto son producidos cuando ${}^{13}_6C$ es golpeado por un protón. ¿Cuál es el núcleo producto?

Sección 44.8 Resonancia magnética nuclear y formación de imágenes por resonancia magnética

45. La radiofrecuencia a la cual un núcleo manifiesta absorción por resonancia entre estados de espín es conocida como la frecuencia de Larmor, y se obtiene mediante

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2\mu B}{h}$$

Calcule la frecuencia Larmor para a) los neutrones libres en un campo magnético de 1.00 T, b) los protones libres en un campo magnético de 1.00 T y c) los protones libres en el campo magnético de la Tierra en una ubicación donde la magnitud del campo es de 50.0 μT.

46. Construya un diagrama como el de la figura 44.18 para los casos en los cuales I es igual a a) 5/2 y b) 4.

Problemas adicionales

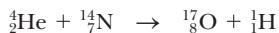
47. a) Un método para producir neutrones para uso experimental es el bombardeo de núcleos ligeros con partículas alfa. En el método empleado por James Chadwick en 1932, partículas alfa emitidas por polonio inciden sobre núcleos de berilio:

$${}^4_2He + {}^9_4Be \rightarrow {}^{12}_6C + {}^1_0n$$

¿Cuál es el valor de Q? b) También a menudo se producen neutrones por medio de aceleradores de partículas pequeñas. En uno de los diseños, deuterones acelerados dentro de un generador Van de Graaff bombardean otros núcleos de deuterio:

$${}^2_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^3_2He + {}^1_0n$$

¿Esta reacción es exotérmica o endotérmica? Calcule el valor Q.

48. Además de descubrir el neutrón en 1932, James Chadwick determinó la masa de la partícula recién descubierta disparando un haz de neutrones rápidos, todos con una misma rapidez, hacia dos objetivos diferentes y midiendo las magnitudes de velocidad de retroceso máximas de los núcleos objetivo. La rapidez máxima se produce cuando se presenta una colisión elástica de frente entre un neutrón y un núcleo inmóvil del objetivo. a) Represente las masas y las magnitudes de velocidad finales de los dos núcleos objetivo como m_1, v_1, m_2 y v_2, y suponga que es aplicable la física newtoniana. Demuestre que la masa del neutrón puede calcularse con la ecuación

$$m_n = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{v_2 - v_1}$$

b) Chadwick dirigió un haz de neutrones (producidos mediante una reacción nuclear) en parafina, la cual contiene hidrógeno. La rapidez máxima de los protones expulsados demostró ser de 3.3×10^7 m/s. Ya que la velocidad de los neutrones no podía determinarse directamente, se llevó a cabo un segundo experimento usando átomos de la misma fuente y núcleos de nitrógeno como objetivo. La rapidez máxima de retroceso de los núcleos de nitrógeno es de 4.7×10^6 m/s. Las masas de un protón y de un núcleo de nitrógeno se consideraron de 1 u y 14 u, respectivamente. ¿Cuál fue el valor que utilizó Chadwick para la masa del neutrón?

49. Cuando la reacción nuclear representada en la ecuación 44.27 es endotérmica, la energía de la reacción Q es negativa. Para que la reacción pueda continuar, la partícula que está por entrar debe tener una energía mínima, conocida como energía de umbral, E_u. Cierta fracción de la energía de la partícula incidente se transfiere al núcleo compuesto para conservar el momentum. Por lo tanto, E_u debe ser mayor que Q. a) Demuestre que

$$E_u = -Q\left(1 + \frac{M_a}{M_X}\right)$$

b) Calcule la energía de umbral de la partícula alfa incidente en la reacción

$$^{4}_{2}\text{He} + ^{14}_{7}\text{N} \rightarrow ^{17}_{8}\text{O} + ^{1}_{1}\text{H}$$

50. **Problema de repaso.** a) ¿La masa de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental es mayor o menor que la suma de las masas de un protón y un electrón? b) ¿Cuál es la diferencia de masa? c) ¿Qué tan grande es la diferencia, como porcentaje de la masa total? d) ¿Es suficientemente grande como para afectar el valor de la masa atómica que se menciona a seis cifras decimales en la tabla 44.2?

51. Escriba el enunciado de un problema para el cual la siguiente ecuación aparezca en la solución. Determine el valor de la incógnita en la ecuación e identifique su significado

$$10.012\,937 \text{ u} + 4.002\,603 \text{ u} = 13.003\,355 \text{ u} + 1.007\,825 \text{ u} + Q/c^2$$

52. Un subproducto de algunos reactores de fisión es el isótopo $^{239}_{94}$Pu, un emisor alfa con un vida media de 24 120 años:

$$^{239}_{94}\text{Pu} \rightarrow ^{235}_{92}\text{U} + \alpha$$

Considere una muestra de 1.00 kg de $^{239}_{94}$Pu puro en $t = 0$. Calcule a) la cantidad de núcleos $^{239}_{94}$Pu presentes en $t = 0$ y b) la actividad inicial de la muestra. c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto tiempo tiene que estar almacenada la muestra si un nivel de actividad “seguro” es de 0.100 Bq?

53. a) ¿Puede el ^{57}Co decaer por emisión de e^+? Explique su respuesta. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Puede el ^{14}C decaer por emisión de e^-? Explique. Puede utilizar la tabla 44.2 c) Si alguna de sus respuestas es afirmativa, ¿cuál es el intervalo de energías cinéticas disponibles para la partícula beta?

54. a) Determine el radio del núcleo $^{12}_{6}$C. b) Encuentre la fuerza de repulsión entre un protón en la superficie de un núcleo $^{12}_{6}$C y los cinco protones restantes. c) ¿Cuánto trabajo (en MeV) debe realizarse para vencer esta repulsión eléctrica en el transporte del último protón desde una gran distancia hasta la superficie del núcleo? d) Repita a), b) y c) para $^{238}_{92}$U.

55. ● a) ¿Por qué está prohibido el decaimiento beta $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ para un protón libre? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Por qué es posible esta misma reacción si el protón está unido a un núcleo? Por ejemplo, se presenta la siguiente reacción:

$$^{13}_{7}\text{N} \rightarrow ^{13}_{6}\text{C} + e^+ + \nu$$

c) ¿Cuánta energía es liberada en la reacción presentada en b)? *Sugerencia*: Agregue siete electrones a ambos lados de la reacción para escribirla para átomos neutros. Puede utilizar la tabla 44.2.

56. La actividad de una muestra radiactiva fue observada durante 12 h, y con las cantidades de conteo netas aparecen en la tabla:

Tiempo (h)	Relación de conteo (conteo/min)
1.00	3100
2.00	2450
4.00	1480
6.00	910
8.00	545
10.0	330
12.0	200

a) Haga una gráfica del logaritmo de la rapidez de conteo como una función del tiempo. b) Determine la constante de decaimiento y la vida media de los núcleos radiactivos de la muestra. c) ¿Qué relación de conteo esperaría para la muestra en $t = 0$? d) Suponiendo que la eficiencia del instrumento contador fuera de 10.0%, calcule el número de átomos radiactivos en la muestra en $t = 0$.

57. Después de la repentina liberación de radiactividad en el accidente del reactor nuclear de Chernobyl en 1986, la radiactividad de la leche en Polonia se elevó a 2000 Bq/L debido al yodo 131 presente en el pasto que comía el ganado lechero. El yodo radiactivo, el cual tiene una vida media de 8.04 días, es particularmente riesgoso, ya que el yodo se concentra en la glándula tiroides. El accidente de Chernobyl provocó un aumento mesurable en el cáncer de tiroides en niños en Belarus. a) Por comparación encuentre la actividad de la leche debida al potasio. Suponga que un litro de leche contiene 2.00 g de potasio, del cual 0.011 7% es el isótopo ^{40}K, con una vida media de 1.28×10^9 años. b) ¿Después de transcurrido cuánto tiempo decaería la actividad del yodo por debajo de la actividad del potasio?

58. Cuando un núcleo queda en un estado excitado después de cualquier tipo de reacción o perturbación, éste puede volver a su estado normal (fundamental) emitiendo un fotón de rayo gamma (o varios fotones). Este proceso se describe en la ecuación 44.24. El núcleo emisor debe retroceder para conservar su energía y su cantidad de movimiento. a) Demuestre que la energía de retroceso del núcleo es de

$$E_r = \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

en donde ΔE es la diferencia en energía entre los estados de excitación y fundamental de un núcleo con masa M. b) Calcule la energía de retroceso del núcleo ^{57}Fe cuando decae por emisión gamma a partir del estado de excitación 14.4 keV. Para este cálculo, suponga que la masa es de 57 u. (*Sugerencias*: Cuando escriba la ecuación de conservación de energía use $(Mv)^2/2M$ para la energía cinética del núcleo que retrocede. Además, suponga que $hf << Mc^2$ y utilice la expansión binomial.)

59. Una teoría de astrofísica nuclear propone que todos los elementos más pesados que el hierro se forman en explosiones de supernovas al final de la vida de las estrellas gigantes. Suponga que en el momento de la explosión había iguales cantidades de ^{235}U y ^{238}U. ¿Cuánto tiempo hace que explotaron la estrella o estrellas que liberaron los elementos que formaron nuestro planeta? La relación presente de $^{235}\text{U}/^{238}\text{U}$ es de 0.007 25. Las vidas medias del ^{235}U y ^{238}U son 0.704×10^9 años y 4.47×10^9 años.

60. Los habitantes de Europa denominaron a cierta orientación en el cielo como entre los cuernos de Tauro, el Toro. En el día que ellos conocían como el 4 de julio de 1054 d.C., apareció una luz brillante en este punto. Los habitantes de Europa no dejaron ningún registro de esta supernova que haya sobrevivido hasta el presente. La supernova pudo verse a la luz del día durante algunos días. Conforme se fue desvaneciendo, continuó visible por años, oscureciéndose durante algún tiempo junto con la vida media de 77.1 días del cobalto 56 que se creó durante la explosión. a) Los restos de esta estrella forman ahora la nebulosa Cangrejo (véase la fotografía de apertura del capítulo 34). En ésta, ¿a qué fracción de la actividad inicial ha decrecido el cobalto 56 hoy en día? b) Suponga que un estadounidense, de la tribu llamada Anasazi, hiciera un dibujo al carbón de la supernova. ¿A qué fracción de la actividad original ha decaído ahora el carbono 14 en el carboncillo?

61. **Problema de repaso.** Considere el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, con el electrón en estado fundamental. El

campo magnético en el núcleo producido por el electrón en órbita, tiene un valor de 12.5 T. (Véase el capítulo 30, problema 1.) El protón puede tener su momento magnético alineado a cualquiera de las dos direcciones perpendiculares al plano de la órbita del electrón. Debido a la interacción entre el momento magnético del protón y el campo magnético del electrón, habrá una diferencia en energía entre estados con las dos orientaciones diferentes del momento magnético del protón. Determine la diferencia de energía, en eV.

62. *El estudiante determinará la vida media del* ^{137}Ba. El isótopo radiactivo del bario ^{137}Ba tiene una vida media relativamente corta y puede extraerse con facilidad a partir de una solución que contenga su padre, el cesio (^{137}Cs). Este isótopo del bario se utiliza comúnmente durante los ejercicios de laboratorio de estudiantes universitarios para demostrar la ley de decaimiento radiactivo. Los estudiantes, con ayuda del modesto equipo experimental, tomaron los datos que aparecen en la figura P44.62. Determine la vida media del decaimiento de ^{137}Ba con ayuda de sus datos.

Figura P44.62

63. Los neutrones libres tienen una vida media característica de 10.4 min. ¿Qué fracción de un grupo de neutrones libres con energía cinética de 0.040 0 eV decaerá antes de viajar una distancia de 10.0 km?

64. **Problema de repaso.** Considere un modelo del núcleo en el cual la carga positiva (Ze) está uniformemente distribuida por toda una esfera de radio R. Al integrar la densidad de energía $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ en todo el espacio, demuestre que la energía potencial eléctrica puede escribirse como

$$U = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{3k_eZ^2e^2}{5R}$$

En el problema 62 capítulo 25 se deduce el mismo resultado por un método diferente.

65. ● En un pedazo de roca proveniente de la Luna, se mide por análisis que el contenido de ^{87}Rb es de 1.82×10^{10} átomos por gramo del material, y el contenido de ^{87}Sr se mide como de 1.07×10^{9} átomos por gramo a) Calcule la antigüedad de la roca. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Podría ser el material de la roca en realidad mucho más antiguo? ¿Qué suposición queda implícita al usar el método de fechado radiactivo? El decaimiento relevante es $^{87}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}\text{Sr} + e^- + \bar{\nu}$. La vida media del decaimiento es de 4.75×10^{10} años.

66. El estado fundamental del $^{93}_{43}$Tc (masa molar de 92.910 2 g/mol) decae por captura de electrones y emisión de e^+ a los niveles de energía del núcleo hija (masa molar de 92.906 8 g/mol en estado fundamental) a 2.44 MeV, 2.03 MeV, 1.48 MeV y 1.35 MeV. a) ¿Para cuáles de estos niveles está permitida la captura de electrones y el decaimiento e^+? b) Identifique al núcleo hija y haga un esquema del decaimiento, suponiendo que todos los estados excitados se desexcitan por decaimiento γ directamente al estado fundamental.

Respuestas a las preguntas rápidas

44.1 i) b) El valor de $N = A - Z$ es el mismo para los tres núcleos. **ii),** a) El valor de Z es el mismo para los tres núcleos, porque todos son núcleos de nitrógeno. **iii),** c) El valor de A es el mismo para los tres núcleos, como se puede ver en el superíndice, que no cambia.

44.2 e) Un año de 365 días es equivalente a 365 d/5.01 d ≈ 73 vidas medias. Por lo tanto, la actividad se reducirá después de un año a aproximadamente $(1/2)^{73}$ (1.000 μCi) $\sim 10^{-22}$ μCi.

44.3 b) En el decaimiento alfa, el número atómico decrece en dos y el número de masa atómica decrece en cuatro.

44.4 c) En el decaimiento e^-, el número atómico aumenta en uno y el número de masa atómica permanece fijo. Ninguna de las opciones consiste con el decaimiento e^+, así que se suponen que el decaimiento debe ser por e^-.

La planta nuclear de San Onofre, al sur de San Clemente, California, es una de las docenas de plantas nucleares generadoras de energía eléctrica a partir del uranio que hay en el mundo. Estas plantas funcionan mediante un proceso nuclear llamado *fisión*, mientras que las plantas de acuerdo con un segundo proceso, fusión, todavía están a años de distancia en el futuro. (Tony Freeman/Index Stock Imagery)

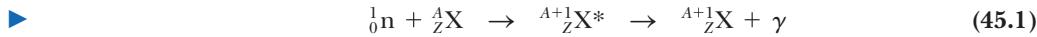
45 Aplicaciones de la física nuclear

En este capítulo se estudian dos medios para obtener energía a partir de reacciones nuclea-res: fisión, en el que un gran núcleo se divide en dos núcleos más pequeños, y fusión, en el que dos núcleos pequeños se fusionan para formar uno grande. En ambos casos la liberación de energía se puede usar ya sea constructiva (como en el caso de producción de energía eléctrica) o destructivamente (como en armas nucleares). También se examinan diversas formas en que la radiación interactúa con la materia y algunos dispositivos empleados para detectar la radiación. El capítulo concluye con una explicación de algunas aplicaciones industriales y biológicas de la radiación.

45.1 Interacciones donde intervienen neutrones

El proceso de fisión nuclear se presenta en reactores nucleares y finalmente da por resultado energía suministrada a una comunidad por medio de líneas de transmisión. La fusión nuclear es un campo activo de investigación, pero hasta ahora no se ha desarrollado comercialmente para el suministro de energía. Primero se explicará la fisión y luego se explorará la fusión en la sección 45.4.

Para comprender la fisión nuclear y la física de los reactores nucleares, primero debe entender la forma en que interactúan los neutrones con los núcleos. Debido a su neutralidad de carga, los neutrones no están sometidos a las fuerzas de Coulomb y, como un resultado, no interactúan eléctricamente con electrones ni con el núcleo. En consecuencia, los neutrones pueden penetrar profundamente con facilidad en un átomo y chocar con el núcleo.

Un neutrón rápido (con una energía mayor que 1 MeV) que viaja en la materia se somete a numerosas colisiones con núcleos. En cada colisión, el neutrón cede parte de su energía cinética a un núcleo. A causa de neutrones rápidos en algunos materiales dominan las colisiones elásticas. Los materiales en donde se presenta esto se denominan **moderadores** porque reducen (o moderan) la velocidad de los neutrones, originalmente energéticos, en una forma muy eficaz. Los núcleos moderadores deben ser de baja masa para que se transfiera más energía cinética a ellos en colisiones elásticas. Por este motivo, los materiales que son abundantes en hidrógeno, por ejemplo la parafina y el agua, son buenos moderadores para los neutrones.

Con el tiempo, la mayor parte de los neutrones que bombardeen un moderador se convierten en **neutrones térmicos,** lo cual significa que están en equilibrio térmico con el material moderador. El promedio de su energía cinética a temperatura ambiente es, de la ecuación 21.4,

$$K_{\text{prom}} = \tfrac{3}{2}k_{\text{B}}T \approx \tfrac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\text{ J/K})(300\text{ K}) = 6.21 \times 10^{-21}\text{ J} \approx 0.04\text{ eV}$$

que corresponde a la rapidez media cuadrática de un neutrón, de aproximadamente 2800 m/s. Los neutrones térmicos tienen una distribución de magnitudes de velocidad, al igual que las moléculas en un recipiente de gas (véase el capítulo 21). Los neutrones de alta energía, aquellos que tienen energías de varios MeV, *atemperar* (es decir, su promedio de energía alcanza K_{prom}) en menos de 1 ms cuando inciden sobre un moderador.

Una vez que los neutrones se han atemperado y la energía de un neutrón particular es suficientemente baja, hay una elevada probabilidad de que el neutrón sea capturado por un núcleo, evento que es acompañado por la emisión de un rayo gamma. Esta reacción de **captura de neutrón** se puede escribir como sigue

Reacción de captura de neutrón ▶

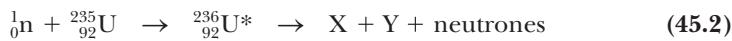
$$^{1}_{0}\text{n} + {}^{A}_{Z}\text{X} \rightarrow {}^{A+1}_{Z}\text{X}^* \rightarrow {}^{A+1}_{Z}\text{X} + \gamma \qquad \textbf{(45.1)}$$

Una vez que el neutrón es capturado, el núcleo ${}^{A+1}_{Z}\text{X}^*$ está en estado excitado durante un tiempo muy breve, antes de que experimente decaimiento gamma. El núcleo producto ${}^{A+1}_{Z}\text{X}$ suele ser radiactivo y decae por emisión beta.

La rapidez de captura de un neutrón, a causa de neutrones que pasan por cualquier muestra, depende del tipo de átomos en la muestra y de la energía de los neutrones incidentes. La interacción de neutrones con la materia aumenta con la reducción de energía de los neutrones porque un neutrón lento emplea mucho tiempo cerca de los núcleos objetivo.

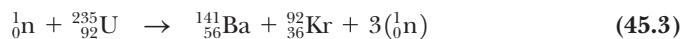
PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 45.1

Recordatorio de la energía de enlace

Recuerde del capítulo 44 que la energía de enlace es el valor absoluto de la energía del sistema y está relacionada con la masa del sistema. Por lo tanto, cuando considere la figura 44.5, imagínela invertida boca abajo para obtener una curva que represente la masa del sistema. En una reacción de fisión disminuye la masa del sistema. Esta disminución de masa aparece en el sistema como energía cinética de los productos de fisión.

45.2 Fisión nuclear

Como ya se dijo en la sección 44.2, la **fisión** nuclear se presenta cuando un núcleo pesado, por ejemplo el ^{235}U, se divide en dos núcleos más pequeños. La fisión se inicia cuando un núcleo pesado captura un neutrón térmico, como se describe en la primera etapa de la ecuación 45.1. La absorción del neutrón produce un núcleo que es inestable y puede cambiar a una configuración de energía más baja al dividirse en dos núcleos más pequeños. En esta reacción, la masa combinada de los núcleos hijas es menor que la masa del núcleo padre, y esta diferencia en masa se denomina **defecto de masa.** Multiplicar el defecto de masa por c^2 da el valor numérico de la energía liberada. Se libera energía porque la energía de enlace por cada nucleón de los núcleos hijas es casi de 1 MeV mayor que la del núcleo padre (véase la figura 44.5).

La fisión nuclear fue observada primero en 1938 por Otto Hahn (1879-1968) y Fritz Strassman (1902-1980) luego de algunos estudios básicos de Fermi. Después de bombardear uranio con neutrones, Hahn y Strassman descubrieron dos elementos de masa media entre los productos de reacción, bario y lantano. Poco después, Lise Meitner (1878-1968) y su sobrino Otto Frisch (1904-1979) explicaron lo que había sucedido. El núcleo de uranio se había dividido en dos fragmentos casi iguales más varios neutrones después de absorber un neutrón. Este acontecimiento fue de considerable interés para los físicos que trataban de entender el núcleo, pero habría de tener consecuencias de mayor alcance. Las medi-

ciones mostraron que se liberaban unos 200 MeV en cada evento de fisión, y este hecho iba a afectar el curso de la historia.

La fisión del ^{235}U por neutrones térmicos puede representarse con la reacción

$$^{1}_{0}\text{n} + ^{235}_{92}\text{U} \rightarrow ^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow \text{X} + \text{Y} + \text{neutrones} \quad (45.2)$$

Reacción general de fisión por ^{235}U

donde ^{236}U* es un estado intermedio excitado que dura sólo unos 10^{-12} s antes de dividirse en núcleos X y Y de masa media, que se denominan **fragmentos de fisión.** En cualquier reacción de fisión hay numerosas combinaciones de X y Y que satisfacen los requisitos de conservación de energía y carga. En el caso del uranio, por ejemplo, hay unos 90 núcleos hijas que se pueden formar.

Además, la fisión da por resultado la producción de varios neutrones, por lo general dos o tres. En promedio, unos 2.5 neutrones se liberan por cada evento. Una reacción representativa de fisión para el uranio es

$$^{1}_{0}\text{n} + ^{235}_{92}\text{U} \rightarrow ^{141}_{56}\text{Ba} + ^{92}_{36}\text{Kr} + 3(^{1}_{0}\text{n}) \quad (45.3)$$

La figura 45.1 muestra una representación ilustrativa del cuento de la fisión en la ecuación. 45.3. La figura 45.2 es una gráfica de la distribución de productos de fisión con el número de masa A. Los productos más probables tienen números de masa $A \approx 140$ y $A \approx 95$. Suponga que estos productos son $^{140}_{53}$I (con 87 neutrones) y $^{95}_{39}$Y (con 56 neutrones). Si estos núcleos se localizan en la gráfica de la figura 44.4, se ve que ambos están muy arriba de la línea de estabilidad. Porque estos fragmentos, son muy inestables por su número de neutrones inusualmente alto, casi en forma instantánea liberan dos o tres neutrones.

Estime la energía de desintegración Q que se libera en un proceso típico de fisión representativo. En la figura 22.5 aparece que la energía de enlace por nucleón es de 7.2 MeV para núcleos pesados ($A \approx 240$) y unos 8.2 MeV para núcleos de masa intermedia. La cantidad de energía liberada es 8.2 MeV − 7.2 MeV = 1 MeV por nucleón. Porque existe un total de 235 nucleones en $^{235}_{92}$U, la energía liberada por cada evento de fisión es casi 235 MeV, es una gran cantidad de energía en relación con la cantidad liberada en procesos químicos. Por ejemplo, la energía liberada en la combustión de una molécula de octano empleada en motores a gasolina es de una millonésima de la energía liberada en un solo evento de fisión.

Figura 45.1 Un evento de fisión nuclear. Antes del evento un neutrón lento se aproxima a un núcleo de ^{235}U. Después del evento hay dos núcleos más ligeros y tres neutrones.

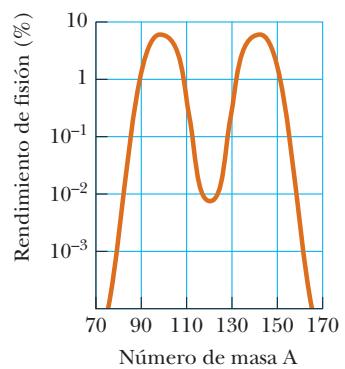



Figura 45.2 Distribución de productos de fisión en función del número de masa para la fisión del ^{235}U bombardeado con neutrones térmicos. Observe que el eje vertical es logarítmico.

Pregunta rápida 45.1 Cuando un núcleo experimenta fisión, los dos núcleos hijas suelen ser radiactivos. ¿Por medio de cuál proceso es más probable que decaigan? a) Decaimiento alfa, b) decaimiento beta (e^-) o c) decaimiento beta (e^+).

Pregunta rápida 45.2 ¿Cuáles de las siguientes son posibles reacciones de fisión?

a) $^{1}_{0}\text{n} + ^{235}_{92}\text{U} \rightarrow ^{140}_{54}\text{Xe} + ^{94}_{38}\text{Sr} + 2(^{1}_{0}\text{n})$

b) $^{1}_{0}\text{n} + ^{235}_{92}\text{U} \rightarrow ^{132}_{50}\text{Sn} + ^{101}_{42}\text{Mo} + 3(^{1}_{0}\text{n})$

c) $^{1}_{0}\text{n} + ^{239}_{94}\text{Pu} \rightarrow ^{137}_{53}\text{I} + ^{97}_{41}\text{Nb} + 3(^{1}_{0}\text{n})$

EJEMPLO 45.1 La energía liberada en la fisión de ^{235}U

Calcule la energía liberada cuando se fisiona 1.00 kg de ^{235}U, considere que la energía de desintegración por cada evento es Q = 208 MeV.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un núcleo de ^{235}U que absorbe un neutrón y luego se divide en dos núcleos más pequeños y varios neutrones, como en la figura 45.1.

Categorizar El enunciado del problema pide clasificar este ejemplo como uno que involucra un análisis energético de la fisión nuclear.

Analizar Porque $A = 235$ para el uranio, un mol de este isótopo tiene una masa de 235 g.

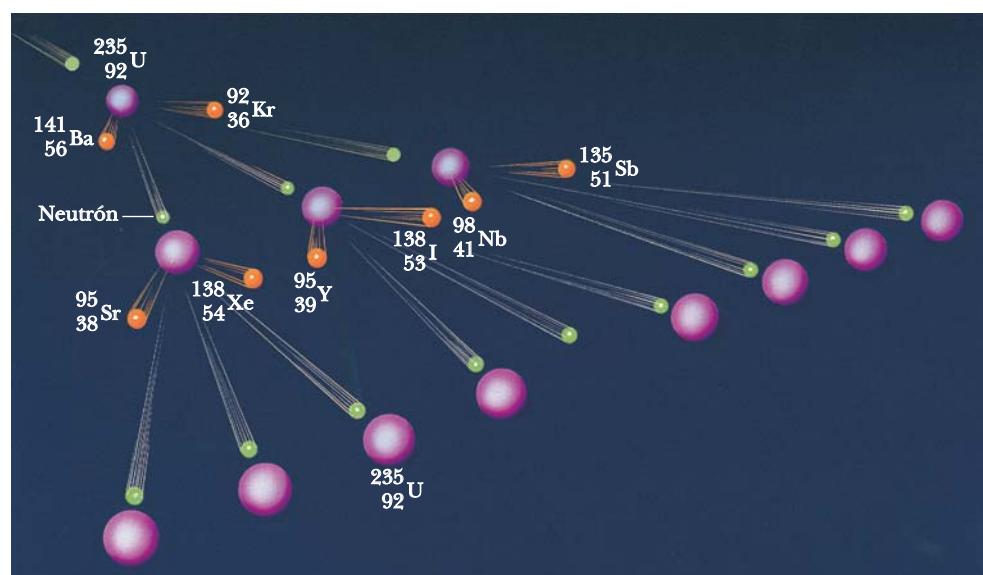
A partir de la masa conocida de ^{235}U, encuentre el número de núcleos en la muestra:

$$N = \left(\frac{1.00 \times 10^3 \text{ g}}{235 \text{ g}}\right)(6.02 \times 10^{23} \text{ núcleos})$$
$$= 2.56 \times 10^{24} \text{ núcleos}$$

Encuentre la energía total liberada cuando todos los núcleos experimentan fisión:

$$E = NQ = (2.56 \times 10^{24} \text{ núcleos})(208 \text{ MeV/núcleo})$$
$$= 5.32 \times 10^{26} \text{ MeV}$$

Finalizar Convierta esta energía a kWh:

$$E = (5.32 \times 10^{26} \text{ MeV})\left(\frac{1.60 \times 10^{-13} \text{ J}}{\text{MeV}}\right)\left(\frac{1 \text{ kWh}}{3.60 \times 10^{6} \text{ J}}\right) = 2.37 \times 10^{7} \text{ kWh}$$

¡que es suficiente energía como para mantener un foco de 100 W en operación durante 30 000 años! Si se liberara súbitamente la energía de fisión disponible en 1 kg de ^{235}U, sería equivalente a detonar aproximadamente 20 000 toneladas de TNT.

45.3 Reactores nucleares

En la sección anterior aprendí que, cuando se fisiona el ^{235}U, un neutrón que está por entrar da como resultado un promedio 2.5 neutrones emitidos por cada evento. Estos neutrones pueden incitar a otros núcleos a fisionarse. Porque son producidos mas neutrones por el evento que son absorbidos existe la posibilidad de una reacción en cadena alguna vez construida (figura 45.3). Los cálculos demuestran que si la reacción en cadena no se controla (es decir, si no sigue su curso con lentitud), puede suscitarse una violenta explosión, con la liberación repentina de una enorme cantidad de energía. De cualquier modo, cuando la reacción se controla la energía liberada puede utilizarse en un servicio constructivo. En Estados Unidos, por ejemplo, casi 20% de la electricidad generada cada año proviene de plantas nucleares generadoras de electricidad, y este tipo de energía se usa extensivamente en numerosos países, incluyendo Francia, Japón y Alemania.

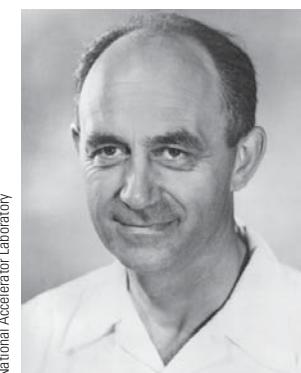
Figura 45.3 Reacción nuclear en cadena iniciada por la captura de un neutrón. Los núcleos de uranio se muestran en color magenta, los neutrones en color verde y en color naranja los núcleos hija.

[1] Aun cuando el reactor de Fermi fue el primer reactor nuclear fabricado, hay evidencia de que una reacción natural de fisión pudo haberse autosostenido quizá durante cientos de miles de años en un depósito de uranio en Gabón, África Occidental. Véase G. Cowan, "A Natural Fission Reactor", *Scientific American* 235(5): 36, 1976.

Courtesy of Chicago Historical Society

Figura 45.4 Representación figurada de un pintor del primer reactor nuclear del mundo. Debido al secreto de guerra, existen pocas fotografías del reactor completo, que estaba compuesto de capas de grafito moderador intercaladas con uranio. El 2 de diciembre de 1942 se logró una reacción en cadena autosostenida. El aviso de este éxito fue telefoneado de inmediato a Washington con este mensaje: "El navegante italiano ha aterrizado en el nuevo mundo y encontró muy amables a los nativos". El histórico evento tuvo lugar en un laboratorio improvisado en una cancha de frontón bajo las tribunas del Campo Stagg de la universidad de Chicago, y el navegante italiano era Enrico Fermi.

Un reactor nuclear es un sistema diseñado para mantener lo que se llama **reacción en cadena autosostenida.** Este proceso importante fue logrado primero en 1942 por Enrico Fermi y su equipo en la universidad de Chicago, con uranio que se presentó de forma natural como combustible.[1] En el primer reactor nuclear (figura 45.4), Fermi colocó ladrillos de grafito (carbono) entre los elementos de combustible. Los núcleos de carbono son unas 12 veces más pesados que los neutrones, pero después de varias colisiones con núcleos de carbono, la velocidad de un neutrón se reduce lo suficiente para aumentar su probabilidad de fisión con el ^{235}U. En este diseño, el carbono es el moderador; casi todos los reactores modernos usan agua como moderador.

La mayoría de los reactores hoy en operación también usan uranio como combustible. De cualquier modo el uranio se presenta de manera natural, contiene unicamente 0.7% del isótopo ^{235}U con el resto 99.3% de ^{238}U. Este hecho es importante para el funcionamiento de un reactor porque el ^{238}U casi nunca fisiona.

En lugar de ello, tiende a absorber neutrones sin que se presente un subsiguiente evento de fisión, lo cual produce neptunio y plutonio. Por esta causa, los combustibles de los reactores deben ser *enriquecidos* artificialmente para contener por lo menos unos pocos puntos porcentuales de ^{235}U.

Para alcanzar una reacción en cadena autosostenida, un promedio de un neutrón emitido en cada fisión de ^{235}U debe ser capturado por otro núcleo de ^{235}U y hacer que dicho núcleo experimente fisión. Un parámetro útil para describir el nivel de operación de un reactor es la **constante de reproducción** K, definida como **el número promedio de neutrones de cada evento de fisión que produce otro evento de fisión.** Como hemos visto, K tiene un valor promedio de 2.5 en la fisión no controlada de uranio.

Una reacción en cadena autosostenida se logra cuando $K = 1$. Bajo estas condiciones, se dice que el reactor es **crítico.** Cuando $K < 1$, el reactor es subcrítico y la reacción se termina. Cuando $K > 1$, el reactor es supercrítico y se presenta una reacción fuera de control. En un reactor nuclear empleado para alimentar energía a una empresa de luz y fuerza, es necesario mantener un valor de K cercano a 1. Si K sube a más de este valor, la energía interna producida en la reacción podría fundir el reactor.

Varios tipos de sistemas de reactor permiten que la energía cinética de diversos fragmentos de fisión se transforme en otros tipos de energía y, en última instancia, se transfiera fuera de la planta del reactor como transmisión eléctrica. El reactor de agua a presión es el más común en Estados Unidos (figura 45.5). Examinaremos este tipo porque sus partes principales son comunes a todos los diseños de reactores. Los eventos de fisión en los **elementos de combustible** de uranio del núcleo del reactor elevan la temperatura del agua contenida en el circuito primario (cerrado), que se mantiene a alta presión para controlar la ebullición del agua. (Esta agua también sirve como moderador para reducir la velocidad de los neutrones liberados en los eventos de fisión con una energía de alrededor de 2 MeV.) El agua caliente se bombea a través de un intercambiador de calor, donde la energía interna del agua es transferida por conducción al agua contenida en el circuito secundario. El agua caliente del circuito secundario se convierte en vapor, el cual realiza trabajo para accionar un sistema de turbogenerador que permite producir energía eléctrica. El agua del circuito secundario está aislada del agua del circuito primario para evitar que el agua secundaria y el vapor se contaminen por los núcleos radiactivos del núcleo del reactor.

National Accelerator Laboratory

ENRICO FERMI

Físico italiano (1901-1954)

A Fermi se le concedió el premio Nobel de física en 1938 por producir elementos transuránicos por radiación de neutrones, y por su descubrimiento sobre las reacciones nucleares causadas por neutrones térmicos. Hizo numerosas y notables aportaciones a la física, incluyendo su teoría de desintegración beta, la teoría de los electrones libres en los metales, y la invención del primer reactor de fisión del mundo en 1942. Fermi fue verdaderamente un talentoso físico teórico y experimental. También fue conocido por su capacidad de presentar la física en una forma clara y apasionante. "Cualquier cosa que la naturaleza tenga en la tienda para la humanidad, por desagradable que sea, el hombre debe aceptarla porque la ignorancia nunca es mejor que el conocimiento." (National Accelerator Laboratory)

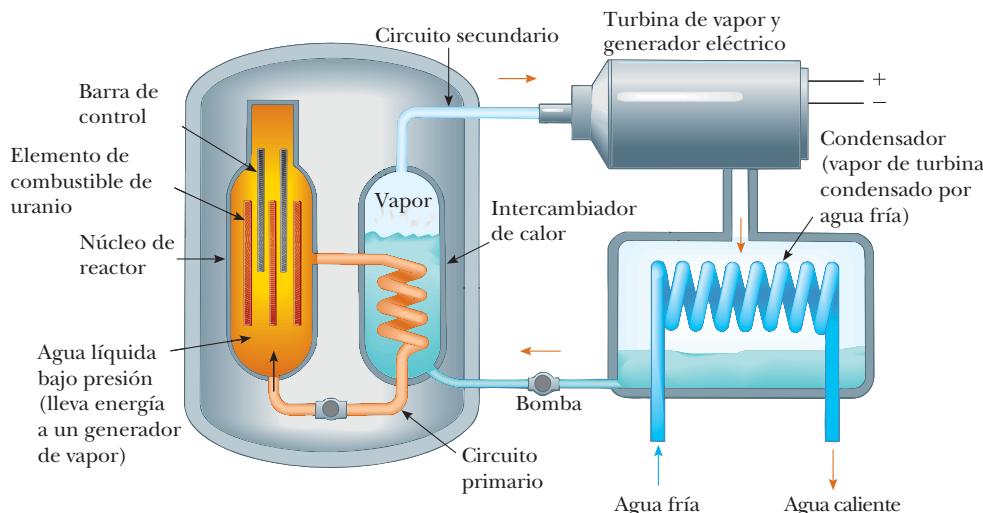



Figura 45.5 Componentes principales de un reactor nuclear de agua a presión.

En cualquier reactor una parte de los neutrones producidos por fisión se fuga de los elementos de combustible de uranio antes de inducir otros eventos de fisión. Si la fracción que se fuga es demasiado grande, el reactor no funciona. El porcentaje perdido es grande si los elementos de combustible son muy pequeños porque la fuga es una función de la proporción entre el área superficial y el volumen. Por lo tanto, una característica crítica en el diseño de reactores es la proporción óptima entre el área de la superficie y el volumen de los elementos de combustible.

Control del nivel de potencia

La seguridad es un asunto de importancia crítica en la operación de un reactor nuclear. No debe permitirse que la constante de reproducción K suba de 1, para que no se presente una reacción fuera de control. En consecuencia, el diseño de un reactor debe incluir un medio para controlar el valor de K.

El diseño básico del núcleo de un reactor nuclear se ilustra en la figura 45.6. Los elementos de combustible están formados por uranio enriquecido en el isótopo ^{235}U. Para controlar el nivel de potencia, se insertan **barras de control** en el núcleo del reactor. Estas barras están hechas de materiales muy eficientes para absorber neutrones como el cadmio. Al ajustar el número y posición de las barras de control en el núcleo del reactor, puede hacerse variar el valor de K y es posible alcanzar cualquier nivel de potencia dentro del margen de diseño del reactor.

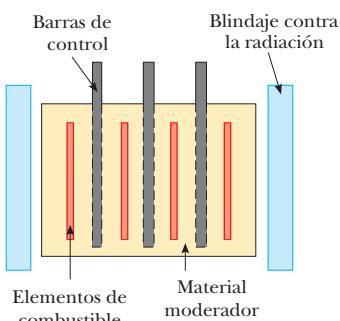



Figura 45.6 Sección transversal de un núcleo de reactor que muestra las barras de control, los elementos de combustible que contienen combustible enriquecido y material moderador, todo rodeado por un blindaje contra la radiación.

Pregunta rápida 45.3 Para reducir el valor de la constante de reproducción K. a) ¿se empujan las barras de control a más profundidad en el núcleo o b) se jalan las barras de control fuera del núcleo?

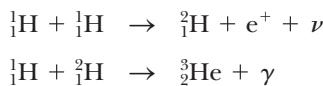
Seguridad y eliminación de desechos

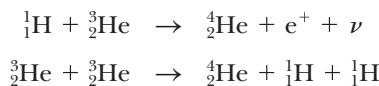
Los accidentes de 1979 en una planta nuclear de generación de electricidad en la isla Three Mile en Pennsylvania y de 1986 en Chernobyl en Ucrania llamaron la atención sobre la seguridad en los reactores. El primero fue el resultado de una inadecuada instrumentación en la sala de control y a la deficiente capacitación de respuesta en casos de emergencia. No hubo lesionados ni impactos notorios en la salud por causa de este evento, aun cuando más de la tercera parte del combustible se fundió.

Desafortunadamente, ese no fue el caso en Chernobyl, donde la actividad de los materiales liberados inmediatamente después del accidente acumularon un total aproximado de 1.2×10^{19} Bq y resultó en la evacuación de 135 000 personas. Murieron 30 personas durante o poco después del accidente, y los datos del Instituto Radiológico de Ucrania sugirieron que más de 2500 muertes se pueden atribuir al accidente de Chernobyl. En el

periodo de 1986 a 1997 hubo un aumento de diez veces el número de niños que contrajeron cáncer de tiroides por la ingestión de yodo radiactivo en leche de vacas que comieron pasto contaminado. Se concluyó, en una conferencia internacional, que las principales causas del accidente de Chernobyl se debieron a la coincidencia de graves deficiencias en el diseño físico del reactor y a la violación de los procedimientos de seguridad. La mayor parte de estas deficiencias se ha tratado en plantas de diseño similar en Rusia y países vecinos de la desaparecida Unión Soviética.

Los reactores comerciales basan su seguridad en el cuidadoso diseño y los rígidos protocolos de operación, y representan un peligro sólo cuando estas variables se ven comprometidas. La exposición a la radiación y potenciales riesgos de salud asociados con esta exposición se controlan mediante tres capas de contención. El combustible y los productos radiactivos de fisión están contenidos en el recipiente de un reactor. En caso de una ruptura en este recipiente, el edificio del reactor actúa como una segunda estructura de contención para impedir que el material radiactivo contamine el medio ambiente. Por último, las instalaciones del reactor deben estar en lugares remotos para proteger a la población contra la exposición en caso de que escape radiación del edificio del reactor.

Una continua preocupación por los reactores de fisión nuclear es la eliminación segura de material radiactivo cuando se reemplaza el núcleo del reactor. Este material de desecho contiene isótopos altamente radiactivos, de larga duración, y debe ser guardado durante largo tiempo para que no exista probabilidad alguna de contaminar el ambiente. En la actualidad, sellar los desechos radiactivos en recipientes herméticos y enterrarlos en profundos depósitos geológicos parece ser la solución más promisoria.

El transporte de combustible y desechos radiactivos representa otros riesgos de seguridad. Accidentes durante el transporte de combustible nuclear podrían exponer al público a niveles peligrosos de radiación. El Departamento de Energía exige que se realicen duras pruebas de choques en todos los recipientes que se utilicen para el transporte de materiales nucleares. Los fabricantes de recipientes deben demostrar que estos contenedores no se romperán incluso en choques a alta velocidad.

A pesar de estos riesgos, hay ventajas en el uso de la energía nuclear que deben ser ponderadas. Por ejemplo, las plantas de energía nuclear no producen contaminación del aire ni gases de efecto invernadero, como lo hacen las plantas que consumen combustibles fósiles, y se pronostica que el abastecimiento de uranio en la Tierra tendrá más duración que los combustibles fósiles. Para cada fuente de energía, ya sea nuclear, hidroeléctrica, combustible fósil, eólica o solar, deben ponderarse los beneficios contra los riesgos y estudiar también la disponibilidad de dicha fuente de energía.

45.4 Fusión nuclear

En el capítulo 44 encontró que la energía de elance para núcleos ligeros ($A < 20$) es mucho menor que la energía de enlace para núcleos más pesados. Esto sugiere un proceso inverso de la fisión. Como se mencionó en la sección 39.9, cuando dos núcleos ligeros se combinan para formar un núcleo más pesado, el proceso se denomina **fusión** nuclear. Porque la masa del núcleo final es menor que las masas combinadas de los núcleos originales, hay una pérdida de masa acompañada de liberación de energía.

Dos ejemplos de estas reacciones de fusión con liberación de energía son las siguientes:

$$^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{2}_{1}\text{H} + e^{+} + \nu$$

$$^{1}_{1}\text{H} + {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + \gamma$$

Estas reacciones se presentan en el núcleo de una estrella y son las causantes del derrame de energía que proviene de ella. Esta segunda reacción es seguida por la fusión de hidrógeno-helio o por la fusión de helio-helio:

$$^{1}_{1}\text{H} + {}^{3}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + e^{+} + \nu$$

$$^{3}_{2}\text{He} + {}^{3}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H}$$

Estas reacciones de fusión son básicas en el ciclo protón-protón, se cree que es uno de los ciclos básicos por el que se genera la energía en el Sol y otras estrellas que contienen hidrógeno en abundancia. La mayoría de la producción de energía se lleva a cabo en el interior del 101, donde la temperatura es aproximadamente 1.5×10^7 K.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 45.2

Fisión y fusión

Las palabras *fisión* y *fusión* suenan semejantes, pero corresponden a procesos diferentes. Considere la curva de energía de enlace de la figura 44.5. Hay dos direcciones desde las que se puede llegar al pico de la curva para liberar energía: combinar dos núcleos ligeros, fusión o separar un núcleo pesado en dos núcleos más ligeros, fisión.

Porque estas altas temperaturas son necesarias para impulsar estas reacciones reciben el nombre de **reacciones termonucleares de fusión.** Todas las reacciones en el *ciclo protón-protón* son exotérmicas. Una visión general del ciclo es que se deben combinar cuatro protones para formar una partícula alfa, positrones, rayos gamma y neutrinos.

Pregunta rápida 45.4 En el núcleo de una estrella se combinan núcleos de hidrógeno en reacciones de fusión. Una vez que el hidrógeno se agota, puede presentarse una fusión de núcleos de helio. Una vez que se agote el helio, si la estrella es lo suficientemente grande, puede ocurrir la fusión de núcleos cada vez más pesados. Considere reacciones de fusión en donde intervienen dos núcleos con el mismo valor de A. Para estos tipos de reacciones exotérmicas, ¿cuáles de los siguientes valores de A son imposibles? a) 12, b) 20, c) 28 o d) 64.

EJEMPLO 45.2 Energía liberada en la fusión

Encuentre la energía total liberada en las reacciones de fusión en el ciclo protón-protón.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El resultado nuclear neto del ciclo protón-protón es fundir cuatro protones para formar una partícula alfa. Estudie la reacción anterior para el ciclo protón-protón para asegurarse de que comprende cómo cuatro protones se convierten en una partícula alfa.

Categorizar Se usan conceptos discutidos en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre la masa inicial de cuatro protones con las masas atómicas de la tabla 44.2:

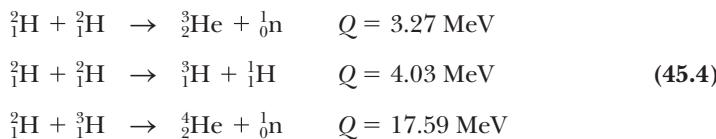
$$4(1.007\ 825\ \text{u}) = 4.031\ 300\ \text{u}$$

Halle el cambio en masa del sistema con este valor menos la masa de la partícula alfa resultante:

$$4.031\ 300\ \text{u} - 4.002\ 603\ \text{u} = 0.028\ 697\ \text{u}$$

Convierta este cambio de masa en unidades de energía:

$$E = 0.028\ 697\ \text{u} \times 931.494\ \text{MeV/u} = 26.7\ \text{MeV}$$

Esta energía se comparte entre la partícula alfa y otras partículas como positrones, rayos gamma y neutrinos.

Reacciones de fusión terrestre

La enorme cantidad de energía liberada en reacciones de fusión sugiere la posibilidad de aprovechar esta energía para fines útiles. En la actualidad se realiza una gran cantidad de trabajos para perfeccionar un reactor termonuclear sostenido y controlable, es decir, un reactor de energía de fusión. Se cree que la fusión controlada es la máxima fuente de energía por la disponibilidad de su fuente de combustible: el agua. Por ejemplo, si se usara deuterio como combustible, podría extraerse 0.12 g de un galón de agua a un costo de unos cuatro centavos (US); esta cantidad de deuterio podría liberar unos 10^{10} J si todos los núcleos experimentaran fusión. En comparación, un galón de gasolina libera unos 10^8 J al consumirse y cuesta mucho más que cuatro centavos.

Una ventaja adicional de los reactores de fusión es que se forman comparativamente pocos subproductos radiactivos. Para el ciclo protón-protón, por ejemplo, el producto final es seguro: helio no radiactivo. Desafortunadamente, un reactor termonuclear que puede entregar una potencia de salida neta extendida en un intervalo razonable de tiempo todavía no es una realidad, y deben resolverse muchas dificultades antes de que se construya un aparato satisfactorio.

La energía del Sol está basada parcialmente en un conjunto de reacciones en las que el hidrógeno se convierte en helio. No obstante, la interacción protón-protón no es apropiada para usarse en un reactor de fusión porque el evento requiere de muy altas temperaturas y densidades. El proceso funciona en el Sol sólo debido a la densidad extremadamente alta de protones en su interior.

Las reacciones que parecen más prometedoras para un reactor de energía por fusión incluyen el deuterio ($^2_1$H) y el tritio ($^3_1$H):

$$\begin{aligned} {}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} &\rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} \qquad Q = 3.27\ \mathrm{MeV} \\ {}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} &\rightarrow {}^3_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \qquad Q = 4.03\ \mathrm{MeV} \\ {}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} &\rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} \qquad Q = 17.59\ \mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{45.4}$$

Como ya se mencionó, el deuterio está disponible en cantidades casi ilimitadas en lagos y océanos y su extracción es barata. De cualquier modo, el tritio, es radiactivo ($T_{1/2} = 12.3$ años) y experimenta desintegración beta a ^{3}He. Por esta razón, el tritio no se presenta de manera natural en grandes cantidades y debe ser producido artificialmente.

Uno de los principales problemas para obtener energía de la fusión nuclear es que la fuerza de repulsión de Coulomb entre dos núcleos que portan cargas positivas debe ser superada antes que los núcleos se puedan fusionar. La energía potencial como función de la distancia de separación entre dos deuterones (núcleos de deuterio, cada uno con una carga $+e$) se ilustra en la figura 45.7. La energía potencial es positiva en la región $r > R$, donde domina la fuerza de repulsión de Coulomb ($R \approx 1$ fm), y negativa en la región $r < R$, donde domina la fuerza nuclear. En tal caso, el problema fundamental es darle a los dos núcleos suficiente energía cinética para vencer esta fuerza de repulsión, lo cual se puede lograr al elevar el combustible a temperaturas extremadamente altas (unos 10^8 K, que es mucho mayor que la temperatura del interior del Sol). A estas altas temperaturas los átomos se ionizan y el sistema consta de un conjunto de electrones y núcleos que, por lo común, se denomina *plasma*.

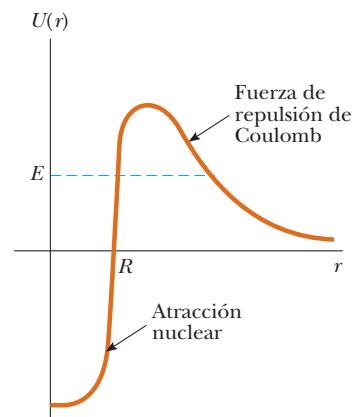



Figura 45.7 Energía potencial como función de la distancia de separación entre dos deuterones. La fuerza de repulsión de Coulomb es dominante a la larga, y la fuerza nuclear es dominante a corto plazo, donde R es del orden de 1 fm. Si desprecia el efecto túnel, para que los dos deuterones experimenten fusión se requiere una energía E mayor a la altura de la barrera.

EJEMPLO 45.3 La fusión de dos deuterones

Para que la fuerza nuclear supere la fuerza de Coulomb repulsiva, la distancia de separación entre dos deuterones debe ser aproximadamente 1.0×10^{-14} m.

A) Calcule la altura de la barrera de potencial debida a la fuerza repulsiva.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine mover dos deuterones uno hacia el otro. Conforme se acercan más, la fuerza de repulsión de Coulomb se vuelve más fuerte. Se debe realizar trabajo sobre el sistema para empujar contra esta fuerza, y este trabajo aparece en el sistema de dos deuterones como energía potencial eléctrica.

Categorizar Este problema se clasifica como uno que involucra la energía potencial eléctrica de un sistema de dos partículas cargadas.

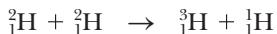
$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r} = k_e \frac{(+e)^2}{r} = (8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}) \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{1.0 \times 10^{-14}\ \mathrm{m}}$$

$$= 2.3 \times 10^{-14}\ \mathrm{J} = \boxed{0.14\ \mathrm{MeV}}$$

Analizar Evalúe la energía potencial asociada con dos cargas separadas por una distancia r (ecuación 25.13) para dos deuterones:

B) Estime la temperatura requerida para que un deuterón supere la barrera de potencial, si supone una energía de $\frac{3}{2}k_B T$ por deuterón (donde k_B es la constante de Boltzmann).

SOLUCIÓN

Porque la energía de Coulomb total del par es 0.14 MeV, la energía de Coulomb por deuterón es igual a 0.07 MeV = 1.1×10^{-14} J.

Iguale esta energía con la energía promedio por cada deuterón:

$$\tfrac{3}{2}k_B T = 1.1 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}$$

Resuelva para T:

$$T = \frac{2(1.1 \times 10^{-14}\ \mathrm{J})}{3(1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K})} = \boxed{5.6 \times 10^8\ \mathrm{K}}$$

C) Encuentre la energía liberada en la reacción deuterio-deuterio

$$^2_1\text{H} + ^2_1\text{H} \rightarrow ^3_1\text{H} + ^1_1\text{H}$$

SOLUCIÓN

La masa de un solo átomo de deuterio es igual a 2.014 102 u. Por lo tanto, la masa total del sistema antes de la reacción es 4.028 204 u.

Encuentre la suma de las masas después de la reacción: $3.016\,049 \text{ u} + 1.007\,825 \text{ u} = 4.023\,874 \text{ u}$

Halle el cambio en masa y convierta a unidades de energía:

$$4.028\,204 \text{ u} - 4.023\,874 \text{ u}$$
$$= 0.004\,33 \text{ u}$$
$$= 0.004\,33 \text{ u} \times 931.494 \text{ MeV/u} = \boxed{4.03 \text{ MeV}}$$

Finalizar La temperatura calculada en el inciso B) es demasiado alta porque las partículas en el plasma tienen una distribución de rapidez maxwelliana (sección 21.5) y por lo tanto algunas de las reacciones de fusión son causadas por partículas en la cola de alta energía de esta distribución. Además, incluso aquellas partículas que no tienen suficiente energía para superar la barrera tienen alguna probabilidad de pasar a través de ella por efecto túnel. Cuando estos efectos se toman en cuenta, la temperatura de "sólo" 4×10^8 K parece adecuada para fundir dos deuterones en un plasma. En el inciso C) note que el valor de la energía es consistente con el ya dado en la ecuación 45.4.

¿Qué pasaría si? Suponga que el tritio resultante de la reacción en el inciso C) reacciona con otro deuterio en la reacción

$$^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^1_0\text{n}$$

¿Cuánta energía se libera en la secuencia de dos reacciones?

Respuesta El efecto global de la secuencia de dos reacciones es que tres núcleos de deuterio se combinan para formar un núcleo de helio, un núcleo de hidrógeno y un neutrón. La masa inicial es $3(2.014\,102 \text{ u}) = 6.042\,306$ u. Después de la reacción, la suma de las masas es $4.002\,603 \text{ u} + 1.007\,825 \text{ u} + 1.008\,665 = 6.019\,093$ u. La masa en exceso es igual a 0.023 213 u, equivalente a una energía de 21.6 MeV. Note que este valor es la suma de los valores Q para la segunda y tercera reacciones en la ecuación 45.4.

La temperatura a la cual la rapidez de generación de potencia en cualquier reacción de fusión es mayor a la rapidez de pérdida se denomina **temperatura crítica de ignición** T_{ign}. Esta temperatura para la reacción deuterio-deuterio (D–D) es 4×10^8 K. De la relación $E \approx \frac{3}{2}k_B T$, la temperatura de ignición es equivalente a casi 52 keV. La temperatura crítica de ignición para la reacción deuterio-tritio (D–T) es alrededor de 4.5×10^7 K, o sea, unos 6 keV. En la figura 45.8 se ilustra una gráfica de la potencia $\mathcal{P}_{\text{gen}}$ generada por fusión con la temperatura para las dos reacciones. La línea de color verde representa la potencia $\mathcal{P}_{\text{perdida}}$ perdida por medio del mecanismo de radiación conocido como *bremsstrahlung* (sección 42.8). En este mecanismo principal de pérdida de energía, se emite radiación (principalmente rayos X) como resultado de las colisiones electrón-ion dentro del plasma. Las intersecciones de la línea $\mathcal{P}_{\text{perdida}}$ con las curvas $\mathcal{P}_{\text{gen}}$ proporcionan las temperaturas críticas de ignición.

Figura 45.8 Potencia generada en función de la temperatura para la fusión deuterio-deuterio (D–D) y deuterio-tritio (D–T). La línea verde representa la energía perdida como función de la temperatura. Cuando la rapidez de generación excede a la rapidez de pérdida, tiene lugar la ignición.

Además de los requisitos de alta temperatura, hay otros dos parámetros críticos que determinan si un reactor termonuclear es satisfactorio o no lo es: la **densidad de iones** n y el **tiempo de confinamiento** τ, que es el intervalo de tiempo durante el cual la energía inyectada en el plasma permanece dentro de él. El físico inglés J. D. Lawson ha demostrado que la densidad de iones y el tiempo de confinamiento deben ser lo suficientemente grandes para asegurar que se libera más energía de fusión que la cantidad necesaria para elevar la temperatura del plasma. Para cierto valor de n la probabilidad de fusión entre dos partículas se incrementa conforme τ aumenta su valor. Para un valor determinado de τ, la proporción de colisiones entre núcleos aumenta conforme n se incrementa. El producto $n\tau$ se conoce como **número de Lawson** de una reacción. En la figura 45.9 se muestra una gráfica del valor de $n\tau$ necesario para alcanzar una salida neta de energía para las

reacciones D–T y D–D a diferentes temperaturas. En particular, el **criterio de Lawson** expresa que una salida neta de energía es posible para valores de $n\tau$ que satisfagan las siguientes condiciones:

$$n\tau \geq 10^{14}\ \text{s/cm}^3 \qquad (\text{D–T})$$
$$n\tau \geq 10^{16}\ \text{s/cm}^3 \qquad (\text{D–D}) \qquad \textbf{(45.5)}$$

◀ Criterio de Lawson

Estos valores representan los mínimos de las curvas de la figura 45.9.

Se llegó al criterio de Lawson al comparar la energía necesaria para elevar la temperatura de un plasma dado con la energía generada por el proceso de fusión.[2] La energía E_{in} requerida para elevar la temperatura del plasma es proporcional a la densidad de iones n, que se expresan como $E_{in} = C_1 n$, donde C_1 es alguna constante. La energía generada por el proceso de fusión es proporcional a $n^2\tau$, o $E_{gen} = C_2 n^2 \tau$. Esta dependencia puede entenderse si se logra que la energía de fusión liberada sea proporcional tanto a la proporción con la que chocan iones que interactúan ($\propto n^2$) y el tiempo de confinamiento τ. La energía neta es producida cuando $E_{gen} > E_{in}$ Si las constantes C1 y C2 son calculadas para diferentes reacciones, la condición $E_{gen} \geq E_{in}$ conduce al criterio de Lawson.

Los actuales trabajos de investigación están encaminados a satisfacer el criterio de Lawson a temperaturas que exceden de T_{ign}. Aun cuando se han alcanzado las densidades mínimas requeridas de plasma, el problema del tiempo de confinamiento es más difícil. Las dos técnicas bajo investigación para resolver este problema son confinamiento magnético y confinamiento inercial.

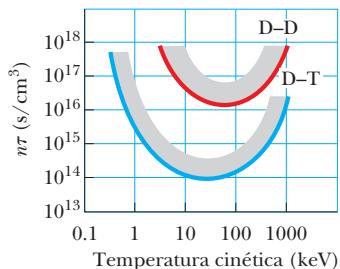



Figura 45.9 Número de Lawson $n\tau$ al que es posible la salida neta de energía con la temperatura de las reacciones de fusión D–T y D–D. Las regiones arriba de las curvas de color representan condiciones favorables para la fusión.

Confinamiento magnético

Numerosos experimentos de plasma relacionados con la fusión emplean **confinamiento magnético** para contener el plasma. Un aparato en forma de toroide, llamado **tokamak,** creado primero en Rusia, se ilustra en la figura 45.10a. Para confinar y estabilizar el plasma se utiliza una combinación de dos campos magnéticos: 1) un intenso campo toroidal producido por la corriente en los devanados toroidales que rodean una cámara de vacío

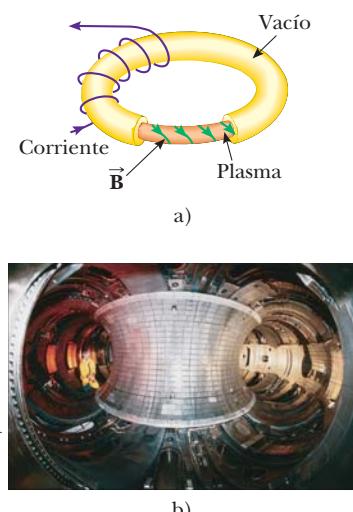



Figura 45.10 a) Diagrama de un tokamak empleado en el esquema de confinamiento magnético. b) Vista interior del recipiente de vacío del Reactor de Prueba de Fusión Tokamak (TFTR) en el laboratorio de física de plasma de Princeton. c) Experimento del Toroide Esférico Nacional (NSTX) que inició operaciones en marzo de 1999.

[2] El criterio de Lawson hace caso omiso de la energía necesaria para establecer el intenso campo magnético empleado para confinar el plasma caliente en un método magnético de confinamiento. Se espera que esta energía sea unas 20 veces mayor que la energía necesaria para elevar la temperatura del plasma. Por esta razón, es necesario tener un sistema de recuperación de energía magnética o usar imanes superconductores.

en forma de rosquilla y 2) un campo "poloidal" más débil producido por la corriente toroidal. Además de confinar el plasma, la corriente toroidal se emplea para elevar su temperatura. Las líneas de campo magnético helicoidal resultantes se enrollan alrededor del plasma e impiden que éste toque las paredes de la cámara de vacío. (Si el plasma toca las paredes, su temperatura se reduce y las impurezas pesadas que son expulsadas de las paredes lo "envenenan" y se tienen grandes pérdidas de potencia.)

Uno de los principales adelantos en el confinamiento magnético realizados en la década de los ochenta fue en el campo de la energía de entrada auxiliar para alcanzar temperaturas de ignición. Los experimentos han demostrado que inyectar un haz de partículas neutras de energía en el plasma es un método muy eficiente para elevarlo a temperaturas de ignición. Es probable que sea necesaria la energía de entrada de radiofrecuencia para plasmas del tamaño de un reactor.

Cuando estaba en operación, el Reactor Tokamak de Prueba de Fusión (TFTR, figura 45.10b) en Princeton reportó temperaturas centrales de ion de 510 millones de grados Celsius, 30 veces más caliente que el centro del Sol. Los valores $n\tau$ del TFTR para la reacción D-T estuvieron muy por encima de 10^{13} s/cm^3 y cercanos al valor requerido por el criterio de Lawson. En 1991 se alcanzaron proporciones de reacción de 6×10^{17} D–T fusiones por segundo en el tokamak JET de Abington, Inglaterra.

Uno de los experimentos de fusión de nueva generación es el Experimento del Toroide Esférico Nacional (NSTX) en el laboratorio de física de plasma en Princeton que se ilustra en la figura 45.10c. Este reactor fue puesto en curso en febrero de 1999 y desde esta fecha ha estado funcionando en experimentos de fusión. En lugar de plasma en forma de rosquilla de un tokamak, el NSTX produce un plasma esférico que tiene un agujero que pasa por su centro. La principal ventaja de la configuración esférica es su capacidad de confinar el plasma a una presión más alta en un campo magnético determinado. Este método podría llevar al perfeccionamiento de reactores de fusión más pequeños y más económicos.

Actualmente está en proceso un esfuerzo de colaboración internacional en donde participan Estados Unidos, Unión Europea, Japón, China, Corea, India y Rusia para construir un reactor de fusión denominado ITER. Estas siglas significan International Thermonuclear Experimental Reactor, aunque de manera reciente el enfasis se ha cambiado para interpretar "iter" en términos de su significado en latín, "el progreso." Una explicación propuesta para este cambio es evitar malentendidos y connotaciones negativas públicas hacia la palabra termonuclear. Estas instalaciones se pondrán a trabajar en los problemas tecnológicos y científicos relacionados con la factibilidad de obtener potencia por fusión. El diseño está completo, y en junio de 2005 se eligió Cadarache, Francia, como el sitio del reactor. La construcción requerirá aproximadamente 10 años, y se proyecta que la operación de fusión comience en 2016. Si el equipo planeado funciona como se espera, el número de Lawson para el ITER será unas seis veces mayor que en el tokamak JT-60U de Japón, que posee el récord actual. El ITER producirá 1.5 GW de energía eléctrica, y el contenido de energía de las partículas alfa dentro del reactor será tan intenso que podrá sostenerse la reacción de fusión, lo cual permitirá que las fuentes auxiliares de energía se desconecten una vez iniciada la reacción.

EJEMPLO 28.1 **Dentro de un reactor de fusión**

En 1998 el tokamak JT-60U en Japón operó con plasma D-T con 4.8×10^{13} cm^{-3} de densidad a una temperatura (en unidades de energía) de 24.1 keV. Confinaba este plasma dentro de un campo magnético durante 1.1 s.

A) ¿Estos datos satisfacen el criterio de Lawson?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la ayuda de la tercera de las ecuaciones 45.4, imagine muchas de tales reacciones que ocurren en un plasma de alta temperatura y alta densidad.

Categorizar Se usa el concepto del número de Lawson explicado en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe el número de Lawson para el JT-60U: $n\tau = (4.8 \times 10^{13}\ \text{cm}^{-3})(1.1\ \text{s}) = 5.3 \times 10^{13}\ \text{s/cm}^3$

Este valor está cerca de satisfacer el criterio de Lawson de 10^{14} s/cm^3 para un plasma D-T dado en la ecuación 45.5. De hecho, los científicos registraron una ganancia de energía de 1.25, lo que indica que el reactor operaba ligeramente sobre el punto de equilibrio y produjo más energía de la que se requería para mantener el plasma.

B) ¿De qué modo se compara la densidad del plasma con la densidad de átomos en un gas ideal cuando el gas está bajo condiciones estándar ($T = 0$°C y $P = 1$ atm)?

SOLUCIÓN

Encuentre la densidad de átomos en una muestra de gas ideal al evaluar N_A/V_{mol}, donde N_A es el número de Avogadro y V_{mol} es el volumen molar de un gas ideal bajo condiciones estándar, 2.24×10^{-2} m^3/mol:

$$\frac{N_A}{V_{mol}} = \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3\text{/mol}} = 2.7 \times 10^{25} \text{ átomos/m}^3$$

$$= 2.7 \times 10^{19} \text{ átomos/cm}^3$$

Este valor es más de 500 000 veces mayor que la densidad del plasma en el reactor.

Confinamiento inercial

La segunda técnica para confinar un plasma se llama **confinamiento inercial** y utiliza un objetivo D–T que tiene una densidad de partículas muy alta. En este esquema, el tiempo de confinamiento es muy corto (por lo general 10^{-11} a 10^{-9} s),y, debido a su propia inercia, las partículas no tienen oportunidad de moverse apreciablemente desde sus posiciones iniciales. Por lo tanto, el criterio de Lawson puede cumplirse al combinarse una alta densidad de partículas con un tiempo breve de confinamiento.

La fusión de láser es la forma más común de confinamiento inercial. En una pequeña pastilla D–T, de alrededor de 1 mm de diámetro, inciden simultáneamente varios rayos láser de alta densidad enfocados, lo cual resulta en un gran pulso de energía de entrada que hace que la superficie de la pastilla de combustible se evapore (figura 45.11). Las partículas que escapan ejercen una fuerza de reacción por la tercera ley sobre el núcleo de la pastilla, con lo que se obtiene una fuerte onda de choque compresiva que se mueve hacia dentro. Esta onda de choque aumenta la presión y densidad del núcleo y produce un correspondiente aumento de la temperatura. Cuando la temperatura del núcleo alcanza la temperatura de ignición, se presentan reacciones de fusión.

Uno de los laboratorios líderes en fusión láser de Estados Unidos es la instalación Omega en la Universidad de Rochester, en Nueva York. Esta instalación enfoca 24 haces láser sobre el objetivo. En la actualidad se encuentra bajo construcción, en el Lawrence Livermore National Laboratory en Livermore, California, la National Ignition Facility. El aparato de investigación incluirá 192 haces láser que se pueden enfocar sobre una pastilla de deuterio-tritio. Se espera que la construcción termine en 2009, y se planea que las pruebas de ignición de fusión comiencen en 2010.

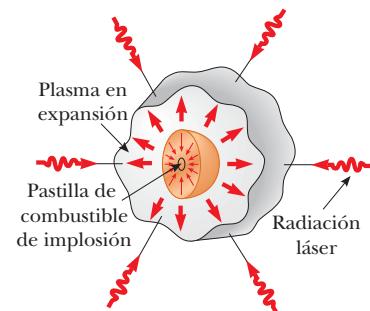
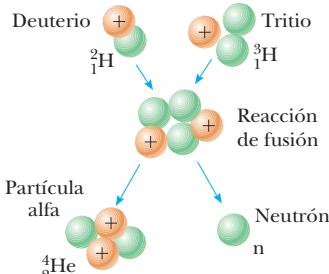
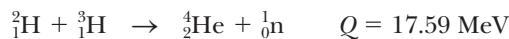



Figura 45.11 En confinamiento inercial, una pastilla de combustible D–T se fusiona cuando inciden sobre ella simultáneamente varios rayos láser de alta intensidad.

Diseño de un reactor de fusión

En la reacción de fusión D–T

$${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n} \qquad Q = 17.59 \text{ MeV}$$

la partícula alfa lleva 20% de la energía y el neutrón lleva 80%, o sea, unos 14 MeV. En la figura 45.12 se muestra un diagrama de la reacción de fusión deuterio-tritio. Porque las partículas alfa, portan carga, son absorbidas principalmente por el plasma, haciendo que la temperatura de éste aumente. En contraste, los neutrones de 14 MeV, eléctricamente neutros, pasan por el plasma y son absorbidos por un material que los cubre de sus alrededores, donde su gran energía cinética es extraída y usada para generar energía eléctrica.

Un esquema es usar litio metálico fundido como material absorbente de neutrones y circular el litio en un circuito intercambiador cerrado para producir vapor y accionar las turbinas, como en una planta convencional de generación de energía eléctrica. La figura 45.13 muestra un diagrama de este reactor. Se estima que una capa fértil de litio de alre-

Figura 45.12 Fusión de deuterio-tritio 80% de la energía liberada está en el neutrón de 14 MeV.

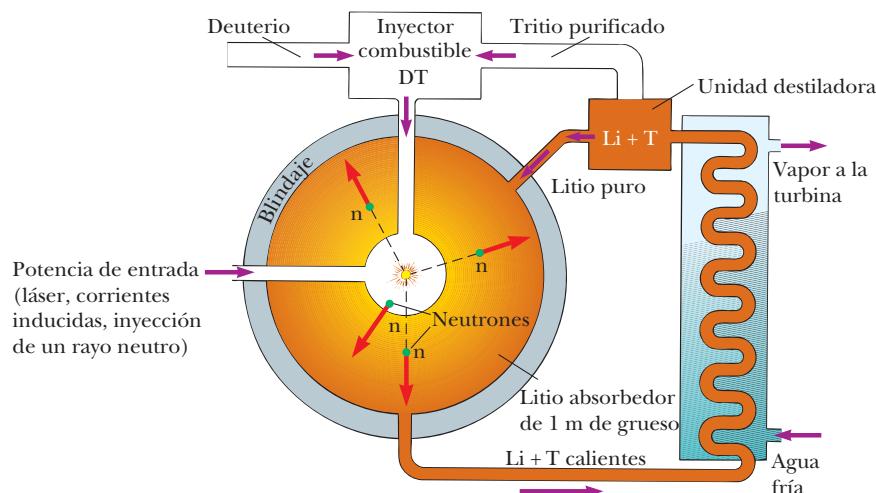
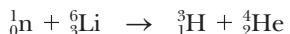



Figura 45.13 Diagrama de un reactor de fusión.

dedor de 1 m de grueso captura casi 100% de los neutrones provenientes de la fusión de una pequeña pastilla D–T.

La captura de neutrones por el litio se describe en la reacción

$$ {}^{1}_{0}\text{n} + {}^{6}_{3}\text{Li} \rightarrow {}^{3}_{1}\text{H} + {}^{4}_{2}\text{He} $$

donde las energías cinéticas del tritio cargado ${}^{3}_{1}\text{H}$ y la partícula alfa se convierten en energía interna en el litio fundido. Una ventaja extra de usar litio como medio de transferencia de energía es que el tritio producido se puede separar del litio y devolver al reactor como combustible.

Ventajas y problemas de fusión

Si alguna vez se puede utilizar la energía de fusión, se obtendrán varias ventajas sobre la energía generada por fisión: 1) bajo costo y abundancia de combustible (deuterio), 2) imposibilidad de accidentes fuera de control y 3) reducido riesgo de radiación. Algunos de los problemas y desventajas anticipados incluyen 1) escasez de litio, 2) suministro limitado de helio, que es necesario para enfriar los imanes superconductores empleados para producir intensos campos de confinamiento, y 3) daños estructurales y radiactividad inducida causada por bombardeo de neutrones. Si estos problemas y los factores de diseño técnicos se pueden resolver, la fusión nuclear puede convertirse en fuente factible de energía hacia mediados del siglo XXI.

45.5 Daño por radiación

En el capítulo 34 aprendió que la radiación electromagnética nos rodea en forma de ondas de radio, microondas, ondas de luz, etcétera. En esta sección se estudian formas de radiación que pueden causar daños graves cuando pasan por la materia, como la radiación que resulta de procesos radiactivos y radiación en forma de partículas energéticas, como son los neutrones y los protones.

El grado y tipo de daños dependen de varios factores, incluyendo el tipo y energía de la radiación y las propiedades de la materia. Los metales empleados en estructuras de reactores nucleares pueden ser severamente debilitados por los altos flujos de neutrones energéticos porque estos flujos producen con frecuencia la fatiga de los metales. Las averías en estas situaciones se dan en forma de desplazamientos atómicos, que a veces resultan en importantes alteraciones en las propiedades de un material.

Los daños por radiación en organismos biológicos se deben principalmente a efectos de ionización en células. La función normal de una célula puede ser alterada cuando se

forman iones altamente radiactivos como resultado de la radiación por ionización. Por ejemplo, el hidrógeno y el radical de hidrosxilo OH^- producidos a partir de moléculas de agua pueden inducir reacciones químicas que pueden romper enlaces en proteínas y otras moléculas vitales. Además, la radiación por ionización puede afectar las moléculas vitales directamente al remover electrones de las estructuras de estas moléculas. Grandes dosis de radiación son especialmente peligrosas porque los daños a un gran número de moléculas en una célula pueden provocar que ésta muera. Aun cuando la muerte de una sola célula por lo general no es un problema, la muerte de muchas células sí puede resultar en lesiones irreversibles al organismo. Las células que se dividen rápidamente, como las del tracto digestivo, los órganos reproductores y los folículos del pelo, son especialmente susceptibles. Además, las células que sobreviven a una radiación pueden adquirir defectos. Estas células defectuosas pueden producir otras iguales y generar al cáncer.

En sistemas biológicos es común separar los daños por radiación en dos categorías: los somáticos y los genéticos. Un daño *somático* es el asociado con cualquier célula del cuerpo, excepto las células reproductoras, y puede llevar al cáncer o alterar gravemente las características de organismos específicos. Uno *genético* afecta sólo a las células reproductoras. El daño a los genes en células reproductoras puede llevar a descendencia con malformaciones. Es importante estar consciente del efecto de los tratamientos de diagnóstico, por ejemplo rayos X y otras formas de exposición a radiación, y equilibrar los beneficios significativos del tratamiento con los efectos que producen daños.

Los daños causados por radiación también dependen del poder de penetración de la radiación. Las partículas alfa los causan grandes, pero penetran sólo a una pequeña profundidad en un material debido a la fuerte interacción con otras partículas cargadas. Los neutrones no interactúan mediante la fuerza eléctrica, y por ello penetran a mayor profundidad, causando así daños considerables. Los rayos gamma son fotones de alta energía que pueden dañar gravemente pero con frecuencia pasan por la materia sin interactuar con ésta.

Varias unidades se han empleado históricamente para cuantificar la cantidad, o dosis, de cualquier radiación que interactúa con una sustancia.

El **roentgen** (R) es la cantidad de radiación ionizante que produce una carga eléctrica de 3.33×10^{-10} C en 1 cm^3 de aire bajo condiciones normales.

De modo equivalente, el roentgen es la cantidad de radiación que aumenta la energía de 1 kg de aire en 8.76×10^{-3} J.

En la mayor parte de las aplicaciones, el roentgen ha sido sustituido por el rad (siglas de *radiation absorbed dose,* dosis absorbida de radiación):

Un **rad** es la cantidad de radiación que aumenta la energía de 1 kg de material absorbente en 1×10^{-2} J.

Aun cuando el rad es una unidad física perfectamente buena, no es la mejor unidad para medir el grado de daños biológicos producidos por radiación, porque el daño depende no sólo de la dosis sino también del tipo de radiación. Por ejemplo, una dosis dada de partículas alfa causa alrededor de 10 veces más lesiones biológicas que una dosis igual de rayos X. El factor RBE (relative biological effectiveness) efectividad biológica relativa, para un tipo determinado de radiación es **el número de rads de radiación X o radiación gamma que produce el mismo daño biológico que 1 rad de la radiación que se use.** Los factores RBE para diferentes tipos de radiación se dan en la tabla 45.1. Los valores son sólo aproximados porque varían con la energía de la partícula y la forma del daño. El factor RBE debe ser considerado sólo una guía de primera aproximación a los efectos reales de radiación.

Por último, el **rem** (radiation equivalent in man), la radiación equivalente en el hombre, es el producto de la dosis en rad y el factor RBE:

$$\text{Dosis en rem} \equiv \text{dosis en rad} \times \text{RBE} \quad \textbf{(45.6)}$$

◄ Dosis en radiación en rem

TABLA 45.1

Factores RBE para varios tipos de radiación

Radiación	Factor RBE
Rayos X y rayos gamma	1.0
Partículas beta	1.0–1.7
Partículas alfa	10–20
Neutrones térmicos	4–5
Neutrones y protones rápidos	10
Iones pesados	20

Nota: [a]RBE= efectividad biológica relativa

Según esta definición, 1 rem de dos tipos cualesquiera de radiación produce la misma cantidad de lesión biológica. La tabla 45.1, muestra que una dosis de 1 rad de neutrones rápidos representa una dosis efectiva de 10 rem, pero 1 rad de radiación gamma es equivalente a una dosis de sólo 1 rem.

La radiación de nivel bajo de fuentes naturales, por ejemplo los rayos cósmicos y las piedras y suelo radiactivos, entrega a cada humano una dosis de casi 0.13 rem/año; esta radiación se llama *radiación de fondo*, varía con la geografía, siendo los principales factores la altitud (exposición a rayos cósmicos) y la geología (gas radón liberado por algunas formaciones rocosas, depósitos de minerales naturalmente radiactivos).

El límite superior de la cantidad de dosis de radiación recomendado por el gobierno de Estados Unidos (con la excepción de la radiación de fondo) es de unos 0.5 rem/años. Muchos oficios involucran exposiciones mucho más altas a la radiación, y por ello se ha establecido un límite superior de 5 rem/año para exposición combinada en todo el cuerpo. Se permiten límites superiores más altos para ciertas partes del cuerpo, como son las manos y los antebrazos. Una dosis de 400 a 500 rems resulta en un porcentaje de mortalidad de alrededor de 50% (lo cual significa que la mitad de las personas expuestas a este nivel de radiación mueren). La forma más peligrosa de exposición para la mayoría de las personas es por ingestión o inhalación de isótopos radiactivos, en especial isótopos de aquellos elementos que el cuerpo retiene y concentra, como es el ^{90}Sr.

Este análisis se ha concentrado en mediciones de dosis de radiación en unidades como rads y rems porque estas unidades todavía tienen uso generalizado. De cualquier modo han sido formalmente sustituidas por las nuevas unidades del SI. El rad ha sido sustituido con el *gray* (Gy), igual a 100 rad y el rem ha sido sustituido por el *sievert* (Sv), igual a 100 rem. La tabla 45.2 resume las unidades anteriores y las nuevas del SI para las dosis de radiación.

45.6 Detectores de radiación

Las partículas que pasan por la materia interactúan con ésta en varias formas. La partícula puede ionizar átomos, dispersarse o ser absorbida por ellos. Los detectores de radiación explotan estas interacciones para permitir una medición de la energía, cantidad de movimiento o carga de la partícula, y a veces la existencia misma de la partícula si es difícil detectarla de otra forma. Se han desarrollado diferentes aparatos para detectar la radia-

TABLA 45.2

Unidades para dosis de radiación

Cantidad	Unidad del SI	Símbolo	Relación con otras unidades del SI	Unidad anterior	Conversión
Dosis absorbida	gray	Gy	= 1 J/kg	rad	1 Gy = 100 rad
Dosis equivalente	sievert	Sv	= 1 J/kg	rem	1 Sv = 100 rem

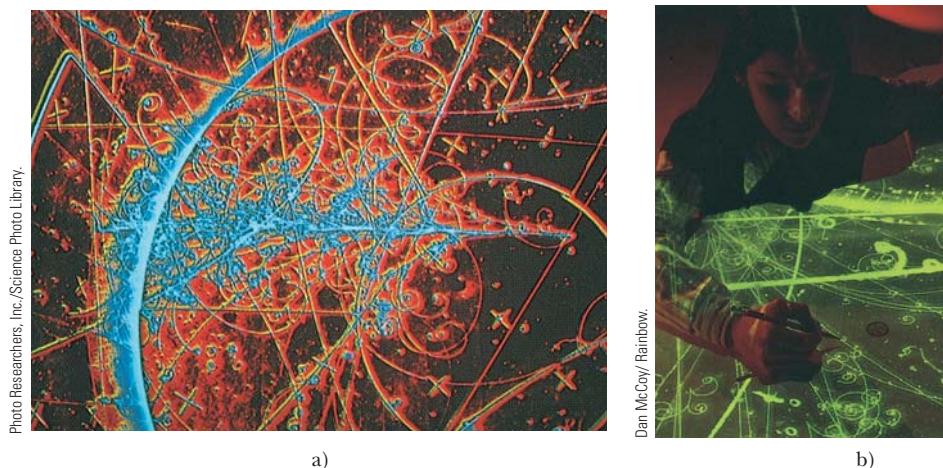



Figura 45.14 (a) Fotografía de una cámara de burbujas con colores artificiales que muestra huellas de partículas que han pasado por ella. (b) Esta investigadora está estudiando una fotografía de las huellas de una partícula hechas en una cámara de burbujas en el Fermilab. Las huellas curvas son el producto de partículas cargadas que se mueven por la cámara en presencia de un campo magnético aplicado. Las partículas cargadas negativamente se desvían en una dirección, mientras que las partículas cargadas positivamente se desvían en la dirección opuesta.

ción. Estos aparatos se usan para una amplia variedad de fines, incluyendo diagnóstico médico, mediciones radiactivas para la determinación de fechas, de radiación de fondo y de la masa de energía y de la cantidad de movimiento de partículas creadas en reacciones nucleares de alta energía.

En la primera parte del siglo XXI estos detectores eran mucho más sencillos que los de ahora. Estudiaremos tres de estos primeros detectores. Una **emulsión fotográfica** es el ejemplo más sencillo de un detector. Una partícula cargada ioniza los átomos de una capa de emulsión. La trayectoria de la partícula corresponde a una familia de puntos en los que han ocurrido cambios químicos en la emulsión. Cuando ésta se revela, queda visible la huella de la partícula. Una **cámara de niebla** contiene un gas que ha sido sometido a subenfriamiento apenas por debajo de su habitual punto de condensación. Una partícula energética al paso por ella ioniza el gas a lo largo de la trayectoria de la partícula. Los iones sirven como centros de condensación del gas subenfriado. La huella de la partícula se puede ver a simple vista y puede ser fotografiada. Se puede aplicar un campo magnético para determinar las cargas de las partículas así como su cantidad de movimiento y energía. Un aparato llamado **cámara de burbujas,** utiliza un líquido (generalmente hidrógeno líquido) que se conserva cerca de su punto de ebullición. Los iones producidos por partículas cargadas que ingresan dejan huellas de burbujas, las cuales pueden ser fotografiadas (figura 45.14). Porque la densidad del medio de detección en una cámara de burbuja es más alta que la densidad del gas en una cámara de niebla, la cámara de burbujas tiene una sensibilidad mucho más alta.

Detectores más recientes incluyen procesos más refinados. En una **cámara de iones** (figura 45.15) se generan pares electrón-ion cuando pasa radiación por un gas y produce una señal eléctrica. Dos placas en la cámara están conectadas a una fuente de voltaje y, por lo tanto, se mantienen a diferentes potenciales eléctricos. La placa positiva atrae a los electrones, y la placa negativa atrae a los iones positivos, lo que causa un pulso de corriente que es proporcional al número de pares electrón-ion cuando una partícula pasa por la cámara. Cuando se usa una cámara de iones tanto para detectar la presencia de una partícula como para medir su energía se habla de **contador proporcional.**

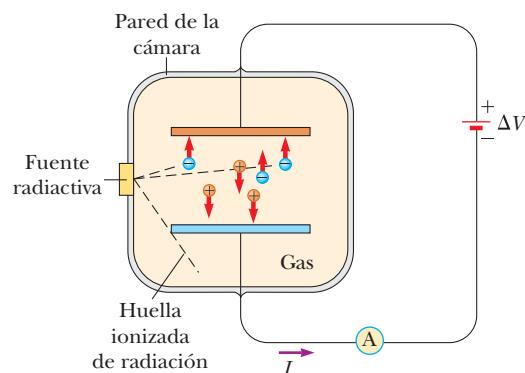
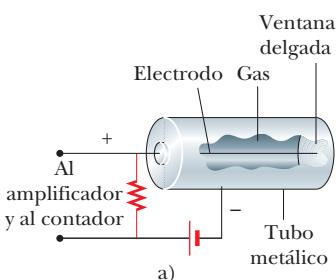



Figura 45.15 Diagrama simplificado de una cámara de iones. La fuente radiactiva crea iones positivos y electrones que son recolectados por las placas cargadas. La aparición de una corriente que se establece en el circuito externo es proporcional a la energía cinética de una partícula radiactiva si la partícula se detiene en la cámara.

Figura 45.16 a) Diagrama de un contador Geiger. El voltaje entre el electrodo y el tubo metálico es por lo general de 1000 V. b) Un científico usa un contador Geiger para hacer una medición.

El **contador Geiger** (figura 45.16) es quizá la forma más común de cámara de iones empleada para detectar radiactividad. Puede ser considerado como el prototipo de todos los contadores que utilizan ionización de un medio como el proceso básico de detección. El contador Geiger consta de un electrodo delgado alineado a lo largo del eje central de un tubo metálico cilíndrico lleno de un gas a baja presión. El alambre se mantiene con un potencial eléctrico alto positivo (unos 10^3 V) respecto al tubo. Cuando una partícula de alta energía que resulta, por ejemplo, de una desintegración radiactiva entra al tubo por una ventana delgada situada en un extremo, algunos de los átomos del gas se ionizan. Los electrones removidos de estos átomos son atraídos hacia el electrodo, y en el proceso ionizan otros átomos en su trayectoria. Esta ionización secuencial resulta en una *avalancha* de electrones que producen un pulso de corriente. Después de amplificar este pulso, el mismo puede usarse para accionar un contador electrónico o para ser entregado a un altavoz que emite un clic cada vez que se detecta una partícula. Aun cuando un contador Geiger detecta fácilmente la presencia de una partícula, la energía perdida por la partícula en el contador *no es* proporcional al pulso de corriente producido. En consecuencia, el contador Geiger no puede ser usado para medir la energía de una partícula.

Un **detector de diodo semiconductor** es en esencia una unión p–n de polarización inversa. Recuerde, de la sección 21.17, que por una unión p–n pasa corriente con facilidad cuando está directamente polarizada y no permite el paso de corriente cuando tiene polarización inversa. Conforme una partícula energética pasa por la unión, se excitan electrones en la banda de conducción y se forman huecos en la banda de valencia. El campo eléctrico interno barre los electrones hacia el lado positivo (n) de la unión y los huecos hacia el lado negativo (p). Este movimiento de electrones y huecos produce un pulso de corriente que es medido con un contador electrónico. En un aparato típico, la duración del pulso es 10^{-8} s.

Un **contador de centelleo** por lo general utiliza un material sólido o líquido cuyos átomos son excitados fácilmente por radiación. En tal caso, los átomos excitados emiten fotones cuando regresan a su estado fundamental. Los cristales transparentes de yoduro de sodio y ciertos plásticos son materiales comunes empleados para centelleo. Si el material de centelleo se une a un tubo fotomultiplicador (sección 40.2), los fotones emitidos por el centellador pueden ser detectados y producirse una señal eléctrica.

Tanto el contador de centelleo como el detector de diodo semiconductor son mucho más sensibles que un contador Geiger, principalmente debido a la más alta densidad del medio detector. Ambos miden la energía total depositada en el detector, que puede ser muy útil en la identificación de partículas. Además, si la partícula se detiene en el detector, ambos se pueden usar para medir la energía total de la partícula.

Los **detectores de huella** son aparatos que se emplean para ver directamente las huellas de partículas cargadas. Las partículas de alta energía producidas en aceleradores de partículas pueden tener energías que van de 10^9 a 10^{12} eV. Por lo tanto, a veces no pueden detenerse y no es posible medir sus energías con los detectores ya mencionados. En lugar de esto, la energía y la cantidad de movimiento de estas partículas energéticas se encuentran de la curvatura de su trayectoria en un campo magnético de magnitud y dirección conocidas.

Una **cámara de destellos** es un dispositivo contador formado por un conjunto de placas paralelas conductoras que es capaz de registrar una huella tridimensional. Las placas de números impares están conectadas a tierra, y las placas de números pares se mantienen con un potencial eléctrico alto (unos 10 kV). Los espacios entre las placas contienen un gas inerte a presión atmosférica. Cuando una partícula cargada pasa por la cámara, los átomos del gas son ionizados y con ello resulta una oleada de corriente y destellos visibles a lo largo de la trayectoria de la partícula. Estos destellos pueden ser fotografiados o detectados electrónicamente, y la información se envía a una computadora para la reconstrucción de la trayectoria y la determinación de masa, cantidad de movimiento y energía de la partícula.

Se han perfeccionado versiones más recientes de la cámara de destellos. Una **cámara de arrastre** tiene miles de alambres de alta tensión dispuestos en el espacio del detector, que está lleno de gas. El resultado es un conjunto de miles de contadores proporcionales. Cuando una partícula cargada pasa por el detector, ioniza las moléculas del gas y los electrones expulsados se arrastran hacia los alambres de alto voltaje, creando así una señal eléctrica a su llegada. Una computadora detecta las señales y reconstruye la trayectoria por el detector. Una cámara de arrastre de diseño avanzado y gran volumen, que ha dado

importantes resultados en el estudio de partículas formadas en colisiones de átomos, es el trazador Solenoidal con RHIC (STAR). (Las siglas RHIC son por Relativistic Heavy Ion Collider, construido en el Laboratorio Nacional Brookhaven, que inició sus operaciones en 2000.) Este tipo de cámara de arrastre se denomina **cámara de proyección en el tiempo.** Una fotografía del detector STAR se muestra en la figura 45.17.

Cortesía de Brookhaven National Laboratory/ RHIC-STAR.

Figura 45.17 Detector STAR del Relativistic Heavy Ion Collider del Laboratorio Nacional de Brookhaven.

45.7 Usos de la radiación

Las aplicaciones de la física nuclear son sumamente amplias en manufactura, medicina y biología. En esta sección se presentan unas pocas de estas aplicaciones y las teorías que les sirven de fundamento.

Rastreo

Para rastrear productos químicos que participan en diferentes reacciones se emplean rastreadores o indicadores radiactivos. Uno de los usos más valiosos de los rastreadores radiactivos es en la medicina. Por ejemplo, el yodo, nutriente necesario en el cuerpo humano, se obtiene principalmente por ingesta de sal yodada y mariscos. Para evaluar el desempeño de la tiroides, el paciente bebe una cantidad muy pequeña de yoduro de sodio radiactivo ^{131}I, isótopo de yodo producido de manera artificial (el isótopo no radiactivo, natural, es el ^{127}I). La cantidad de yodo en la glándula tiroides se determina como función del tiempo midiendo la intensidad de radiación en el cuello. La cantidad del isótopo ^{131}I en la tiroides es la medida de qué tan bien funciona esta glándula.

Una segunda aplicación se indica en la figura 45.18. Una solución con sodio radiactivo se inyecta en una vena en la pierna, y el tiempo en el que llega el radioisótopo a otra parte del cuerpo es detectado con un contador de radiación. El tiempo que transcurre es un buen indicador de la presencia o ausencia de constricciones en el sistema circulatorio.

Los rastreadores también son útiles en investigaciones agrícolas. Suponga que se desea determinar el mejor método para fertilizar una planta. Cierto elemento en un fertilizante, por ejemplo el nitrógeno, puede ser *marcado* (identificado) con uno de sus isótopos radiactivos. El fertilizante se esparce sobre un grupo de plantas, se rocía en el suelo para un segundo grupo y se revuelca en el suelo para un tercer grupo. A continuación se emplea un contador Geiger para rastrear el nitrógeno en los tres grupos.

Las técnicas de rastreo son tan amplias como la imaginación. Las aplicaciones actuales van desde verificar cómo los dientes absorben fluoruro, hasta monitorear la forma en que los limpiadores contaminan un equipo procesador de alimentos y estudiar el deterioro de un motor de automóvil. En este último caso se usa un material radiactivo para fabricar los anillos de pistones, y se comprueba la radiactividad del aceite para determinar la cantidad de desgaste en los anillos.

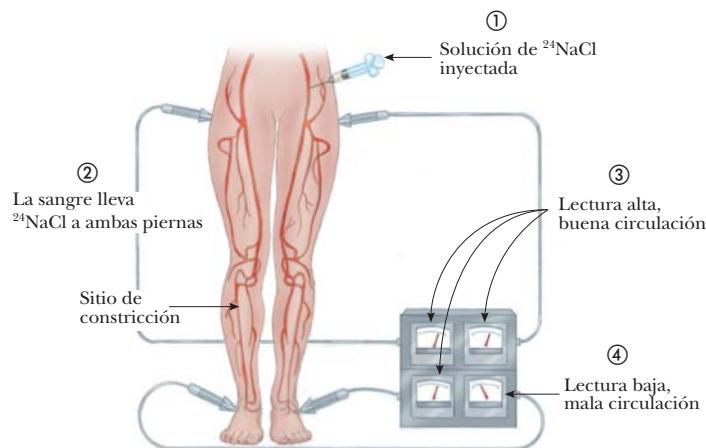



Figura 45.18 Técnica de un rastreador para determinar las condiciones del sistema circulatorio de una persona.

Análisis de materiales

Durante siglos el método estándar para identificar los elementos de una muestra de material ha sido el análisis químico, que comprende determinar la forma en que el material reacciona con diferentes especies químicas. Un segundo método es el análisis espectral, que funciona porque cada elemento, cuando se excita, emite su propio conjunto de longitudes de onda electromagnética característico. Estos métodos se complementan ahora con una tercera técnica, el **análisis por activación de neutrones.** Los métodos químico y espectral tienen la desventaja de que una muestra bastante grande del material debe destruirse para el análisis. Además, cantidades extremadamente pequeñas de un elemento pueden pasar desapercibidas por cualquiera de estos métodos. El análisis por activación de los neutrones tiene una ventaja sobre los otros dos métodos en ambos sentidos.

Cuando un material se irradia con neutrones, los núcleos del material absorben los neutrones y se cambian a diferentes isótopos, la mayor parte de los cuales son radiactivos. Por ejemplo, el ^{65}Cu absorbe un neutrón para convertirse en ^{66}Cu, que experimenta desintegración beta:

$$^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{65}_{29}\mathrm{Cu} \rightarrow {}^{66}_{29}\mathrm{Cu} \rightarrow {}^{66}_{30}\mathrm{Zn} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}$$

La presencia del cobre se puede deducir porque se sabe que el ^{66}Cu tiene una vida media de 5.1 minutos y decae con la emisión de partículas beta que tienen energías máximas de 2.63 y 1.59 MeV. También en la desintegración del ^{66}Cu se emite un rayo gamma de 1.04 MeV. Al examinar la radiación emitida por una sustancia después de exponerla a irradiación de neutrones, es posible detectar cantidades sumamente pequeñas de un elemento en esa sustancia.

El análisis por activación de neutrones se usa en forma rutinaria en varias industrias; por ejemplo, en la aviación comercial se utiliza para revisar el equipaje en los aviones en busca de explosivos ocultos. El siguiente uso, poco común, es de interés histórico. Napoleón murió en la isla de Santa Elena en 1821, supuestamente por causas naturales. Con los años ha habido sospechas de que su muerte no fue natural en absoluto. Tras su muerte, se le afeitó la cabeza y algunos de sus mechones fueron vendidos como recuerdo. En 1961 se midió la cantidad de arsénico de una muestra de este cabello mediante el análisis por activación de neutrones y se encontró una cantidad excepcionalmente alta de arsénico. (El análisis por activación es tan sensible que es posible analizar partes muy pequeñas de un solo cabello.) Los resultados mostraron que se le dio arsénico de manera irregular. De hecho, el patrón de concentración de arsénico correspondió a las fluctuaciones de la gravedad de la enfermedad de Napoleón, como lo determinan los registros históricos.

Los historiadores de arte usan análisis por activación de neutrones para detectar falsificaciones. Los pigmentos empleados en pinturas cambian con el paso del tiempo, y los pigmentos viejos y nuevos reaccionan de modo diferente a la activación por neutrones. El método puede incluso dejar ver obras de arte ocultas detrás de ciertas pinturas debido a que la capa oculta de pintura, más vieja, reacciona de modo diferente que la capa superficial a la activación por neutrones.

Terapia por radiación

Figura 45.19 Esta gran máquina entrega una dosis de radiación de ^{60}Co en un esfuerzo por destruir un tumor canceroso. Las células de cáncer son especialmente susceptibles a este tipo de terapia porque tienden a dividirse con más frecuencia que las células de tejido sano cercano.

La radiación causa mayor daño a las células que se dividen rápidamente. Por lo tanto, es útil en tratamientos de cáncer porque las células de tumores se dividen con gran rapidez. Varios mecanismos se han empleado para suministrar radiación a un tumor. En algunos casos se emplea un estrecho haz de rayos X o de radiación de una fuente como el ^{60}Co, como se ilustra en la figura 45.19. En otras situaciones, agujas radiactivas llamadas *semillas* se implantan en el tejido canceroso. El isótopo radiactivo ^{131}I se emplea para tratar el cáncer de tiroides.

Conservación de alimentos

La radiación está encontrando una creciente aplicación como medio para preservar los alimentos, porque la exposición a altos niveles de radiación puede destruir o incapacitar bacterias y esporas de moho (figura 45.20). Las técnicas incluyen exponer alimentos a rayos gamma, rayos de electrones de alta energía y rayos X. Los alimentos preservados en esta forma se pueden poner en un recipiente sellado (para evitar la entrada de nuevos agentes

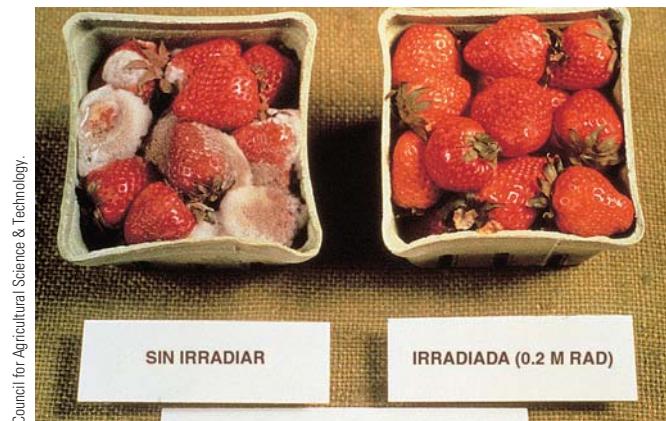
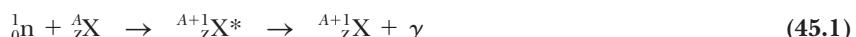
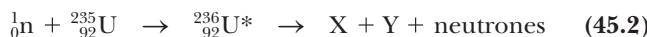



Figura 45.20 Las fresas de la izquierda no fueron tratadas y se ven enmohecidas. Las fresas en perfectas condiciones de la derecha han sido irradiadas. La radiación mató o incapacitó las esporas de moho que echaron a perder las fresas de la izquierda.

destructores) y almacenarse durante largo tiempo. No hay evidencia de efectos perjudiciales en el gusto o valor nutritivo de estos alimentos. La seguridad de los alimentos irradiados ha sido avalada por la Organización Mundial de la Saludo (OMS), los Centros de Prevención y Control de Enfermedades (CDC), el Departamento de Agricultura de Estados Unidos (USDA, por sus siglas en inglés), y la Food and Drug Administration (FDA).

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La probabilidad de que los neutrones sean capturados conforme se mueven a través de la materia aumenta con la disminución de la energía de los neutrones. Un **neutrón térmico** es un neutrón con movimiento lento que tiene una alta probabilidad de ser capturado mediante un núcleo en un **evento de captura de neutrón**:

$$ {}^{1}_{0}\text{n} + {}^{A}_{Z}\text{X} \rightarrow {}^{A+1}_{Z}\text{X}^* \rightarrow {}^{A+1}_{Z}\text{X} + \gamma \qquad \textbf{(45.1)} $$

donde ${}^{A+1}_{Z}\text{X}^*$ es un núcleo intermedio excitado que emite rápidamente un fotón.

La **fisión nuclear** se presenta cuando un núcleo muy pesado, como el ^{235}U, se divide en dos **fragmentos de fisión** más pequeños. Los neutrones térmicos pueden producir fisión en ^{235}U:

$$ {}^{1}_{0}\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow \text{X} + \text{Y} + \text{neutrones} \qquad \textbf{(45.2)} $$

donde ^{236}U* es un estado excitado intermedio y X y Y son los fragmentos de fisión. En promedio, se liberan 2.5 neutrones por cada evento de fisión. Luego los fragmentos se someten a una serie de desintegraciones beta y gamma a diferentes isótopos estables. La energía liberada por evento de fisión es aproximadamente de 200 MeV.

La **constante de reproducción** K es el número promedio de neutrones liberados de cada evento de fisión que causa otro evento. En un reactor de fisión es necesario mantener $K \approx 1$. El valor de K es afectado por factores tales como la geometría del reactor, la energía media del neutrón y la probabilidad de captura del neutrón.

En la **fusión nuclear** dos núcleos ligeros se funden para formar un núcleo más pesado y liberar energía. El principal obstáculo para obtener energía útil de la fusión es la gran fuerza repulsiva de Coulomb entre los núcleos cargados a pequeñas distancias de separación. La temperatura requerida para producir fusión está en el orden de 10^8 K y, a esta temperatura, toda la materia se presenta como plasma.

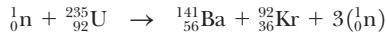
En un reactor de fusión la temperatura del plasma debe alcanzar la **temperatura de ignición crítica,** la temperatura a la que la potencia generada por las reacciones de fusión excede la pérdida de potencia en el sistema. La reacción de fusión más prometedora es la reacción D-T, que tiene una temperatura de ignición crítica de aproximadamente 4.5×10^7 K. Dos parámetros en el diseño de reactores de fusión son la **densidad de iones** n y el **tiempo de confinamiento** τ, el intervalo de tiempo durante el cual las partículas interactuantes se deben mantener a $T > T_{\text{ignición}}$. El **criterio de Lawson** afirma que, para la reacción D-T, $n\tau \geq 10^{14}$ s/cm^3.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Por qué el agua es mejor blindaje contra neutrones que el plomo o el acero?
2. Si un núcleo captura un neutrón de movimiento lento, el producto se deja en un estado altamente excitado, con una energía aproximada de 8 MeV por arriba del estado fundamental. Explique la fuente de la energía de excitación.
3. ¿Si el moderador fuera removido repentinamente de un reactor nuclear en una estación de generación de energía eléctrica, ¿cuál es la consecuencia más probable? a) El reactor iría a un estado supercrítico y una reacción fuera de control ocurriría. b) La reacción nuclear procedería de la misma forma, pero el reactor se recalentaría. c) El reactor llegó a un estado subcrítico y la reacción moriría hacia fuera. d) Ningún cambio ocurriría en la operación del reactor.
4. Analice las ventajas y desventajas de los reactores de fisión desde los puntos de vista de seguridad, contaminación y recursos. Haga una comparación con la energía eléctrica generada con la quema de combustibles fósiles.
5. **O** El 6 de agosto de 1945, Estados Unidos lanzó una bomba nuclear sobre Hiroshima. Los estadounidenses la llamaron "niñito" (*little boy*), y los japoneses la llamaron "niño bomba original". La energía liberada fue aproximadamente de 5×10^{13} J, equivalente a la de 12 000 toneladas métricas de TNT. ¿Cuál es el orden de magnitud de la masa convertida en energía en esta explosión? 1) 1 mg, b) 1 g, c) 1 kg, d) 1000 kg, e) 10 000 toneladas métricas.
6. **O** Cierto núcleo de $^{235}_{92}$U absorbe un neutrón y se fisiona en los productos $^{137}_{53}$I y $^{96}_{39}$Y, ¿junto con cuántos neutrones? a) 0, b) 1, c) 2, d) 3, e) 4, f) un número indeterminado.
7. ¿Por qué un reactor de fusión produciría menos desechos radiactivos que un reactor de fisión?
8. El criterio de Lawson expresa que la densidad del producto de iones y el tiempo de confinamiento deben exceder cierto número antes de que pueda ocurrir una reacción de fusión sin perdida ni ganancia. ¿Por qué estos dos parámetros deben determinar el resultado?
9. Analice las similitudes y diferencias entre fusión y fisión.
10. Analice las ventajas y desventajas de la energía por fusión desde el punto de vista de seguridad, contaminación y recursos.
11. **O** Puede usar la figura 44.5, la curva de energía de enlace, para responder esta pregunta. Tres reacciones nucleares tienen lugar y cada una involucra 108 nucleones: 1) dieciocho núcleos de ^{6}Li se funden en pares para formar nueve núcleos de ^{12}C, 2) cuatro núcleos, cada uno con 27 nucleones, se funden en pares para formar dos núcleos con 54 nucleones, y 3) un núcleo con 108 nucleones se fisiona para formar dos núcleos con 54 nucleones. Clasifique estas tres reacciones de acuerdo con la energía de reacción, del mayor valor Q positivo (que representa salida de energía) al valor negativo más grande (que representa entrada de energía). También incluya $Q = 0$ en su clasificación para dejar claro cuál de las reacciones pone energía y cuál absorbe energía. Anote cualquier caso de igualdad en su clasificación.
12. **O** En la figura 45.14, las huellas de las partículas en la cámara de burbujas por lo general son espirales en lugar de secciones de círculos. ¿Cuál es la explicación principal para esta forma? a) El campo magnético no es perpendicular a la velocidad de las partículas. b) El campo magnético no es uniforme en el espacio. c) Las fuerzas sobre las partículas aumentan con el tiempo. d) Las magnitudes de velocidad de las partículas disminuyen con el tiempo.
13. **O** Elija todas las respuestas correctas. En la operación de un contador Geiger, la amplitud del pulso de corriente es a) proporcional a la energía cinética de la partícula que produce el pulso, b) proporcional al número de partículas que entra al tubo para producir el pulso, c) proporcional al factor RBE del tipo de partícula que produce el pulso, o d) independiente de todos estos factores.
14. El diseño de un tubo fotomultiplicador (figura 40.12) podría sugerir que cualquier número de dínodos se puede usar para amplificar una señal débil. ¿Qué factores supone usted limitarían la amplificación en este dispositivo?
15. **O** Si una partícula alfa y un electrón tienen la misma energía cinética, ¿cuál experimenta la mayor desviación cuando pasa a través de un campo magnético? a) La partícula alfa. b) El electrón. c) Ambos experimentan la misma desviación. d) Ninguna se desvía.
16. **O** Al trabajar con materiales radiactivos en un laboratorio durante un año, a) Tomas recibió 1 rem de radiación alfa, b) Karen recibió 1 rad de neutrones rápidos, c) Pablo recibió 1 rad de neutrones térmicos como una dosis de cuerpo completo, y d) Dulce recibió 1 rad de neutrones térmicos sólo en las manos. Clasifique estas cuatro dosis de acuerdo con la cantidad probable de daño biológico, de mayor a menor, y anote cualquier caso de igualdad.
17. *Y rápida, y rápida más allá de la comprensión,*
giran alrededor de la belleza de la Tierra y su poder.
Los cielos arden alternadamente
Con profunda y fría noche lluviosa.
En corrientes poderosas espumea el océano
Desde la base abisal de las piedras,
Con las piedras y el mar convertidos en movimiento
En una carrera celeste, siempre veloz.
Mordaz, disipa el humo asfixiante
Arriba de los infiernos, lava de moscas
Un puente peligroso, el reino se balancea
Entre ellos y el vasto firmamento
Y las tempestades braman en una contienda
De mar a tierra, de tierra a mar.
En furia forjan una cadena a nuestro alrededor
Con el más profundo significado, energía.
Ahí abraza una catástrofe relampagueante
Antes del trueno, en su camino.
Pero todos tus siervos honran, Amo,
La gentil orden de tu día.
Johann Wolfgang von Goethe escribió este canto de los arcángeles en *Fausto*, medio siglo antes de que se reconociera la ley de la conservación de la energía. A veces los estudiantes lo encuentran útil para pensar en la lista de diversas "formas de energía", de cinética a nuclear. Discuta a favor o en contra de que estas líneas poéticas hacen una obvia u oblicua referencia a toda forma de energía y transferencia de energía.

Problemas

Sección 45.2 Fisión nuclear

> *Nota:* El problema 47 del capítulo 25, y los problemas 17 y 40 del capítulo 44 se pueden asignar a esta sección.

1. Quemar una tonelada métrica (1000 kg) de carbón puede producir una energía de 3.30×10^{10} J. La fisión de un núcleo de uranio 235 produce en promedio unos 208 MeV. ¿Qué masa de uranio produce la misma energía que una tonelada de carbón?

2. Encuentre la energía liberada en la reacción de fisión

$$^{1}_{0}\text{n} + ^{235}_{92}\text{U} \rightarrow ^{98}_{40}\text{Zr} + ^{135}_{52}\text{Te} + 3(^{1}_{0}\text{n})$$

Las masas atómicas de los productos de fisión son: $^{98}_{40}$Zr, 97.912 7 u; $^{135}_{52}$Te, 134.916 5 u.

3. El estroncio 90 es un producto de fisión particularmente peligroso del ^{235}U porque es radiactivo y sustituye al calcio en los huesos. ¿Qué otros productos directos de fisión lo acompañarían en la fisión del ^{235}U inducida por neutrones? (*Nota:* Esta reacción puede liberar dos, tres o cuatro neutrones libres.)

4. a) La siguiente es una reacción de fisión característica de las que se presentan en una estación nuclear generadora de energía eléctrica:

$$^{1}_{0}\text{n} + ^{235}_{92}\text{U} \rightarrow ^{141}_{56}\text{Ba} + ^{92}_{36}\text{Kr} + 3(^{1}_{0}\text{n})$$

Encuentre la energía liberada. Las masas necesarias son

$$M(^{141}_{56}\text{Ba}) = 140.914\,4 \text{ u} \quad M(^{92}_{36}\text{Kr}) = 91.926\,2 \text{ u}$$

b) ¿Qué fracción de la masa inicial del sistema se transforma?

5. Haga una lista de las reacciones nucleares necesarias para producir ^{233}U a partir del ^{232}Th bajo bombardeo de neutrones rápidos.

6. ● Una reacción que ha sido considerada como fuente de energía es la absorción de un protón por un núcleo de boro 11 para producir tres partículas alfa:

$$^{1}_{1}\text{H} + ^{11}_{5}\text{B} \rightarrow 3(^{4}_{2}\text{He})$$

Esta es una posibilidad atractiva porque el boro se obtiene fácilmente de la corteza de la Tierra. Una desventaja es que los protones y núcleos de boro deben tener grandes energías cinéticas para que ocurra la reacción. Esto contrasta con la iniciación de la fisión de uranio por neutrones lentos. a) ¿Cuánta energía es liberada en cada reacción? b) ¿Por qué las partículas reactivas deben tener elevadas energías cinéticas?

7. **Problema de repaso.** Suponga que se usa uranio enriquecido que contiene 3.40% del isótopo fisionable $^{235}_{92}$U como combustible para un barco. El agua ejerce una fuerza de fricción promedio de magnitud 1.00×10^5 N en el barco. ¿Qué distancia puede navegar el barco por kilogramo de combustible? Suponga que la energía liberada por evento de fisión es 208 MeV y que el motor del barco tiene una eficiencia de 20.0%.

8. Una planta de fisión nuclear representativa para generación de energía eléctrica produce alrededor de 1.00 GW de energía eléctrica. Suponga que la planta tiene una eficiencia global de 40.0% y que cada fisión produce 200 MeV de energía. Calcule la masa del ^{235}U consumida por día.

Sección 45.3 Reactores nucleares

9. Se ha estimado que existen en concentraciones que rebasan 100 partes por millón 10^9 toneladas de uranio natural, de las cuales 0.7% corresponden al isótopo fisionable ^{235}U. Suponga que el uso de energía de todo el mundo (7×10^{12} J/s) es alimentado por fisión del ^{235}U en reactores nucleares convencionales, que liberan 208 MeV por cada reacción. ¿Cuánto puede durar el suministro? La estimación del suministro de uranio está tomada de la obra de K. S. Deffeyes e I. D. MacGregor, "World Uranium Resources", *Scientific American* **242**(1):66, 1980.

10. ● Para minimizar la fuga de neutrones de un reactor, la relación entre el área superficial y el volumen debe ser mínima. Para un volumen dado *V*, calcule esta relación para a) una esfera, b) un cubo y c) un paralelepípedo de dimensiones $a \times a \times 2a$. d) ¿Cuál de estas formas tendría un mínimo de fugas? ¿Cuál tendría un máximo de fugas? Explique sus respuestas.

11. Si la constante de reproducción es de 1.000 25 para una reacción en cadena en un reactor de fisión y el intervalo de tiempo promedio entre fisiones sucesivas es 1.20 ms, ¿en qué factor aumentará la rapidez de reacción en un minuto?

12. Un gran generador nuclear produce unos 3000 MW de potencia en su núcleo. Tres meses después de que el reactor se apaga, la potencia del núcleo a causa de los subproductos radiactivos es de 10.0 MW. Si se supone que cada emisión entrega a la potencia 1.00 MeV de energía, encuentre la actividad en becquerels tres meses después de que el reactor ha sido apagado.

13. ● Por lo general, una partícula no se puede localizar a distancias mucho menores que su longitud de onda de De Broglie. Se puede considerar que este hecho significa que un neutrón lento parece ser más grande a una partícula objetivo que un neutrón rápido en el sentido de que el neutrón lento tiene probabilidades de encontrarse en un gran volumen de espacio. Para un neutrón térmico a temperatura ambiente de 300 K, encuentre a) la cantidad de movimiento lineal y b) la longitud de onda de De Broglie. Enuncie cómo se compara este tamaño efectivo con las dimensiones nuclear y atómica.

14. La probabilidad de una reacción nuclear aumenta dramáticamente cuando la partícula incidente recibe energía por arriba de la "barrera de Coulomb", que es la energía potencial eléctrica de los dos núcleos cuando sus superficies apenas se tocan. Calcule la barrera de Coulomb para la absorción de una partícula alfa por un núcleo de oro.

Sección 45.4 Fusión nuclear

15. ● a) Considere un generador de fusión construido para producir 3.00 GW de potencia. Determine la rapidez de combustión

en gramos por hora si se usa la reacción D–T. b) Haga lo mismo para la reacción D–D, suponiendo que los productos de reacción se dividen equitativamente entre (n,^{3}He) y (p,^{3}H).

16. ● Dos núcleos que tienen números atómicos Z_1 y Z_2 se aproximan el uno al otro con una energía total E. a) Cuando están muy separados, interactúan únicamente por repulsión eléctrica. Si se aproximan a una distancia de 1.00×10^{-14} m, repentinamente la fuerza nuclear se hace cargo de que se fundan. el valor mínimo de E necesario para producir fusión, en términos de Z_1 y Z_2. b) Establezca cómo depende E de los números atómicos. c) Si $Z_1 + Z_2$ tienen cierto valor objetivo tal como 60 sería energéticamente favorable considerar $Z_1 = 1$ y $Z_2 = 59$ o bien $Z_1 = Z_2 = 30$, ¿o cuál? Explique su respuesta. d) Evalúe a partir de su expresión la energía mínima de fusión para las reacciones D–D y D–T (la primera y tercera reacciones de la ecuación 45.4).

17. ● **Problema de repaso.** Considere la reacción de fusión deuterio-tritio con el núcleo de tritio en reposo:

$$^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^1_0\text{n}$$

a) Suponga que los núcleos reactivos se fusionan espontáneamente si se tocan sus superficies. De la ecuación 44.1, determine la distancia necesaria de aproximación más cercana entre sus centros. b) ¿Cuál es la energía eléctrica potencial (en eV) a esta distancia? c) Suponga que el deuterón se dispara directamente a un núcleo de tritio originalmente inmóvil con apenas la energía suficiente para alcanzar la distancia necesaria de aproximación más cercana. ¿Cuál es la rapidez común de los núcleos de deuterio y tritio cuando se tocan, en términos de la rapidez inicial de deuterio v_i? *Nota:* En este punto, los dos núcleos tienen una velocidad común igual a la velocidad del centro de masa. d) Utilice métodos de energía para hallar la energía mínima inicial de deuterio necesaria para obtener fusión. e) ¿Por qué la reacción de fusión en realidad ocurre a energías de deuterio mucho menores que las calculadas en d)?

18. De todo el hidrógeno de los océanos, 0.030 0% de la masa es deuterio. Los océanos tienen un volumen de 317 millones de millas cúbicas. a) Si la fusión nuclear fuera controlada y todo el deuterio de los océanos se fusionara a $^4_2$He, ¿cuántos joules de energía serían liberados? b) **¿Qué pasaría si?** El consumo de energía eléctrica en todo el mundo es alrededor de 7.00×10^{12} W. Si el consumo fuera 100 veces mayor, ¿cuántos años duraría la energía calculada en el inciso a) hasta el final?

19. Para entender por qué es necesario el confinamiento del plasma, considere la rapidez a la que se perdería un plasma no confinado. a) Estime la rapidez rms de deuterones en un plasma a 4.00×10^8 K. b) **¿Qué pasaría si?** Estime el orden de magnitud del intervalo de tiempo durante el cual este plasma permanecería en un cubo de 10 cm si no se tomaran medidas para contenerlo.

20. Se ha sugerido que los reactores de fusión son seguros contra explosiones porque nunca hay suficiente energía en el plasma para hacer mucho daño. a) En 1992, el reactor TFTR alcanzó una temperatura de iones de 4.0×10^8 K, una densidad de iones de 2.0×10^{13} cm^{-3} y un tiempo de confinamiento de 1.4 s. Calcule la cantidad de energía almacenada en el plasma del reactor TFTR. b) ¿Cuántos kilogramos de agua podrían hervir con esta cantidad de energía? (El volumen de plasma del reactor TFTR es de unos 50 m^3.)

21. **Problema de repaso.** Para confinar un plasma estable, la densidad de energía magnética en el campo magnético (ecuación 32.14) debe exceder de la presión $2nk_BT$ del plasma en un factor de al menos 10. En lo que sigue, suponga un tiempo de confinamiento $\tau = 1.00$ s. a) Con el uso del criterio de Lawson, determine la densidad de iones necesaria para la reacción D–T. b) Del criterio de temperatura de ignición, determine la presión necesaria del plasma. c) Determine la magnitud del campo magnético requerido para contener el plasma.

22. Una antigua ficción futurista era lograr que un reactor de fusión alimentara energía para disociar las moléculas de la basura en átomos separados y luego ionizar los átomos. Este material podría ponerse en un espectrómetro de masas gigante, de modo que la basura sería una nueva fuente de elementos isotópicamente puros, es decir, la mina del futuro. Si se supone una masa atómica promedio de 56 y una carga promedio de 26 (estimación alta, considerando todos los materiales orgánicos), en un haz de corriente de 1.00 MA, ¿cuánto tardaría procesar 1.00 tonelada métrica de basura?

Sección 45.5 Daño por radiación

23. Un edificio pequeño se ha contaminado accidentalmente con radiactividad. El material de larga duración en el edificio es estroncio 90. (El $^{90}_{38}$Sr tiene una masa atómica de 89.907 7 u, y su vida media es de 29.1 años. Es en particular peligroso porque sustituye el calcio en los huesos.) Suponga que el edificio contenía de inicio 5.00 kg de esta sustancia, repartidos de modo uniforme en todo el edificio y que el nivel de seguridad se define como menos de 10.0 desintegraciones por cada minuto (lo que es pequeño en comparación con la radiación de fondo). ¿Durante cuánto tiempo será inseguro el edificio?

24. **Problema de repaso.** Una fuente radiactiva particular produce 100 mrad de 2 MeV de rayos gamma por cada hora a una distancia de 1.00 m desde la fuente. a) ¿Cuánto tiempo podría soportar una persona a esta distancia antes de acumular una dosis intolerable de 1 rem? b) **¿Qué pasaría si?** Suponiendo que la fuente radiactiva es una fuente puntual, ¿a qué distancia recibiría la persona una dosis de 10.0 mrad/h?

25. ● Suponga que un técnico de rayos X toma un promedio de ocho placas de rayos X por cada día y por esta causa recibe una dosis de 5 rem/año. a) Estime la dosis en rem por radiografía tomada. b) ¿Cómo se compara la exposición del técnico con la radiación de fondo de bajo nivel?

26. **Blindaje de plomo**. Cuando los rayos gamma inciden en la materia, la intensidad de los rayos gamma que pasan por el material varía con la profundidad x, según $I(x) = I_0e^{-\mu x}$, donde μ es el coeficiente de absorción e I_0 es la intensidad de la radiación en la superficie del material. Para rayos gamma de 0.400 MeV en el plomo, el coeficiente de absorción es de 1.59 cm^{-1}. a) Determine el "semigrosor" del plomo, es decir, el grosor de plomo que absorbería la mitad de rayos gamma incidentes. b) ¿Qué grosor reducirá la radiación en un factor de 10^4?

27. Un técnico "ingenioso" decide calentar una taza con agua para su café con una máquina de rayos X. Si la máquina produce 10.0 rad/s, ¿cuánto tardará en subir la temperatura a 50.0°C?

28. **Problema de repaso.** El peligro para el cuerpo debido a una alta dosis de rayos gamma no se debe a la cantidad de energía absorbida, sino a la naturaleza ionizante de la radiación. Para ilustrar esto, calcule el aumento en la temperatura corporal que resultaría si una dosis "letal" de 1000 rad fuera absorbida estrictamente como energía interna. Tome el calor específico del tejido vivo como 4186 J/kg · °C.

29. El tecnecio 99 se emplea en ciertos procedimientos de diagnóstico médicos. Suponga que 1.00×10^{-8} g de ^{99}Tc se inyecta en un paciente de 60.0 kg y la mitad de los rayos gamma de 0.140 MeV son absorbidos en el cuerpo. Determine la dosis total de radiación recibida por el paciente.

30. Para destruir un tumor canceroso, a partir de cápsulas selladas implantadas que contienen paladio 103, en 30.0 días se entregará una energía total de 2.12 J mediante una dosis de radiación gamma. Suponga que este isótopo tiene una vida media de 17.0 d y emite rayos gamma de 21.0 keV de energía, que se absorbe por completo dentro del tumor. a) Encuentre la actividad inicial del conjunto de cápsulas. b) Encuentre la masa total del paladio radiactivo que contendrían estas "semillas".

31. Todavía se puede hallar estroncio 90 de las pruebas de bombas nucleares en la atmósfera. Cada desintegración de ^{90}Sr libera 1.1 MeV de energía en los huesos de una persona que había tenido sustitución de estroncio por calcio en los huesos. Suponga que una persona de 70.0 kg recibe 1.00 μg de ^{90}Sr por leche contaminada. Calcule la rapidez absorbida de dosis (en J/kg) en un año. Tome la vida media del ^{90}Sr como 29.1 años.

Sección 45.6 Detectores de radiación

32. Suponga que un tubo fotomultiplicador (figura 40.12) tiene siete dínodos con potenciales de 100, 200, 300, . . . , 700 V. El promedio de energía necesario para liberar un electrón de la superficie del dínodo es 10.0 eV. Suponga que sólo un electrón incide y que el tubo funciona a 100% de eficiencia. a) ¿Cuántos electrones pueden ser liberados en el primer dínodo? b) ¿Cuántos electrones se recolectan en el último dínodo? c) ¿Cuál es la energía disponible para el contador por cada electrón?

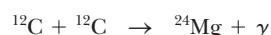
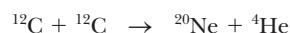
33. En un tubo Geiger, el voltaje entre los electrodos es, por lo general, de 1.00 kV y el pulso de corriente se descarga en un capacitor de 5.00 pF. a) ¿Cuál es la amplificación de energía de este aparato para un electrón de 0.500 MeV? b) ¿Cuántos electrones participan en la avalancha causada por un solo electrón de inicio?

34. ● a) Su abuela le relata cómo, cuando eran niños, papá, tías y tíos de usted hacían que la puerta con tela de alambre se cerrara continuamente cuando corrían entre la casa y el patio trasero. El intervalo entre un cierre de la puerta y el siguiente variaban al azar, pero la cantidad promedio de cierres siempre era constante: 38.0/h desde que amanecía hasta que oscurecía, todos los días de verano. Si la cantidad de cierres hubiera bajado de pronto a cero, los niños habrían encontrado un nido de ratones o se hubieran metido en otra travesura que requería la intervención de una persona adulta. ¿Cuánto tiempo, después del cierre de la puerta con tela de alambre, un padre atento y prudente esperaría antes de dejar su trabajo para ver por qué no pasan los niños? Explique su razonamiento. b) Una estudiante desea medir la vida media de una sustancia radiactiva, para lo cual usa una pequeña muestra. Los clics consecutivos de su contador Geiger están separados al azar en el tiempo. El contador registra 372 conteos durante un intervalo de cinco minutos y 337 conteos durante los siguientes cinco minutos. La cantidad promedio de fondo es 15 conteos por minuto. Encuentre el valor más probable para la vida media. c) Estime la incertidumbre en la determinación de la vida media. Explique su razonamiento.

Sección 45.7 Usos de la radiación

35. Durante la fabricación de un componente de acero de un motor, se incluye hierro radiactivo (^{59}Fe) en la masa total de 0.200 kg. El componente se coloca en un motor de prueba cuando la actividad debida a este isótopo es 20.0 μCi. Después de un periodo de prueba de 1000 horas, parte del aceite lubricante se retira del motor y se encuentra que contiene suficiente ^{59}Fe como para producir 800 desintegraciones/min/L de aceite. El volumen total de aceite del motor es 6.50 L. Calcule la masa total desgastada de la pieza componente del motor por hora de operación. La vida media del ^{59}Fe es 45.1 d.

36. Usted desea saber cuántos átomos del isótopo ^{65}Cu hay en una pequeña muestra de material. Bombardee la muestra con neutrones para asegurarse de que 1% de estos núcleos de cobre absorbe un neutrón. Después de una activación interrumpe el flujo de neutrones y luego usa un detector altamente eficiente para monitorear la radiación de los rayos gamma que salen de la muestra. Suponga que la mitad de los núcleos de ^{66}Cu emiten un rayo gamma de 1.04 MeV al decaer. (La otra mitad de los núcleos activados decae directamente al estado fundamental de ^{66}Ni.) Si después de 10 minutos (dos vidas medias) usted ha detectado 10^4 MeV de energía de fotones a 1.04 MeV, a) ¿cuántos átomos de ^{65}Cu hay en la muestra? b) Suponga que la muestra contiene cobre natural. Consulte las abundancias isotópicas que aparecen en lista de la tabla 44.2 y estime la masa total del cobre en la muestra.

37. El *análisis de activación de neutrones* es un método para analizar químicamente el nivel de isótopos. Cuando una muestra es radiada por neutrones, se producen átomos radiactivos en forma continua y luego decaen según sus vidas medias características. a) Suponga que una especie de núcleos radiactivos se produce a un ritmo constante R y que su decaimiento está descrito por la ley de desintegración radiactiva convencional. Si la radiación se inicia en el tiempo $t = 0$, demuestre que el número de átomos radiactivos acumulados en el tiempo t es

$$N = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

b) ¿Cuál es el número máximo de átomos radiactivos que es posible producir?

38. *Un calibrador de grosor.* Cuando los rayos gamma inciden sobre la materia, la intensidad de los rayos gamma que pasan a través del material varía con la profundidad x como $I(x) = I_0 e^{-\mu}$, donde I_0 es la intensidad de la radiación en la superficie del material y μ es el coeficiente de absorción. Para rayos gamma de baja energía en acero, considere que el coeficiente de absorción es 0.720 mm^{-1}. a) Determine el "semigrosor" para el acero, es decir: el grosor del acero que absorbería la mitad de los rayos gamma incidentes. b) En una acerería, el grosor de las hoja de acero que pasan por un rodillo se miden mediante el monitoreo de la intensidad de la radiación gamma que llega a un detector por debajo del metal que se mueve rápidamente desde una pequeña fuente inmediatamente arriba del metal. Si el grosor de la hoja cambia de 0.800 mm a 0.700 mm, ¿en qué porcentaje cambia la intensidad de los rayos gamma?

Problemas adicionales

39. Las detonaciones de carbono son poderosas reacciones nucleares que temporalmente separan con violencia los núcleos dentro de estrellas gigantes al final en sus vidas. Estas explosiones son producidas por fusión del carbono, que requiere una temperatura de unos 6×10^8 K para superar la fuerte repulsión de Coulomb entre los núcleos de carbón. a) Estime la barrera de energía de repulsión para la fusión, usando la temperatura necesaria para la fusión del carbono. (En otras palabras, ¿cuál es el promedio de energía cinética de un núcleo de carbono a 6×10^8 K?) b) Calcule la energía (en MeV) liberada en cada una de estas reacciones de "combustión de carbono":

$$^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{20}\text{Ne} + {}^{4}\text{He}$$

$$^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{24}\text{Mg} + \gamma$$

c) Calcule la energía (en kWh) cedida cuando 2.00 kg de carbono se fusionan por completo según la primera reacción.

40. **Problema de repaso.** Considere un núcleo en reposo, que espontáneamente se divide en dos fragmentos de masas m_1 y m_2. Demuestre que la fracción de la energía cinética total que lleva el fragmento m_1 es

$$\frac{K_1}{K_{tot}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

y la energía llevada por la masa m_2 es

$$\frac{K_2}{K_{tot}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

suponiendo que se puedan pasar por alto correcciones relativistas. *Nota:* Si el núcleo padre estaba en movimiento antes del decaimiento, los productos de fisión aún comparten la energía cinética como se muestra, mientras todas las velocidades se midan en el marco del centro de masa de referencia, en el que la cantidad de movimiento total del sistema es cero.

41. Un núcleo estacionario de $^{236}_{92}U$ se fisiona espontáneamente en dos fragmentos primarios, $^{87}_{35}Br$ y $^{149}_{57}La$. a) Calcule la energía de desintegración. Las masas atómicas necesarias son 86.920 711 u para $^{87}_{35}Br$, 148.934 370 u para $^{149}_{57}La$, y 236.045 562 u para $^{236}_{92}U$. b) ¿Cómo se divide la energía de desintegración entre los dos fragmentos primarios? Usted puede usar el resultado del problema 40. c) Calcule la rapidez de cada fragmento inmediatamente después de la fisión.

42. ● Explique cómo se compara la pérdida fraccionaria de energía en una reacción típica de fisión de ^{235}U con la pérdida fraccionaria de energía en una fusión D–T.

43. ● La vida media del tritio es 12.3 años. Si el reactor de fusión TFTR contiene 50.0 m^3 de tritio con una densidad igual a 2.00×10^{14} iones/cm^3, ¿cuántos curies de tritio había en el plasma? Compare este valor con el inventario de fisión (oferta estimada de material fisionable) de 4×10^{10} Ci.

44. Un reactor de fisión es golpeado por un misil y 5.00×10^6 Ci de ^{90}Sr, con vida media de 27.7 años, se evapora en el aire. El estroncio cae sobre un área de 10^4 km^2. ¿Después de qué intervalo de tiempo la actividad del ^{90}Sr alcanzará el nivel agrícolamente "seguro" de 2.00 μCi/m^2?

45. **Problema de repaso.** Una planta de energía nuclear opera usando energía liberada por fisión nuclear para convertir agua a 20°C en vapor a 400°C. ¿Teóricamente cuánta agua podría ser convertida en vapor por la fisión completa de 1.00 g de ^{235}U a 200 MeV/fisión?

46. **Problema de repaso.** Una planta nuclear generadora de energía eléctrica opera utilizando la energía liberada por fisión nuclear para convertir agua a T_c en vapor a T_h. ¿Teóricamente cuánta agua podría ser convertida en vapor por la fisión completa de una masa m de ^{235}U a 200 MeV/fisión?

47. ● Considere una muestra de 1.00 kg de uranio natural compuesto principalmente de ^{238}U, una cantidad más pequeña (0.720% por masa) de ^{235}U y una traza (0.005%) de ^{234}U, que tiene una vida media de 2.44×10^5 años. a) Encuentre la actividad en curies debida a cada uno de los isótopos. b) ¿Qué fracción de la actividad total se debe a cada isótopo? c) Explique si la actividad de esta muestra es peligrosa.

48. **Problema de repaso.** La primera bomba atómica fue una masa de plutonio 239 que se hizo explotar en la prueba Trinity, antes del alba del 16 de julio de 1945, en Alamogordo, Nuevo México. Enrico Fermi estaba a 14 km de distancia, recostado en el suelo y mirando hacia lado opuesto al de la bomba. Después de que todo el cielo se iluminó con increíble brillantez, Fermi se puso de pie y empezó a dejar caer trocitos de papel al suelo. Éstos empezaron a caer a sus pies en el aire en calma y en silencio. Cuando pasó la onda de choque, unos 40 s después de la explosión, el papel después en el aire saltó unos 5 cm, alejándose del punto cero. a) Suponga que la onda de choque del aire se propagó igualmente en todas direcciones sin absorción. Encuentre el cambio en el volumen de una esfera de 14 km de radio cuando se expande 5 cm. b) Encuentre el trabajo $P\Delta V$ realizado por el aire en esta esfera en la siguiente capa de aire más alejada del centro. c) Suponga que la onda de choque llevaba una energía del orden de una décima parte la energía de la explosión. Haga una estimación del orden de magnitud de la energía liberada por la bomba. d) Una tonelada de TNT en explosión libera 4.2 GJ de energía. ¿Cuál es el orden de magnitud de la energía de la prueba Trinity en toneladas equivales de TNT? El amanecer dejó ver la nube en forma de hongo. El conocimiento inmediato de Fermi acerca de la energía liberada por la bomba concordaba con lo que había determinado días antes mediante el análisis de complicadas mediciones.

49. ● Alrededor de una de cada 3300 moléculas de agua contiene un átomo de deuterio. a) Si todos los núcleos de deuterio en un litro de agua se fusionan por pares, de acuerdo con la reacción de fusión D–D $^2H + ^2H \rightarrow ^3He + n + 3.27$ MeV, ¿cuánta energía en joules se libera? b) **¿Qué pasaría si?** Quemar gasolina produce cerca de 3.40×10^7 J/L. Compare la energía que se puede obtener de la fusión del deuterio en un litro de agua con la energía liberada por la combustión de un litro de gasolina.

50. **Problema de repaso.** Un neutrón muy lento (con una rápidez aproximadamente igual a cero) puede iniciar la reacción

$$^1_0n + ^{10}_5B \rightarrow ^7_3Li + ^4_2He$$

La partícula alfa se aleja con una rapidez de 9.25×10^6 m/s. Calcule la energía cinética del núcleo de litio. Utilice ecuaciones no relativistas.

51. Cierta planta nuclear genera energía interna a razón de 3.065 GW y transfiere energía desde la planta mediante transmisión de electricidad a razón de 1.000 GW. De la energía desperdiciada, 3% se inyecta a la atmósfera y el resto se desvía a un río. Una ley gubernamental exige que el agua del río se caliente en no más de 3.50°C cuando se devuelva al río. a) Determine la cantidad de agua de enfriamiento necesaria (en kg/h y en m^3/h) para enfriar la planta. b) Suponga que la fisión genera 7.80×10^{10} J/g de ^{235}U. Determine el ritmo de quema de combustible (en kg/h) del ^{235}U.

52. El polonio 210, emisor de rayos alfa ($^{210}_{84}Po$), se usa en una fuente de energía nuclear en una nave espacial (figura P45.52). Determine la potencia de salida inicial de la fuente. Suponga que contiene 0.155 kg de ^{210}Po y que la eficiencia de conversión de energía de desintegración radiactiva en energía transferida por transmisión de electricidad es 1.00%.

Cortesía de la NASA .

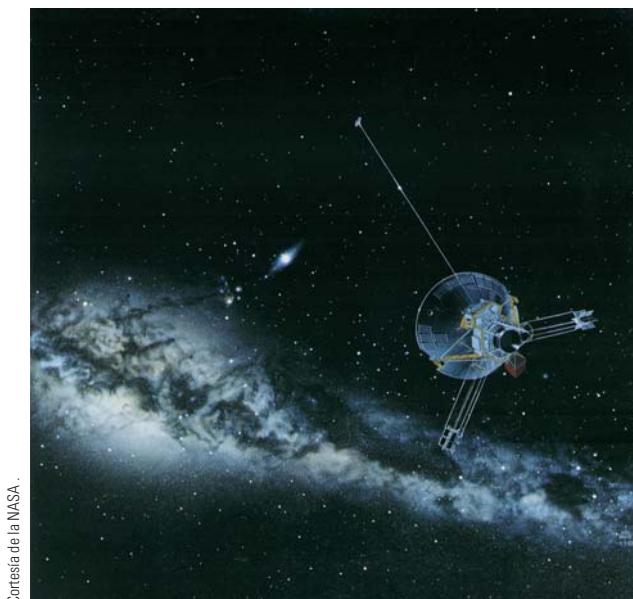
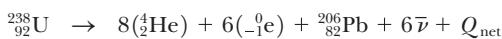



Figura P45.52 La nave espacial *Pioneer 10* sale del sistema solar. Lleva un suministro de energía radiactiva en las puntas de dos antenas. Los paneles solares no funcionarían en esta región alejada del Sol.

53. ● Debe procesarse uranio para producir uranio enriquecido ^{235}U para bombas y plantas de energía. El proceso rinde una enorme cantidad de ^{238}U casi puro como subproducto, llamado "uranio empobrecido". Debido a su alta densidad de masa, se emplea en obuses de artillería capaces de atravesar blindajes. a) Encuentre la dimensión de un lado de un cubo de 70.0 kg de ^{238}U ($\rho = 18.7 \times 10^3$ k/m^3). b) El isótopo ^{238}U tiene una larga vida media de 4.47 $\times 10^9$ años. Tan pronto como un núcleo se desintegra, inicia una serie relativamente rápida de 14 etapas que, juntos, constituyen la reacción neta

$$^{238}_{92}\text{U} \rightarrow 8(^4_2\text{He}) + 6(^{\;0}_{-1}\text{e}) + ^{206}_{82}\text{Pb} + 6\bar{\nu} + Q_{\text{net}}$$

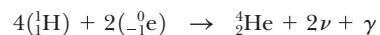
Encuentre la energía de desintegración. (Consulte la tabla 44.2.) c) Compruebe que una muestra radiactiva con ritmo R de desintegración y energía Q de desintegración tiene una potencia de salida $\mathcal{P} = QR$. d) Considere un obús de artillería con un forro de 70.0 kg de ^{238}U. Encuentre su potencia de salida debida a la radiactividad del uranio y sus hijas. Suponga que el obús es tan viejo, que las hijas han alcanzado ya cantidades de estado estable. Exprese la potencia en joules por año. e) **¿Qué pasaría si?** Un soldado de 17 años, de 70.0 kg de masa, trabaja en un arsenal donde se almacenan muchos de estos obuses. Suponga que su exposición a la radiación se limita a 5.00 rem por año. Encuentre la relación a la que puede absorber energía de radiación, en joules por año. Suponga un factor promedio de efectividad biológica relativa (RBE) de 1.10.

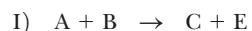
54. Un neutrón de 2.0 MeV se emite en un reactor de fisión. Si pierde la mitad de su energía cinética en cada colisión con un átomo moderador, ¿cuántas colisiones debe experimentar para convertirse en un neutrón térmico, con energía de 0.039 eV?

55. Si se supone que un deuterón y un tritón están en reposo cuando se fusionan, de acuerdo con la reacción

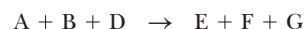
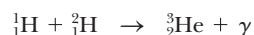
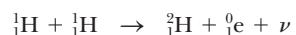
$$^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^1_0\text{n} + 17.6\text{ MeV}$$

determine la energía cinética adquirida por el neutrón.

56. Una cápsula sellada que contiene fósforo 32 ($^{32}_{15}$P) radiofarmacéutico, emisor de e$^-$, se implanta dentro del tumor de un paciente. La energía cinética promedio de las partículas beta es 700 keV. La actividad inicial es 5.22 MBq. Determine la dosis absorbida durante un periodo de 10.0 días. Suponga que las partículas beta son completamente absorbidas en 100 g de tejido. *Sugerencia:* Encuentre el número de partículas beta emitidas.

57. ● a) Calcule la energía (en kilowatt-horas) liberada si 1.00 kg de ^{239}Pu experimenta fisión completa y la energía liberada por evento de fisión es 200 MeV. b) Calcule la energía (en electrón volts) liberada en la siguiente reacción de fusión de deuterio-tritio

$$^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^1_0\text{n}$$

c) Calcule la energía (en kilowatt-horas) liberada si 1.00 kg de deuterio experimenta fusión de acuerdo con esta reacción. d) **¿Qué pasaría si?** Calcule la energía en (kilowatt-horas) liberada por la combustión de 1.00 kg de carbón si cada reacción de C + $O_2 \rightarrow CO_2$ da 4.20 eV. e) Haga una lista de las ventajas y desventajas de cada uno de estos métodos de generación de energía.

58. El Sol irradia energía en la proporción de 3.85×10^{26} W. Suponga que la reacción neta

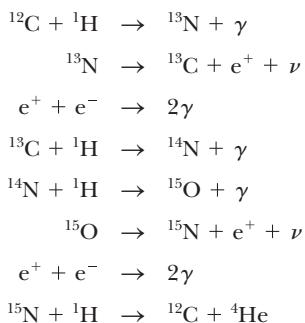
$$4(^1_1\text{H}) + 2(^{\;0}_{-1}\text{e}) \rightarrow ^4_2\text{He} + 2\nu + \gamma$$

toma en cuenta toda la energía liberada. Calcule el número de protones fusionados por segundo.

59. Considere las dos reacciones nucleares

$$\text{I)}\quad A + B \rightarrow C + E$$
$$\text{II)}\quad C + D \rightarrow F + G$$

a) Demuestre que la energía neta de desintegración para estas reacciones ($Q_{\text{neta}} = Q_{\text{I}} + Q_{\text{II}}$) es idéntica a la energía de desintegración para la reacción neta

$$A + B + D \rightarrow E + F + G$$

b) Una cadena de reacciones del ciclo protón-protón en el núcleo del Sol es

$$^1_1\text{H} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^2_1\text{H} + ^0_1\text{e} + \nu$$
$$^0_1\text{e} + ^{\;0}_{-1}\text{e} \rightarrow 2\gamma$$
$$^1_1\text{H} + ^2_1\text{H} \rightarrow ^3_2\text{He} + \gamma$$
$$^1_1\text{H} + ^3_2\text{He} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^0_1\text{e} + \nu$$
$$^0_1\text{e} + ^{\;0}_{-1}\text{e} \rightarrow 2\gamma$$

Según el inciso a), ¿Cuál es Q_{neta} para esta secuencia?

60. Suponga que el objetivo en un reactor de fusión láser es una esfera de hidrógeno sólido que tiene un diámetro de 1.50×10^{-4} m y una densidad de 0.200 g/cm^3. También suponga que la mitad de los núcleos son ^{2}H y la mitad son ^{3}H. a) Si 1.00% de un pulso de cuarzo de 200 kJ se entrega a esta esfera, ¿qué temperatura alcanza ésta? b) Si todo el hidrógeno "se quema" según la reacción D–T, ¿cuántos joules de energía se liberan?

61. ● Además del ciclo protón-protón descrito en el texto de este capítulo, el ciclo de carbono, propuesto primero por Hans Bethe en 1939, es otro ciclo por el cual se libera energía en las estrellas

a medida que el hidrógeno se convierte en helio. El ciclo del carbono exige temperaturas más altas que el ciclo protón-protón. La serie de reacciones es

$$
\begin{aligned}
{}^{12}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{13}\mathrm{N} + \gamma \\
{}^{13}\mathrm{N} &\rightarrow {}^{13}\mathrm{C} + \mathrm{e}^{+} + \nu \\
\mathrm{e}^{+} + \mathrm{e}^{-} &\rightarrow 2\gamma \\
{}^{13}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + \gamma \\
{}^{14}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{15}\mathrm{O} + \gamma \\
{}^{15}\mathrm{O} &\rightarrow {}^{15}\mathrm{N} + \mathrm{e}^{+} + \nu \\
\mathrm{e}^{+} + \mathrm{e}^{-} &\rightarrow 2\gamma \\
{}^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He}
\end{aligned}
$$

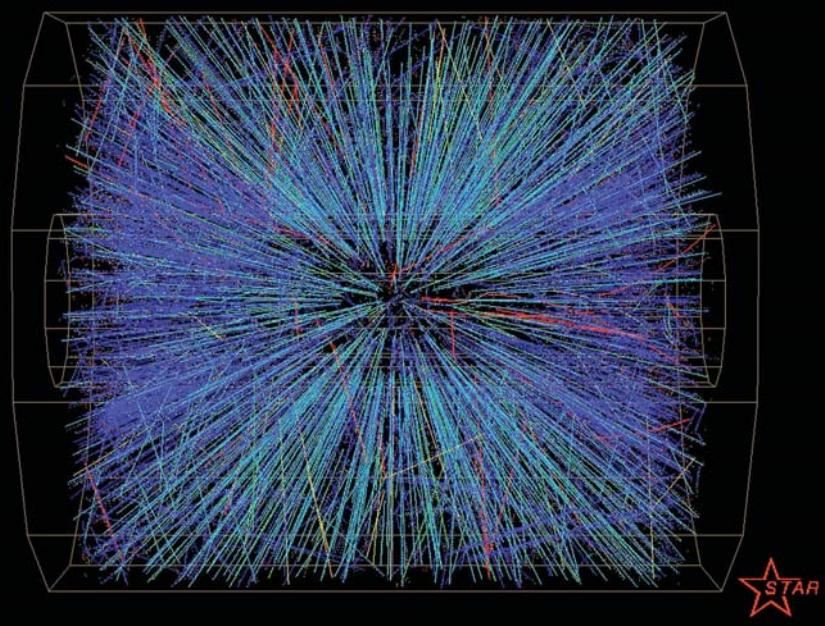
a) Si el ciclo protón-protón requiere una temperatura de 1.5×10^7 K, estime por proporción la temperatura necesaria para el ciclo del carbono. b) Calcule el valor Q para cada etapa en el ciclo del carbono y la energía global liberada. c) ¿Considera usted que la energía que llevan los neutrinos se deposita en la estrella? Explique.

62. Cuando pasan fotones por la materia, la intensidad I del rayo (medida en watts por metro cuadrado) decrece exponencialmente según la ecuación

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

donde I_0 es la intensidad del rayo incidente e I es la intensidad del rayo que acaba de pasar por un grosor x de material. La constante μ se conoce como el *coeficiente de absorción lineal,* y su valor depende del material absorbente y la longitud de onda del rayo de fotón. Esta dependencia en la longitud de onda (o energía) permite filtrar longitudes de onda no deseadas de un haz de rayo x de espectro ancho. a) Dos haces de rayo X de longitudes de onda λ_1 y λ_2 e iguales intensidades incidentes pasan por la misma placa metálica. Demuestre que la relación entre las intensidades del haz emergente es

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{-(\mu_2 - \mu_1)x}$$

b) Calcule la razón entre intensidades que emergen de una placa de aluminio de 1.00 mm de grueso si el rayo incidente contiene iguales intensidades de 50 pm y 100 pm de rayos X. Los valores de μ para el aluminio a estas dos longitudes de onda son $\mu_1 = 5.4\ \mathrm{cm}^{-1}$ a 50 pm y $\mu_2 = 41.0\ \mathrm{cm}^{-1}$ a 100 pm. c) Repita el inciso b) para el uso de una placa de aluminio de 10.0 mm de grueso.

63. *Para construir una bomba.* a) En el tiempo $t = 0$ una muestra de uranio se expone a una fuente de neutrones que hace que N_0 núcleos experimenten fisión. La muestra está en estado supercrítico, con una constante de reproducción $K > 1$. Ocurre una reacción en cadena que provoca que se extienda la fisión en toda la masa de uranio. La reacción en cadena puede ser considerada una sucesión de *generaciones*. Las N_0 fisiones producidas inicialmente son la generación cero. De esta generación, N_0K neutrones van en busca de núcleos de uranio en los cuales hacer fisión. Las fisiones N_0K que se presentan seguido son la primera generación de fisiones y de esta generación, N_0K^2 neutrones van en búsqueda de núcleos de uranio en el que origina fusión. La N_0K^2 fisiones seguidas son la segunda generación de fisiones. Este proceso puede continuar hasta que todos los núcleos de uranio se hayan fisionado. Demuestre que el total acumulativo de fisiones N que han ocurrido hasta incluyendo la n-ésima generación después de la generación cero, está dado por

$$N = N_0\left(\frac{K^{n+1} - 1}{K - 1}\right)$$

b) Considere una bomba hipotética de uranio hecha de 5.50 kg de ^{235}U isotópicamente puro. La reacción en cadena tiene una constante de reproducción de 1.10, e inicia con una generación cero de 1.00×10^{20} fisiones. El intervalo de tiempo promedio entre una generación de fisión y la siguiente es de 10.0 ns. ¿Cuánto tiempo después de la generación cero tarda el uranio de esta bomba en fisionarse por completo? c) Suponga que el módulo volumétrico del uranio es de 150 GPa. Encuentre la rapidez del sonido en el uranio. Puede usted pasar por alto la diferencia de densidad entre ^{235}U y el uranio natural. d) Encuentre el intervalo de tiempo necesario para que una onda de compresión cruce el radio de una esfera de uranio de 5.50 kg. Este intervalo indica la rapidez con que se inicia el movimiento de la explosión. e) Debe ocurrir una fisión en un intervalo de tiempo que sea breve en comparación con el del inciso d) porque, de otro modo, la mayor parte del uranio se dispersaría en pequeños trozos sin haberse fisionado. ¿Puede la bomba considerada en el inciso b) liberar la energía explosiva de todo el uranio? Si es así, ¿cuánta es la energía liberada, en toneladas equivalentes de TNT? Suponga que una tonelada de TNT libera 4.20 GJ y que cada fisión de uranio libera 200 MeV de energía.

Respuestas a las preguntas rápidas

45.1 b) Según la figura 44.4, la relación N/Z aumenta con una Z creciente. En consecuencia, cuando un núcleo pesado se fisiona en dos núcleos más livianos, éstos tienden a poseer demasiados neutrones para que el núcleo sea estable. El decaimiento beta en el que se expulsan electrones reduce el número de neutrones y aumenta el número de protones para estabilizar al núcleo.

45.2 a) y b). En ambos, los valores de Z y A se equilibran en los dos lados de las ecuaciones. En la relación c), $Z_{\text{izquierda}} = Z_{\text{derecha}}$, pero $A_{\text{izquierda}} \neq A_{\text{derecha}}$.

45.3 a) Para reducir el valor de K, más neutrones necesitan ser absorbidos, de modo que un volumen más grande de barras de control debe estar dentro del núcleo del reactor.

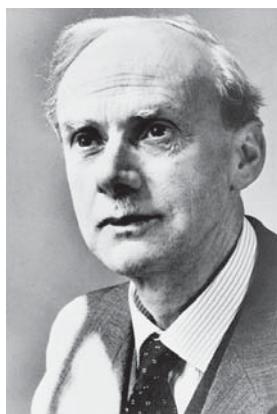
45.4 d) La figura 44.5 muestra que la curva que representa la energía de enlace por nucleón tiene un pico en $A \approx 60$. En consecuencia, combinar dos núcleos con valores iguales de $A > 60$ resulta en un aumento de masa, por lo que una reacción de fusión no ocurrirá.

Lluvia de rastros de partículas de una colisión frontal de núcleos de oro, moviéndose con una energía de 100 GeV. Esta colisión ocurrió en el Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) en el Laboratorio Nacional de Brookhaven y fue registrado usando el detector STAR (rastreador senoidal en el RHIC). Los rastros representan muchas partículas fundamentales surgidas de la energía de la colisión. (Cortesía del Laboratorio Nacional de Brookhaven/RHIC-STAR)

46 Física de las partículas y cosmología

La palabra *átomo* proviene del griego *atomos*, que significa "indivisible". Los antiguos griegos creían que los átomos eran los componentes indivisibles de la materia; es decir, los consideraban partículas elementales. A partir de 1932 los físicos consideraron que toda materia estaba constituida por tres partículas: electrones, protones y neutrones. A principios de los años cuarenta se descubrieron muchas partículas "nuevas" en experimentos que involucraban colisiones de alta energía entre partículas conocidas. Las nuevas partículas tienen la característica de ser muy inestables y tienen una vida media muy breve, desde 10^{-6} s a 10^{-23} s. Hasta ahora se han catalogado más de trescientas.

Desde su descubrimiento hasta los años sesenta, a los físicos les sorprendía el gran número y la variedad de partículas subatómicas que se estaban encontrando. Se preguntaron si las partículas no tendrían una correspondencia sistemática que las conectara, o si estaba emergiendo un patrón que permitiría un mayor entendimiento sobre la estructura elaborada del mundo subatómico. El hecho de que el neutrón tenga un momento magnético, a pesar de tener una carga eléctrica igual a cero (sección 44.8), sugiere la existencia de una estructura fundamental. El que la tabla periódica explique cómo se pueden formar más de cien elementos a partir de tres tipos de partículas diferentes (electrones, protones y neutrones) es un indicio de que quizás existen maneras de formar más de trescientas partículas subatómicas a partir de un pequeño número de elementos básicos de construcción.

Recuerde la figura 1.2, la cual ilustra los distintos niveles de estructura en la materia. Estudió la estructura atómica de la materia en el capítulo 42. En el capítulo 44 estudió la subestructura del átomo describiendo la estructura del núcleo. Como se mencionó en la

sección 1.2, ahora se sabe que los protones y los neutrones en el núcleo, y un sinnúmero de otras partículas fascinantes, están compuestos de seis tipos diferentes de partículas llamadas *quarks*. En este capítulo final se examina la teoría actual de las partículas elementales, en la cual toda la materia está formada por sólo dos familias de partículas: los quarks y los leptones. También se explica cómo el esclarecimiento de estos modelos podrían ayudar a los científicos a comprender el nacimiento y la evolución del Universo.

46.1 Fuerzas fundamentales en la naturaleza

Como se observó en la sección 5.1, todos los fenómenos naturales se pueden describir utilizando cuatro fuerzas fundamentales que actúan entre partículas. En orden de intensidad decreciente, están la fuerza nuclear, la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza gravitacional.

La fuerza nuclear, explicada en el (capítulo 44), es una fuerza de atracción entre nucleones. Tiene un alcance muy corto y es despreciable para distancias de separación entre nucleones mayores que 10^{-15} m (aproximadamente del tamaño del núcleo). La fuerza electromagnética, que une átomos y moléculas para formar materia ordinaria, tiene una intensidad de casi 10^{-2} veces la fuerza nuclear. Esta fuerza de largo alcance disminuye en magnitud con el cuadrado inverso de la separación entre partículas que interactúan. La fuerza débil es una fuerza de corto alcance que tiende a producir inestabilidad en ciertos núcleos. Es la responsable de los procesos de desintegración, y su intensidad es sólo alrededor de 10^{-5} veces la fuerza nuclear. En conclusión, la fuerza gravitacional es una fuerza de gran alcance que tiene una intensidad de aproximadamente 10^{-39} veces la de la fuerza nuclear. A pesar de que esta interacción bien conocida es la que mantiene juntos a planetas, estrellas y galaxias, su efecto sobre las partículas elementales es despreciable.

En la sección 13.4 conoció la dificultad que los primeros científicos encontraron ante la idea de que la fuerza gravitacional actuaba a distancia y sin contacto físico entre los objetos interactuantes. Para resolver esta dificultad, se introdujo el concepto del campo gravitacional. De manera similar, en el capítulo 23 se analizó el campo eléctrico para describir la fuerza eléctrica que actúa entre objetos cargados, seguido por un análisis sobre el campo magnético en el capítulo 29. En la física moderna la naturaleza de la interacción entre partículas es llevada un paso más adelante. Estas interacciones se describen en función del intercambio de entidades llamadas **partículas del campo** o **partículas de intercambio.** Las partículas del campo son conocidas también como **bosones gauge.**[1] Las partículas en continua interacción emiten y absorben partículas de campo. La emisión de una partícula de campo por una partícula y su absorción por otra se manifiesta como una fuerza entre dos partículas que interactúan. En el caso de la interacción electromagnética, por ejemplo, las partículas del campo son fotones. En el lenguaje de la física moderna, se dice que la fuerza electromagnética está *mediada* por fotones, y los fotones son las partículas de campo correspondientes al campo electromagnético. De manera similar, la fuerza nuclear es mediada por partículas del campo llamadas *gluones*. La fuerza débil es mediada por partículas del campo llamadas *bosones W* y *Z*, y se ha propuesto que la fuerza gravitacional está mediada por partículas del campo llamadas *gravitones*. En la tabla 46.1 se resumen estas interacciones, sus alcances y sus intensidades relativas.

Cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives.

PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC
Físico británico (1902-1984)
Dirac fue vital para el discernimiento de la antimateria y la unificación de la mecánica cuántica y la relatividad. Realizó varias contribuciones para el desarrollo de la física cuántica y de la cosmología. Dirac ganó el premio Nobel de Física en 1933.

46.2 Positrones y otras antipartículas

En la década de los veinte Paul Dirac desarrolló una descripción mecánica cuántica relativista del electrón que explicaba el origen de su espín y de su momento magnético. De cualquier modo, su teoría presentaba sólo un problema de importancia: su ecuación de

[1] La palabra *bosones* sugiere que las partículas del campo tienen un espín entero, como se analizó en la sección 43.8. La palabra *gauge* tiene su origen en la *teoría gauge*, que es un complicado análisis matemático que está más allá de los alcances de este libro.

TABLA 46.1

Interacciones de las partículas

Interacción	Intensidad relativa	Alcance de fuerza	Partícula del campo conciliador	Masa de la partícula del campo (GeV/c^2)
Nuclear	1	Corto ($\approx$ 1 fm)	Gluón	0
Electromagnética	10^{-2}	∞	Fotón	0
Débil	10^{-5}	Corto ($\approx 10^{-3}$ fm)	$W^{\pm}$, Z^0 bosones	80.4, 80.4, 91.2
Gravitacional	10^{-39}	∞	Gravitón	0

onda relativista requería soluciones que correspondían a estados de energía negativa, los cuales, de existir, podrían lograr que un electrón en un estado de energía positiva hiciera una transición rápida a uno de estos estados, emitiendo en el proceso un fotón.

Dirac evitó esta dificultad al postular que todos los estados de energía negativa están llenos. Los electrones que ocupan estos estados de energía negativa son llamados colectivamente el *mar de Dirac*. Los electrones en el mar de Dirac no son observables de manera directa porque el principio de exclusión de Pauli no les permite reaccionar a fuerzas externas; es decir, no existen estados disponibles hacia los cuales el electrón pueda hacer una transición en respuesta a una fuerza externa. Debido a eso, un electrón en ese estado actúa como un sistema aislado, a menos que una interacción con el ambiente sea lo suficientemente intensa para excitar al electrón hacia un estado de energía positiva. Una excitación así hace que uno de los estados de energía negativa quede vacío, como se ve en la figura 46.1, dejando un hueco en el mar de estados llenos. *El hueco puede reaccionar ante fuerzas externas y es observable*, El hueco reacciona en una forma similar a la del electrón, excepto que tiene una carga positiva, la cual se conoce como la *antipartícula* del electrón.

Figura 46.1 Modelo de Dirac para la existencia de antielectrones (positrones). Los estados de energía menores que $-m_ec^2$ están repletos de electrones, que se indican con color azul. El conjunto de estados llenos se conoce como el mar de Dirac. Uno de ellos puede hacer una transición fuera de su estado sólo si se le proporciona energía igual o mayor que $2m_ec^2$. Esta transición deja un vacío en el mar de Dirac, que se puede comportar como una partícula idéntica al electrón, exepto por su carga positiva.

Esta teoría sugiere que *existe una antipartícula por cada partícula,* no sólo para fermiones como el electrón, sino también para bosones. Esto se ha comprobado subsecuentemente para *todas* las partículas conocidas hoy en día. La antipartícula para una partícula cargada tiene la misma masa que la partícula, pero con carga opuesta. Por ejemplo, la antipartícula del electrón (el *positrón* mencionado en la sección 44.4) tiene una energía en reposo de 0.511 MeV y una carga positiva de $+ 1.60 \times 10^{-19}$ C.

En 1932 Carl Anderson (1905-1991) observó al positrón en forma experimental, y en 1936 ganó el premio Nobel por su trabajo. Anderson descubrió al positrón mientras examinaba los rastros creados en una cámara de niebla por partículas parecidas a los electrones de carga positiva. (Estos primeros experimentos utilizaron rayos cósmicos, la mayoría protones muy activos que cruzaban el espacio interestelar, para iniciar reacciones de alta energía en el orden de varios GeV.) Para discriminar entre cargas positivas y negativas, Anderson colocó la cámara de niebla en un campo magnético, haciendo que las cargas en movimiento siguieran trayectorias curvas. Observó que algunos de los rastros de las partículas parecidas al electrón se desviaban en una dirección correspondiente a una partícula positivamente cargada.

Desde el descubrimiento de Anderson se han observado positrones en gran número de experimentos. Una fuente común de positrones es la **producción en pares.** En este proceso, un fotón de rayos gamma con una energía lo suficientemente alta interactúa con un núcleo, y del fotón se crea una pareja electrón-positrón. (La presencia del núcleo permite satisfacer el principio de conservación de la cantidad de movimiento.) Porque la energía total en reposo de la pareja electrón-positrón es igual a $2m_ec^2 = 1.02$ MeV (donde m_e es la masa del electrón), el fotón debe poseer por lo menos esta energía para crear un par electrón-positrón. La energía de un fotón se convierte a energía en reposo del electrón y positrón de acuerdo con la correspondencia de Einstein $E_R = mc^2$. Si el fotón de rayos gamma tiene energía en exceso además de la energía en reposo del par electrón-positrón, este excedente aparecerá en forma de energía cinética de las dos partículas. La figura 46.2 muestra las primeras observaciones de rastros del par electrón-positrón en una cámara de burbujas, creados por rayos gamma de 300MeV al golpear una lámina de plomo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 46.1

Antipartículas

Una antipartícula no se identifica sólo por tener una carga opuesta; hasta las partículas neutras tienen antipartículas, mismas que se definen en función de otras propiedades, como el espín.

a)

b)

Figura 46.2 a) Huellas del par electrón-positrón en una cámara de burbujas producidas por rayos gamma de 300MeV al golpear una lámina de plomo. b) Eventos pertinentes de la producción de pares. En un campo magnético aplicado, los positrones se desvían hacia arriba y los electrones hacia abajo.

Pregunta rápida 46.1 Dada la identificación de las partículas en la figura 46.2b, ¿cuál es la dirección del campo magnético externo en la figura 46.2a? a) Hacia el interior de la página, b) hacia el exterior de la página o c) imposible de determinar.

También puede ocurrir el proceso inverso. Bajo condiciones apropiadas, un electrón y un positrón pueden aniquilarse entre sí para producir dos fotones de rayo gamma con una energía combinada de al menos 1.02 MeV:

$$e^- + e^+ \quad \rightarrow \quad 2\gamma$$

Porque el momentum inicial del sistema electrón-positrón es aproximadamente igual a cero, los dos rayos gamma viajan en direcciones opuestas después de la aniquilación, en satisfaciendo el principio de conservación de la cantidad de movimiento para el sistema.

Prácticamente todas las partículas elementales conocidas tienen una antipartícula propia. Entre las excepciones se encuentran el fotón y el pión neutro (π^0; véase la sección 46.3). Después de la construcción, en la década de los cincuenta, de aceleradores de alta energía, se descubrieron muchas otras antipartículas. Éstas incluyen el antiprotón, descubierto en 1955 por Emilio Segré (1905-1989) y Owen Chamberlain (1920-2006), y el antineutrón,[2] descubierto poco tiempo después.

La aniquilación electrón-positrón es utilizada en una técnica de diagnóstico médico llamada *tomografía por emisión de positrones* (PET, positron-emission tomography). Se le inyecta al paciente una solución de glucosa que contiene una sustancia radiactiva que decae por emisión de positrón, y el material es llevado por la sangre a todo el cuerpo. Un positrón emitido durante un evento de decaimiento en uno de los núcleos radiactivos en la solución de glucosa se aniquila con un electrón en el tejido que lo rodea, dando como resultado dos fotones de rayo gamma emitidos en direcciones opuestas. Un detector gamma que rodea al paciente determina con precisión la fuente de los fotones y, con ayuda de una computadora, despliega una imagen de los sitios donde se acumula la glucosa. (La glucosa es metabolizada rápidamente en los tumores cancerígenos y se acumula en esos sitios, lo que genera una señal clara para el sistema detector PET.) La imagen de un registro PET permite identificar gran diversidad de desórdenes en el cerebro, incluyendo el síndrome de Alzheimer (figura 46.3). Además, porque la glucosa es asimilada más rápidamente en áreas activas del cerebro, un registro PET puede indicar las áreas del cerebro que están involucradas en las actividades que el paciente esté realizando durante el rastreo, como por ejemplo el uso del lenguaje, la música o la vista.

[2] Las antipartículas de las partículas cargadas tienen una carga opuesta. Las antipartículas de partículas no cargadas, como el neutrón, son un poco más difíciles de describir. Un proceso básico que puede detectar la existencia de una antipartícula es la aniquilación de pares. Por ejemplo, un neutrón y un antineutrón pueden aniquilarse para formar dos rayos gamma. Porque el fotón y el pión neutro no tienen antipartículas propias, no es posible observar aniquilación de pares en ninguna de estas partículas.

National Institutes of Health

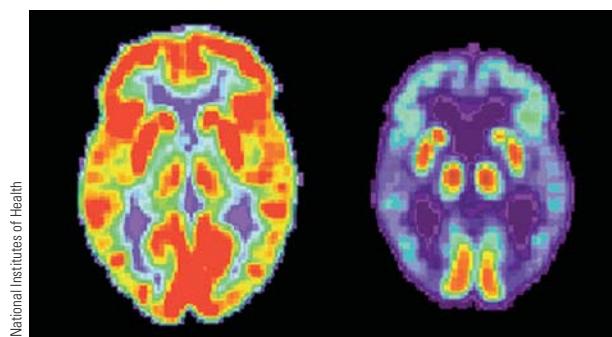
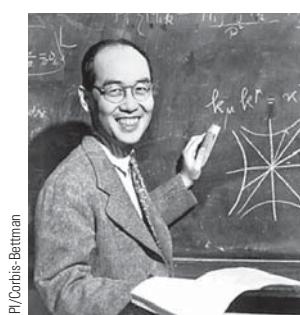



Figura 46.3 Rastreo PET del cerebro de una persona sana de la tercera edad (*izquierda*) y el de un paciente que padece el síndrome de Alzheimer (*derecha*). Las regiones más luminosas contienen concentraciones más elevadas de glucosa radiactiva, lo que indica un mayor metabolismo y, por tanto, una mayor actividad cerebral.

46.3 Mesones y el principio de la física de las partículas

Los físicos de mediados de los años treinta tenían una concepción simple de la estructura de la materia. Los bloques de construcción eran el protón, el electrón y el neutrón. En esas épocas otras tres partículas ya se conocían o estaban siendo postuladas: el fotón, el neutrino y el positrón. Juntas, estas seis partículas se consideraban los constituyentes fundamentales de la materia. De cualquier modo con esta propuesta tan simple nadie fue capaz de contestar la siguiente pregunta importante: en vista de que los protones en cualquier núcleo se repelen fuertemente entre sí ya sus cargas son del mismo signo, ¿cuál es la naturaleza de la fuerza que mantiene al núcleo unido? Los científicos reconocieron que esta fuerza misteriosa debía ser mucho más fuerte que cualquier cosa encontrada en la naturaleza hasta ese momento. Esta fuerza es la fuerza nuclear, explicada en la sección 44.1 y examinada en los párrafos siguientes desde una perspectiva histórica.

La primera teoría que explicaba la naturaleza de la fuerza nuclear fue propuesta en 1935 por el científico japonés Hideki Yukawa, un esfuerzo que en 1949 le hizo acreedor al premio Nobel de Física. Para entender la teoría de Yukawa, recuerde la información sobre partículas de campo de la sección 46.1, que afirma que cada fuerza fundamental es conciliada por una partícula de campo intercambiada entre las partículas que interactúan. Yukawa utilizó esta idea para explicar la fuerza nuclear, y propuso la existencia de una nueva partícula cuyo intercambio entre nucleones en el núcleo origina dicha fuerza. Estableció que el alcance de la fuerza es inversamente proporcional a la masa de la partícula y predijo que la masa sería alrededor de 200 veces la masa del electrón. (La partícula predicha por Yukawa *no* es el gluón que se mencionó en la sección 46.1, el cual no tiene masa y hoy día es considerado como la partícula de campo para la fuerza nuclear.) Porque esta nueva partícula tendría una masa de magnitud entre la del electrón y la del protón, se le llamó **mesón** (del griego *meso*, "en medio").

En un esfuerzo para fundamentar las predicciones de Yukawa, los físicos comenzaron búsquedas experimentales del mesón estudiando los rayos cósmicos que ingresan en la atmósfera terrestre. En 1937 Carl Anderson y sus colaboradores descubrieron una partícula con masa de 106 MeV/c^2, alrededor de 207 veces más grande que el electrón. Se pensó que ésta era el mesón de Yukawa. Sin embargo, experimentos posteriores demostraron que la partícula interactúa débilmente con la materia y, en consecuencia, no podía ser la partícula de campo para la fuerza nuclear. Esta situación enigmática hizo que varios teóricos propusieran dos mesones con una pequeña diferencia de masas igual a cerca de 200 veces la del electrón, una descubierta por Anderson y la otra, aún sin descubrirse, prevista por Yukawa. Esta idea se confirmó en 1947 con el descubrimiento del **pi mesón** (π), o simplemente **pión.** La partícula descubierta por Anderson en 1937, que inicialmente se pensó era el mesón de Yukawa, no es en realidad un mesón. (Analizaremos las características de los mesones en la sección 46.4.) Sólo toma parte en interacciones débiles y electromagnéticas y actualmente se le llama **muón** (μ).

UPI/Corbis-Bettman

HIDEKI YUKAWA
Físico japonés (1907-1981)
A Yukawa le fue otorgado el premio Nobel en 1949 por predecir la existencia de los mesones. Esta fotografía en el trabajo fue tomada en 1950 en su oficina en la Universidad de Columbia. Yukawa llegó a Columbia en 1949, después de pasar la primera parte de su carrera en Japón.

Figura 46.4 Diagrama de Feynman que representa un fotón conciliando la fuerza electromagnética entre dos electrones.

El pión tiene tres variantes, correspondientes a tres estados de carga: π^+, π^- y π^0. Las partículas π^+ y π^- (π^- es la antipartícula de π^+) tienen una masa cada una de 139.6 MeV/c^2, y la masa π_0 es de 135.0 MeV/c^2. Existen dos muones: μ^- y su antipartícula μ^+.

Los piones y muones son partículas muy inestables. Por ejemplo, la π^-, que tiene una vida media de 2.6×10^{-8} s, decae a un muón y un antineutrino.[3] El muón tiene una vida media de 2.2 μs, decayendo después a un electrón, un neutrino y un antineutrino:

$$\begin{aligned} \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu} \\ \mu^- &\rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu} \end{aligned} \qquad \textbf{(46.1)}$$

Para las partículas sin carga (así como algunas partículas cargadas, como el protón), una barra sobre el símbolo indica una antipartícula, como para el neutrino en decaimiento beta (véase la sección 44.5). Otras antipartículas, como la e^+ y μ^+, utilizan una notación diferente.

La interacción entre dos partículas puede representarse en un diagrama simple llamado **diagrama de Feynman,** desarrollado por el físico estadounidense Richard P. Feynman. La figura 46.4 presenta en este diagrama la interacción electromagnética entre dos electrones. Un diagrama de Feynman es una gráfica cualitativa de tiempo en el eje vertical en función del espacio en el eje horizontal. Es cualitativo no en el sentido de que los valores reales de tiempo y espacio no son importantes, sino en que la apariencia global de la gráfica muestra una representación gráfica del proceso.

En el caso simple de la interacción electrón-electrón en la figura 46.4, un fotón (la partícula de campo) concilia la fuerza electromagnética entre electrones. Observe que toda la interacción está representada en el diagrama como se presenta en un solo punto del tiempo. Debido a eso las trayectorias de los electrones aparecen para someterse a cambio discontinuo en dirección al momento de interacción. Las trayectorias del electrón que se muestran en la figura 46.4 son diferentes de las trayectorias *reales*, que serían curvas a causa del intercambio continuo de un gran número de partículas de campo.

© Shelly Gazin/CORBIS

RICHARD FEYNMAN
Físico estadounidense (1918-1988)
Inspirado por Dirac, Feynman desarrolló la electrodinámica cuántica, la teoría de la interacción de la luz y de la materia sobre una base relativista y cuántica. Feynman ganó el premio Nobel de Física en 1965. Compartió el premio con Julian Schwinger y Sin Itiro Tomonaga. Al principio de su carrera, fue miembro líder del equipo que desarrollaba la primer arma nuclear en el Proyecto Manhattan. Hacia el final de su carrera trabajó en la comisión que investigó la tragedia del *Challenger* en 1986 y demostró los efectos de las temperaturas frías sobre los anillos de hule utilizados como juntas en el transbordador espacial.

En la interacción electrón-electrón, al fotón, que transfiere energía y cantidad de movimiento de un electrón al otro, se le llama *fotón virtual* porque desaparece durante la interacción sin haber sido detectado. En el capítulo 40 se observó que un fotón tiene una energía $E = hf$, donde f es su frecuencia. En consecuencia, para un sistema de dos electrones inicialmente en reposo, el sistema tiene una energía $2m_ec^2$ antes de que un fotón virtual sea liberado y una energía $2m_ec^2 + hf$ después de su liberación (más cualquier energía cinética del electrón como resultado de su emisión). ¿Esto viola la ley de la conservación de la energía para un sistema aislado? No; este proceso *no* viola la ley de la conservación de la energía, porque el fotón virtual tiene una vida Δt muy breve lo hace que la incertidumbre en la energía $\Delta E \approx \hbar/2\Delta t$ del sistema sea mayor que la energía del fotón. Por lo tanto, dentro de las restricciones del principio de incertidumbre, la energía del sistema se conserva.

Considere ahora un pión que concilia la fuerza nuclear entre un protón y un neutrón, como en el modelo de Yukawa (figura 46.5a). La energía en reposo E_R de un pión de masa m_π está dada por la ecuación de Einstein $E_R = m_\pi c^2$. Como en el caso del fotón en la figura 46.4, con el fin de conservar la energía, la incertidumbre en la energía del sistema debe ser mayor que la de la energía en reposo del pión: $\Delta E > E_R$. La existencia del pión violaría la ley de la conservación de la energía si la partícula existiera por un intervalo de tiempo mayor que $\Delta t \approx \hbar/2E_R$ (del principio de incertidumbre), donde E_R es la energía en reposo del pión y Δt es el intervalo de tiempo requerido para que el pión se transfiera de un nucleón al otro. En consecuencia,

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{2E_R} = \frac{\hbar}{2m_\pi c^2} \quad \rightarrow \quad m_\pi c^2 = \frac{\hbar}{2\Delta t} \qquad \textbf{(46.2)}$$

[3] El antineutrino es otra partícula de carga cero cuya antipartícula es más difícil de identificar que para una partícula cargada. A pesar de que los detalles quedan fuera de los alcances de este texto, el neutrino y el antineutrino pueden diferenciarse por medio de la correspondencia entre la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular del espín de las partículas.

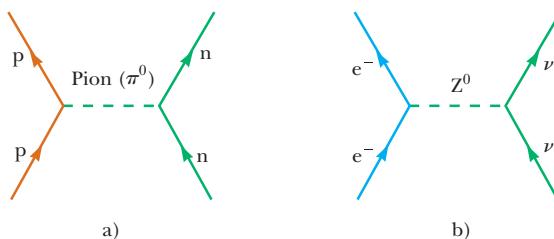



Figura 46.5 a) Diagrama de Feynman que representa un protón y un neutrón interactuando mediante la fuerza nuclear con un pión neutro que concilia esta fuerza. (Éste *no* es el modelo actual para la interacción entre nucleones.) b) Diagrama de Feynman para un electrón y un neutrino que interactúan vía la fuerza débil, con un bosón Z^0 conciliando la fuerza.

Porque el pión no puede viajar más rápido que la rapidez de la luz, la distancia máxima d que puede recorrer en un intervalo de tiempo Δt es $d = c\Delta t$. Por lo tanto,

$$m_\pi c^2 \approx \frac{\hbar}{2(d/c)} = \frac{\hbar c}{2d} \qquad \textbf{(46.3)}$$

De la tabla 46.1, se sabe que el alcance de la fuerza nuclear es de aproximadamente 1×10^{-15} m. Utilizando este valor para d en la ecuación 46.3, se estima que la energía en reposo del pión debe ser igual a

$$m_\pi c^2 \approx \frac{(1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{2(1 \times 10^{-15}\ \text{m})}$$

$$= 1.6 \times 10^{-11}\ \text{J} \approx 100\ \text{MeV}$$

Porque este resultado es del mismo orden de magnitud como se observa en las energías en reposo de los piones, es posible confiar en el modelo campo partícula.

El concepto recién descrito es bastante revolucionario. En efecto, plantea que un sistema de dos nucleones puede cambiar a dos nucleones más un pión, siempre y cuando vuelva a su estado original en un intervalo de tiempo muy breve. (Recuerde que éste es el modelo histórico antiguo, que supone que el pión es la partícula de campo para la fuerza nuclear; en los modelos actuales el gluón es la verdadera partícula de campo.) Los físicos dicen a menudo que un nucleón se somete a *fluctuaciones* conforme emite y absorbe partículas de campo. Estas fluctuaciones son consecuencia de una combinación de la mecánica cuántica (mediante el principio de incertidumbre) con la relatividad especial (mediante la correspondencia energía-masa $E_R = mc^2$ de Einstein).

En esta sección analizó las partículas de campo que fueron originalmente propuestas para conciliar la fuerza nuclear (piones) y aquellas que concilian la fuerza electromagnética (fotones). El gravitón, la partícula de campo para la fuerza gravitacional, aún no ha sido observado. Las partículas $W^\pm$ y las Z^0, que concilian la fuerza débil, fueron descubiertas en 1983 por el físico italiano Carlo Rubbia (1934) y sus colegas, utilizando el colisionador protón-antiprotón. Rubbia y Simon van der Meer (1925), los dos del CERN,[4] compartieron en 1984 el premio Nobel de física por el descubrimiento de las partículas $W^\pm$ y Z^0 y el desarrollo del colisionador protón-antiprotón. La figura 46.5b muestra un diagrama de Feynman para una interacción débil conciliada por un bosón Z^0.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 46.2
La fuerza nuclear y la fuerza fuerte

La fuerza nuclear analizada en el capítulo 44 se conoció primero como fuerza fuerte. Sin embargo, una vez que se estableció la teoría del quark (sección 46.8), la frase *fuerza intensa* se reservó para la fuerza que se genera entre quarks. Aquí se sigue esta regla convencional: la fuerza fuerte es la que existe entre quarks o partículas construidas por quarks y la fuerza nuclear la que se da entre nucleones en un núcleo. La fuerza nuclear es un resultado secundario de fuerza fuerte, como verá en la sección 46.9. Algunas veces llamada *fuerza intensa residual.* Debido al desarrollo histórico de los nombres de estas fuerzas, en ocasiones otros libros se refieren a la fuerza nuclear como fuerza fuerte.

46.4 Clasificación de las partículas

Todas las partículas distintas de las partículas de campo pueden clasificarse en dos grandes categorías, los *hadrones* y los *leptones.* El criterio para separar estas partículas en dichas categorías es saber si interactúan o no mediante la fuerza intensa. La fuerza nuclear entre

[4] El CERN fue originalmente el Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (Organización Europea para la Investigación Nuclear); el nombre fue modificado a Laboratorio Europeo para la Física de las Partículas, pero se conservaron las siglas CERN.

TABLA 46.2

Algunas partículas y sus propiedades

Categoría	Nombre de la partícula	Símbolo	Anti-partícula	Masa (MeV/c^2)	B	L_e	L_μ	L_τ	S	Vida media(s)	Spin
Leptones	Electrón	e^-	e^+	0.511	0	+1	0	0	0	Estable	$\frac{1}{2}$
	Electrón–neutrino	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$< 7\mathrm{eV}/c^2$	0	+1	0	0	0	Estable	$\frac{1}{2}$
	Muón	μ^-	μ^+	105.7	0	0	+1	0	0	2.20×10^{-6}	$\frac{1}{2}$
	Muón–neutrino	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	< 0.3	0	0	+1	0	0	Estable	$\frac{1}{2}$
	Tau	τ^-	τ^+	1 784	0	0	0	+1	0	$< 4 \times 10^{-13}$	$\frac{1}{2}$
	Tau–neutrino	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	< 30	0	0	0	+1	0	Estable	$\frac{1}{2}$
Hadrones											
Mesones	Pión	π^+	π^-	139.6	0	0	0	0	0	2.60×10^{-8}	0
		π^0	Ella misma	135.0	0	0	0	0	0	0.83×10^{-16}	0
	Kaón	K^+	K^-	493.7	0	0	0	0	+1	1.24×10^{-8}	0
		K^0_S	$\overline{K}^0_S$	497.7	0	0	0	0	+1	0.89×10^{-10}	0
		K^0_L	$\overline{K}^0_L$	497.7	0	0	0	0	+1	5.2×10^{-8}	0
	Eta	η	Ella misma	548.8	0	0	0	0	0	$< 10^{-18}$	0
		η'	Ella misma	958	0	0	0	0	0	2.2×10^{-21}	0
Bariones	Protón	p	$\bar{p}$	938.3	+1	0	0	0	0	Estable	$\frac{1}{2}$
	Neutrón	n	$\bar{n}$	939.6	+1	0	0	0	0	614	$\frac{1}{2}$
	Lambda	Λ^0	$\overline{\Lambda}^0$	1 115.6	+1	0	0	0	−1	2.6×10^{-10}	$\frac{1}{2}$
	Sigma	Σ^+	$\overline{\Sigma}^-$	1 189.4	+1	0	0	0	−1	0.80×10^{-10}	$\frac{1}{2}$
		Σ^0	$\overline{\Sigma}^0$	1 192.5	+1	0	0	0	−1	6×10^{-20}	$\frac{1}{2}$
		Σ^-	$\overline{\Sigma}^+$	1 197.3	+1	0	0	0	−1	1.5×10^{-10}	$\frac{1}{2}$
	Delta	Δ^{++}	$\overline{\Delta}^{--}$	1 230	+1	0	0	0	0	6×10^{-24}	$\frac{3}{2}$
		Δ^+	$\overline{\Delta}^-$	1 231	+1	0	0	0	0	6×10^{-24}	$\frac{3}{2}$
		Δ^0	$\overline{\Delta}^0$	1 232	+1	0	0	0	0	6×10^{-24}	$\frac{3}{2}$
		Δ^-	$\overline{\Delta}^+$	1 234	+1	0	0	0	0	6×10^{-24}	$\frac{3}{2}$
	Xi	Ξ^0	$\overline{\Xi}^0$	1 315	+1	0	0	0	−2	2.9×10^{-10}	$\frac{1}{2}$
		Ξ^-	Ξ^+	1 321	+1	0	0	0	−2	1.64×10^{-10}	$\frac{1}{2}$
	Omega	Ω^-	Ω^+	1 672	+1	0	0	0	−3	0.82×10^{-10}	$\frac{3}{2}$

nucleones en un núcleo es una manifestación particular de la fuerza intensa, pero se seguirá utilizando el término *fuerza intensa* para hacer referencia a cualquier interacción entre partículas formadas por quarks. (Para mayor información sobre quarks y la fuerza intensa, consulte la sección 46.8.) La tabla 46.2 presenta un resumen de las propiedades de los hadrones y los leptones.

Hadrones

Las partículas que interactúan por medio de la fuerza intensa (como también por otras fuerzas fundamentales) se llaman **hadrones.** Las dos clases de hadrones, *mesones* y *bariones*, se distinguen por sus masas y espines.

Todos los **mesones** tienen un espín igual a cero o a un entero (0 o 1). Como se indicó en la sección 46.3, el nombre viene de lo que esperaba Yukawa cuando propuso que la masa del mesón quedaría entre las masas del electrón y del protón. Varias masas de los mesones no ocurren en este intervalo, a pesar de que se ha probado que existen mesones con masas más grandes que las del protón.

Se sabe que todos los mesones se desintegran finalmente en electrones, positrones, neutrinos y fotones. Los piones son los mesones conocidos más ligeros; tienen masas de alrededor de 1.4×10^2 MeV/c^2 y los tres piones (π^+, π^- y π^0) tienen un espín igual a 0. (Esto indica que la partícula descubierta por Anderson en 1937, el muón, no es en realidad un mesón; el muón tiene un espín de $\frac{1}{2}$, y pertenece a la clasificación de *leptón*, descrita más adelante.)

Los **bariones,** la segunda clase de hadrones, tienen masas iguales o mayores a la masa del protón (el nombre *barión* significa "pesado" en griego), y su espín es siempre un valor semientero ($\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$). Los protones y neutrones son bariones, como muchas otras partícu-

las. Con la excepción del protón, todos los bariones se desitegran de forma tal que los productos finales incluyen un protón. Por ejemplo, el barión conocido como Ξ hiperión (mayúscula griega de xi) decae a barión Λ^0 (mayúscula griega de lambda) en casi 10^{-10} s. La Λ^0 después decae a un protón y un π^- en aproximadamente 3×10^{-10} s.

En la actualidad se cree que los hadrones no son partículas elementales, sino que están compuestos por unidades más elementales conocidas como quarks, como se explica en la sección 46.8.

Leptones

Los **leptones** (del griego leptos, que significa "pequeño" o "ligero") son partículas que no interactúan usando la fuerza intensa. Todos los leptones tienen espín $\frac{1}{2}$. A diferencia de los hadrones, que tienen tamaño y estructura, los leptones se observan enteramente elementales, lo que significa que no tienen estructura y son parecidos a un punto.

A diferencia del caso de los hadrones, el número de leptones conocidos es pequeño. En la actualidad los científicos creen que sólo existen seis leptones: el electrón, el muón, el tau y un neutrino asociado con cada uno: e^-, μ^-, τ^-, ν_e, ν_μ, ν_τ. El leptón tau, descubierto en 1975, tiene una masa alrededor del doble que la del protón. En julio de 2000 el Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) anunció haber encontrado evidencia experimental directa del neutrino asociado con el tau. Cada uno de los seis leptones tiene una antipartícula.

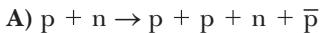
Los estudios actuales indican que los neutrinos tienen una masa pequeña pero diferente de cero. Si tienen masa, no pueden viajar a la rapidez de la luz. Además, ya que de este modo existen muchos neutrinos, su masa combinada tal vez es suficiente para hacer que toda la materia existente en el Universo finalmente se concentre en un solo punto, ¡lo que significa que podría explotar y crear un Universo totalmente nuevo! Verá con más detalle esta posibilidad en la sección 46.11.

46.5 Leyes de conservación

Las leyes de conservación de energía, de cantidad de movimiento lineal, de cantidad de movimiento angular y de la carga eléctrica proporcionan un conjunto de reglas para todos los procesos. En el capítulo 44 aprendió que las leyes de conservación son importantes para entender por qué ciertos decaimientos radiactivos y reacciones nucleares ocurren y otros no. En el estudio de las partículas elementales, es importante un número adicional de leyes de conservación. A pesar de que las dos leyes descritas aquí no tienen una base teórica, están respaldadas por una gran cantidad de evidencia empírica.

Número bariónico

Los resultados experimentales muestran que cada vez que se produce un barión en una desintegración o reacción nuclear, también se produce un antibarión. Este esquema puede cuantificarse al asignar a cada partícula un número cuántico, el **número bariónico,** como sigue: $B = +1$ para todos los bariones, $B = -1$ para todos los antibariones y $B = 0$ para todas las demás partículas. (Véase la tabla 46.2.) La l**ey de conservación del número bariónico** afirma que **cuando se presenta una reacción nuclear o una desintegración, la suma de los números bariónicos antes del proceso debe ser igual a la suma de los números bariónicos después del proceso.**

◄ Conservación del número bariónico

Si se conserva el número bariónico el protón debe ser estable de manera absoluta. Por ejemplo, una desintegración del protón a un positrón y un pión neutro satisface la ley de conservación de la energía, de cantidad de movimiento y de la carga eléctrica. Sin embargo, un decaimiento de esta índole nunca ha sido observado. La ley de conservación del número bariónico sería consistente con la ausencia de esta desintegración, porque el decaimiento propuesto involucraría la pérdida de un barión. En el presente, todo lo que se puede decir es que los protones tienen una vida media de al menos 10^{33} años (la edad estimada del Universo es de sólo 10^{10} años), a partir de observaciones experimentales, como se detalla en el ejemplo 46.2. De cualquier modo algunas teorías recientes predicen que el protón es inestable. De acuerdo con esta teoría, el número bariónico no se conservaría de manera absoluta.

Pregunta rápida 46.2 Considere el decaimiento siguiente: **i)** $n \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \mu^- + \mu^-$ y **ii)** $n \rightarrow p + \pi^-$. ¿Qué leyes de conservación se violan en este decaimiento? a) De la energía, b) de la carga eléctrica, c) del número bariónico, d) de la cantidad de movimiento angular o e) ninguna.

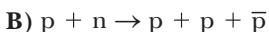
EJEMPLO 46.1 Comprobación del número de bariones

Use la ley de conservación del número bariómico para determinar si cada una de las siguientes reacciones puede ocurrir:

A) $p + n \rightarrow p + p + n + \overline{p}$

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que la masa a la derecha es mayor que la masa a la izquierda, las partículas iniciales deben tener suficiente energía cinética como para que esta reacción satisfaga la conservación de energía.

Categorizar Se usa la ley de conservación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe el número total de bariones para el lado izquierdo de la reacción: $1 + 1 = 2$

Evalúe el número total de bariones para el lado derecho de la reacción: $1 + 1 + 1 + (-1) = 2$

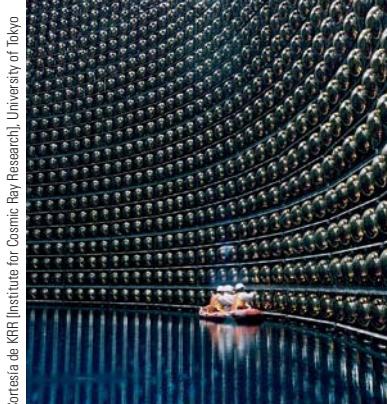
Por lo tanto, el número de bariones se conserva y la reacción puede ocurrir.

B) $p + n \rightarrow p + p + \overline{p}$

SOLUCIÓN

Evalúe el número total de bariones para el lado izquierdo de la reacción: $1 + 1 = 2$

Evalúe el número total de bariones para el lado derecho de la reacción: $1 + 1 + (-1) = 1$

Ya que el número de bariones no se conserva, la reacción no puede ocurrir.

EJEMPLO 46.2 Detección de decaimiento de protón

Las mediciones tomadas en la instalación de detección de neutrinos Super Kamiokande (figura 46.6) indican que la vida media de los protones es al menos 10^{33} años.

A) Estime cuánto tiempo tendría que observar, en promedio, para ver decaer un protón en un vaso con agua.

Conceptualizar Imagine el número de protones en un vaso con agua. Aunque este número es enorme, la probabilidad de que decaiga un solo protón es pequeña, así que debería esperar un largo intervalo de tiempo para observar un decaimiento.

Categorizar Puesto que en el problema se proporciona una vida media, este problema se categoriza como uno en el que se pueden aplicar las técnicas de análisis estadístico de la sección 44.4.

Cortesía de KRR [Institute for Cosmic Ray Research], University of Tokyo

Figura 46.6 (Ejemplo 46.2) Este detector en la instalación de neutrinos Super Kamiokande en Japón se usa para estudiar fotones y neutrinos. Contiene 50 000 toneladas métricas de agua altamente purificada y 13 000 fotomultiplicadores. La fotografía se tomó mientras el detector se llenaba. Los técnicos en una balsa limpian los fotodetectores antes de sumergirlos.

Analizar Estime que un vaso contiene aproximadamente 250 g de agua.

Encuentre el número de moléculas de agua en el vaso:

$$\frac{(250\text{ g})(6.02\times10^{23}\text{ moléculas/mol})}{18\text{ g/mol}} = 8.4\times10^{24}\text{ moléculas}$$

Cada molécula de agua contiene un protón en cada uno de sus dos átomos de hidrógeno, más ocho protones en su átomo de oxígeno, para un total de diez protones. Por lo tanto, hay 8.4×10^{25} protones en el vaso con agua.

Encuentre la constante de decaimiento (sección 44.4) a partir de la ecuación 44.8:

$$1)\quad \lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{10^{33}\text{ años}} = 6.9\times10^{-34}\text{ año}^{-1}$$

Encuentre la actividad de los protones a partir de la ecuación 44.7:

$$2)\quad R = \lambda N = (6.9\times10^{-34}\text{ año}^{-1})(8.4\times10^{25})$$
$$= 5.8\times10^{-8}\text{ año}^{-1}$$

Finalizar La ecuación 1) representa la probabilidad de que *un* protón decaiga en un año. La probabilidad de que *cualquier* protón en el vaso con agua decaiga en el intervalo de un año está dada por la ecuación 2). En consecuencia, ¡debe observar el vaso con agua durante $1/R \approx$ 17 millones de años! De hecho, como se esperaba, este es un largo intervalo de tiempo.

B) La instalación de neutrinos Super Kamiokande contiene 50 000 toneladas métricas de agua. Estime el intervalo de tiempo promedio entre los decaimientos de protones detectados en toda esta agua, si la vida media de un protón es 10^{33} años.

SOLUCIÓN

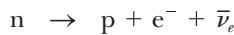
Analizar Encuentre la reacción del número de moléculas en 50 000 toneladas métricas de agua, con la del vaso con agua del inciso A), que es la misma que la relación de masas:

$$\frac{N_{\text{Kamiokande}}}{N_{\text{vaso}}} = \frac{m_{\text{Kamiokande}}}{m_{\text{vaso}}}$$
$$= \frac{50\ 000\ \text{ ton métricas}}{250\text{ g}}\left(\frac{1000\text{ kg}}{1\text{ ton métrica}}\right)\left(\frac{1000\text{ g}}{1\text{ kg}}\right)$$
$$= 2.0\times10^{8}$$

Encuentre el número de moléculas en la instalación Kamiokande:

$$N_{\text{Kamiokande}} = (2.0\times10^{8})N_{\text{vaso}}$$
$$= (2.0\times10^{8})(8.4\times10^{24}\text{ moléculas})$$
$$= 1.7\times10^{33}\text{ moléculas}$$

Encuentre la rapidez de decaimiento para protones en la instalación:

$$R = (6.9\times10^{-34}\text{ años}^{-1})(10\text{ protones/molécula})(1.7\times10^{33}\text{ moléculas})$$
$$\approx 12\text{ años}^{-1}$$

Finalizar El intervalo de tiempo promedio entre decaimientos es aproximadamente un doceavo de año, o aproximadamente un mes. Esto es mucho más corto que el intervalo de tiempo en el inciso A) debido a la tremenda cantidad de agua en la instalación detectora. A pesar de esta halagüeña predicción de un decaimiento de protón por mes, nunca se ha observado un decaimiento de protón. Esto sugiere que la vida media del protón debe ser mayor a 10^{33} años o que el decaimiento de protón simplemente no ocurre.

Número leptónico

◄ Conservación del número leptónico

Hay tres leyes de la conservación que involucran números leptónicos, una para cada variedad de leptones. La **ley de la conservación del número leptónico electrónico** afirma que cuando ocurre una reacción nuclear o un decaimiento, **la suma de los números leptónicos electrónicos antes del proceso debe ser igual a la suma de los números leptónicos electrónicos después del proceso.**

El electrón y el electrón neutrino están asignados a un número leptónico electrónico $L_e = +1$ y los antileptones e^+ y $\bar{\nu}_e$ están asignados a un número leptónico electrónico $L_e = -1$. Todas las demás partículas tienen $L_e = 0$. Por ejemplo, considere el decaimiento del neutrón:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Antes del decaimiento, el número leptónico electrónico es igual a $L_e = 0$; después del decaimiento, es de $0 + 1 + (-1) = 0$. Por lo tanto, se conserva el número leptónico electrónico. (El número bariónico debe conservarse también, por supuesto, y, antes del decaimiento, es $B = +1$, y después del decaimiento $B = +1 + 0 + 0 = +1$.)

De manera similar, cuando un decaimiento involucra muones, se conserva el número leptónico del muón L_μ. El μ^- y el ν_μ son asignados al número leptónico del muón $L_\mu = +1$ y los antimuones μ^+ y $\overline{\nu}_\mu$ se asignan al número leptónico del muón $L_\mu = -1$. Todas las demás partículas al $L_\mu = 0$.

Finalmente, el número leptónico tau L_τ se c onserva con asignaciones similares hechas para el leptón tau, su neutrino y sus dos antipartículas.

Pregunta rápida 46.3 Considere el siguiente decaimiento $\pi^0 \rightarrow \mu^- + e^+ + \nu_\mu$. ¿Qué leyes de la conservación se violan por este decaimiento? a) De energía, b) de cantidad de movimiento angular, c) de carga eléctrica, d) del número bariónico, e) del número leptónico electrónico, f) del número leptónico muón, g) del número leptónico tau o h) ninguna.

Pregunta rápida 46.4 Suponga que se afirma que el decaimiento de un neutrón está dado por $n \rightarrow p + e^-$. ¿Qué leyes de conservación se violan en este decaimiento? a) De energía, b) de cantidad de movimiento angular, c) de carga eléctrica, d) del número bariónico, e) del número leptónico electrónico, f) del número leptónico muón, g) del número leptónico tau o h) ninguna.

EJEMPLO 46.3 Comprobación del número de leptones

Use la ley de conservación del número de leptones para determinar si cada uno de los siguientes esquemas de decaimiento, A) y B), puede ocurrir:

A) $\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$

SOLUCIÓN

Conceptualizar Porque este decaimiento involucra un muón y un electrón, L_μ y L_e se debe conservar cada uno por separado si el decaimiento puede ocurrir.

Categorizar Se usa una ley de conservación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe el número de leptones antes del decaimiento: $L_\mu = +1 \qquad L_e = 0$

Evalúe el número total de leptones después del decaimiento: $L_\mu = 0 + 0 + 1 = +1 \qquad L_e = +1 + (-1) + 0 = 0$

Por tanto, ambos números se conservan y, sobre esta base, el decaimiento es posible.

B) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \nu_e$

SOLUCIÓN

Evalúe el número de leptones antes del decaimiento: $L_\mu = 0 \qquad L_e = 0$

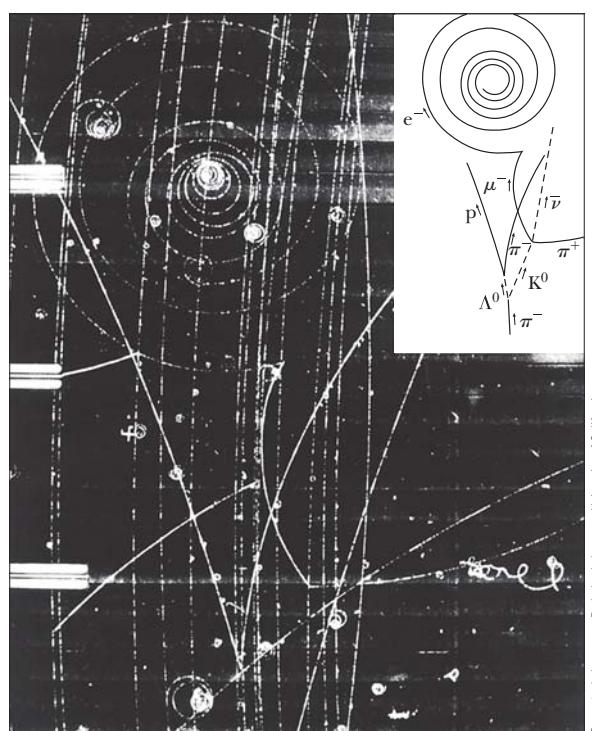
Evalúe el número total de leptones después del decaimiento: $L_\mu = -1 + 1 + 0 = 0 \qquad L_e = 0 + 0 + 1 = 1$

Por lo tanto, el decaimiento no es posible porque el número de leptones electrón no se conserva.

46.6 Partículas extrañas y extrañeza

Muchas de las partículas descubiertas en los años cincuenta fueron producidas por la interacción de piones con neutrones y protones en la atmósfera. Un grupo de éstas —las partículas kaón (K), lambda (Λ) y sigma (Σ)— exhiben propiedades inusuales conforme se crean y decaen y, en consecuencia, se llaman *partículas extrañas*.

Una propiedad inusual de las partículas extrañas es que siempre se producen en pares. Por ejemplo, cuando un pión colisiona con un protón, un resultado altamente probable es que se produzcan dos partículas extrañas neutras (figura 46.7):

$$\pi^- + \mathrm{p} \quad \rightarrow \quad \mathrm{K}^0 + \Lambda^0$$

Sin embargo, la reacción $\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{K}^0 + \mathrm{n}$, donde sólo una de las partículas finales es extraña, nunca ocurre, aun a pesar de que no se han violado leyes de conservación conocidas y a pesar de que la energía del pión es suficiente para iniciar la reacción.

La segunda propiedad importante de las partículas extrañas es que, a pesar de que se producen en reacciones que involucran fuertes interacciones a una rapidez elevada, no decaen en partículas que interactúan mediante la fuerza intensa a una rapidez elevada. En vez de eso, decaen de manera muy lenta, una característica de la interacción débil. Sus vidas medias están en el intervalo de 10^{-10} s a 10^{-8} s, en tanto que la mayoría de las partículas que interactúan por medio de la fuerza intensa tiene un promedio de vida mucho más breve, en el orden de 10^{-23}.

Para explicar estas inusuales propiedades de las partículas extrañas, se introdujo un número cuántico nuevo S, conocido como **extrañeza,** junto con una ley de la conservación. En la tabla 46.2 están dados los números de extrañeza para algunas partículas. La producción de partículas extrañas en parejas se explica al asignar $S = +1$ a una de las partículas, $S = -1$ a la otra, y $S = 0$ a todas las demás partículas no extrañas. La **ley de conservación de extrañeza** dice que **en una reacción nuclear o decaimiento que ocurra**

◄ Conservación del número de extrañeza

Cortesía de Lawrence Berkeley Laboratory University of California, Photographic Services

Figura 46.7 Esta fotografía de cámara de burbujas muestra muchos eventos, y el detalle es un dibujo de trazos identificados. Las partículas extrañas Λ^0 y K^0 se forman en la parte baja conforme una partícula π^- interactúa con un protón en la reacción $\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \Lambda^0 + \mathrm{K}^0$. (Observe que las partículas neutras no dejan rastro, como lo indican las líneas discontinuas en el detalle.) Después la Λ^0 decae en la reacción $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + \mathrm{p}$ y la K^0 en la reacción $\mathrm{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$.

mediante la fuerza intensa, conserva la extrañeza; es decir, la suma de los números de extrañeza antes del proceso debe ser igual a la suma de los números de extrañeza después del proceso. En los procesos que ocurren por la interacción débil, puede que no se conserve la extrañeza.

La baja rapidez de decaimiento de las partículas extrañas puede explicarse si supone que las interacciones fuertes y electromagnéticas obedecen la ley de la conservación de extrañeza, pero la interacción débil no. Ya que el decaimiento de la partícula extraña involucra la pérdida de una partícula extraña, esto viola la conservación de extrañeza y, en consecuencia, procede lentamente mediante la interacción débil.

EJEMPLO 46.4 **¿La extrañeza se conserva?**

A) Use la ley de conservación de extrañeza para determinar si ocurre la reacción $\pi^0 + n \rightarrow K^+ + \Sigma^-$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Porque hay dos partículas extrañas en el lado derecho de la reacción y ninguna en el izquierdo, se ve que será necesario investigar la conservación de extrañeza.

Categorizar Se usa una ley de conservación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la extrañeza para el lado izquierdo de la reacción, a partir de la tabla 46.2:

$$S = 0 + 0 = 0$$

Evalúe la extrañeza para el lado derecho de la reacción:

$$S = +1 - 1 = 0$$

Por tanto, la extrañeza se conserva y la reacción está permitida.

B) Demuestre que la reacción $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$ no conserva la extrañeza.

SOLUCIÓN

Evalúe la extrañeza para el lado izquierdo de la reacción:

$$S = 0 + 0 = 0$$

Evalúe la extrañeza para el lado derecho de la reacción:

$$S = 0 + (-1) = -1$$

Por lo tanto, la extrañeza no se conserva.

46.7 Determinación de patrones en las partículas

Una de las herramientas que utilizan los científicos es la detección de patrones en los datos, los cuales contribuyen al discernimiento de la naturaleza. Uno de los mejores ejemplos del uso de esta herramienta es el desarrollo de la tabla periódica, lo que da una comprensión fundamental del comportamiento químico de los elementos. Como se dijo en la introducción, la tabla periódica explica cómo más de 100 elementos pueden formarse a partir de tres partículas: el electrón, el protón y el neutrón. La tabla de los nuclidos, parte de la cual se muestra en la tabla 44.2, contiene cientos de nuclidos, pero todos ellos pueden formarse a partir de protones y neutrones.

El número de partículas observadas por los físicos de las partículas son también alrededor de cientos. ¿Es posible que exista un pequeño número de entidades a partir de las cuales se constituyan todas las demás? Aceptando una sugerencia del éxito de la tabla periódica y de la tabla de los nuclidos, se explora la investigación histórica de patrones entre las partículas.

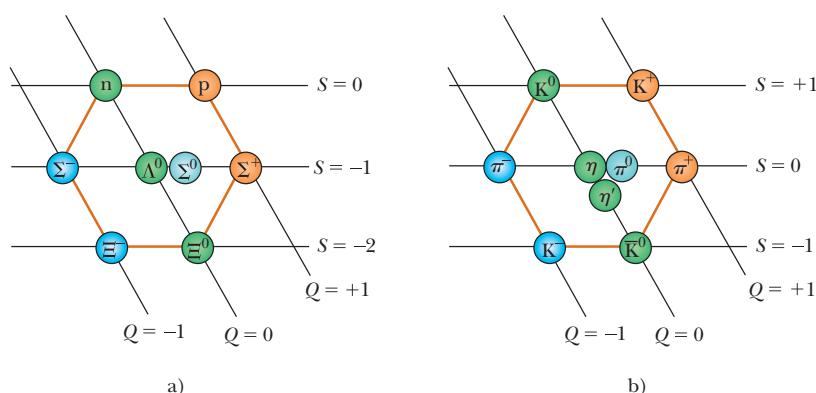
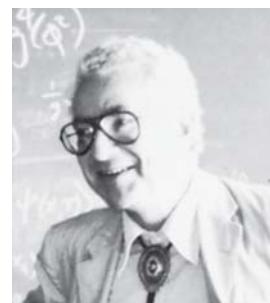



Figura 46.8 a) Patrón hexagonal del camino de ocho vías para ocho bariones de espín de $\frac{1}{2}$. Esta gráfica de la extrañeza en función de la carga utiliza un plano inclinado para el número de carga *Q* y un eje horizontal para la extrañeza *S*. b) Patrón del camino de ocho vías para nueve mesones con espín igual a cero.

Se han propuesto muchos esquemas de clasificación para agrupar las partículas en familias. Considere, por ejemplo, los bariones listados en la tabla 46.2 con espín de $\frac{1}{2}$: p, n, Λ^0, Σ^+, Σ^0, Σ^-, Ξ^0 y Ξ^-. Si traza la extrañeza en función de la carga para estos bariones utilizando un sistema inclinado de coordenadas, como en la figura 46.8a, observamos un patrón fascinante: seis de los bariones forman un hexágono, y los dos restantes están en el centro.

Como un segundo ejemplo, considere los siguientes nueve mesones con espines igual a cero mencionados en la tabla 46.2: π^+, π^0, π^-, K^+, K^0, K^-, η, η', y la antipartícula $\overline{K}^0$. La figura 46.8b muestra un trazo de la extrañeza en función de la carga para esta familia. De nuevo, emerge un patrón hexagonal. En este caso, cada partícula en el perímetro se opone a su respectiva antipartícula, y las tres partículas restantes (las cuales forman sus propias antipartículas) están en el centro del hexágono. Estos patrones y los simétricamente relacionados fueron desarrollados de manera independiente en 1961 por Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman (1925-2006). Gell-Mann llamó a estos patrones el **camino de ocho vías,** en honor del camino de ocho vías en el nirvana budista.

Los grupos de bariones y mesones pueden desplegarse en muchos otros patrones simétricos dentro del sistema del camino de ocho vías. Por ejemplo, la familia de bariones con el espín de $\frac{3}{2}$ descubierta en 1961 contiene nueve partículas arregladas en un patrón como el de la formación de bolos, como se ve en la figura 46.9. (Las partículas Σ^{*+}, Σ^{*0}, Σ^{*-}, Ξ^{*0} y Ξ^{*-} son estados excitados de las partículas Σ^+, Σ^0, Σ^-, Ξ^0 y Ξ^-. En estos estados de alta energía, los espines de los tres quarks (véase la sección 46.8) que forman las partículas están alineados de forma que el total de espines de la partícula sea igual a $\frac{3}{2}$. Cuando se propuso este patrón, se presentó un espacio vacío (en la posición inferior),

MURRAY GELL-MANN
Físico estadounidense (1929)
A Murray Gell-Mann se le otorgó el premio Nobel en 1969 por sus estudios teóricos relacionados con las partículas subatómicas.

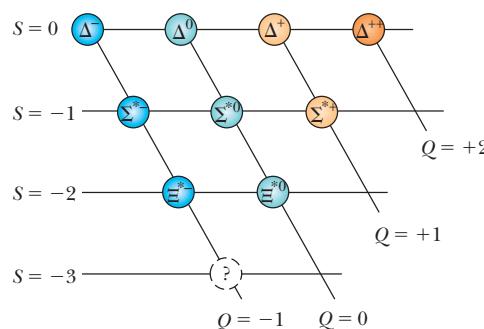



Figura 46.9 Patrón para los bariones de gran masa, con un espín de $\frac{3}{2}$ conocidos cuando el patrón fue propuesto. Las tres partículas Σ^* y las dos partículas Ξ^* son estados excitados de las partículas correspondientes a espín de $\frac{1}{2}$ en la figura 46.8. Estos estados excitados tienen una masa mayor y un espín de $\frac{3}{2}$. La ausencia de una partícula en la posición inferior reveló la presencia de una nueva partícula aún sin descubrir, la Ω^-.

Courtesy of Brookhaven National Laboratory

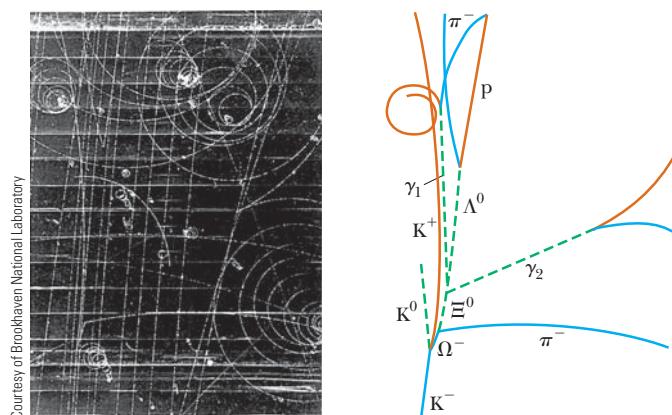



Figura 46.10 Descubrimiento de la partícula Ω^-. La fotografía de la izquierda muestra los rastros originales de la cámara de burbujas. El dibujo de la derecha aísla los rastros de los eventos importantes. La partícula K^- en la parte inferior colisiona con un protón para producir la primera partícula Ω^- detectada además de una partícula K^0 y una partícula K^+.

correspondiente a una partícula que nunca había sido observada. Gell-Mann predijo que la partícula faltante, que llamó omega menos (Ω^-), tiene un espín de $\frac{3}{2}$, con carga de -1, con extrañeza de -3, y una energía en reposo de alrededor de 1680 MeV. Poco tiempo después, en 1964, los científicos del Laboratorio Nacional de Brookhaven encontraron la partícula faltante mediante cuidadosos análisis de fotografías de la cámara de burbujas (figura 46.10) y confirmaron todas sus propiedades predichas.

La predicción de la partícula faltante en el camino de ocho vías tiene mucho en común con la predicción de elementos faltantes en la tabla periódica. Cuando ocurre un hueco en un patrón organizado de información, a los científicos les sirve de guía para sus investigaciones.

46.8 Quarks

Como ha notado, los leptones parecen ser verdaderas partículas elementales debido a que sólo existen unos pocos tipos, y los experimentos indican que no tienen un tamaño o una estructura interna medible. Los hadrones, por otra parte, son partículas complejas que tienen tamaño y estructura. La existencia de patrones de extrañeza-carga en el camino de ocho vías sugiere que los hadrones poseen una subestructura. Además, se sabe que existen cientos de tipos de hadrones y que muchos de ellos decaen en otros hadrones.

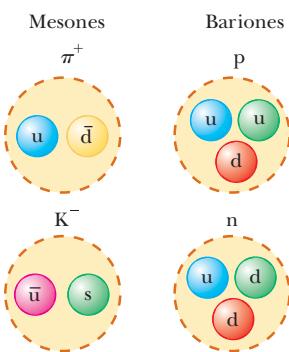



Figura 46.11 Composición del quark de dos mesones y dos bariones.

El modelo original del quark

En 1963 Gell-Mann y George Zweig (1937) propusieron de manera independiente un modelo para la subestructura de los hadrones. De acuerdo con su modelo, todos los hadrones están compuestos de dos o tres constituyentes elementales conocidos como **quarks.** (Gell-Mann tomó la palabra *quark* prestada del pasaje "Tres quarks para Muster Mark" en *Finnegans Wake* de James Joyce. En el modelo de Zweig, estos constituyentes se llaman "ases".) El modelo tiene tres tipos de quarks, designados por los símbolos u, d y s. A éstos se les da el nombre de **arriba, abajo** y **extraño.** Los diversos tipos de quarks son llamados **sabores.** La figura 46.11 es una representación de las composiciones del quark de varios hadrones.

Una propiedad inusual de los quarks es que poseen una carga electrónica fraccionaria. Los quarks u, d y s tienen cargas de $+2e/3$, $-e/3$ y $-e/3$, respectivamente, donde e es la carga elemental 1.60×10^{-19} C. Éstas y otras propiedades de los quarks y antiquarks aparecen en la tabla 46.3. Observe que los quarks tienen espín de $\frac{1}{2}$, lo que significa que todos los quarks son fermiones, esto es, cualquier partícula que tiene un espín de semientero, como se señaló en la sección 43.8. Como muestra la tabla 46.3, a cada quark se le asocia con un antiquark de carga, número bariónico y extrañeza opuestos.

TABLA 46.3

Propiedades de los quarks y antiquarks

Quarks

Nombre	Símbolo	Espín	Carga	Número bariónico	Extrañeza	Encanto	Caracter fondo	Caracter Cima
Arriba	u	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Abajo	d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Extraño	s	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	-1	0	0	0
Encantado	c	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	$+1$	0	0
Inferior	b	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	$+1$	0
Superior	t	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$+1$

Antiquarks

Nombre	Símbolo	Espín	Carga	Número bariónico	Extrañeza	Encanto	Caracter fondo	Caracter Cima
Antiarriba	$\overline{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Antiabajo	$\overline{d}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Antiextraño	$\overline{s}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	$+1$	0	0	0
Antiencantado	$\overline{c}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	0	0
Antiinferior	$\overline{b}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	0
Antisuperior	$\overline{t}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	-1

Las composiciones de todos los hadrones conocidos cuando Gell-Mann y Zweig presentaron sus modelos pueden especificarse por completo mediante las tres siguientes reglas:

- Un mesón está constituido por un quark y un antiquark, dándole un número bariónico de 0, como se requiere.
- Un barión consiste en tres quarks.
- Un antibarión está formado por tres antiquarks.

La teoría presentada por Gell-Mann y Zweig es conocida como *el modelo original del quark.*

Pregunta rápida 46.5 Utilizando un sistema de coordenadas como el de la figura 46.8, dibuje un diagrama del camino de ocho vías para los tres quarks en el modelo original del quark.

Encanto y otros desarrollos

A pesar de que el modelo original del quark fue altamente exitoso para clasificar familias de partículas, se encontraron algunas discrepancias entre sus predicciones y ciertas cantidades de decaimiento experimental. En consecuencia, en 1967 varios físicos propusieron un cuarto quark de sabor. Argumentaron que si existían cuatro tipos de leptones (como se pensaba entonces), también debería de haber cuatro sabores para los quarks, debido a una simetría subyacente de la naturaleza. Al cuarto quark, designado como *c*, se le asignó una propiedad llamada **encanto.** Un quark *encantado* tiene una carga de $+2e/3$, justo como el quark de arriba, pero su encanto lo distingue de los otros tres quarks. Esto introduce un cuarto número cuántico C, que representa el encanto. El nuevo quark tiene un encanto $C = +1$, su antiquark tiene un encanto de $C = -1$, y todos los demás quarks tienen $C = 0$. El encanto, como la extrañeza, se conserva en interacciones fuertes y electromagnéticas pero no en interacciones débiles.

Se empezó a acumular evidencia sobre la existencia del encanto en 1974, cuando un mesón pesado llamado partícula J/Ψ (o simplemente Ψ, mayúscula de la letra griega psi) fue descubierto de manera independiente por dos gru-

TABLA 46.4

Composición en quarks[a] de los mesones

		Antiquarks									
		$\bar{b}$		$\bar{c}$		$\bar{s}$		$\bar{d}$		$\bar{u}$	
	b	Y	$(\bar{b}b)$	B_c^-	$(\bar{c}b)$	$\bar{B}_s^0$	$(\bar{s}b)$	$\bar{B}_d^0$	$(\bar{d}b)$	B^-	$(\bar{u}b)$
	c	B_c^+	$(\bar{b}c)$	J/Ψ	$(\bar{c}c)$	D_s^+	$(\bar{s}c)$	D^+	$(\bar{d}c)$	D^0	$(\bar{u}c)$
Quarks	**s**	B_s^0	$(\bar{b}s)$	D_s^-	$(\bar{c}s)$	η, η'	$(\bar{s}s)$	$\bar{K}^0$	$(\bar{d}s)$	K^-	$(\bar{u}s)$
	d	B_d^0	$(\bar{b}d)$	D^-	$(\bar{c}d)$	K^0	$(\bar{s}d)$	π^0, η, η'	$(\bar{d}d)$	π^-	$(\bar{u}d)$
	u	B^+	$(\bar{b}u)$	$\bar{D}^0$	$(\bar{c}u)$	K^+	$(\bar{s}u)$	π^+	$(\bar{d}u)$	π^0, η, η'	$(\bar{u}u)$

[a] El quark cima no forma mesones debido a que su decaimiento es demasiado rápido.

pos, uno dirigido por Burton Richter (1931) en el Stanford Linear Accelerator (SLAC), y el otro dirigido por Samuel Ting (1936) en el Brookhaven National Laboratory. En 1976 a Richter y a Ting se les otorgó el premio Nobel de física. La partícula J/Ψ no entra en el modelo de tres quarks; en vez de eso, tiene propiedades de una combinación del quark encantado propuesto y de su antiquark ($c\bar{c}$). Es mucho más pesado que los demás mesones conocidos ($\sim$ 3100 MeV/c^2), y su vida es mucho más larga que las de las partículas que interactúan mediante la fuerza intensa. Pronto, se descubrieron mesones relacionados, correspondientes a combinaciones de quark como $\bar{c}d$ con $c\bar{d}$, todos con grandes masas y vidas más largas. La existencia de estos nuevos mesones otorgó una firme evidencia del cuarto quark de sabor.

En 1975 los investigadores de la Universidad de Stanford reportaron una fuerte evidencia para el leptón tau (τ), con una masa de 1784 MeV/c^2. Este fue el quinto tipo de leptón, lo que llevó a los científicos a proponer que podrían existir más tipos de sabores de quaks, con base en argumentos de simetría similares a aquellos que llevaron a proponer el quark encantado. Estas propuestas resultaron en modelos más elaborados del quark y a la predicción de dos nuevos quarks, **cima** (t) y **fondo** b). (Algunos científicos prefieren *verdad* y *belleza.*) Para distinguir estos quarks de los demás, se asignan números cuánticos llamados *carácter cima* y *carácter fondo* (con valores permitidos +1, 0, −1) a todos los quarks y antiquarks (véase la tabla 46.3). En 1977, investigadores del Laboratorio Nacional Fermi, bajo la dirección de Leon Lederman (1922), reportaron el descubrimiento de un nuevo mesón muy pesado Y (mayúscula de la letra griega epsilon), cuya composición se consideró como $b\bar{b}$, con evidencia para el quark fondo. En marzo de 1955, investigadores en el Fermilab anunciaron el descubrimiento del quark cima (supuestamente el último de los quarks en encontrarse), que tiene una masa de 173 GeV/c^2.

La tabla 46.4 menciona las composiciones en quarks de los mesones formados de los quarks de arriba, de abajo, extraño, encantado y fondo. La tabla 46.5 muestra las combinaciones quark para los bariones de la tabla 46.2. Advierta que sólo están contenidos dos sabores de los quarks, u y d, en todos los hadrones encontrados en la materia ordinaria (protones y neutrones).

TABLA 46.5

Composición en quarks de varios bariones

Partícula	Composición en quarks
p	uud
n	udd
Λ^0	uds
Σ^+	uus
Σ^0	uds
Σ^-	dds
Δ^{++}	uuu
Δ^+	uud
Δ^0	udd
Δ^-	ddd
Ξ^0	uss
Ξ^-	dss
Ω^-	sss

Nota: Algunos bariones tienen la misma composicion en quarks, como los del p y Δ^+ y el n y el Δ^0. En estos casos, las partículas Δ se consideran estados excitados del protón y del neutrón.

Probablemente se estará preguntando si alguna vez terminarán los descubrimientos de las partículas. ¿Cuántos "ladrillos" de materia existen realmente? En el presente, los físicos creen que las partículas elementales en la naturaleza son seis quarks y seis leptones, junto con sus antipartículas, y las cuatro partículas del campo de la tabla 46.1. La tabla 46.6 presenta las energías en reposo y las cargas de los quarks y los leptones.

A pesar de que se han hecho diversos esfuerzos experimentales, jamás se ha observado un quark aislado. Los físicos creen ahora que a temperaturas ordinarias los quarks se hallan permanentemente confinados en el interior de partículas ordinarias debido a una fuerza demasiado fuerte que no les permite escapar, llamada (de manera apropiada) la **fuerza intensa**[5] (que fue introducida al principio de la sección 46.4 y que se analiza más tarde en la sección 46.10). Esta fuerza aumenta con la distancia de separación, de manera similar a la fuerza que ejerce un resorte estirado. Los esfuerzos actuales están

[5] Como un recordatorio, el significado original del término *fuerza fuerte* se debió a la fuerza de atracción a "corta distancia" entre nucleones, que se ha llamado *fuerza nuclear.* La fuerza nuclear entre nucleones es un efecto secundario de la fuerza intensa entre quarks.

TABLA 46.6

Las partículas elementales y sus energías en reposo y cargas

Partícula	Energía en reposo	Carga
Quarks		
u	360 MeV	$+\frac{2}{3}e$
d	360 MeV	$-\frac{1}{3}e$
s	540 MeV	$-\frac{1}{3}e$
c	1500 MeV	$+\frac{2}{3}e$
b	5 GeV	$-\frac{1}{3}e$
t	173 GeV	$+\frac{2}{3}e$
Leptones		
e^-	511 keV	$-e$
μ^-	105.7 MeV	$-e$
τ^-	1784 MeV	$-e$
ν_e	< 7 eV	0
ν_μ	< 0.3 MeV	0
ν_τ	< 30 MeV	0

en proceso de formar un **plasma quark-gluón,** un estado de la materia en el cual los quarks están libres de neutrones y protones. En el año 2000, los científicos del CERN anunciaron tener evidencia de un plasma quark-gluón formado por núcleos de plomo en colisión. Los experimentos continúan en el CERN, como también en el Colisionador Relativista de Iones Pesados (RHIC) en Brookhaven, para comprobar la producción de un plasma quark-gluón.

Pregunta rápida 46.8 Se sabe que existen bariones con doble carga, como el Δ^{++}. Cierto o falso: los mesones con doble carga también existen.

46.9 Quarks multicolor

Poco después de que fuera propuesto el concepto de los quarks, los científicos reconocieron que ciertas partículas tienen composiciones quark que violan el principio de exclusión. En la sección 42.7 se aplicó el principio de exclusión a electrones en átomos. No obstante, el principio es más general y es aplicable a todas las partículas con un espín de semientero ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, etc.), que se conocen colectivamente como fermiones. Porque todos los quarks son fermiones con un semiespín, se espera que cumplan con el principio de exclusión. Un ejemplo de una partícula que parece violar el principio de exclusión es el barión Ω^- (sss), que contiene tres quarks extraños con espines paralelos, lo que da un espín total igual a $\frac{3}{2}$. Los tres quarks tienen el mismo número cuántico de espín que viola el principio de exclusión. Otros ejemplos de bariones creados a partir de quarks idénticos con espines paralelos son el Δ^{++} (uuu) y el Δ^- (ddd).

Para resolver este problema, se sugirió que los quarks poseyeran una propiedad adicional llamada la **carga de color.** Esta propiedad es similar en muchos aspectos a la carga eléctrica excepto que ocurre en seis variedades y no en dos. Los colores asignados a los quarks son rojo, verde y azul, y los antiquarks tienen los colores antirrojo, antiverde y antiazul. Por lo tanto, los colores rojo, verde y azul sirven como "números cuánticos" para el color del quark. Para satisfacer el principio de exclusión, los tres quarks en cualquier barión deben tener colores diferentes. Mire nuevamente los quarks en los bariones en la figura 46.11 y observe los colores. Los tres colores se "neutralizan" a blanco. Un quark y un antiquark en un mesón debe ser de un color y el correspondiente anticolor y en consecuencia se neutralizan blanco, de manera similar a la forma en que las cargas eléctricas + y − se neutralizan a una carga neta igual a cero. (Vea los mesones en la figura 46.11). Esta aparente violación al principio de exclusión en el barión Ω^- desaparece, ya que los tres quarks en la partícula tienen diferentes colores.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 46.3

La carga de color no es realmente un color

La descripción de color para un quark no tiene nada que ver con la sensación visual de la luz. Es simplemente una forma conveniente de identificar una propiedad que es semejante a la carga eléctrica.

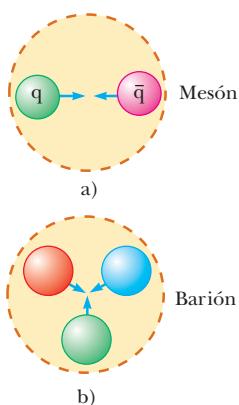



Figura 46.12 a) Un quark verde es atraído hacia un quark ativerde. Esto forma un mesón cuya estructura de quark es ($q\bar{q}$). b) Tres quarks de difeentes colores se atraen entre sí para formar un barión.

Observe que la nueva propiedad del color incrementa el número de quarks en un factor de tres, ya que cada uno de los seis quarks viene en tres colores. A pesar de que el concepto de color en el modelo de quark fue concebido originalmente para satisfacer el principio de exclusión, también proporciona una mejor teoría para explicar ciertos resultados experimentales. Por ejemplo, la teoría modificada predice correctamente la vida del mesón π^0.

La teoría de la forma en que interactúan los quarks entre sí se conoce como **cromodinámica cuántica** o QCD, en paralelo con el nombre *electrodinámica cuántica* (la teoría de la interacción eléctrica entre la luz y la materia). En la QCD, se dice que cada quark lleva una carga color, en analogía a la carga eléctrica. A la fuerza fuerte entre los quarks a menudo se le conoce como **fuerza de color.** Debido a eso, los términos *fuerza fuerte* y *fuerza de color* se utilizan indistintamente.

En la sección 46.1 se afirmó que la interacción nuclear entre hadrones es conciliada por partículas de campo sin masa llamadas **gluones.** Como se ha mencionado, la fuerza nuclear es de hecho un efecto secundario de la fuerza intensa entre quarks. Los gluones son los conciliadores de la fuerza intensa. Cuando un quark emite o absorbe un gluón, el color del quark puede cambiar. Por ejemplo, un quark azul que emite un gluón puede convertirse en un quark rojo, y a su vez, un quark rojo que absorbe este gluón se convierte en un quark azul.

La fuerza de color entre quarks es semejante a la fuerza eléctrica entre cargas: las partículas con su mismo color se repelen, y aquellas con color opuesto se atraen. Por lo tanto, dos quarks verdes se repelen entre sí, pero un quark verde es atraído por un quark antiverde. La atracción entre quarks de color opuesto para formar un mesón ($q\bar{q}$) se muestra en la figura 46.12a. Los quarks de colores diferentes también se atraen entre sí, aunque lo hacen con menor intensidad que un quark de color opuesto y un antiquark. Por ejemplo, un grupo de quarks rojo, azul y verde se atraen todos entre sí para formar un barión, como se ve en la figura 46.12b. Por lo tanto, cada barión contiene tres quarks de tres colores diferentes.

A pesar de que en grandes separaciones la fuerza nuclear de dos hadrones sin color es despreciable, la fuerza intensa neta entre sus quarks constitutivos no es exactamente igual a cero en pequeñas separaciones. Esta fuerza intensa residual es la fuerza nuclear que une a protones y neutrones para formar los núcleos. Es similar a la fuerza entre dos dipolos eléctricos. Cada dipolo es eléctricamente neutro. De cualquier modo, un campo eléctrico rodea a los dipolos, debido a la separación de las cargas positivas y negativas (véase la sección 23.6). Como resultado, se pregunta una interacción eléctrica entre los dipolos, la cual es más débil que la fuerza entre cargas individuales. En la sección 43.1 exploró cómo es que esta interacción da como resultado la fuerza Van der Waals entre moléculas neutras.

a) Modelo del pión de Yukawa

b) Modelo quark

Figura 46.13 a) Una interacción nuclear entre un protón y un neutrón, explicada en función del modelo de intercambio de piones de Yukawa. Ya que el pión tiene carga, el protón y el neutrón intercambian identidades. b) La misma interacción, explicada en función de quarks y gluones. Observe que el par de quarks $\bar{u}$d intercambiado forma un mesón π^-.

De acuerdo con la QCD, es posible dar una explicación más fundamental de la fuerza nuclear en función de quarks y gluones. La figura 46.13a muestra la interacción nuclear entre un neutrón y un protón mediante el pión de Yukawa, en este caso un π^-. Este dibujo difiere de la figura 46.5a, en la cual la partícula de campo es un π^0; esto es, no existe transferencia de carga de un nucleón a otro como en la figura. 46.5a. En la figura 46.13a, el pión porta carga de un nucleón a otro, por lo que los nucleones cambian de identidad: el protón se convierte en neutrón y el neutrón se convierte en protón.

Vea la misma interacción desde el punto de vista del modelo del quark, que se muestra en la figura 46.13b. En este diagrama de Feynman, el protón y el neutrón están representados por sus constituyentes en quarks. Cada quark en el neutrón y el protón emite y absorbe gluones continuamente. La energía de un gluón puede resultar en la creación de pares quarks-antiquarks. Este proceso es similar a la creación de pares electrón-positrón en la producción de pares que se investigó en la sección 46.2. Cuando un neutrón y un protón se acercan a 1 fm uno del otro, los gluones y quarks pueden ser intercambiados entre los dos nucleones, y estos intercambios producen la fuerza nuclear. La figura 46.13b ilustra una posibilidad para el proceso que se muestra en la figura 46.13a. Un quark abajo en el neutrón de la derecha emite un gluón. En tal caso la energía del gluón es transformada para crear un par u$\bar{u}$. El quark u se queda en el interior del nucleón (que ahora ha cambiado en un protón), y el quark d y el antiquark $\bar{u}$ en retroceso son transmitidos al protón en la izquierda del diagrama. En este caso el $\bar{u}$ anquila un quark u en el interior

del protón y el d es capturado. El efecto neto es cambiar un quark u a un quark d, y el protón en la izquierda se convierte en un neutrón.

Conforme el quark d y el antiquark ū en la figura 46.13b se transfieren entre los nucleones, los quarks d y ū intercambian gluones y pueden considerarse unidos entre sí por medio de la fuerza intensa. Si vuelve a ver la tabla 46.4, encontrará que esta combinación es un π^-; ¡o bien la partícula de campo de Yukawa! Por lo tanto, el modelo de quark de interacciones entre nucleones es consistente con el modelo de intercambio de piones.

46.10 El modelo estándar

Los científicos creen ahora que hay tres clasificaciones de partículas verdaderamente elementales: leptones, quarks y partículas del campo. Estas tres partículas se clasifican adicionalmente en fermiones o bosones. Observe que los quarks y los leptones tienen un espín de $\frac{1}{2}$ y, en consecuencia, son fermiones, en tanto que las partículas de campo tienen un espín entero de 1 o más y son bosones.

Recuerde de la sección 46.1 que se cree que la fuerza débil está conciliada por los bosones W^+, W^- y Z^0. Se dice que estas partículas tienen una *carga débil*, de la misma manera que los quarks tienen una carga de color. Por lo tanto, cada partícula elemental puede tener masa, carga eléctrica, carga de color y fuerza débil. Por supuesto, uno o más de éstos puede ser igual a cero.

En 1979, Sheldon Glashow (1932), Abdus Salam (1926-1996) y Steven Weinberg (1933) ganaron el premio Nobel de Física por el desarrollo de la teoría que unifica las interacciones electromagnéticas y débiles. Esta **teoría electrodébil** postula que las interacciones débiles y electromagnéticas tienen la misma intensidad cuando las partículas involucradas tienen energías muy elevadas. Las dos interacciones son vistas como diferentes manifestaciones de una sola interacción electrodébil unificadora. La teoría hace muchas predicciones concretas, pero quizá la más espectacular es la predicción de las masas de las partículas W y Z de casi 82 GeV/c^2 y 93 GeV/c^2, respectivamente. Estas predicciones son cercanas a las masas que se presentan en la tabla 46.1, determinadas por experimentación.

La combinación de la teoría electrodébil y la QCD para la interacción fuerte se conoce en física de alta energía como el **modelo estándar.** A pesar de que los detalles del modelo estándar son complejos, sus ingredientes esenciales pueden resumirse con ayuda de la figura 46.14. (El modelo estándar no incluye la fuerza gravitacional por el momento; sin embargo, en la figura 46.14 se incluye la gravedad debido a que los científicos tienen la esperanza de incorporar esta fuerza a la teoría unificadora.) Este diagrama muestra que los quarks participan en todas las fuerzas fundamentales y que los leptones participan en todo, excepto en la fuerza intensa.

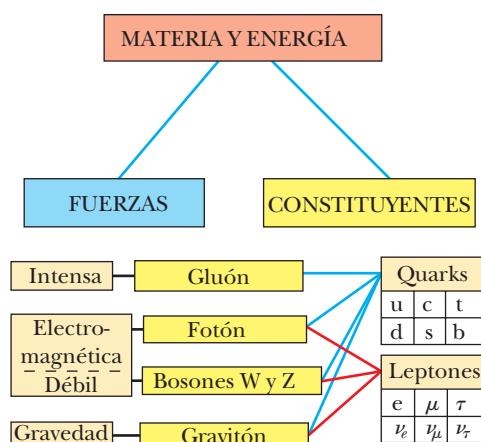



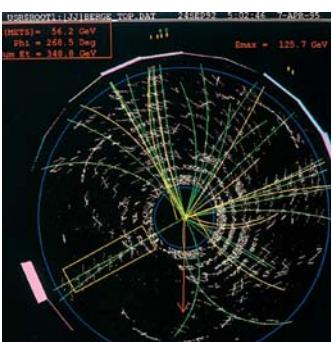
Figura 46.14 Modelo estándar de la física de las partículas.

Cortesía de CERN

Figura 46.15 Vista del interior del túnel del Large Electron-Positron Collider (LEP), con 27 km de circunferencia.

El modelo estándar no responde todas las preguntas. Una pregunta que sigue sin resolverse es por qué, de los dos conciliadores de la interacción electrodébil, el fotón no tiene masa, pero los bosones W y Z sí. Debido a esta diferencia de masa, a energías bajas las fuerzas electromagnéticas y débiles son bastante diferentes pero a muy altas energías se parecen, cuando la energía en reposo es despreciable en relación con la energía total. El comportamiento cuando una va de energías mayores a menores se conoce como *rompimiento de simetría,* porque las fuerzas son similares, o simétricas, en altas energías, pero son muy diferentes en energías bajas. De las energías en reposo de bosones W y Z que no son igual a cero surge la pregunta del origen de masas de partícula. Para resolver este problema, se ha propuesto una partícula hipotética conocida como **bosón Higgs,** la cual aporta un mecanismo para romper la simetría electrodébil. El modelo estándar modificado incluye el bosón Higgs, que proporciona una explicación lógica y consistente de la naturaleza más pesada de los bosones W y Z. Desafortunadamente, el bosón Higgs aún no se ha descubierto, pero los científicos saben que su energía en reposo debe ser menor a 1 TeV. Para determinar si el bosón Higgs existe o no, deben entrar en colisión dos quarks, cada uno con 1 Tev de energía. Sin embargo, los cálculos muestran que una colisión de esta índole requiere una inyección de 40 TeV de energía en el interior del volumen del protón.

Debido a la energía limitada disponible en los aceleradores convencionales que utilizan objetivos fijos, es necesario emplear aceleradores de haces en colisión conocidos como **colisionadores.** El concepto de colisionadores es simple. Las partículas que tienen masas iguales y energías cinéticas iguales, viajando en direcciones opuestas en un anillo acelerador, chocan de frente para producir la reacción necesaria para crear partículas nuevas. Porque la cantidad de movimiento total de las partículas que interactúan es igual a cero, toda su energía cinética está disponible para la reacción. El Large Electron-Positron (LEP) Collider en el CERN (figura 46.15) y el Stanford Linear Collider hacen chocar tanto electrones como positrones. El Super Proton Synchrotron en el CERN acelera protones y antiprotones con energías de más de 270 GeV. El acelerador de protones de más alta energía del mundo, el Tevatrón en el Laboratorio Nacional de Fermi en Illinois, produce protones a casi 1000 GeV (1TeV). El Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC, por sus siglas en inglés) en el Laboratorio Nacional de Brookhaven hará chocar iones pesados para buscar el plasma quark-gluón, como se analizó previamente. El CERN terminó en 2007 la construcción del Large Hadron Collider (LHC), un colisionador protón-protón que aportará una energía de centro de masa de 14 TeV que permitirá la exploración de la física del bosón Higgs. El acelerador será construido en la misma circunferencia del túnel de 27 km que ahora contiene el Colisionador LEP, y muchos países participarán en este proyecto.

Cortesía de Fermi National Accelerator Laboratory

Figura 46.16 Las computadoras en el Fermilab crean una representación gráfica como ésta de las trayectorias de las partículas después de una colisión.

Además de crecientes energías en los aceleradores modernos, las técnicas de detección se han hecho cada vez más complejas. Anteriormente, en este mismo capítulo, se observó que simples fotografías de una cámara de burbujas requerían horas de análisis manual. La figura 46.16 muestra un despliegue moderno de detección de rastros de partícula después de una reacción; los rastros se analizan rápidamente mediante computadora. La fotografía de introducción a este capítulo muestra un conjunto complejo de rastros procedentes de una colisión de núcleos de oro.

46.11 La conexión cósmica

En esta sección se describe una de las teorías más fascinantes de toda la ciencia —la teoría del Big Bang de la creación del Universo— y la evidencia experimental que la sostiene. Esta teoría de la cosmología afirma que el Universo tuvo un principio y, además, que este principio fue tan cataclísmico que es imposible mirar más atrás del mismo. De acuerdo con esta teoría, el Universo emergió a partir de una singularidad infinitamente densa hace 10 000 o 20 000 millones de años. En los primeros pocos minutos después del Big Bang se desplegó tanta energía que se cree que las cuatro interacciones de la física se unificaron y que toda la materia estaba contenida en un plasma quark-gluón.

La evolución de las cuatro fuerzas fundamentales a partir del Bing Bang hasta hoy aparece en la figura 46.17. Durante los primeros 10^{-43} (época ultra-caliente, $T \sim 10^{32}$ K), se presume que las fuerzas intensa, electrodébiles y gravitacionales estaban unidas formando una fuerza totalmente unificada. En los primeros 10^{-35} s que siguieron al Big Bang (época caliente $T \sim 10^{29}$ K), ocurrió el rompimiento de la simetría de la gravedad, en tanto que las fuerzas intensa y electrodébiles se mantenían unidas. En este periodo las

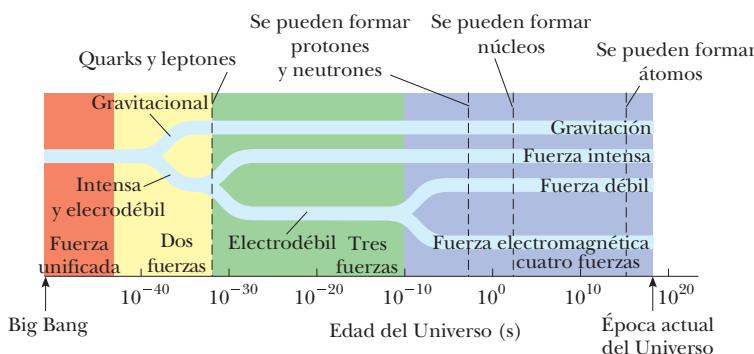



Figura 46.17 Breve historia del Universo desde el Big Bang hasta la época actual. Las cuatro fuerzas se hicieron distinguibles durante el primer nanosegundo. Después, todos los quarks se combinaron para formar partículas mediante la fuerza nuclear. Sin embargo, los leptones permanecieron separados y hasta hoy existen individualmente como partículas observables.

energías de las partículas eran tan elevadas ($>10^{16}$ GeV) que existían partículas muy pesadas como quarks, leptones y sus otras antipartículas. Después, pasados 10^{-35} s, el Universo se expandió de manera rápida y se enfrió (época tibia, $T \sim 10^{29}$ a 10^{15} K) y las fuerzas intensa y electrodébiles se separaron. Conforme el Universo se enfriaba, alrededor de 10^{-10} s después del Big Bang, la fuerza electrodébil se dividió en fuerza débil y fuerza electromagnética.

Después de unos minutos, los protones y los neutrones se condensaron fuera del plasma. Durante media hora el Universo sufrió una detonación termonuclear, explotando como una bomba de hidrógeno y produciendo la mayor parte de los núcleos de helio que existen ahora. El Universo siguió expandiéndose y su temperatura se redujo. Hasta alrededor de 700 000 años después del Big Bang, el Universo estaba bajo el dominio de la radiación. La radiación energética impidió que la materia formara átomos de hidrógeno por separado, puesto que las colisiones habrían ionizado de manera instantánea cualquier átomo que se hubiera formado. Los fotones experimentaron una dispersión Compton continua debido a la enorme cantidad de electrones libres, dando como resultado un Universo opaco a la radiación. Para cuando el Universo tenía aproximadamente 700 000 años de edad, se había expandido y enfriado hasta cerca de 3000 K, lo que permitió que los protones se unieran con los electrones para formar átomos de hidrógeno neutro. Debido a las energías cuantificadas de los átomos, muchas más longitudes de onda de radiación no fueron absorbidas por los átomos y Universo de pronto se volvió transparente a los fotones. La radiación dejó de dominar el Universo, y trozos de material neutro crecieron paulatinamente; primero átomos, después moléculas, nubes de gases, estrellas y, finalmente, galaxias.

Observación de la radiación de la bola de fuego primordial

En 1965 Arno A. Penzias (1933) y Robert W. Wilson (1936) de Bell Laboratories estaban probando un receptor de microondas sensitivo e hicieron un descubrimiento asombroso. Una señal molesta produciendo un siseo apagado de fondo estaba interfiriendo con sus experimentos de comunicaciones satelitales. El cuerno de microondas que sirvió como antena receptora se muestra en la figura 46.18. Tanto el desalojo de una bandada de palomas del cuerno de veinte pies, como el enfriar el detector de microondas, no tuvieron éxito para eliminar la señal.

La intensidad de la señal detectada se mantuvo igual independientemente de la orientación de la antena. El hecho de que la radiación tuviera una misma intensidad en cualquier dirección sugería que todo el Universo era la fuente de la radiación. Finalmente, se hizo patente que lo que estaban detectando era una radiación de microondas de fondo (a una longitud de onda de 7.35 cm), que representaba el "resplandor" aún presente del Big Bang. En una conversación casual, Penzias y Wilson descubrieron que un grupo de Princeton había predicho la existencia de la radiación residual del Big Bang y estaban planeando realizar un experimento para confirmar esta teoría. La animación en la comunidad científica fue muy grande cuando Penzias y Wilson anunciaron que ya habían observado un

AT&T Bell Laboratories

Figura 46.18 Robert W. Wilson (*izquierda*) y Arno A. Penzias con la antena en forma de cuerno reflector en Bell Telephone Laboratories.

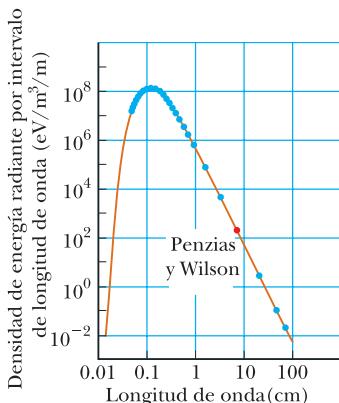



Figura 46.19 Cuerpo negro teórico (curva café) y espectros de radiación medidos (puntos azules) del Big Bang. La mayoría de los datos fueron recolectados por el satélite Cosmic Background Explorer (COBE). Los datos de Penzias y Wilson aparecen indicados en rojo.

fondo de microondas excedente compatible con una fuente de cuerpo negro de 3 K, lo que coincidía con la temperatura esperada del Universo hoy día después del Big Bang.

Ya que Penzias y Wilson efectuaron sus mediciones en una sola longitud de onda, no pudieron confirmar por completo que la radiación provenía de un cuerpo negro de 3 K. Experimentos subsecuentes realizados por otros grupos añadieron datos de intensidades en diferentes longitudes de onda, como se muestra en la figura 46.19. Los resultados confirman que la radiación corresponde a la de un cuerpo negro de 2.7 K. Esta magnitud es quizá la evidencia más clara de la teoría del Big Bang. El premio Nobel de Física les fue otorgado a Penzias y a Wilson por este descubrimiento de tanta importancia.

El descubrimiento de la radiación cósmica de fondo creó un problema: la radiación, sin embargo, era demasiado uniforme. Los científicos creían que tenían que ocurrir ligeras fluctuaciones en este fondo para actuar como sitios de nucleación para la formación de las galaxias y de otros objetos que aparecen ahora en el cielo. En 1989, la NASA lanzó un satélite llamado COBE (KOH-bee), que significa Explorador de fondo cósmico, para estudiar esta radiación con mayor detalle. En 1992, George Smoot (1945) encontró en el Laboratorio Lawrence Berkeley, basándose en datos recolectados, que el fondo no era perfectamente uniforme, sino que contenía irregularidades que correspondían a variaciones en la temperatura de 0.000 3 K. Smoot obtuvo el Premio Nobel en física en 2006. El Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, lanzado en junio de 2001, mostró datos que permitieron la observación en el cosmos de diferencias de temperatura en el intervalo de microkelvins.

Otra evidencia de un Universo en expansión

La teoría cosmológica del Big Bang predice que el Universo se está expandiendo. La mayoría de los descubrimientos clave que apoyan la teoría de un Universo en expansión fueron hechos en el siglo xx. Vesto Melvin Slipher (1875-1969), un astrónomo estadounidense, reportó en 1912 que la mayor de las nebulosas estaban alejándose de la Tierra con rapidez de hasta varios miles de millas por hora. Slipher fue uno de los primeros científicos en utilizar el corrimiento Doppler (véase la sección 17.4) en las líneas del espectro para la medición de velocidades de las galaxias.

Figura 46.20 Ley de Hubble: gráfica de la rapidez de recesión en función de la distancia para cuatro galaxias.

A finales de los años veinte, Edwin P. Hubble (1889-1953) afirmó audazmente que todo el Universo se está expandiendo. De 1928 a 1936, hasta que se alcanzaron los límites del telescopio de 100 pulgadas, Hubble y Milton Humason (1891-1972) trabajaron en el Monte Wilson en California para probar esta afirmación. Los resultados del trabajo y su continuación en 1940 utilizando un telescopio de 200 pulgadas mostraron que la rapidez en que se alejan las galaxias de la Tierra incrementan en proporción directa a su distancia R de la Tierra (figura 46.20). Esta correspondencia lineal, conocida como la ley de Hubble, puede escribirse de esta manera:

$$v = HR \tag{46.4}$$

donde H, llamada la **constante de Hubble,** tiene el valor aproximado de:

Ley de Hubble ►

$$H \approx 17 \times 10^{-3} \text{ m/s} \cdot \text{años luz}$$

EJEMPLO 46.5 **Recesión de un quásar**

Un quásar es un objeto similar a una estrella y está muy distante de la Tierra. Su rapidez se puede determinar a partir de mediciones de corrimiento Doppler en la luz que emite. Cierto quásar se aleja de la Tierra con una rapidez de $0.55c$. ¿Que tan lejos está?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Una representación mental común para la ley de Hubble es la de un panqué de pasas que se cocina en un horno. Imagínese usted en el centro de la barra de panqué. Conforme toda la barra de panqué se expande cuando se calienta, las pasas cercanas se mueven más lentamente respecto a usted. La pasas alejadas de usted en el borde de la barra de panqué se mueven con mayor rapidez.

Categorizar Se usa un concepto desarrollado en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre la distancia a través de la ley de Hubble: $$R = \frac{v}{H} = \frac{(0.55)(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{17 \times 10^{-3} \text{ m/s} \cdot \text{años luz}} = 9.7 \times 10^9 \text{ años luz}$$

¿Qué pasaría si? Suponga que el quásar se mueve con esta rapidez desde el Big Bang. Con esta suposición, estime la edad del Universo.

Respuesta Aproxime la distancia de la Tierra al quásar como la distancia que el quásar se movió desde la singularidad desde el Big Bang. En tal caso se puede encontrar el intervalo de tiempo a partir del modelo de partícula bajo rapidez constante: $\Delta t = d/v = R/v = 1/H \approx$ 18 miles de millones de años, que está en concordancia aproximada con otros cálculos.

¿El Universo se expandirá para siempre?

En los años cincuenta y sesenta, Allan R. Sandage (1926) utilizó el telescopio de 200 pulgadas del Monte Palomar para medir las magnitudes de velocidad de galaxias a distancias de hasta 6000 millones de años luz de la Tierra. Estas mediciones mostraron que estas galaxias lejanas se estaban moviendo 10 000 km/s más aprisa que lo que la ley de Hubble había predicho. Según este resultado, hace 1000 millones de años el Universo ha estado expandiéndose más rápido y, como consecuencia de estos datos, se concluye que la rapidez de expansión está disminuyendo.[6] Hoy, los astrónomos y los físicos están tratando de determinar la rapidez de expansión. Si la densidad de masa promedio del Universo es menor a algún valor crítico, las galaxias disminuirán la velocidad de escape pero seguirán escapando hacia el infinito. Si la densidad promedio sobrepasa el valor crítico, la expansión finalmente se detendrá y comenzará una contracción, lo que daría como resultado probable un estado superdenso seguido por otra expansión. En este caso, habría un Universo oscilante.

EJEMPLO 46.6 La densidad crítica del Universo

A) A partir de la conservación de energía, deduzca una expresión para la densidad de masa crítica del Universo ρ_C en términos de la constante de Hubble H y la constante de gravitación universal G.

Figura 46.21 (Ejemplo 46.6) La galaxia marcada con masa m escapa de un gran racimo de galaxias contenidas dentro de un volumen esférico de radio R. Sólo la masa dentro de R frena a la galaxia.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 46.21 muestra una gran sección del Universo, contenida dentro de una esfera de radio R. La masa total en ese volumen es M. Una galaxia de masa $m \ll M$, que tiene una rapidez v a una distancia R del centro de la esfera, escapa al infinito (en donde su rapidez tiende a cero) si la suma de su energía cinética y la energía potencial gravitacional del sistema es cero.

Categorizar El Universo puede ser infinito en extensión espacial, pero la ley de Gauss para gravitación (problema 61 del capítulo 24) implica que sólo la masa M dentro de la esfera contribuye a la energía potencial gravitacional del sistema galaxia-esfera. Por lo tanto, este problema se clasifica como uno en el que se aplica la ley de Gauss para gravitación. Modele la esfera en la figura 46.21 y la galaxia que escapa como un sistema aislado.

Analizar Escriba una expresión para la energía mecánica total del sistema e iguale a cero, lo que representa la galaxia en movimiento con la rapidez de escape:

$$E_{\text{total}} = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} = 0$$

[6] Los datos a grandes distancias contienen importantes incertidumbres de observación y pueden errar de manera sistemática debido a efectos como el caso de una brillantez anormal en los conjuntos visibles más distantes.

Sustituya para la masa M, contenida dentro de la esfera, el producto de la densidad crítica y el volumen de la esfera:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_c)}{R}$$

Resuelva para la densidad crítica:

$$\rho_c = \frac{3v^2}{8\pi GR^2}$$

A partir de la ley de Hubble, sustituya para la razón $v/R = H$:

$$1) \qquad \rho_c = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

B) Estime un valor numérico para la densidad crítica en gramos por centímetro cúbico:

SOLUCIÓN

En la ecuación 1), sustituya valores numéricos para H y G:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3(17 \times 10^{-3}\ \text{m/s}\cdot\text{años luz})^2}{8\pi(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)} = 5.17 \times 10^5\ \text{kg/m}\cdot(\text{años luz})^2$$

Reconcilie las unidades al convertir años luz a metros:

$$\rho_c = 5.7 \times 10^5\ \text{kg/m}\cdot(\text{años luz})^2\left(\frac{1\ \text{año luz}}{9.46 \times 10^{15}\ \text{m}}\right)^2$$

$$= 6 \times 10^{-27}\ \text{kg/m}^3 = 6 \times 10^{-30}\ \text{g/cm}^3$$

Finalizar Ya que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-24} g, este valor de ρ_C corresponde a 3×10^{-6} átomos de hidrógeno por centímetro cúbico, o 3 átomos por metro cúbico.

¿Masa faltante en el Universo?

La materia luminosa en las galaxias alcanza una densidad promedio del Universo de 5×10^{-33} g/cm^3. La radiación en el Universo tiene un equivalente de masa de aproximadamente 2% de la materia luminosa. Se puede estimar la masa total de toda la materia no luminosa (como el gas interestelar y los agujeros negros) a partir de las magnitudes de velocidad de las galaxias que están en órbita en un agrupamiento. Mientras mayor sea la rapidez de las galaxias, más masa habrá en el conjunto. Las mediciones hechas en el conjunto de galaxias Coma indican, de manera sorprendente, que la cantidad de materia no luminosa es 20 o 30 veces la cantidad de materia luminosa presente en las estrellas o nubes de gas luminosas. Aun con este gran componente invisible de *materia oscura*, si se supone al Universo como un todo, hace que la densidad de masa observada sea menor que ρ_c en diez veces, calculada en el ejemplo 46.6. El déficit, conocido como *masa faltante*, ha sido el tema de intenso trabajo teórico y experimental, y se han sugerido como candidatas para la masa faltante en el Universo partículas exóticas como axiones, fotinos y supercuerda. Algunos investigadores han hecho propuestas más pragmáticas en el sentido de que la masa faltante en el Universo está presente en los neutrinos. De hecho, los neutrinos son tan abundantes que su pequeña energía en reposo, del orden de sólo 20 eV, podría aportar la masa faltante y "cerrar" el Universo. Los experimentos actuales diseñados para medir la energía en reposo del neutrino tendrán un importante efecto sobre las predicciones para el futuro del Universo.

¿Energía misteriosa en el Universo?

Se dio un sorprendente giro en la historia del Universo en 1998 con la observación de una clase de supernova que tenía una brillantez absoluta fija. Se puede determinar su distancia y rapidez de alejamiento de la Tierra combinando su brillantez aparente y su desplazamiento hacia el rojo de la luz proveniente de estas explosiones. Estas observaciones llevaron a la conclusión de que la expansión del Universo no está disminuyendo, ¡sino que se está acelerando! Observaciones hechas por otros grupos también llegaron a la misma interpretación.

Para poder explicar esta aceleración, los físicos han propuesto la *energía oscura*, que es la energía que posee el vacío del espacio. En los primeros años de vida del Universo, la gravedad dominaba sobre la energía oscura. Conforme el Universo se expandió y la fuerza gravitacional entre galaxias se redujo debido a las grandes distancias entre ellas, la energía oscura se volvió mucho más importante. La energía oscura da como resultado una fuerza de repulsión efectiva que hace que aumente la rapidez de expansión.[7]

A pesar de que existe algún grado de certidumbre respecto al principio del Universo, no hay certidumbre acerca de cómo terminará todo. ¿El Universo se seguirá expandiendo para siempre, o algún día colapsará y se expandirá de nuevo, quizá en una serie infinita de oscilaciones? El resultado y la respuesta a estas preguntas continúan inconclusos, y la emocionante controversia continúa.

46.12 Problemas y perspectivas

Mientras los físicos de partículas han estado explorando el reino de lo muy pequeño, los cosmólogos han estado explorando la historia cósmica desde el primer microsegundo del Big Bang. La observación de los sucesos que ocurren cuando dos partículas entran en colisión en un acelerador es esencial para la reconstrucción de los primeros momentos en la historia cósmica. Por esta razón, quizá la clave para entender el primer Universo es comprender primero el mundo de las partículas elementales. Los cosmólogos y los físicos han encontrado ahora que tienen muchas metas en común y están uniendo esfuerzos en un intento de entender el mundo físico en su nivel más fundamental.

Nuestro entendimiento de la física a corta distancia está lejos de estar completa. La física de partículas enfrenta muchas preguntas. ¿Por qué existe tan poca antimateria en el Universo? ¿Es posible unificar de manera lógica y consistente las teorías fuerte y electrodébil? ¿Por qué los quarks y los leptones forman tres familias similares pero distintas? ¿Son los muones como los electrones, a excepción de sus diferencias de masa, o tienen otras propiedades sutiles que aún no han sido detectadas? ¿Por qué algunas partículas están cargadas y otras son neutras? ¿Por qué los quarks tienen una carga fraccionaria? ¿Qué determina las masas de los constituyentes elementales de la materia? ¿Pueden existir quarks aislados?

Una pregunta importante y obvia que falta es si los leptones y los quarks tienen una estructura fundamental. Si la tienen, podemos hacernos una idea de un número infinito de niveles de estructura más profundos. Sin embargo, si los leptones y los quarks son en realidad los constituyentes últimos de la materia, como los físicos de ahora tienden a creer, deberíamos ser capaces de construir una teoría final de la estructura de la materia, justo como Einstein soñó hacerlo. Esta teoría, llamada de manera extravagante la *Teoría del Todo*, sería una combinación del modelo estándar y de una teoría cuántica de la gravedad.

Teoría de cuerdas: una nueva perspectiva

Ahora analice brevemente un esfuerzo actual a fin de responder algunas de estas preguntas proponiendo una nueva perspectiva sobre las partículas. Al leer este libro, quizá ha recordado que comienza con el modelo de las partículas y haciendo con ello bastante física. En la parte 2 se introdujo el modelo ondulatorio, y se encontró más física a investigar en función de las propiedades de las ondas. En la parte 5 de este volumen se utilizó un modelo ondulatorio para la luz. Al principio de la parte 6, sin embargo, se vio la necesidad de volver al modelo de partícula para la luz. Además, se encontró que las partículas de los materiales tenían características parecidas a las de las ondas. El modelo cuántico de las partículas analizado en el capítulo 40 permitió construir partículas a partir de ondas, lo que sugiere que una onda es la entidad fundamental. En este capítulo, sin embargo, se afirmó que las partículas son las entidades fundamentales. ¡Pareciera que no podemos decidirnos! En esta sección final se analiza un esfuerzo actual de investigación para construir partículas a partir de ondas y de vibraciones.

[7] Para una actualización sobre la energía oscura, véase S. Perlmutter, "Supernovae, Dark Energy, and the Accelerating Universe", *Physics Today*, abril de 2003; **56**(4), pp. 53-60.

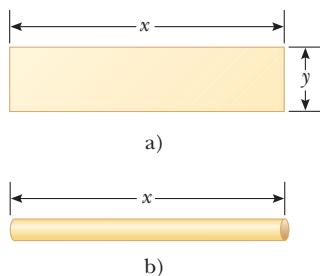



Figura 46.22 a) Se corta un pedazo de papel en forma rectangular. Como rectángulo, la forma tiene dos dimensiones. b) El papel se enrolla formando un popote. De lejos, parece tener una dimensión. La segunda dimensión enrollada no es visible si se observa a gran distancia en comparación con el diámetro del popote.

La **teoría de cuerdas** es un esfuerzo para unificar las cuatro fuerzas fundamentales al modelar todas las partículas como los distintos modos de vibración de una sola entidad; una cuerda increíblemente pequeña. La longitud típica de una cuerda así es del orden de 10^{-35}m, y se conoce como **longitud de Planck.** Hemos visto modos cuantizados antes: las frecuencias de las cuerdas de una guitarra vibrando en el capítulo 18 y en el capítulo 42 los niveles cuantizados de energía de los átomos. En la teoría de las cuerdas, cada modo de vibración cuantizado de una cuerda corresponde a una partícula elemental diferente del modelo estándar.

Uno de los factores que complica la teoría de la cuerda es que requiere que espacio-tiempo tengan diez dimensiones. A pesar de las dificultades teóricas y conceptuales para lidiar con diez dimensiones, la teoría de cuerdas mantiene la promesa de incorporar la gravedad con las otras fuerzas. Cuatro de las diez dimensiones son visibles para nosotros —tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal—, y se dice que las otras seis son *compactadas*. Es decir, las seis dimensiones están dobladas por fuerzas que no son visibles para el mundo macroscópico.

Como una analogía, considere un popote. Podemos construir uno cortando un pedazo rectangular de papel (figura 46.22a), que tiene claramente dos dimensiones, y enrollándolo en un pequeño tubo (figura 46.22b). Desde lejos, el popote parece una línea recta unidimensional. La segunda dimensión ha sido doblada y no es visible. La teoría de cuerdas afirma que seis dimensiones espacio-tiempo están dobladas de manera semejante, siendo el doblez del tamaño de la longitud de Planck, lo cual es imposible de observar desde nuestro punto de vista.

Otro factor que complica la teoría de cuerdas es que resulta difícil para los experimentadores saber qué deben buscar en un experimento. La longitud de Planck es tan pequeña que es imposible una experimentación directa de las cuerdas. En tanto esta teoría no se haya desarrollado más, los teóricos de las cuerdas tendrán que conformarse con aplicar la teoría a resultados conocidos y aprobar su consistencia.

Una de las predicciones de la teoría de las cuerdas, conocida como **supersimetría** (SUSY), sugiere que toda partícula elemental tiene un supercompañero que todavía no ha sido observado. Se cree que la supersimetría es una simetría fraccionada (como la simetría fraccionada electrodébil a energía reducida) y las masas de los supercompañeros están más allá de nuestra capacidad actual de detección mediante aceleradores. Algunos teóricos afirman que la masa de los supercompañeros es la masa faltante vista en la sección 46.11. Siguiendo con la tendencia extravagante para nombrar partículas y sus propiedades, a los supercompañeros se les da el nombre de *squark* (el supercompañero del quark), el *selectrón* (electrón), y el *sgluón* (gluón).

Otros teóricos están trabajando en la **teoría M,** que es una teoría de once dimensiones de acuerdo con membranas en vez de cuerdas. De una manera reminiscente del principio de correspondencia, se dice que la teoría M reduce la teoría de cuerdas si se reducen las dimensiones de once a diez.

Las preguntas que hemos expuesto al principio de esta sección siguen sin respuesta. Debido a los rápidos avances y nuevos descubrimientos en el campo de la física de las partículas, en la década siguiente muchas de estas preguntas habrán sido resueltas mientras que otras nuevas habrán surgido.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Antes de la teoría de los quarks, las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza se identificaban como nuclear, electromagnética, débil y gravitacional. Todas las interacciones en las que estas fuerzas tomaban parte estaban conciliadas por **partículas de campo**. La interacción electromagnética está conciliada por fotones; la interacción débil está conciliada por los bosones $W^{\pm}$ y Z^0; la interacción gravitacional está conciliada por gravitones; y la interacción nuclear está conciliada por gluones.

Una partícula cargada y su **antipartícula** tienen la misma masa pero carga opuesta, y otras propiedades tendrán valores opuestos, como el número de leptones y el número de bariones. Es posible producir pares partícula-antipartícula en reacciones nucleares si la energía disponible es mayor que $2mc^2$, donde m es la masa de la partícula (o antipartícula).

Las partículas distintas de las partículas de campo se clasifican como hadrones o leptones. Los **hadrones** interactúan a través de las cuatro fuerzas fundamentales. Tienen tamaño y estructura y no son partículas elementales. Hay dos tipos: **bariones** y **mesones**. Los bariones, que por lo general son las partículas más pesadas, tienen *número de bariones* distinto de cero y un espín de $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$. Los mesones tienen número de bariones cero y espín cero o entero.

Los **leptones** no tienen estructura o tamaño y se consideran verdaderamente elementales. Sólo interactúan a través de las fuerzas débil, gravitacional y electromagnética. Existen seis tipos de leptones: electrón e^-, muón μ^- y tau τ^-, y sus neutrinos ν_e, ν_μ, y ν_τ.

En todas las reacciones y decaimientos, se conservan estrictamente cantidades como energía, cantidad de movimiento lineal, cantidad de movimiento angular, carga eléctrica, número de bariones y número de leptones. Ciertas partículas tienen propiedades llamadas **extrañeza** y **encanto**. Estas inusuales propiedades se conservan en todos los decaimientos y reacciones nucleares, excepto aquellas que ocurren a través de la fuerza débil.

Los teóricos en física de partículas elementales postularon que todos los hadrones están compuestos de unidades más pequeñas llamadas **quarks**, y la evidencia experimental concuerda con este modelo. Los quarks tienen carga eléctrica fraccional y vienen en seis **sabores**: arriba (u), abajo d), extraño (s), encanto c), cima (t) y fondo b). Cada barión contiene tres quarks, y cada mesón contiene un quark y un antiquark.

De acuerdo con la teoría de la **cromodinámica cuántica**, los quarks tienen una propiedad llamada **color**; la fuerza entre quarks se conoce como **fuerza intensa** o **fuerza color**. La fuerza intensa ahora se considera como una fuerza fundamental. La fuerza nuclear, que originalmente se consideraba fundamental, ahora se entiende como un efecto secundario de la fuerza intensa debido a intercambio de gluones entre hadrones.

Las fuerzas electromagnética y débil ahora se consideran manifestaciones de una sola fuerza llamada **fuerza electrodébil**. La combinación de cromodinámica cuántica y teoría electrodébil se llama **modelo estándar**.

La radiación de microondas de fondo, descubierta por Penzias y Wilson, sugiere enormemente que el Universo comenzó con un Big Bang hace 10 000 a 20 000 millones de años. La radiación de fondo es equivalente a la de un cuerpo negro a 3 K. Varias mediciones astronómicas sugieren que el Universo se expande. De acuerdo con la **ley de Hubble**, las galaxias distantes se alejan (receden) de la Tierra con una rapidez $v = HR$, donde H es la **constante de Hubble**, $H \approx 17 \times 10^{-3}$ m/s · año luz, y R es la distancia desde la Tierra a la galaxia.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. Nombre las cuatro interacciones fundamentales y la partícula de campo que media cada una.
2. **O** Cuando un electrón y un positrón se encuentran con baja rapidez en el espacio vacío, se aniquilan mutuamente para producir dos rayos gamma de 0.511 MeV. ¿Qué ley se violaría si producen un rayo gamma con una energía de 1.02 MeV? a) conservación de energía, b) conservación de cantidad de movimiento, c) conservación de carga, d) conservación de número de bariones, e) conservación de número de lepton electrón, f) ninguna de estas respuestas.
3. ¿Cuáles son las diferencias entre hadrones y leptones?
4. Describa las propiedades de los bariones y de los mesones, así como las diferencias importantes entre ellos.
5. Un muón aislado estacionario decae dentro de un electrón, un electrón antineutrino y un muón neutrino. ¿La energía cinética total de estas tres partículas es a) cero, b) pequeña, c) muy grande comparada a su energía de reposo, o bien d) es cualquiera de estas posibles opciones?
6. **O** La partícula Ω^- es un barión con espín $\frac{3}{2}$. La partícula Ω^- tiene a) tres estados posibles de espín en un campo magnético, b) cuatro estados posibles de espín, c) tres veces la carga de una partícula de espín $\frac{1}{2}$, d) tres veces la masa de una partícula de espín $\frac{1}{2}$, o e) ninguna de estas opciones.
7. Los kaones decaen todos a estados finales que no contienen protones ni neutrones. ¿Cuál es el número bariónico de los kaones?
8. La partícula Ξ^0 decae por interacción débil, de acuerdo con el modo de decaimiento $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. ¿Esperaría que este decaimiento sea rápido o lento? Explique.
9. **O** ¿Qué interacciones afectan a los protones en un núcleo atómico? Elija todas las respuestas correctas. a) La interacción nuclear, b) la interacción débil, c) la interacción electromagnética, d) la interacción gravitacional.
10. Haga un análisis de las siguientes leyes de conservación: energía, cantidad de movimiento lineal, cantidad de movimiento angular, carga eléctrica, número bariónico, número leptónico y extrañeza. ¿Se basan todas estas leyes en propiedades fundamentales de la naturaleza? Explique.
11. Un antibarión interactúa con un mesón. ¿Puede producirse un barión con este tipo de interacción? Explique.
12. Describa las características esenciales del modelo estándar de la física de las partículas.
13. ¿Cuántos quarks hay en a) un barión, b) un antibarión, c) un mesón y d) un antimesón? ¿Cómo se explica el hecho de que los bariones tienen espines semienteros, en tanto que los mesones tienen espines de 0 o 1? (*Nota:* Los quarks tienen espín de $\frac{1}{2}$.)
14. En la teoría de la cromodinámica cuántica, los quarks vienen en tres colores. ¿Cómo se justificaría la afirmación de que "todos los bariones y mesones son incoloros"?
15. Los bosones W y Z fueron producidos por primera vez en el CERN, en 1983, al hacer que se encontraran con alta energía un haz de protones y un haz de antiprotones. ¿Por qué es éste un descubrimiento importante?
16. **O** En un experimento, dos bolas de arcilla de la misma masa viajan con la misma rapidez v una hacia la otra. Chocan de manera frontal y llegan al reposo. En un segundo experimento, se usan de nuevo dos bolas de arcilla de la misma masa. Una bola cuelga en reposo, suspendida del techo mediante un hilo. La segunda bola se dispara hacia la primera con rapidez v, choca, se pega a la primera bola y continúa moviéndose hacia adelante. ¿La energía cinética que se transforma en energía interna en el primer experimento es a) un cuarto de la del segundo experimento, b) la mitad de la del segundo experimento, c) la misma que la del segundo experimento, d) el doble de la del segundo experimento, e) cuatro veces la del segundo experimento, o f) ninguna de estas opciones?
17. ¿Cómo determinó en 1928 Edwin Hubble que el Universo se encuentra en expansión?
18. **O** Coloque los siguientes eventos en la secuencia correcta, de lo más temprano en la historia del Universo a lo más reciente. a) Se forman átomos neutro. b) Protones y neutrones ya no se aniquilan tan rápido que como se forman. c) El Universo es una sopa quark-gluón. d) El Universo es como el núcleo de una estrella normal actual, que forma helio mediante fusión nuclear. e) El Universo es como la superficie de una estrella caliente actual, que consiste en un plasma de átomos ionizados. f) Se forman moléculas poliatómicas. g) Se forman materiales sólidos.
19. Los átomos neutros no existieron sino hasta cientos de miles de años después del Big Bang. ¿Por qué?
20. **O** Defina la densidad promedio del sistema solar, ρ_{SS}, como la masa total del Sol, planetas, satélites, anillos, asteroides, extremos congelados y cometas, dividida por el volumen de una esfera alrededor del Sol lo suficientemente grande como para contener todos estos objetos. La esfera se extiende aproximadamente a la mitad de la estrella más cercana, con un radio cercano a 2×10^{16} m, aproximadamente dos años luz. ¿Cómo se compara esta densidad promedio del sistema solar con la densidad crítica ρ_c requerida para que el Universo detenga su expansión de la ley de Hubble? a) ρ_{SS} es mucho mayor que ρ_c. b) ρ_{SS} es aproximada o precisamente igual a ρ_c. c) ρ_{SS} es mucho menor que ρ_c. d) Es imposible de determinar.
21. **Pregunta de repaso.** En tanto que una niña y su abuela muelen maíz, ésta instruye a la niña sobre cosas más importantes. Un niño ahuyenta a los cuervos del maíz maduro en tanto que su abuelo, sentado a la sombra, le explica el Universo y el lugar que ocupa dentro de éste. Lo que los niños no entiendan este año, lo entenderán mejor el próximo. Ahora es preciso que usted asuma el papel de los adultos. Enuncie las verdades más generales, fundamentales y universales que conoce. Si necesita repetir las ideas de alguna otra persona, obtenga la mejor versión de estas ideas, y cite sus fuentes. Si hay algo que no comprenda, hágase el propósito de comprenderlo mejor en el transcurso del año siguiente.

Problemas

Sección 46.1 Fuerzas fundamentales en la naturaleza

Sección 46.2 Positrones y otras antipartículas

1. Un fotón produce un par protón-antiprotón, siguiendo la reacción $\gamma \rightarrow p + \bar{p}$. ¿Cuál es la frecuencia mínima posible del fotón? ¿Cuál es su longitud de onda?

2. En algún momento en su vida, puede encontrarse en un hospital que tenga exploración por TEP, o tomografía por emisión de positrones. En el procedimiento, un elemento radiactivo que experimenta decaimiento e^+ se introduce en su cuerpo. El equipo detecta los rayos gamma que resultan de la aniquilación de pares cuando el positrón emitido encuentra un electrón en el tejido de su cuerpo. Suponga que usted recibe una inyección de glucosa que contiene del orden de 10^{10} átomos de ^{14}O, con vida media de 70.6 s. Suponga que el oxígeno que permanece después de 5 min se distribuye uniformemente a través de 2 L de sangre. ¿En tal caso cuál es el orden de magnitud de la actividad del átomo de oxígeno en 1 cm^3 de la sangre?

3. *Sus dos centavos valen.* Modele una moneda con 3.10 g de cobre. Considere una antimoneda acuñada con 3.10 g de antiátomos de cobre, cada uno con 29 positrones en órbita alrededor de un núcleo que comprende 29 antiprotones y 34 o 36 antineutrones. a) Encuentre la energía liberada si las dos monedas chocan. b) Encuentre el valor de esta energía al precio unitario de $0.14/kWh, una tasa de comercialización representativa para la energía de la compañía eléctrica.

4. Dos fotones son producidos cuando un protón y un antiprotón se aniquilan uno al otro. Dentro del marco de referencia en que el centro de la masa del sistema protón-antiprotón permanece estacionario, ¿cuál es la frecuencia mínima y la longitud de onda correspondiente de cada fotón?

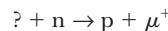
5. Un fotón con energía $E_\gamma = 2.09$ GeV crea un par protón-antiprotón, en que el protón tiene una energía cinética de 95.0 MeV. ¿Cuál es la energía cinética del antiprotón? ($m_p c^2 = 938.3$ MeV).

Sección 46.3 Mesones y el principio de la física de las partículas

6 En ocasiones, muones de alta energía chocan con electrones y producen dos neutrinos, según la reacción $\mu^+ + e^- \rightarrow 2\nu$. ¿Qué clase de neutrinos son éstos?

7. Uno de los conciliadores de la interacción débil es el bosón Z^0, que tiene una masa de 91 GeV/c^2. Use esta información para encontrar el orden de magnitud del alcance de la interacción débil.

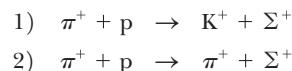
8. ● a) Pruebe que el intercambio de una partícula virtual de masa m se puede asociar con una fuerza con un alcance determinado por

$$d = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{4\pi mc^2} = \frac{98.7 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{mc^2}$$

b) Establezca el patrón de dependencia del intervalo en la masa. c) De las interacciones mencionadas en la tabla 46.1, ¿cuáles se asocian con partículas de campo, de acuerdo con esta regla, y cuáles no? Explique su respuesta. d) ¿Cuál es el alcance de la fuerza que se puede producir por el intercambio virtual de un protón?

9. Un pión neutro que se encuentra en reposo decae en dos fotones, según la siguiente reacción: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ Encuentre la energía, cantidad de movimiento y frecuencia de cada fotón.

10. Cuando un protón o pión de alta energía que se traslada a una rapidez cercana a la de la luz choca con un núcleo, recorre una distancia promedio de 3×10^{-15} m antes de interactuar. Con esta información, encuentre el orden de magnitud del intervalo de tiempo necesario para que ocurra la interacción fuerte.

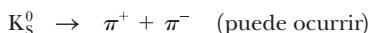
11. ● Un neutrón beta libre decae creando un protón, un electrón y un antineutrino, según la reacción $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$. **¿Qué pasaría si?** Imagine que un neutrón libre decae creando un protón y un electrón, según la siguiente reacción: $n \rightarrow p + e^-$ y suponga que el neutrón inicialmente se encuentra en reposo en el laboratorio. a) Determine la energía liberada en esta reacción. b) Determine las magnitudes de velocidad del protón y el electrón después de la reacción. Durante la reacción la energía y la cantidad de movimiento se conservan. c) ¿Alguna de estas partículas se mueve a una rapidez relativista? Explique.

Sección 46.4 Clasificación de partículas

12. Identifique la partícula desconocida del lado izquierdo de la siguiente reacción:

$$? + n \rightarrow p + \mu^+$$

Sección 46.5 Leyes de conservación

13. Cada una de las siguientes reacciones está prohibida. Determine la ley de conservación que se viola en cada una.

a) $p + \bar{p} \rightarrow \mu^+ + e^-$
b) $\pi^- + p \rightarrow p + \pi^+$
c) $p + p \rightarrow p + \pi^+$
d) $p + p \rightarrow p + p + n$
e) $\gamma + p \rightarrow n + \pi^0$

14. ● a) Demuestre que el número bariónico y la carga se conservan en las siguientes reacciones de un pión con un protón.

$$1) \quad \pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$$
$$2) \quad \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^+$$

b) La primera reacción ocurre, pero la segunda nunca ocurre. Explique por qué.

15. Las siguientes reacciones o decaimientos involucran uno o más neutrinos. En cada caso, agregue el neutrino (ν_e, ν_μ o ν_τ) o antineutrino faltante.

a) $\pi^- \rightarrow \mu^- + ?$ b) $K^+ \rightarrow \mu^+ + ?$
c) $? + p \rightarrow n + e^+$ d) $? + n \rightarrow p + e^-$
e) $? + n \rightarrow p + \mu^-$ f) $\mu^- \rightarrow e^- + ? + ?$

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

16. La primera de las siguientes dos reacciones puede ocurrir, pero no la segunda. Explique.

$K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (puede ocurrir)

$\Lambda^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (no puede ocurrir)

17. Determine cuál de las siguientes reacciones puede ocurrir. En aquellas que no pueden ocurrir, determine cuál o cuáles son la ley o las leyes de conservación que se violaron.

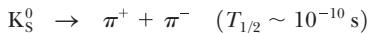
a) $p \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ b) $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$
c) $p + p \rightarrow p + \pi^+$ d) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
e) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ f) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + n$

18. Una partícula K_S^0 en reposo decae a un π^+ y un π^-. ¿Cuál será la rapidez de cada uno de los piones? La masa del K_S^0 es de 497.7 MeV/c^2, y la masa de cada π es de 139.6 MeV/c^2.

19. a) Demuestre que la reacción de decaimiento de un protón $p \rightarrow e^+ + \gamma$ no puede ocurrir porque viola la conservación del número bariónico. b) **¿Qué pasaría si?** Imagine que esta reacción sí ocurre y que el protón se encuentra en reposo de inicio. Determine la energía y la cantidad de movimiento del positrón y del fotón después de la reacción. *Sugerencia:* Recuerde que la energía y la cantidad de movimiento deben conservarse durante la reacción. c) Determine la rapidez del positrón después de la reacción.

20. Determine el tipo de neutrino y antineutrino involucrados en los siguientes procesos:

a) $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + ?$ b) $? + p \rightarrow \mu^- + p + \pi^+$
c) $\Lambda^0 \rightarrow p + \mu^- + ?$ d) $\tau^+ \rightarrow \mu^+ + ? + ?$

Sección 46.6 Partículas extrañas y extrañeza

21. Determine si la extrañeza se conserva en los siguientes decaimientos y reacciones.

a) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ b) $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$
c) $\bar{p} + p \rightarrow \bar{\Lambda}^0 + \Lambda^0$ d) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$
e) $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$ f) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^-$

22. ● El mesón neutro ρ^0 decae por interacción fuerte a dos piones:

$$\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (T_{1/2} \sim 10^{-23}\text{ s})$$

El kaón neutro también decae a dos piones:

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (T_{1/2} \sim 10^{-10}\text{ s})$$

23. En cada uno de los siguientes decaimientos no permitidos, diga cuál es la ley de conservación que se viola:

a) $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ b) $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$
c) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^0$ d) $p \rightarrow e^+ + \pi^0$
e) $\Xi^0 \rightarrow n + \pi^0$

24. ¿Cuál de los procesos siguientes están permitidos con interacción fuerte, interacción electromagnética, interacción débil o sin interacción alguna?

a) $\pi^- + p \rightarrow 2\eta$ b) $K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$
c) $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$ d) $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$
e) $\eta \rightarrow 2\gamma$

25. Identifique las cantidades que se conservan en los siguientes procesos:

a) $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \mu^- + \nu_\mu$ b) $K_S^0 \rightarrow 2\pi^0$
c) $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + n$ d) $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$
e) $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ f) $\bar{p} + n \rightarrow \bar{\Lambda}^0 + \Sigma^-$

26. Agregue la partícula que falta. Suponga que a) ocurre mediante interacción fuerte y b) y c) involucran una interacción débil.

a) $K^+ + p \rightarrow ? + p$ b) $\Omega^- \rightarrow ? + \pi^-$
c) $K^+ \rightarrow ? + \mu^+ + \nu_\mu$

27. Si un mesón K_S^0 en reposo decae en 0.900×10^{-10} s, ¿qué distancia recorrerá un mesón K_S^0 si se mueve a $0.960c$?

28. El decaimiento de la partícula $\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + n$ es observado dentro de una cámara de burbuja. La figura P46.28 representa las trayectorias curvas de las partículas Σ^+ y π^+, y la trayectoria invisible del neutrón, en presencia de un campo magnético uniforme de 1.15 T dirigido hacia afuera de la página. Los radios medidos de curvatura son 1.99 m para la partícula Σ^+ y 0.580 m para la partícula π^+. a) Encuentre la cantidad de movimiento de las partículas Σ^+ y π^+, en unidades MeV/c. b) El ángulo entre la cantidad de movimiento de las partículas Σ^+ y π^+ en el momento del decaimiento es de 64.5°. Encuentre la cantidad de movimiento del neutrón. c) Calcule la energía total de la partícula π^+ y la del neutrón a partir de sus masas conocidas ($m_\pi = 139.6$ MeV/c^2, $m_n = 939.6$ MeV/c^2) y la relación entre energía y la cantidad de movimiento relativista. ¿Cuál es la energía total de la partícula Σ^+? d) Calcule la masa y la rapidez de la partícula Σ^+.

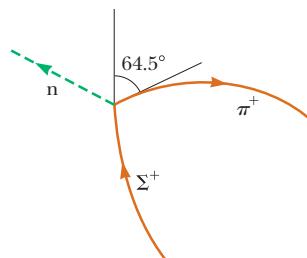



Figura P46.28

29. Una partícula de masa m_1 es disparada hacia una partícula estacionaria, con masa m_2, y ocurre una reacción en la que se crean nuevas partículas de la energía cinética incidente. Tomadas en conjunto, las partículas producto tienen una masa total m_3. La energía cinética mínima que debe tener la partícula que bombardea para poder inducir esta reacción se conoce como energía de umbral. A este nivel de energía, la energía cinética de los productos está en un nivel mínimo, por lo que la fracción de la energía cinética incidente que está disponible para crear nuevas partículas está en un nivel máximo. Esto ocurre cuando todas las partículas producto tienen la misma velocidad, de manera que las partículas no tienen energía cinética por movimiento unas respecto a otras. a) Con ayuda de la conservación de la energía relativista y la cantidad de movimiento, así como la relación energía-cantidad de movimiento relativista, demuestre que la energía de umbral está dada por

$$K_{\min} = \frac{[m_3{}^2 - (m_1 + m_2)^2]c^2}{2m_2}$$

Calcule la energía de umbral para las reacciones siguientes:
b) $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ (Uno de los protones iniciales se encuentra en reposo. Se producen antiprotones.)
c) $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$ (El protón se encuentra en reposo. Se producen partículas extrañas.)
d) $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$ (Uno de los protones iniciales se encuentran en reposo. Se producen piones.)
e) $p + \bar{p} \rightarrow Z^0$. (Una de las partículas iniciales se encuentra en reposo. Se producen partículas Z^0, con una masa de 91.2 GeV/c^2.)

Sección 46.7 Descubrimiento de patrones en las partículas

Sección 46.8 Quarks

Sección 46.9 Quarks multicolor

Sección 46.10 El modelo estándar

Nota: El problema 64 en el capítulo 39 puede asignarse a la sección 46.10.

30. a) Encuentre el número de electrones y el número de cada especie de quark en 1 litro de agua. b) Calcule el orden de magnitud de la cantidad de cada clase de partícula fundamental de la materia en su cuerpo. Enuncie sus hipótesis y las cantidades que utilice como datos.

31. La composición en quarks del protón es uud, y la del neutrón es udd. Demuestre en ambos casos que la carga, el número bariónico y la extrañeza de la partícula son iguales, respectivamente, a las sumas de estos números para los constituyentes del quark.

32. **¿Qué pasaría si?** Imagine que pudieran ignorarse las energías de enlace. Encuentre las masas de los quarks u y d a partir de las masas del protón y el neutrón.

33. Las composiciones de los quarks de las partículas K^0 y Λ^0 son $\bar{s}d$ y uds, respectivamente. Demuestre que la carga, el número bariónico y la extrañeza de estas partículas son iguales, respectivamente, a las sumas de estos números para los constituyentes del quark.

34. La reacción $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$ ocurre con grandes probabilidades, en tanto que la reacción $\pi^- + p \rightarrow K^0 + n$ no ocurre nunca. Analice estas reacciones a nivel de quark. Demuestre que la primera reacción conserva la cantidad total de cada tipo de quark, en tanto que la segunda no.

35. Analice cada reacción en función de los quarks constitutivos:

a) $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$
b) $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$
c) $K^- + p \rightarrow K^+ + K^0 + \Omega^-$
d) $p + p \rightarrow K^0 + p + \pi^+ + ?$

En la última reacción, identifique la partícula misteriosa.

36. Una partícula Σ^0 que se mueve a través de la materia impacta contra un protón; después surgen una partícula Σ^+ y un rayo gamma, así como una tercera partícula. Utilice el modelo de quark de cada uno para determinar la identidad de la tercera partícula.

37. Identifique las partículas que corresponden a las combinaciones quark a) suu, b) $\bar{u}$d, c) $\bar{s}$d y d) ssd.

38. ¿Cuál es la carga eléctrica de los bariones con composiciones quark a) $\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$ y b) $u\,\bar{d}\,\bar{d}$? ¿Cómo se llaman estos bariones?

Sección 46.11 La conexión cósmica

Note: El problema 17 en el capítulo 39 puede asignarse a esta sección.

39. Imagine que toda separación se expande con una rapidez descrita por la constante de Hubble de 17.0×10^{-3} m/s · año luz. a) ¿En que proporción la altura de un jugador de basquetbol de 1.85 m aumentaría? b) ¿En qué proporción la distancia entre la Tierra y la Luna se incrementaría? En realidad la gravitación y otras fuerzas que impiden la expansión tienen lugar en la ley de Hubble excepto en sistemas más extensos que una agrupación de galaxias.

40. **Problema de repaso.** Vuelva a la sección 39.4 y demuestre que el corrimiento Doppler de la longitud de onda de las ondas electromagnéticas se describe mediante

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

en donde λ' es la longitud de onda medida por un observador que se mueve a una rapidez v alejándose de una fuente que emite ondas con longitud λ.

41. Un quásar distante se aleja de la Tierra con tal rapidez que la línea azul 434 nm H_γ del hidrógeno se observa en 510 nm, en la parte verde del espectro (figura P46.41). a) ¿Qué tan rápido se aleja el quásar? Puede consultar los resultados del problema 40. b) Edwin Hubble descubrió que todos los objetos fuera del grupo local de galaxias se están alejando de nosotros, con velocidades proporcionales a sus distancias. La ley de Hubble se expresa como $v = HR$, en donde la constante de Hubble tiene el valor aproximado de $H = 17 \times 10^{-3}$ m/s · años luz. Determine la distancia a la que se encuentra este quásar de la Tierra.

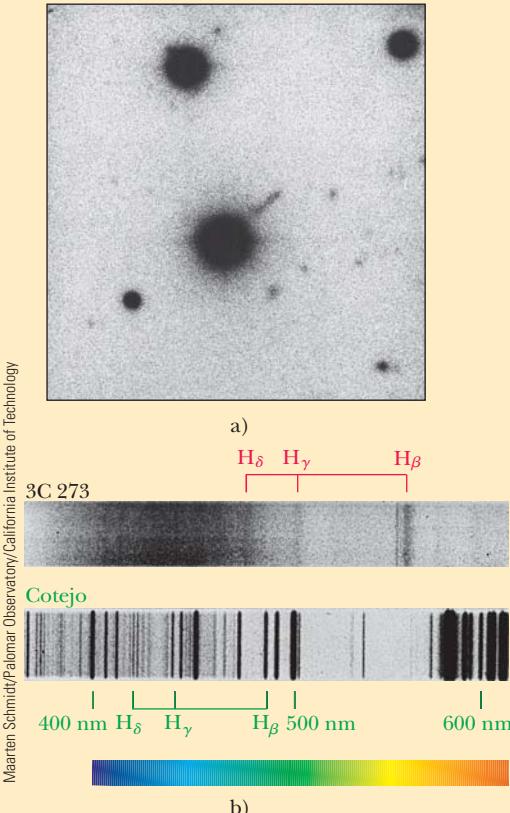



Figura P46.41 a) Imagen del cuásar 3C273. b) Espectro del cuásar arriba de un espectro de comparación emitido por átomos de Helio e hidrógeno estacionarios. Ambas partes de la figura están impresas en negativos fotográficos en blanco y negro para revelar detalles.

42. Las diversas líneas espectrales que se observan en la luz de un quásar distante tienen longitudes de onda λ_n' más largas que las longitudes de onda λ_n obtenidas de la luz de una fuente estacionaria. En este caso, n es un índice que toma diferentes valores para diferentes líneas espectrales. El cambio fraccionario hacia el rojo en la longitud de onda es igual para todas las

líneas espectrales. Es decir, el parámetro de compresión hacia el rojo Z, definido por

$$Z = \frac{\lambda'_n - \lambda_n}{\lambda_n}$$

común a todas las líneas espectrales de un objeto. En función de Z, determine a) la rapidez a la que se aleja el quásar, y b) la distancia de la Tierra a este quásar. Utilice los resultados del problema 40 así como la ley de Hubble.

43. Con ayuda de la ley de Hubble, encuentre la longitud de onda de la línea del sodio de 590 nm emitida por galaxias a a) 2.00×10^6 años luz de la Tierra; b) 2.00×10^8 años luz de distancia, y c) 2.00×10^9 años luz de distancia. Puede usar los resultados del problema 40.

44. ● La sección visible del Universo es una esfera centrada en el puente de su nariz, con radio de 13.7 mil millones de años luz. a) Explique por qué el Universo visible se está haciendo más grande, con su radio creciendo un año luz en cada año. b) Hallar la rapidez con la cual el volumen de la sección visible del Universo está creciendo.

45. ● Considere que la materia oscura existe en todo el espacio con densidad uniforme de 6.00×10^{-28} kg/m^3. a) Halle la cantidad de tal masa oscura dentro de una esfera centrada ene en el Sol teniendo la órbita de la Tierra como su ecuador. b) Explique si el campo gravitacional de esta materia oscura tendría un efecto mesurable en la revolución de la Tierra.

46. **Problema de repaso.** La radiación cósmica de fondo es una radiación de cuerpo negro de una fuente a una temperatura de 2.73 K. a) Utilice la ley de Wien para determinar la longitud de onda a la cual esta radiación tiene una intensidad máxima. b) ¿En qué parte del espectro electromagnético se encuentra el pico de la distribución?

47. **Problema de repaso.** Con ayuda de la ley de Stefan, encuentre la intensidad de la radiación cósmica de fondo emitida por la bola de fuego del Big Bang, a una temperatura de 2.73 K.

48. Es principalmente por culpa de su compañero de habitación. Astrónomos curiosos han descubierto suficiente basura y desorden en la puerta de su dormitorio para completar la masa necesaria para cerrar el Universo. Después de observar su piso, armario, cama y los archivos de la computadora, los científicos extrapolan sus resultados en otras galaxias y calculan que la densidad promedio del Universo observable es de 1.20 ρ_c. ¿Cuántas veces mayor será el Universo antes de comenzar a colapsarse? Esto es, ¿en qué factor aumentará en el futuro la distancia entre galaxias remotas?

49. En sus principios el Universo estaba lleno de fotones de rayo gamma con energía $\sim k_B T$ y a una temperatura tan elevada que los protones y antiprotones se crearon mediante el proceso $\gamma \rightarrow p + \bar{p}$ con tanta rapidez que se aniquilaban unos a otros. Conforme el Universo se enfrió por expansión adiabática, su temperatura decayó por debajo de un cierto nivel, y la producción de pares de protones se hizo menos presente. En ese tiempo existían poco más protones que antiprotones, y virtualmente todos los protones del Universo actual existen desde entonces. a) Estime el orden de magnitud de la temperatura del Universo cuando los protones se condensaron. b) Estime el orden de magnitud de la temperatura del Universo cuando los electrones se condensaron.

50. Si la densidad promedio del Universo es igual a la densidad crítica, la expansión del Universo, como la describe la ley de Hubble, sucede a velocidades que son casi constantes a través del tiempo. a) Demuestre que en este caso la antigüedad del Universo se obtiene mediante el inverso de la constante de Hubble. b) Calcule $1/H$ y exprésela en años.

51. Suponga que la densidad promedio del Universo es igual a la densidad crítica. a) Demuestre que la antigüedad del Universo está dada mediante $2/3H$. b) Calcule $2/3H$ y expréselo en años.

52. La ley de Hubble puede expresarse en forma vectorial, como $\vec{\mathbf{v}} = H\vec{\mathbf{R}}$: Fuera del grupo local de galaxias, todos los objetos se están alejando de nosotros con velocidades proporcionales a la distancia a la que se encuentran de nosotros. Dicho así, suena como si nuestra ubicación en el Universo fuera particularmente privilegiada. Demuestre que la ley de Hubble es igualmente verdadera para un observador en cualquier otro lugar del Universo. Siga el procedimiento siguiente. Suponga que nos encontramos en el origen de las coordenadas, que un grupo de galaxias se encuentra en el punto $\vec{\mathbf{R}}_1$ —con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_1 = H\vec{\mathbf{R}}_1$ respecto a nosotros—, y que otro grupo de galaxias tiene un vector de posición $\vec{\mathbf{R}}_2$ y una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_2 = H\vec{\mathbf{R}}_2$. Suponga que las velocidades no son relativistas. Considere el problema desde el punto de vista de un observador ubicado en el primero de estos grupos galácticos. Demuestre que nuestra velocidad respecto a ésta, así como el vector de posición de nuestro grupo galáctico respecto al primero, satisface la ley de Hubble. Demuestre que el desplazamiento y la velocidad del grupo 2 respecto al grupo 1 satisfacen la ley de Hubble.

Sección 46.12 Problemas y perspectivas

53. ● La relatividad general clásica considera la estructura del espacio-tiempo como determinística y bien definida hasta pequeñas distancias arbitrarias. Por otro lado, la relatividad cuántica general prohíbe distancias menores a la distancia de Planck, obtenida mediante $L = (\hbar G/c^3)^{1/2}$. a) Calcule el valor de la distancia de Planck. La limitación cuántica sugiere que después del Big Bang, cuando todo el Universo que observamos hoy en día se encontraba dentro de un punto pequeñísimo, no podía observarse nada hasta que este punto creció más allá de la longitud de Planck. Porque el tamaño del punto creció a la rapidez de la luz, podemos deducir que no fue imposible realizar observación alguna durante el intervalo de tiempo necesario para que la luz recorriera la distancia de Planck. b) Calcule este intervalo de tiempo, conocido como el tiempo T de Planck, y compárelo con la época supercaliente que mencionamos en el texto. c) ¿Sugiere esta información que existe la posibilidad de que nunca sepamos qué ocurrió entre el tiempo $t = 0$ y el tiempo $t = T$? Explique.

Problemas adicionales

54. **Problema de repaso.** Se estima que la supernova Shelton 1987A, ubicada a 170 000 años luz de la Tierra, que ha emitido una ráfaga de neutrinos con una energía de $\sim 10^{46}$ J (figura P46.54). Suponga que la energía promedio del neutrino fuese de 6 MeV y que el cuerpo humano tuviese un área de sección transversal de 5000 cm^2. En un orden de magnitud, ¿cuántos de estos neutrinos atravesarían el cuerpo?

55. La supernova visible a simple vista más reciente fue la supernova Shelton 1987A (figura P46.54). Se encontraba a 170 000 años luz, en nuestra galaxia vecina, la gran Nebulosa de Magallanes. Alrededor de 3 h antes de que su abrillantamiento óptico fuera observado, dos experimentos de detección de neutrinos en operación continua registraron al mismo tiempo los primeros neutrinos provenientes de una fuente distinta al Sol. El experimento Irvine-Michigan-Brookhaven, dentro de una mina de sal en Ohio, registró 8 neutrinos en un periodo de 6 segundos, y el experimento Kamiokande II, dentro de una mina de zinc en Japón, registró 11 neutrinos en 13 segundos. (Dado que la supernova se encuentra muy al sur en el cielo, estos neutrinos fueron detectados desde abajo. Pasaron a través de la Tierra antes

Figura P46.54 (Problemas 54 y 55) La estrella gigante Sanduleak -69° 202, que aparece en la primera figura, se convirtió en la supernova Shelton 1987A, que se muestra en la segunda figura.

de ser absorbidos por casualidad por núcleos en el detector.) Las energías de los neutrinos tenían magnitudes de entre 8 MeV y 40 MeV. Si los neutrinos no tienen masa, entonces los neutrinos de todos los rangos de energía deberían viajar juntos a la rapidez de la luz, los datos coinciden con esta posibilidad. Los tiempos de llegada podrían indicar dispersión, simplemente porque los neutrinos fueron creados en diferentes momentos conforme el núcleo de la estrella se colapsaba, convirtiéndose en una estrella de neutrones. Si los neutrinos tienen una masa distinta de cero, los de menor energía deberían moverse comparativamente más despacio. Los datos indican que un neutrino de 10 MeV requeriría, a lo más, 10 segundos más de lo que tardaría un fotón en viajar desde la supernova hasta nosotros. Encuentre el límite superior que esta observación impone a la masa de un neutrino. (Otras evidencias establecen un límite más pequeño.)

56. Mencione por lo menos una ley de conservación que impida las siguientes reacciones: a) $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^0$, b) $\mu^- \rightarrow \pi^- + \nu_e$, c) $p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$.

57. El flujo de energía transportada por los neutrinos del Sol se estima que es del orden de 0.4 W/m^2 en la superficie de la Tierra. Estime la pérdida fraccionaria de masa del Sol después de 10^9 años debida a la emisión de neutrinos. (La masa del Sol es de 2×10^{30} kg. La distancia entre la Tierra y el Sol es de 1.5×10^{11} m.)

58. Dos protones se aproximan uno frente al otro, cada uno con 70.4 MeV de energía cinética, y entran en una reacción de la cual emergen un protón y un pión positivo en estado de reposo. ¿Cuál es la tercera partícula, obviamente carente de carga y por tanto difícil de detectar, que se crea con esta reacción?

59. Se ha sugerido un motor cohete para viajes espaciales con propulsión por medio de fotones y aniquilación de materia–antimateria. Suponga que el combustible para una combustión de corta duración consiste de N protones y N antiprotones, cada uno con una masa m. a) Suponga que todo el combustible es aniquilado para producir fotones. Cuando éstos son expulsados del cohete, ¿cuál es la cantidad de movimiento que se le imparte? b) **¿Qué pasaría si?** Si la mitad de los protones y antiprotones se aniquilaran entre sí y la energía liberada fuera utilizada para expulsar las partículas restantes, ¿cuál sería la cantidad de movimiento impartida al cohete? c) ¿Cuál de los métodos resulta en un cambio mayor en la rapidez del cohete?

60. Un fotón de rayos gamma choca contra un electrón estacionario. Determine la energía mínima del rayo gamma necesaria para provocar la siguiente reacción:

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$$

61. Determine la energía cinética del protón y el pión que resultan del decaimiento de un Λ^0 en reposo:

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

62. Dos protones se aproximan uno al otro con velocidades de igual magnitud, en direcciones opuestas. ¿Cuál es la energía cinética mínima que cada uno debe tener para producir un mesón π^+ en reposo en la siguiente reacción?

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+$$

63. Una partícula de Σ^0 en reposo decae de acuerdo con la siguiente reacción: $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$. Encuentre la energía del rayo gamma.

64. Una partícula inestable, en reposo inicial, decae a un protón (energía en reposo de 938.3 MeV) y un pión negativo (energía en reposo de 139.6 MeV). Existe un campo magnético de 0.250 T perpendicular a las velocidades de las partículas creadas. El radio de curvatura de cada trayectoria es de 1.33 m. ¿Cuál es la masa de la partícula inestable original?

65. Un mesón π en reposo decae según la reacción $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$. ¿Cuál es la energía que se lleva el neutrino? (Suponga que el neutrino no tiene masa y se mueve a la rapidez de la luz. Suponga que $m_\pi c^2 = 139.6$ MeV y que $m_\mu c^2 = 105.7$ MeV.)

66. **Problema de repaso.** Utilice la función de distribución de Boltzmann e^{-E/k_BT} para calcular la temperatura a la cual 1.00% de una población de fotones tendrá una energía superior a 1.00 eV. La energía necesaria para excitar un átomo es del orden de 1 eV. Por lo tanto, conforme la temperatura del Universo se redujo por debajo de la temperatura que se calculó, pudieron formarse átomos neutros a partir del plasma y el Universo se volvió transparente. La radiación cósmica de fondo representa nuestra vista, muy desplazada hacia el rojo, de la bola de fuego opaca del Big Bang, como era en esos tiempos y temperaturas. La bola de fuego nos rodea; nosotros somos las brasas.

67. ¿Qué procesos se describen en los diagramas de Feynman de la figura P46.67? ¿Cuál es la partícula que se intercambia en cada proceso?

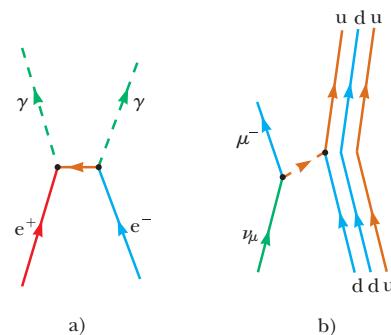



Figura P46.67

68. Identifique los conciliadores para las dos interacciones descritas por los diagramas de Feynman y que aparecen en la figura P46.68.

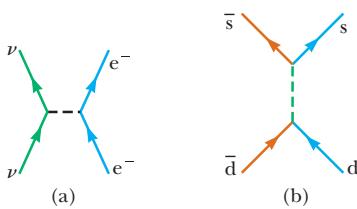
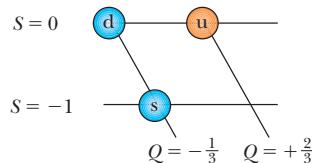



Figura P46.68

69. Los rayos cósmicos con mayor energía son principalmente protones acelerados por fuentes desconocidas. Su espectro muestra un corte a un nivel de energía de alrededor de 10^{20} eV. Por encima de este nivel de energía, un protón interactuará con un fotón de la radiación cósmica de microondas de fondo para producir mesones, por ejemplo, según la reacción $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$. Demuestre lo anterior siguiendo estas etapas: a) Encuentre la energía mínima para los fotones necesaria para producir esta reacción, en el marco de referencia donde el momentum total del sistema fotón–protón es igual a cero. Esta reacción fue observada experimentalmente en los años cincuenta, con fotones con una energía de algunos cientos de MeV. b) Utilice la ley de desplazamiento de Wien para calcular la longitud de onda de un fotón en el pico del espectro de cuerpo negro de la radiación por microondas de fondo primaria, a una temperatura de 2.73 K. c) Encuentre la energía de este fotón. d) Considere la reacción del inciso a) dentro de un marco de referencia en movimiento de manera que el fotón sea el mismo que el del inciso c). Calcule la energía del protón dentro de este marco de referencia, que representa el marco de referencia de la Tierra.

Respuestas a las preguntas rápidas

46.1 a) La regla de la mano derecha para la partícula positiva le dice que ésta es la dirección que conduce a una fuerza dirigida hacia el centro de la curvatura de la trayectoria.

46.2 **i),** c), d) Hay un barión y un neutrón en el lado izquierdo de la reacción, pero no hay ningún barión en el lado derecho. Por lo tanto, el número bariónico no se conserva. El neutrón tiene un espín de $\frac{1}{2}$. En el lado derecho de la reacción, cada pión tiene un espín de número entero, y la combinación de los dos muones también debe tener un espín en número entero. Por lo tanto, el espín total de las partículas en el lado derecho de la reacción debe ser un número entero, y la cantidad de movimiento angular no se conserva. **ii),** a) La suma de las masas del protón y del pión es mayor que la masa del neutrón, por lo que se viola la ley de la conservación de energía.

46.3 b), e), f) El pión del lado izquierdo tiene un espín de número entero, en tanto que los tres leptones con espín $\frac{1}{2}$ del lado derecho resultan con un espín total semientero. Por lo tanto, el momentum angular no se conserva. El número leptónico del electrón del lado izquierdo es cero, y -1 en el lado derecho. No hay ningún muón en el lado izquierdo, pero en el lado derecho hay un muón con su neutrino (ambos con $L_\mu = +1$). Por lo tanto, el número leptónico del muón no se conserva.

46.4 b), e) Del lado izquierdo hay una partícula con espín de $\frac{1}{2}$ y del lado derecho dos, por lo que no se conserva la cantidad de movimiento angular. No existen leptones del lado izquierdo, y hay un electrón del lado derecho, por lo que tampoco se conserva el número leptónico del electrón.

46.5 El diagrama se vería así:

46.6 Falso. Porque las cargas de los quarks son $+2e/3$ y $-e/3$, la carga máxima posible de una combinación de un quark y de un antiquark es de $\pm\, e$.

El significado del éxito

Merecer el respeto de la gente inteligente y el afecto de los niños;
apreciar la belleza de la naturaleza y de todo lo que nos rodea;
buscar y fomentar las mejores cualidades en los demás;
poder dar un regalo a los demás sin esperar nada a cambio, porque es al dar que recibimos;
cumplir una tarea, ya sea salvando un alma perdida, curando a un niño enfermo, escribiendo un libro o arriesgando la vida por un amigo;
haber celebrado y reído con gran alegría y entusiasmo, y haber cantado;
tener esperanza aun en tiempos de desesperación, porque mientras tengas esperanza, tienes vida;
amar y ser amado;
comprender y ser comprendido;
saber que por lo menos una vida ha sido más fácil porque tú has estado ahí;
éste es el significado del éxito.

—Ralph Waldo Emerson
Modificado por Ray Serway, diciembre de 1989.

TABLA A.1

Factores de conversión

Longitud

	m	cm	km	pulg	pie	mi
1 metro	1	10^2	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0.393 7	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 kilómetro	10^3	10^5	1	3.937×10^4	3.281×10^3	0.621 4
1 pulgada	2.540×10^{-2}	2.540	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie	0.304 8	30.48	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla	1 609	1.609×10^5	1.609	6.336×10^4	5 280	1

Masa

	kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	10^3	6.852×10^{-2}	6.024×10^{26}
1 gramo	10^{-3}	1	6.852×10^{-5}	6.024×10^{23}
1 slug	14.59	1.459×10^4	1	8.789×10^{27}
1 unidad de masa atómica	$1\ 660 \times 10^{-27}$	1.660×10^{-24}	1.137×10^{-28}	1

Nota: 1 tonelada métrica = 1 000 kg.

Tiempo

	s	min	h	día	año
1 segundo	1	1.667×10^{-2}	2.778×10^{-4}	1.157×10^{-5}	3.169×10^{-8}
1 minuto	60	1	1.667×10^{-2}	6.994×10^{-4}	1.901×10^{-6}
1 hora	3 600	60	1	4.167×10^{-2}	1.141×10^{-4}
1 día	8.640×10^4	1 440	24	1	2.738×10^{-5}
1 año	3.156×10^7	5.259×10^5	8.766×10^3	365.2	1

Rapidez

	m/s	cm/s	ft/s	mi/h
1 metro por cada segundo	1	10^2	3.281	2.237
1 centímetro por cada segundo	10^{-2}	1	3.281×10^{-2}	2.237×10^{-2}
1 pie por cada segundo	0.304 8	30.48	1	0.681 8
1 milla por cada hora	0.447 0	44.70	1.467	1

Nota: 1 mi/min = 60 mi/h = 88 pie/s.

Fuerza

	N	lb
1 newton	1	0.224 8
1 libra	4.448	1

(*Continúa*)

TABLA A.1

Factores de conversión (*continuación*)

Energía, transferencia de energía

	J	pie · lb	eV
1 joule	1	0.737 6	6.242×10^{18}
1 pie-libra	1.356	1	8.464×10^{18}
1 electrón volt	1.602×10^{-19}	1.182×10^{-19}	1
1 caloría	4.186	3.087	2.613×10^{19}
1 unidad térmica británica	1.055×10^{3}	7.779×10^{2}	6.585×10^{21}
1 kilowatt-hora	3.600×10^{6}	2.655×10^{6}	2.247×10^{25}

	cal	Btu	kWh
1 joule	0.238 9	9.481×10^{-4}	2.778×10^{-7}
1 pie-libra	0.323 9	1.285×10^{-3}	3.766×10^{-7}
1 electrón volt	3.827×10^{-20}	1.519×10^{-22}	4.450×10^{-26}
1 caloría	1	3.968×10^{-3}	1.163×10^{-6}
1 unidad térmica británica	2.520×10^{2}	1	2.930×10^{-4}
1 kilowatt-hora	8.601×10^{5}	3.413×10^{2}	1

Presión

	Pa	atm
1 pascal	1	9.869×10^{-6}
1 atmósfera	1.013×10^{5}	1
1 centímetro de mercurio[a]	1.333×10^{3}	1.316×10^{-2}
1 libra por cada pulgada cuadrada	6.895×10^{3}	6.805×10^{-2}
1 libra por cada pie cuadrado	47.88	4.725×10^{-4}

	cm Hg	lb/pulg^2	lb/pie^2
1 pascal	7.501×10^{-4}	1.450×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 atmósfera	76	14.70	2.116×10^{3}
1 centímetro de mercurio[a]	1	0.194 3	27.85
1 libra por cada pulgada cuadrada	5.171	1	144
1 libra por cada pie al cuadrado	3.591×10^{-2}	6.944×10^{-3}	1

[a]A 0°C y en una posición donde la aceleración de caída libre tiene su valor "estándar", 9.806 65 m/s^2.

TABLA A.2

Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas

Cantidad	Símbolo común	Unidad[a]	Dimensiones[b]	Unidad en términos de unidades del SI base
Aceleración	$\vec{\mathbf{a}}$	m/s^2	L/T^2	m/s^2
Cantidad de sustancia	n	MOL		mol
Ángulo	θ, ϕ	radián (rad)	1	
Aceleración angular	$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$	rad/s^2	T^{-2}	s^{-2}
Frecuencia angular	ω	rad/s	T^{-1}	s^{-1}
Cantidad de movimiento angular	$\vec{\mathbf{L}}$	kg · m^2/s	ML^2/T	kg · m^2/s
Velocidad angular	$\vec{\boldsymbol{\omega}}$	rad/s	T^{-1}	s^{-1}
Área	A	m^2	L^2	m^2
Número atómico	Z			
Capacitancia	C	farad (F)	Q^{2}T^2/ML^2	A^2 · s^4/kg · m^2
Carga	q, Q, e	coulomb (C)	Q	A · s

(*Continúa*)

TABLA A.2

Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas (*continuación*)

Densidad de carga				
Lineal	λ	C/m	Q/L	A · s/m
Superficial	σ	C/m^2	Q/L^2	A · s/m^2
Volumétrica	ρ	C/m^3	Q/L^3	A · s/m^3
Conductividad	σ	1/Ω · m	Q^{2}T/ML^3	A^2 · s^3/kg · m^3
Corriente	I	AMPERE	Q/T	A
Densidad de corriente	J	A/m^2	Q/TL^2	A/m^2
Densidad	ρ	kg/m^3	M/L^3	kg/m^3
Constante dieléctrica	κ			
Momento de dipolo eléctrico	$\vec{\mathbf{p}}$	C · m	QL	A · s · m
Campo eléctrico	$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	ML/QT^2	kg · m/A · s^3
Flujo eléctrico	Φ_E	V · m	ML^3/QT^2	kg · m^3/A · s^3
Fuerza electromotriz	$\mathcal{E}$	volt (V)	ML^2/QT^2	kg · m^2/A · s^3
Energía	E, U, K	joule (J)	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2
Entropía	S	J/K	ML^2/T^{2}K	kg · m^2/s^2 · K
Fuerza	$\vec{\mathbf{F}}$	newton (N)	ML/T^2	kg · m/s^2
Frecuencia	f	hertz (Hz)	T^{-1}	s^{-1}
Calor	Q	joule (J)	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2
Inductancia	L	henry (H)	ML^2/Q^2	kg · m^2/A^2 · s^2
Longitud	ℓ, L	METRO	L	m
Desplazamiento	$\Delta x, \Delta\vec{\mathbf{r}}$			
Distancia	d, h			
Posición	$x, y, z, \vec{\mathbf{r}}$			
Momento de dipolo magnético	$\vec{\boldsymbol{\mu}}$	N · m/T	QL^2/T	A · m^2
Campo magnético	$\vec{\mathbf{B}}$	tesla (T) (= Wb/m^2)	M/QT	kg/A · s^2
Flujo magnético	Φ_B	weber (Wb)	ML^2/QT	kg · m^2/A · s^2
Masa	m, M	KILOGRAMO	M	kg
Calor específico molar	C	J/mol · K		kg · m^2/s^2 · mol · K
Momento de inercia	I	kg · m^2	ML^2	kg · m^2
Cantidad de movimiento	$\vec{\mathbf{p}}$	kg · m/s	ML/T	kg · m/s
Periodo	T	s	T	s
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	N/A^2 (= H/m)	ML/Q^2	kg · m/A^2 · s^2
Permitividad del espacio libre	ϵ_0	C^2/N · m^2 (= F/m)	Q^{2}T^2/ML^3	A^2 · s^4/kg · m^3
Potencial	V	volt (V) (= J/C)	ML^2/QT^2	kg · m^2/A · s^3
Potencia	$\mathcal{P}$	watt (W) (= J/s)	ML^2/T^3	kg · m^2/s^3
Presión	P	pascal (Pa) (= N/m^2)	M/LT^2	kg/m · s^2
Resistencia	R	ohm (Ω) (= V/A)	ML^2/Q^{2}T	kg · m^2/A^2 · s^3
Calor específico	c	J/kg · K	L^2/T^{2}K	m^2/s^2 · K
Rapidez	v	m/s	L/T	m/s
Temperatura	T	KELVIN	K	K
Tiempo	t	SEGUNDO	T	s
Momento de torsión	$\vec{\boldsymbol{\tau}}$	N · m	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2
Velocidad	$\vec{\mathbf{v}}$	m/s	L/T	m/s
Volumen	V	m^3	L^3	m^3
Longitud de onda	λ	m	L	m
Trabajo	W	joule (J) (= N · m)	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2

[a]Las unidades del SI base se dan con letras mayúsculas.

[b]Los símbolos M, L, T, K y Q indican masa, longitud, tiempo, temperatura y carga, respectivamente.

Este apéndice en matemáticas tiene la intención de ser un breve repaso de operaciones y métodos. Desde las primeras etapas de este curso usted debió estar familiarizado con las técnicas algebraicas básicas, la geometría analítica y la trigonometría. Las secciones acerca de cálculo diferencial e integral son más detalladas y se dedican a aquellos estudiantes que tengan dificultad para aplicar los conceptos del cálculo a situaciones físicas.

B.1 Notación científica

Con frecuencia muchas cantidades utilizadas por los científicos tienen valores muy grandes o muy pequeños. La rapidez de la luz, por ejemplo, es de aproximadamente 300 000 000 m/s, y la tinta requerida para hacer el punto sobre una *i* en este libro tiene una masa de aproximadamente 0.000 000 001 kg. Obviamente, es muy complicado leer, escribir y seguir la pista de tales números. Este problema se evita al usar un método que incorpora potencias del número 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

y así sucesivamente. El número de ceros corresponde a la potencia a la que se eleva el diez, llamado **exponente** de diez. Por ejemplo, la rapidez de la luz, 300 000 000 m/s, se puede expresar como 3.00×10^8 m/s.

En este método algunos números representativos menores que la unidad son los siguientes:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,1$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,01$$

En estos casos, el número de lugares que el punto decimal está a la izquierda del dígito 1 es igual al valor del exponente (negativo). Los números expresados con alguna potencia de diez, multiplicados por otro número entre uno y diez se dice que están en **notación científica**. Por ejemplo, la notación científica para 5 943 000 000 es 5.943×10^9 y para 0.000 083 2 es 8.32×10^{-5}.

Cuando se multiplican números expresados en notación científica, la siguiente regla general es muy útil:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \qquad \textbf{(B.1)}$$

donde *n* y *m* pueden ser *cualquier* número (no necesariamente enteros). Por ejemplo, $10^2 \times 10^5 = 10^7$. La regla también se aplica si uno de los exponentes es negativo: $10^3 \times 10^{-8} = 10^{-5}$.

Cuando se dividen números expresados en notación científica, observe que

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m} \qquad \textbf{(B.2)}$$

Ejercicios

Con ayuda de las reglas anteriores, verifique las respuestas de las siguientes ecuaciones:

1. $86\,400 = 8.64 \times 10^4$
2. $9\,816\,762.5 = 9.816\,762\,5 \times 10^6$
3. $0.000\,000\,039\,8 = 3.98 \times 10^{-8}$
4. $(4.0 \times 10^8)(9.0 \times 10^9) = 3.6 \times 10^{18}$
5. $(3.0 \times 10^7)(6.0 \times 10^{-12}) = 1.8 \times 10^{-4}$
6. $\dfrac{75 \times 10^{-11}}{5.0 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^{-7}$
7. $\dfrac{(3 \times 10^6)(8 \times 10^{-2})}{(2 \times 10^{17})(6 \times 10^5)} = 2 \times 10^{-18}$

B.2 Álgebra

Algunas reglas básicas

Cuando se realizan operaciones algebraicas, se aplican las leyes de la aritmética. Los símbolos como x, y y z por lo general se usan para representar cantidades no especificadas, llamadas **incógnitas**.

Primero, considere la ecuación

$$8x = 32$$

Si quiere resolver para x, divida (o multiplique) cada lado de la ecuación por el mismo factor sin destruir la igualdad. En este caso, si divide ambos lados entre 8, tiene

$$\frac{8x}{8} = \frac{32}{8}$$

$$x = 4$$

A continuación considere la ecuación

$$x + 2 = 8$$

En este tipo de expresión se puede sumar o restar la misma cantidad de cada lado. Si resta 2 de cada lado, obtiene

$$x + 2 - 2 = 8 - 2$$

$$x = 6$$

En general, si $x + a = b$, por tanto $x = b - a$.

Ahora considere la ecuación

$$\frac{x}{5} = 9$$

Si multiplica cada lado por 5, queda x sola en la izquierda y 45 a la derecha:

$$\left(\frac{x}{5}\right)(5) = 9 \times 5$$

$$x = 45$$

En todos los casos, *cualquier operación que realice en el lado izquierdo de la igualdad también la debe realizar en el lado derecho.*

Debe recordar las siguientes reglas para multiplicar, dividir, sumar y restar fracciones, donde a, b, c y d son cuatro números:

	Regla	Ejemplo
Multiplicar	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$
Dividir	$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2/3}{4/5} = \frac{(2)(5)}{(4)(3)} = \frac{10}{12}$
Sumar	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{(2)(5) - (4)(3)}{(3)(5)} = -\frac{2}{15}$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios resuelva para x.

	Respuestas
1. $a = \frac{1}{1 + x}$	$x = \frac{1 - a}{a}$
2. $3x - 5 = 13$	$x = 6$
3. $ax - 5 = bx + 2$	$x = \frac{7}{a - b}$
4. $\frac{5}{2x + 6} = \frac{3}{4x + 8}$	$x = -\frac{11}{7}$

Potencias

Cuando multiplique potencias de una cantidad conocida x, aplique las siguientes reglas:

$$x^n x^m = x^{n+m} \tag{B.3}$$

Por ejemplo, $x^2 x^4 = x^{2+4} = x^6$.

Cuando divida potencias de una cantidad conocida, la regla es

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \tag{B.4}$$

Por ejemplo, $x^8/x^2 = x^{8-2} = x^6$.

Una potencia que es fracción, como $\frac{1}{3}$, corresponde a una raíz del modo siguiente:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \tag{B.5}$$

Por ejemplo, $4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.587\,4$. (Para tales cálculos es útil una calculadora científica.)

Por último, cualquier cantidad x^n elevada a la potencia m es

$$(x^n)^m = x^{nm} \tag{B.6}$$

La tabla B.1 resume las reglas de exponentes.

TABLA B.1

Reglas de exponentes
$x^0 = 1$
$x^1 = x$
$x^n x^m = x^{n+m}$
$x^n/x^m = x^{n-m}$
$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$
$(x^n)^m = x^{nm}$

Ejercicios

Verifique las siguientes ecuaciones:

1. $3^2 \times 3^3 = 243$
2. $x^5 x^{-8} = x^{-3}$
3. $x^{10}/x^{-5} = x^{15}$
4. $5^{1/3} = 1.709\,976$ (Use su calculadora)
5. $60^{1/4} = 2.783\,158$ (Use su calculadora)
6. $(x^4)^3 = x^{12}$

Factorización

Las siguientes son algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación:

$ax + ay + az = a(x + y + z)$ factor común

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ cuadrado perfecto

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ diferencia de cuadrados

Ecuaciones cuadráticas

La forma general de una ecuación cuadrática es

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \textbf{(B.7)}$$

donde x es la cantidad desconocida y a, b y c son factores numéricos conocidos como **coeficientes** de la ecuación. Esta ecuación tiene dos raíces, conocidas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{(B.8)}$$

Si $b^2 \geq 4ac$, las raíces son reales.

EJEMPLO B.1

La ecuación $x^2 + 5x + 4 = 0$ tiene las siguientes raíces que corresponden a los dos signos del término raíz cuadrada:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x_+ = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \qquad x_- = \frac{-5 - 3}{2} = -4$$

donde x_+ se refiere a la raíz correspondiente al signo positivo y x_- se refiere a la raíz que corresponde al signo negativo.

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

		Respuestas	
1.	$x^2 + 2x - 3 = 0$	$x_+ = 1$	$x_- = -3$
2.	$2x^2 - 5x + 2 = 0$	$x_+ = 2$	$x_- = \frac{1}{2}$
3.	$2x^2 - 4x - 9 = 0$	$x_+ = 1 + \sqrt{22}/2$	$x_- = 1 - \sqrt{22}/2$

Figura B.1 Línea recta graficada sobre un sistema coordenado xy. La pendiente de la línea es la proporción de Δy a Δx.

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal tiene la forma general

$$y = mx + b \qquad \textbf{(B.9)}$$

donde m y b son constantes. A esta ecuación se le conoce como lineal porque la gráfica de y en función de x es una línea recta, como se muestra en la figura B.1. La constante b, llamada **ordenada al origen**, representa el valor de y en el que la línea recta interseca el eje y. La constante m es igual a la **pendiente** de la línea recta. Si dos puntos cualesquiera en la línea recta se especifican mediante las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), como en la figura B.1, la pendiente de la línea recta se expresa como

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \textbf{(B.10)}$$

Note que m y b pueden tener valores positivos o negativos. Si $m > 0$, la línea recta tiene una pendiente *positiva*, como en la figura B.1. Si $m < 0$, la línea recta tiene una pendiente *negativa*. En la figura B.1, tanto m como b son positivos. En la figura B.2 se muestran otras tres posibles situaciones.

Figura B.2 La línea café tiene una pendiente positiva y una ordenada al origen negativa. La línea azul tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen positiva. La línea verde tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen negativa.

Ejercicios

1. Dibuje las gráficas de las siguientes líneas rectas: a) $y = 5x + 3$ b) $y = -2x + 4$ c) $y = -3x - 6$.
2. Encuentre las pendientes de las líneas rectas descritas en el ejercicio 1.

Respuestas a) 5, b) -2, c) -3.

3. Encuentre las pendientes de las líneas rectas que pasan por los siguientes conjuntos de puntos: a) $(0, -4)$ y $(4, 2)$, b) $(0, 0)$ y $(2, -5)$ c) $(-5, 2)$ y $(4, -2)$.

Respuestas a) $\frac{3}{2}$, b) $-\frac{5}{2}$, c) $-\frac{4}{9}$.

Resolución de ecuaciones lineales simultáneas

Considere la ecuación $3x + 5y = 15$, que tiene dos incógnitas, x y y. Tal ecuación no tiene una solución única. Por ejemplo $(x = 0, y = 3)$, $(x = 5, y = 0)$ y $(x = 2, y = \frac{9}{5})$ son todas soluciones a esta ecuación.

Si un problema tiene dos incógnitas, una solución única sólo es posible si se tienen *dos* ecuaciones. En general, si un problema tiene n incógnitas, su solución requiere n ecuaciones. Para resolver dos ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas, x y y, resuelva una de las ecuaciones para x en términos de y y sustituya esta expresión en la otra ecuación.

EJEMPLO B.2

Resuelva las dos ecuaciones simultáneas

$$1)\quad 5x + y = -8$$

$$2)\quad 2x - 2y = 4$$

Solución De la ecuación 2), $x = y + 2$. La sustitución de esta ecuación en la ecuación 1) produce

$$5(y + 2) + y = -8$$

$$6y = -18$$

$$y = -3$$

$$x = y + 2 = -1$$

Solución alternativa Multiplique cada término en la ecuación 1) por el factor 2 y sume el resultado a la ecuación 2):

$$10x + 2y = -16$$

$$2x - 2y = 4$$

$$12x = -12$$

$$x = -1$$

$$y = x - 2 = -3$$

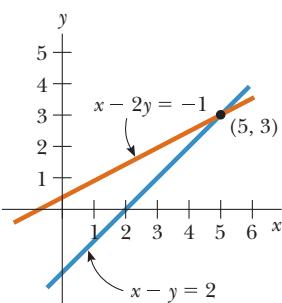



Figura B.3 Solución gráfica para dos ecuaciones lineales.

Dos ecuaciones lineales que contienen dos incógnitas también se pueden resolver mediante un método gráfico. Si las líneas rectas que corresponden a las dos ecuaciones se grafican en un sistema coordenado convencional, la intersección de las dos líneas representa la solución. Por ejemplo, considere las dos ecuaciones

$$x - y = 2$$

$$x - 2y = -1$$

Estas ecuaciones se grafican en la figura B.3. La intersección de las dos líneas tiene las coordenadas $x = 5$ y $y = 3$, que representan la solución a las ecuaciones. Debe comprobar esta solución mediante la técnica analítica explicada anteriormente.

Ejercicios

Resuelva los siguientes pares de ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas:

		Respuestas
1.	$x + y = 8$ $x - y = 2$	$x = 5,\ y = 3$
2.	$98 - T = 10a$ $T - 49 = 5a$	$T = 65,\ a = 3.27$
3.	$6x + 2y = 6$ $8x - 4y = 28$	$x = 2,\ y = -3$

Logaritmos

Suponga que una cantidad x se expresa como una potencia de alguna cantidad a:

$$x = a^y \tag{B.11}$$

El número a se llama **número** base. El **logaritmo** de x respecto a la base a es igual al exponente al que se debe elevar la base para satisfacer la expresión $x = a^y$:

$$y = \log_a x \tag{B.12}$$

A la inversa, el **antilogaritmo** de y es el número x:

$$x = \text{antilog}_a\ y \tag{B.13}$$

En la práctica, las dos bases usadas con más frecuencia son la base 10, llamada base de logaritmo *común*, y la base $e = 2.718\ 282$, llamada constante de Euler o base de logaritmo *natural*. Cuando se usan logaritmos comunes:

$$y = \log_{10} x \quad (\text{o } x = 10^y) \tag{B.14}$$

Cuando se usan logaritmos naturales:

$$y = \ln x \quad (\text{o } x = e^y) \tag{B.15}$$

Por ejemplo, $\log_{10} 52 = 1.716$, de modo que $\text{antilog}_{10} 1.716 = 10^{1.716} = 52$. Del mismo modo, $\ln 52 = 3.951$, de modo que $\text{antiln } 3.951 = e^{3.951} = 52$.

En general, note que puede convertir entre base 10 y base e con la igualdad

$$\ln x = (2.302\ 585) \log_{10} x \tag{B.16}$$

Por último, las siguientes son algunas propiedades útiles de los logaritmos:

$$\left.\begin{aligned} \log(ab) &= \log a + \log b \\ \log(a/b) &= \log a - \log b \\ \log(a^n) &= n \log a \end{aligned}\right\} \text{cualquier base}$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

B.3 Geometría

La **distancia** d entre dos puntos que tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{B.17}$$

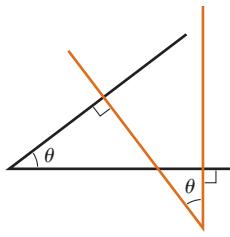



Figura B.4 Los ángulos son iguales porque sus lados son perpendiculares.

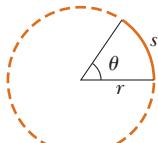



Figura B.5 El ángulo θ en radianes es el cociente de la longitud del arco s al radio r del círculo.

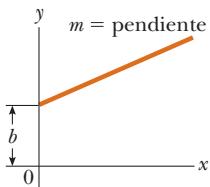



Figura B.6 Una línea recta con una pendiente m y una ordenada al origen b.

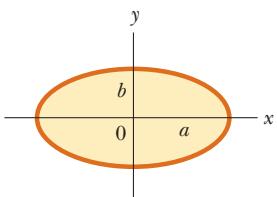



Figura B.7 Una elipse con semieje mayor a y semieje menor b.

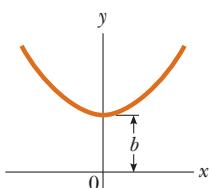



Figura B.8 Una parábola con su vértice en $y = b$.

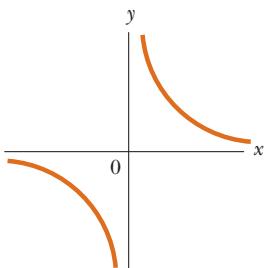



Figura B.9 Una hipérbola.

TABLA B.2

Información útil para geometría

Forma	Área o volumen	Forma	Área o volumen
Rectángulo (ℓ, w)	Área $= \ell w$	Esfera (r)	Área superficial $= 4\pi r^2$ Volumen $= \frac{4\pi r^3}{3}$
Círculo (r)	Área $= \pi r^2$ Circunferencia $= 2\pi r$	Cilindro (ℓ, r)	Superficie lateral área $= 2\pi r\ell$ Volumen $= \pi r^2\ell$
Triángulo (h, b)	Área $= \frac{1}{2}bh$	Caja rectangular (h, w, ℓ)	Área superficial $= 2(\ell h + \ell w + hw)$ Volumen $= \ell wh$

Dos ángulos son iguales si sus lados son perpendiculares, lado derecho con lado derecho y lado izquierdo con lado izquierdo. Por ejemplo, los dos ángulos marcados θ en la figura B.4 son iguales debido a la perpendicularidad de los lados de los ángulos. Para distinguir los lados izquierdo y derecho de un ángulo, imagine estar de pie en el vértice del ángulo y de frente al ángulo.

Medida radián: la longitud de arco s de un arco circular (figura B.5) es proporcional al radio r para un valor fijo de θ (en radianes):

$$s = r\theta \qquad \theta = \frac{s}{r} \tag{B.18}$$

La tabla B.2 da las **áreas** y **volúmenes** para varias formas geométricas usadas en todo el texto.

La ecuación de una **línea recta** (figura B.6) es

$$y = mx + b \tag{B.19}$$

donde b es la ordenada al origen y m la pendiente de la línea.

La ecuación de un **círculo** de radio R con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{B.20}$$

La ecuación de una **elipse** que tiene el origen en su centro (figura B.7) es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{B.21}$$

donde a es la distancia del eje semimayor (el más largo) y b es la distancia del eje semimenor (el más corto).

La ecuación de una **parábola** cuyo vértice está en $y = b$ (figura B.8) es

$$y = ax^2 + b \tag{B.22}$$

La ecuación de una **hipérbola rectangular** (figura B.9) es

$$xy = \text{constante} \tag{B.23}$$

B.4 Trigonometría

La parte de las matemáticas en función de las propiedades especiales del triángulo rectángulo se llama trigonometría. Por definición, un triángulo rectángulo es un triángulo que contiene un ángulo de 90°. Considere el triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10, donde el lado a es opuesto al ángulo θ, el lado b es adyacente al ángulo θ y el lado c es la hipotenusa

del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas por tal triángulo son el seno (sen), el coseno (cos) y la tangente (tan). En términos del ángulo θ, estas funciones se definen del modo siguiente:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \tag{B.24}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \tag{B.25}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b} \tag{B.26}$$

a = lado opuesto
b = lado adyacente
c = hipotenusa

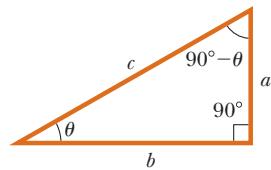



Figura B.10 Un triángulo rectángulo, que se usa para definir las funciones básicas de la trigonometría.

El teorema de Pitágoras proporciona la siguiente correspondencia entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{B.27}$$

A partir de las definiciones anteriores y del teorema de Pitágoras se sigue que

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

Las funciones cosecante, secante y cotangente se definen como

$$\csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Las siguientes correspondencias se deducen directamente del triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10:

$$\text{sen } \theta = \cos (90° - \theta)$$

$$\cos \theta = \text{sen } (90° - \theta)$$

$$\cot \theta = \tan (90° - \theta)$$

Algunas propiedades de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\text{sen } (-\theta) = -\text{sen } \theta$$

$$\cos (-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan (-\theta) = -\tan \theta$$

Las correspondencias que siguen son aplicables a *cualquier* triángulo, como se muestra en la figura B.11:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\text{Ley de cosenos} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

$$\text{Ley de senos} \qquad \frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

Figura B.11 Un triángulo arbitrario no rectángulo.

La tabla B.3 (página A-12) menciona algunas identidades trigonométricas útiles.

EJEMPLO B.3

Considere el triángulo rectángulo de la figura B.12 en el que $a = 2.00$, $b = 5.00$ y c es desconocido. A partir del teorema de Pitágoras se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2.00^2 + 5.00^2 = 4.00 + 25.0 = 29.0$$

$$c = \sqrt{29.0} = 5.39$$

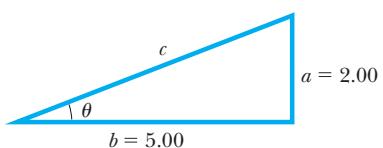



Figura B.12 (Ejemplo B.3)

Para encontrar el ángulo θ, note que

$$\tan\,\theta = \frac{a}{b} = \frac{2.00}{5.00} = 0.400$$

Con una calculadora se encuentra que

$$\theta = \tan^{-1}(0.400) = 21.8°$$

donde $\tan^{-1}(0.400)$ es la notación para "ángulo cuya tangente es 0.400", que a veces se escribe como arctan (0.400).

TABLA B.3

Algunas identidades trigonométricas

$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$	$\csc^2\,\theta = 1 + \cot^2\,\theta$
$\sec^2\,\theta = 1 + \tan^2\,\theta$	$\text{sen}^2\,\dfrac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\,\theta)$
$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\,\theta$	$\cos^2\,\dfrac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\,\theta)$
$\cos\,2\theta = \cos^2\,\theta - \text{sen}^2\,\theta$	$1 - \cos\,\theta = 2\,\text{sen}^2\,\dfrac{\theta}{2}$
$\tan\,2\theta = \dfrac{2\tan\,\theta}{1 - \tan^2\,\theta}$	$\tan\,\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\,\theta}{1 + \cos\,\theta}}$

$\text{sen}\,(A \pm B) = \text{sen}\,A\cos\,B \pm \cos\,A\,\text{sen}\,B$

$\cos\,(A \pm B) = \cos\,A\cos\,B \mp \text{sen}\,A\,\text{sen}\,B$

$\text{sen}\,A \pm \text{sen}\,B = 2\,\text{sen}\left[\frac{1}{2}(A \pm B)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(A \mp B)\right]$

$\cos\,A + \cos\,B = 2\cos\left[\frac{1}{2}(A + B)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(A - B)\right]$

$\cos\,A - \cos\,B = 2\,\text{sen}\left[\frac{1}{2}(A + B)\right]\text{sen}\left[\frac{1}{2}(B - A)\right]$

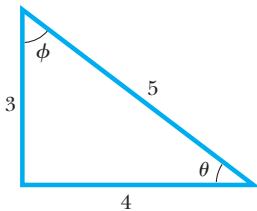



Figura B.13 (Ejercicio 1)

Ejercicios

1. En la figura B.13, identifique a) el lado opuesto a θ, b) el lado adyacente a ϕ y luego encuentre c) $\cos\,\theta$, d) $\text{sen}\,\phi$ y e) $\tan\,\phi$.

Respuestas a) 3, b) 3, c) $\frac{4}{5}$, d) $\frac{4}{5}$, e) $\frac{4}{3}$.

2. En cierto triángulo rectángulo, los dos lados que son mutuamente perpendiculares miden 5.00 m y 7.00 m. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?

Respuesta 8.60 m.

3. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 3.00 m de largo y uno de sus ángulos 30°. a) ¿Cuál es la longitud del lado opuesto al ángulo de 30°? b) ¿Cuál es el lado adyacente al ángulo de 30°?

Respuestas a) 1.5 m, b) 2.6 m.

B.5 Series de expansión

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \tfrac{1}{2}x^2 \pm \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} x \text{ en radianes}$$

Para $x << 1$, se pueden usar las siguientes aproximaciones:[1]

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \qquad \operatorname{sen} x \approx x$$

$$e^x \approx 1 + x \qquad \cos x \approx 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x \qquad \tan x \approx x$$

B.6 Cálculo diferencial

En diferentes ramas de la ciencia, a veces, es necesario usar las herramientas básicas del cálculo, inventadas por Newton, para describir fenómenos físicos. El uso del cálculo es fundamental en el tratamiento de diferentes problemas en mecánica newtoniana, electricidad y magnetismo. En esta sección simplemente se establecen algunas propiedades básicas y "reglas empíricas" que deben ser un útil repaso para el estudiante.

Primero, se debe especificar una **función** que relacione una variable con otra (por ejemplo, una coordenada como función del tiempo). Suponga que una de las variables se llama y (la variable dependiente) y la otra x (la variable independiente). Puede tener una correspondencia funcional como

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si a, b, c y d son constantes específicas, y se puede calcular para cualquier valor de x. Por lo general se trata con funciones continuas, es decir, aquellas para las que y varía "de manera uniforme" con x.

La **derivada** de y respecto a x se define como el límite a medida cuando Δx tiende a cero de las pendientes de las cuerdas dibujadas entre dos puntos sobre la curva y en función de x. En términos matemáticos, esta definición se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \qquad \textbf{(B.28)}$$

donde Δy y Δx se definen como $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ (figura B.14). Observe que dy/dx *no* significa dy dividido entre dx, simplemente es una notación del proceso de límite de la derivada según se define por la ecuación B.28.

Una expresión útil de recordar cuando $y(x) = ax^n$, donde a es una *constante* y n es *cualquier* número positivo o negativo (entero o fracción), es

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \qquad \textbf{(B.29)}$$

Si $y(x)$ es un polinomio o función algebraica de x, se aplica la ecuación B.29 a *cada* término en el polinomio y se saca $d[\text{constante}]/dx = 0$. En los ejemplos B.4 al B.7 se evalúan las derivadas de varias funciones.

Figura B.14 Las distancias Δx y Δy se usan para definir la derivada de esta función en un punto.

[1]Las aproximaciones para las funciones sen x, cos x y tan x son para $x \leq 0.1$ rad.

TABLA B.4

Derivadas de varias funciones

$$\frac{d}{dx}(a) = 0$$
$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$
$$\frac{d}{dx}(\text{sen } ax) = a \cos ax$$
$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \text{ sen } ax$$
$$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$$
$$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$$
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$$
$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$$
$$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1} ax) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} ax) = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} ax) = \frac{a}{1 + a^2x^2}$$

Nota: Los símbolos a y n representan constantes.

Propiedades especiales de la derivada

A. Derivada del producto de dos funciones. Si una función $f(x)$ se conoce por el producto de dos funciones, por decir, $g(x)$ y $h(x)$, la derivada de $f(x)$ se define como

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = g\frac{dh}{dx} + h\frac{dg}{dx} \quad \textbf{(B.30)}$$

B. Derivada de la suma de dos funciones. Si una función $f(x)$ es igual a la suma de dos funciones, la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} \quad \textbf{(B.31)}$$

C. Regla de la cadena para cálculo diferencial. Si $y = f(x)$ y $x = g(z)$, en tal caso dy/dz se puede escribir como el producto de dos derivadas:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} \quad \textbf{(B.32)}$$

D. La segunda derivada. La segunda derivada de y respecto a x se define como la derivada de la función dy/dx (la derivada de la derivada). Por lo general se escribe como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \textbf{(B.33)}$$

Algunas de las derivadas de las funciones más comúnmente usadas se mencionan en la tabla B.4.

EJEMPLO B.4

Suponga que $y(x)$ (es decir, y como función de x) se conoce por

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

donde a y b son constantes. Se sigue que

$$y(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c$$
$$= a(x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c$$

de modo que

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) + b \Delta x$$

Al sustituir esto en la ecuación B.28 se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3ax^2 + 3ax \Delta x + a \Delta x^2] + b$$
$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b$$

EJEMPLO B.5

Encuentre la derivada de

$$y(x) = 8x^5 + 4x^3 + 2x + 7$$

Solución Al aplicar la ecuación B.29 a cada término independientemente y recordar que d/dx (constante) $= 0$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 8(5)x^4 + 4(3)x^2 + 2(1)x^0 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{40x^4 + 12x^2 + 2}$$

EJEMPLO B.6

Encuentre la derivada de $y(x) = x^3/(x+1)^2$ respecto a x.

Solución Esta función se puede rescribir como $y(x) = x^3\,(x+1)^{-2}$ y aplicar la ecuación B.30:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^{-2}\frac{d}{dx}(x^3) + x^3\frac{d}{dx}(x+1)^{-2}$$

$$= (x+1)^{-2}3x^2 + x^3(-2)(x+1)^{-3}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3}}$$

EJEMPLO B.7

Una fórmula útil que se sigue de la ecuación B.30 es la derivada del cociente de dos funciones. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h\dfrac{dg}{dx} - g\dfrac{dh}{dx}}{h^2}$$

Solución El cociente se puede escribir como gh^{-1} y luego aplicar las ecuaciones B.29 y B.30:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = g\frac{d}{dx}(h^{-1}) + h^{-1}\frac{d}{dx}(g)$$

$$= -gh^{-2}\frac{dh}{dx} + h^{-1}\frac{dg}{dx}$$

$$= \frac{h\dfrac{dg}{dx} - g\dfrac{dh}{dx}}{h^2}$$

B.7 Cálculo integral

La integración se considera como el inverso de la derivación. Como ejemplo, considere la expresión

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b \quad \textbf{(B.34)}$$

que fue el resultado de derivar la función

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

en el ejemplo B.4. La ecuación B.34 se puede escribir como $dy = f(x)\ dx = (3ax^2 + b)\ dx$ y obtener $y(x)$ al "sumar" en todos los valores de x. En términos matemáticos, esta operación inversa se escribe como

$$y(x) = \int f(x)\ dx$$

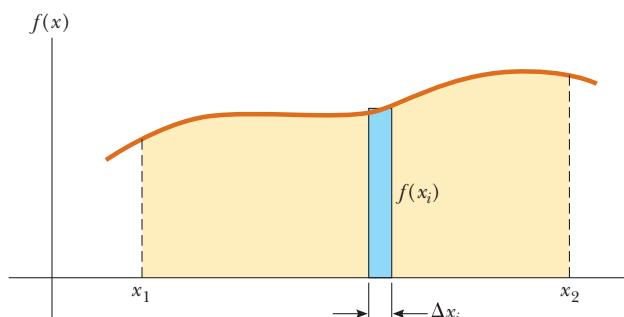
Para la función $f(x)$ conocida por la ecuación B.34 se tiene

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)\ dx = ax^3 + bx + c$$

donde c es una constante de integración. Este tipo de integral se llama *integral indefinida*, porque su valor depende de la elección de c.

Una **integral indefinida** general $I(x)$ se define como

$$I(x) = \int f(x)\ dx \quad \textbf{(B.35)}$$

donde $f(x)$ se llama *integrando* y $f(x) = dI(x)/dx$.

Para una función *continua general* $f(x)$, la integral se puede describir como el área bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x, entre dos valores específicos de x, por decir, x_1 y x_2, como en la figura B.15.

El área del elemento azul en la figura B.15 es aproximadamente $f(x_i)\ \Delta x_i$. Si suma todos estos elementos de área entre x_1 y x_2 y toma el límite de esta suma como $\Delta x_i \to 0$, obtiene el área *verdadera* bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x, entre los límites x_1 y x_2:

$$\text{Área} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx \quad \textbf{(B.36)}$$

Las integrales del tipo definido por la ecuación B.36 se llaman **integrales definidas**.

Figura B.15 La integral definida de una función es el área bajo la curva de la función entre los límites x_1 y x_2.

Una integral común que surge en situaciones prácticas tiene la forma

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \tag{B.37}$$

Este resultado es obvio, pues la derivación del lado derecho respecto a x da $f(x) = x^n$ directamente. Si los límites de la integración se conocen, esta integral se vuelve una *integral definida* y se escribe

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^{\,n+1} - x_1^{\,n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \tag{B.38}$$

EJEMPLOS

1. $\displaystyle\int_0^a x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_0^a = \frac{a^3}{3}$

2. $\displaystyle\int_0^b x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2}\bigg]_0^b = \tfrac{2}{5} b^{5/2}$

3. $\displaystyle\int_3^5 x \, dx = \frac{x^2}{2}\bigg]_3^5 = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8$

Integración parcial

A veces es útil aplicar el método de *integración parcial* (también llamado "integración por partes") para evaluar ciertas integrales. Este método usa la propiedad

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \tag{B.39}$$

donde u y v se eligen con *cuidado* para reducir una integral compleja a una más simple. En muchos casos, tienen que hacerse muchas reducciones. Considere la función

$$I(x) = \int x^2 e^x \, dx$$

que se puede evaluar al integrar por partes dos veces. Primero, si elige $u = x^2$, $v = e^x$, obtiene

$$\int x^2 e^x \, dx = \int x^2 \, d(e^x) = x^2 e^x - 2\int e^x x \, dx + c_1$$

Ahora, en el segundo término, elija $u = x$, $v = e^x$, que produce

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x \, dx + c_1$$

o

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c_2$$

TABLA B.5

Algunas integrales indefinidas (A cada una de estas integrales debe agregar una constante arbitraria.)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (\text{siempre que } n \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx = \ln x$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{x+a}{x}$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} \quad (a^2-x^2>0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} \quad (x^2-a^2>0)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2\pm x^2} = \pm\tfrac{1}{2}\ln(a^2\pm x^2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} = -\cos^{-1}\frac{x}{a} \quad (a^2-x^2>0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2\pm a^2}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})\right]$$

$$\int x(\sqrt{x^2\pm a^2})\,dx = \tfrac{1}{3}(x^2\pm a^2)^{3/2}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \ln ax\,dx = (x\ln ax) - x$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln(a+be^{cx})$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln(\cos ax) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax)$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{sen} ax)$$

$$\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\int \csc ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln\left(\tan\frac{ax}{2}\right).$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\tan ax$$

$$\int \tan^2 ax\,dx = \frac{1}{a}(\tan ax) - x$$

$$\int \cot^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}(\cot ax) - x$$

$$\int \operatorname{sen}^{-1} ax\,dx = x(\operatorname{sen}^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$\int \cos^{-1} ax\,dx = x(\cos^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

TABLA B.6

Integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{(Integral de probabilidad de Gauss)}$$

$$I_1 = \int_0^\infty x e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$I_3 = \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2}$$

$$I_4 = \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$I_5 = \int_0^\infty x^5 e^{-ax^2}\,dx = \frac{d^2 I_1}{da^2} = \frac{1}{a^3}$$

$$\vdots$$

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_0$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_1$$

La diferencial perfecta

Otro método útil para recordar es el de la *diferencial perfecta*, en el que se busca un cambio de variable tal que la diferencial de la función sea la diferencial de la variable independiente que aparece en el integrando. Por ejemplo, considere la integral

$$I(x) = \int \cos^2 x \ \text{sen}\ x \ dx$$

Esta integral se vuelve fácil de evaluar si reescribe la diferencial como $d(\cos x) = -\text{sen}\ x\,dx$. En tal caso la integral se convierte en

$$\int \cos^2 x \ \text{sen}\ x \ dx = -\int \cos^2 x\, d(\cos x)$$

Si ahora se cambian variables, con $y = \cos x$, obtiene

$$\int \cos^2 x \ \text{sen}\ x \ dx = -\int y^2\, dy = -\frac{y^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

La tabla B.5 (página A-18) menciona algunas integrales indefinidas útiles. La tabla B.6 da la integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas. Una lista más completa se puede encontrar en diferentes compendios, como *The Handbook of Chemistry and Physics* (Boca Ratón, Fl: CRC Press, que se publica anualmente).

B.8 Propagación de incertidumbre

En experimentos de laboratorio una actividad común es tomar mediciones que representan como datos no analizados. Estas mediciones son de varios tipos (longitud, intervalo de tiempo, temperatura, voltaje, y así sucesivamente) y se toman mediante varios instrumentos. Sin importar la medición y la calidad de la instrumentación, **siempre hay incertidumbre asociada con una medición física**. Esta incertidumbre es una combinación de la que se asocia con el instrumento y la relacionada con el sistema a medir. Un ejemplo de lo anterior es la incapacidad de determinar con exactitud la posición de una medición de longitud entre las líneas de una regleta. Otro ejemplo de incertidumbre relacionado con el sistema a medir es la variación de la temperatura dentro de una muestra de agua, de modo que es difícil determinar una sola temperatura para la muestra.

Las incertidumbres se expresan en dos formas. La **incertidumbre absoluta** se refiere a una incertidumbre expresada en las mismas unidades que la medición. Debido a eso, la longitud de una etiqueta de disco de computadora se puede expresar como (5.5 ± 0.1) cm. Sin embargo, la incertidumbre de ±0.1 cm por sí misma no es lo suficientemente descriptiva para algunos propósitos. Esta incertidumbre es grande si la medición es 1.0 cm, pero es pequeña si la medición es 100 m. Para dar una explicación más descriptiva de la incertidumbre, se usa la **incertidumbre fraccionaria** o la **incertidumbre porcentual**. En este tipo de descripción la incertidumbre se divide entre la medición real. Por lo tanto, la longitud de la etiqueta del disco de computadora podría expresarse como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm \frac{0.1 \text{ cm}}{5.5 \text{ cm}} = 5.5 \text{ cm} \pm 0.018 \quad \text{(incertidumbre fraccionaria)}$$

o como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm 1.8\% \quad \text{(incertidumbre porcentual)}$$

Cuando se combinan mediciones en un cálculo, la incertidumbre porcentual en el resultado final por lo general es mayor que la incertidumbre en las mediciones individuales. A esto se le llama **propagación de incertidumbre** y es uno de los retos de la física experimental.

Algunas reglas simples pueden proporcionar estimaciones razonables de incertidumbre en un resultado calculado:

Multiplicación y división: Cuando las mediciones con incertidumbres se multiplican o dividen, sume las *incertidumbres porcentuales* para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo: El área de una placa rectangular

$$A = \ell w = (5.5 \text{ cm} \pm 1.8\%) \times (6.4 \text{ cm} \pm 1.6\%) = 35 \text{ cm}^2 \pm 3.4\%$$
$$= (35 \pm 1) \text{ cm}^2$$

Suma y resta: Cuando se suman o restan mediciones con incertidumbre, sume las *incertidumbres absolutas* para obtener la incertidumbre absoluta en el resultado.

Ejemplo: Un cambio en temperatura

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (99.2 \pm 1.5)°\text{C} - (27.6 \pm 1.5)°\text{C} = (71.6 \pm 3.0)°\text{C}$$
$$= 71.6°\text{C} \pm 4.2\%$$

Potencias: Si una medición se eleva a una potencia, la incertidumbre porcentual se multiplica por dicha potencia para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo: volumen de una esfera

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi(6.20 \text{ cm} \pm 2.0\%)^3 = 998 \text{ cm}^3 \pm 6.0\%$$
$$= (998 \pm 60) \text{ cm}^3$$

Para cálculos complicados muchas incertidumbres se suman juntas, lo que puede hacer que la incertidumbre en el resultado final sea indeseablemente grande. Los experimentos se deben diseñar de modo que los cálculos sean tan simples como sea posible.

Note que las incertidumbres en un cálculo siempre se suman. Como resultado, un experimento que involucre una resta se debe evitar, si es posible, en especial si las mediciones a restar están cercanas. El resultado de tal cálculo es una diferencia pequeña en las mediciones e incertidumbres que se suman. ¡Es posible que la incertidumbre en el resultado pueda ser mayor que el resultado mismo!

Símbolo — **Ca** 20 — Número atómico
Masa atómica† — 40.078
$4s^2$ — Configuración electrónica

Grupo I	Grupo II	Elementos de transición						
H 1 1.007 9 $1s$								
Li 3 6.941 $2s^1$	**Be** 4 9.0122 $2s^2$							
Na 11 22.990 $3s^1$	**Mg** 12 24.305 $3s^2$							
K 19 39.098 $4s^1$	**Ca** 20 40.078 $4s^2$	**Sc** 21 44.956 $3d^1 4s^2$	**Ti** 22 47.867 $3d^2 4s^2$	**V** 23 50.942 $3d^3 4s^2$	**Cr** 24 51.996 $3d^5 4s^1$	**Mn** 25 54.938 $3d^5 4s^2$	**Fe** 26 55.845 $3d^6 4s^2$	**Co** 27 58.933 $3d^7 4s^2$
Rb 37 85.468 $5s^1$	**Sr** 38 87.62 $5s^2$	**Y** 39 88.906 $4d^1 5s^2$	**Zr** 40 91.224 $4d^2 5s^2$	**Nb** 41 92.906 $4d^4 5s^1$	**Mo** 42 95.94 $4d^5 5s^1$	**Tc** 43 (98) $4d^5 5s^2$	**Ru** 44 101.07 $4d^7 5s^1$	**Rh** 45 102.91 $4d^8 5s^1$
Cs 55 132.91 $6s^1$	**Ba** 56 137.33 $6s^2$	57–71*	**Hf** 72 178.49 $5d^2 6s^2$	**Ta** 73 180.95 $5d^3 6s^2$	**W** 74 183.84 $5d^4 6s^2$	**Re** 75 186.21 $5d^5 6s^2$	**Os** 76 190.23 $5d^6 6s^2$	**Ir** 77 192.2 $5d^7 6s^2$
Fr 87 (223) $7s^1$	**Ra** 88 (226) $7s^2$	89–103**	**Rf** 104 (261) $6d^2 7s^2$	**Db** 105 (262) $6d^3 7s^2$	**Sg** 106 (266)	**Bh** 107 (264)	**Hs** 108 (277)	**Mt** 109 (268)

*Serie lantánidos	**La** 57 138.91 $5d^1 6s^2$	**Ce** 58 140.12 $5d^1 4f^1 6s^2$	**Pr** 59 140.91 $4f^3 6s^2$	**Nd** 60 144.24 $4f^4 6s^2$	**Pm** 61 (145) $4f^5 6s^2$	**Sm** 62 150.36 $4f^6 6s^2$
**Serie actínidos	**Ac** 89 (227) $6d^1 7s^2$	**Th** 90 232.04 $6d^2 7s^2$	**Pa** 91 231.04 $5f^2 6d^1 7s^2$	**U** 92 238.03 $5f^3 6d^1 7s^2$	**Np** 93 (237) $5f^4 6d^1 7s^2$	**Pu** 94 (244) $5f^6 6d^0 7s^2$

Nota: Los valores de masa atómica son promedios sobre los isótopos en los porcentajes en los que existen en la naturaleza.
† Para un elemento inestable, entre paréntesis se da el número de masa del isótopo conocido más estable.
†† Los elementos 112 y 114 todavía no tienen nombre.
††† Para una descripción de los datos atómicos, visite *physics.nist.gov/PhysRefData/Elements/per-text.html*

			Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0
							H 1 1.007 9 $1s^1$	**He** 2 4.002 6 $1s^2$
			B 5 10.811 $2p^1$	**C** 6 12.011 $2p^2$	**N** 7 14.007 $2p^3$	**O** 8 15.999 $2p^4$	**F** 9 18.998 $2p^5$	**Ne** 10 20.180 $2p^6$
			Al 13 26.982 $3p^1$	**Si** 14 28.086 $3p^2$	**P** 15 30.974 $3p^3$	**S** 16 32.066 $3p^4$	**Cl** 17 35.453 $3p^5$	**Ar** 18 39.948 $3p^6$
Ni 28 58.693 $3d^84s^2$	**Cu** 29 63.546 $3d^{10}4s^1$	**Zn** 30 65.41 $3d^{10}4s^2$	**Ga** 31 69.723 $4p^1$	**Ge** 32 72.64 $4p^2$	**As** 33 74.922 $4p^3$	**Se** 34 78.96 $4p^4$	**Br** 35 79.904 $4p^5$	**Kr** 36 83.80 $4p^6$
Pd 46 106.42 $4d^{10}$	**Ag** 47 107.87 $4d^{10}5s^1$	**Cd** 48 112.41 $4d^{10}5s^2$	**In** 49 114.82 $5p^1$	**Sn** 50 118.71 $5p^2$	**Sb** 51 121.76 $5p^3$	**Te** 52 127.60 $5p^4$	**I** 53 126.90 $5p^5$	**Xe** 54 131.29 $5p^6$
Pt 78 195.08 $5d^96s^1$	**Au** 79 196.97 $5d^{10}6s^1$	**Hg** 80 200.59 $5d^{10}6s^2$	**Tl** 81 204.38 $6p^1$	**Pb** 82 207.2 $6p^2$	**Bi** 83 208.98 $6p^3$	**Po** 84 (209) $6p^4$	**At** 85 (210) $6p^5$	**Rn** 86 (222) $6p^6$
Ds 110 (271)	**Rg** 111 (272)	112†† (285)		114†† (289)				

Eu 63 151.96 $4f^76s^2$	**Gd** 64 157.25 $4f^75d^16s^2$	**Tb** 65 158.93 $4f^85d^16s^2$	**Dy** 66 162.50 $4f^{10}6s^2$	**Ho** 67 164.93 $4f^{11}6s^2$	**Er** 68 167.26 $4f^{12}6s^2$	**Tm** 69 168.93 $4f^{13}6s^2$	**Yb** 70 173.04 $4f^{14}6s^2$	**Lu** 71 174.97 $4f^{14}5d^16s^2$
Am 95 (243) $5f^77s^2$	**Cm** 96 (247) $5f^76d^17s^2$	**Bk** 97 (247) $5f^86d^17s^2$	**Cf** 98 (251) $5f^{10}7s^2$	**Es** 99 (252) $5f^{11}7s^2$	**Fm** 100 (257) $5f^{12}7s^2$	**Md** 101 (258) $5f^{13}7s^2$	**No** 102 (259) $5f^{14}7s^2$	**Lr** 103 (262) $6d^15f^{14}7s^2$

TABLA D.1

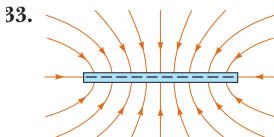
Unidades del SI

Cantidad base	Unidad base del SI Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampére	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

TABLA D.2

Algunas unidades del SI derivadas

Cantidad	Nombre	Símbolo	Expresión en términos de unidades base	Expresión en términos de otras unidades del SI
Ángulo plano	radián	rad	m/m	
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}	
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$	J/m
Presión	pascal	Pa	$kg/m \cdot s^2$	N/m^2
Energía	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$	$N \cdot m$
Potencia	watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$	J/s
Carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$	
Potencial eléctrico	volt	V	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$	W/A
Capacitancia	farad	F	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$	C/V
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$	V/A
Flujo magnético	weber	Wb	$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$	$V \cdot s$
Campo magnético	tesla	T	$kg/A \cdot s^2$	
Inductancia	henry	H	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$	$T \cdot m^2/A$

CAPÍTULO 23

1. a) $+160$ zC, 1.01 u b) $+160$ zC, 23.0 u c) -160 zC, 35.5 u d) $+320$ zC, 40.1 u e) -480 zC, 14.0 u f) $+640$ zC, 14.0 u g) $+1.12$ aC, 14.0 u h) -160 zC, 18.0 u
3. La fuerza es $\sim 10^{26}$ N.
5. a) 1.59 nN alejándose de la otra b) 1.24×10^{36} veces mayor c) 8.61×10^{-11} C/kg
7. 0.872 N a 330°
9. a) 2.16×10^{-5} N hacia el otro b) 8.99×10^{-7} N alejándose de la otra.
11. a) 82.2 nN hacia la otra partícula b) 2.19 Mm/s
13. a) 55.8 pN/C abajo b) 102 nN/C arriba
15. El campo en el origen puede estar hacia la derecha si la carga desconocida es $-9Q$, o el campo puede estar hacia la izquierda si y sólo si la carga desconocida es $+27Q$.
17. a) $5.91k_eq/a^2$ a 58.8° b) $5.91k_eq^2/a^2$ a 58.8°
19. a) $k_eQx\hat{\mathbf{i}}/(R^2+x^2)^{3/2}$ b) En tanto la carga se coloque simétricamente, el número de cargas no importa. Un anillo continuo corresponde a n que se vuelve más grande sin límite.
21. 1.59×10^6 N/C hacia la barra
23. a) $6.64\hat{\mathbf{i}}$ MN/C b) $24.1\hat{\mathbf{i}}$ MN/C c) $6.40\hat{\mathbf{i}}$ MN/C d) $0.664\hat{\mathbf{i}}$ MN/C, si toma el eje del anillo como el eje x
25. a) 93.6 MN/C; la aproximación cerca del campo es 104 MN/C, aproximadamente 11% mayor. b) 0.516 MN/C; la aproximación de partícula cargada es 0.159 MN/C, aproximadamente 0.6% mayor.
27. $-21.6\hat{\mathbf{i}}$ MN/C
31. a) 86.4 pC para cada una b) 324 pC, 459 pC, 459 pC, 432 pC c) 57.6 pC, 106 pC, 154 pC, 96.0 pC
33.

35. a) El campo es cero en el centro del triángulo. b) $1.73\ k_eq\hat{\mathbf{j}}/a^2$
37. a) 61.3 Gm/s^2 b) 19.5 μs c) 11.7 m d) 1.20 fJ
39. K/ed en la dirección de movimiento
41. a) 111 ns b) 5.68 mm c) $(450\hat{\mathbf{i}} + 102\hat{\mathbf{j}})$ km/s
43. a) 21.8 μm b) 2.43 cm
45. a) 10.9 nC b) 5.44 mN
47. 40.9 N a 263°
49. $Q = 2L\sqrt{\dfrac{k(L-L_i)}{k_e}}$
53. $-707\hat{\mathbf{j}}$ mN
55. a) $\theta_1 = \theta_2$
57. a) 0.307 s b) Sí. Ignorar la gravedad hace una diferencia de 2.28%.
59. a) $\vec{\mathbf{F}} = 1.90(k_eq^2/s^2)(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})$ b) $\vec{\mathbf{F}} = 3.29(k_eq^2/s^2)$ en la dirección alejándose del vértice diagonalmente opuesto
65. $\dfrac{k_e\lambda_0}{2x_0}(-\hat{\mathbf{i}})$

CAPÍTULO 24

1. 4.14 MN/C
3. a) aA b) bA c) 0
5. 1.87 kN·m^2/C
7. a) -6.89 MN·m^2/C b) El número de lwíneas que entran supera al número de las que salen por 2.91 veces o más.
9. $-Q/\epsilon_0$ para S_1; 0 para S_2; $-2Q/\epsilon_0$ para S_3; 0 para S_4
11. a) $+Q/2\epsilon_0$ b) $-Q/2\epsilon_0$
13. -18.8 kN·m^2/C
15. 0 si $R \leq d$; $(2\lambda/\epsilon_0)\sqrt{R^2-d^2}$ si $R > d$
17. a) 3.20 MN·m^2/C b) 19.2 MN·m^2/C c) La respuesta al inciso a) podría cambiar, pero la respuesta al inciso b) permanecería igual.
19. 2.33×10^{21} N/C
21. 508 kN/C arriba
23. $-2.48\ \mu$C/m^2
25. 5.94×10^5 m/s
27. $\vec{\mathbf{E}} = \rho r/2\epsilon_0$ alejándose del eje
29. a) 0 b) 7.19 MN/C alejándose del centro
31. a) 51.4 kN/C hacia afuera b) 646 N·m^2/C
33. a) 0 b) 5400 N/C hacia afuera c) 540 N/C hacia fuera
35. a) $+708$ nC/m^2 y -708 nC/m^2 b) $+177$ nC y -177 nC
37. 2.00 N
39. a) $-\lambda$, $+3\lambda$ b) $3\lambda/2\pi\epsilon_0 r$ hacia afuera en forma radial
41. a) 80.0 nC/m^2 en cada una de las caras b) $9.04\hat{\mathbf{k}}$ kN/C c) $-9.04\hat{\mathbf{k}}$ kN/C
43. b) $Q/2\epsilon_0$ c) Q/ϵ_0
45. a) La carga sobre la superficie exterior es -55.7 nC distribuidos uniformemente. b) La carga sobre la superficie interior es $+55.7$ nC. Puede tener cualquier distribución. c) La carga dentro de la cubierta es -55.7 nC. Puede tener cualquier distribución.
47. a) $\rho r/3\epsilon_0$; $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$; 0; $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$, todos hacia fuera en forma radial b) $-Q/4\pi b^2$ y $+Q/4\pi c^2$
49. $\theta = \tan^{-1}[qQ/(2\pi\epsilon_0 dmv^2)]$
51. a) σ/ϵ_0 alejándose de ambas placas b) 0 c) σ/ϵ_0 alejándose de ambas placas
53. $\sigma/2\epsilon_0$ radialmente hacia fuera
57. $\vec{\mathbf{E}} = a/2\epsilon_0$ radialmente hacia fuera
61. b) $\vec{\mathbf{g}} = GM_Er/R_E{}^3$ radialmente hacia dentro
63. a) -4.00 nC b) $+9.56$ nC c) $+4.00$ nC y $+5.56$ nC
65. a) Si la densidad de carga volumétrica es distinta de cero, el campo no puede ser uniforme en magnitud. b) El campo debe ser uniforme en magnitud a lo largo de cualquier línea en la dirección del campo. La magnitud del campo puede variar entre puntos en un plano perpendicular a las líneas de campo.

CAPÍTULO 25

1. a) 152 km/s b) 6.49 Mm/s
3. 1.67 MN/C
5. 38.9 V; el origen
7. a) $2QE/k$ b) QE/k c) $2\pi\sqrt{m/k}$ d) $2(QE - \mu_k mg)/k$
9. a) 0.400 m/s b) Es la misma. Cada trozo de la barra siente una fuerza del mismo tamaño que antes.
11. a) 1.44×10^{-7} V b) -7.19×10^{-8} V c) -1.44×10^{-7} V, $+7.19 \times 10^{-8}$ V
13. a) 6.00 m b) $-2.00\ \mu$C
15. -11.0 MV

17. 8.95 J

21. a) ningún punto a una distancia finita desde las partículas b) $2k_e q/a$

23. a) 10.8 m/s y 1.55 m/s b) Mayor. Las esferas conductoras se polarizarán mutuamente, con la mayor parte de la carga positiva de una y de la carga negativa de la otra en sus caras internas. Inmediatamente antes de chocar, sus centros de carga estarán más cercanos que sus centros geométricos, de modo que tendrán menos energía potencial eléctrica y más energía cinética.

25. $5k_e q^2/9d$

27. $\left[\left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{8}}\right)\dfrac{k_e q^2}{mL}\right]^{1/2}$

29. a) 10.0 V, − 11.0 V, − 32.0 V b) 7.00 N/C en la dirección $+x$

31. $\vec{\mathbf{E}} = (-5 + 6xy)\hat{\mathbf{i}} + (3x^2 - 2z^2)\hat{\mathbf{j}} - 4yz\hat{\mathbf{k}}$; 7.07 N/C

33. $E_y = \dfrac{k_e Q}{y\sqrt{\ell^2 + y^2}}$

35. a) $\mathrm{C/m^2}$ b) $k_e\alpha[L - d\ln(1 + L/d)]$

37. − 1.51 MV

39. a) 0, 1.67 MV b) 5.84 MN/C alejándose, 1.17 MV c) 11.9 MN/C alejándose, 1.67 MV

41. a) 248 $\mathrm{nC/m^2}$ b) 496 $\mathrm{nC/m^2}$

43. a) 450 kV b) 7.51 μC

45. a) 1.42 mm b) 9.20 kV/m

47. 253 MeV

49. a) − 27.2 eV b) − 6.80 eV c) 0

51. a) Sí. La proporcionalidad inversa de potencial a radio es suficiente para demostrar que $200R = 150(R + 10\text{ cm})$, así que $R = 30.0$ cm. En tal caso $Q = 6.67$ nC. b) Casi pero no bastante. Existen dos posibilidades: $R = 29.1$ cm con $Q = 6.79$ nC y $R = 3.44$ cm con $Q = 804$ pC.

53. 4.00 nC en (− 1.00 m, 0) y − 5.01 nC en (0, 2.00m)

55. $k_e Q^2/2R$

57. $V_2 - V_1 = (-\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(r_2/r_1)$

61. b) $E_r = 2k_e p\cos\theta/r^3$; $E_\theta = k_e p\,\mathrm{sen}\,\theta/r^3$; sí; no c) $V = k_e py(x^2 + y^2)^{-3/2}$; $\vec{\mathbf{E}} = 3k_e pxy(x^2 + y^2)^{-5/2}\hat{\mathbf{i}} + k_e p(2y^2 - x^2)(x^2 + y^2)^{-5/2}\hat{\mathbf{j}}$

63. $V = \pi k_e C\left[R\sqrt{x^2 + R^2} + x^2\ln\left(\dfrac{x}{R + \sqrt{x^2 + R^2}}\right)\right]$

65. a) 488 V b) 78.1 aJ c) 306 km/s d) 390 $\mathrm{Gm/s^2}$ hacia la placa negativa e) 651 aN hacia la placa negativa f) 4.07 kN/C

67. Afuera de la esfera, $E_x = 3E_0 a^3 xz(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$, $E_y = 3E_0 a^3 yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$, y $E_z = E_0 + E_0 a^3(2z^2 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$, Adentro de la esfera, $E_x = E_y = E_z = 0$.

CAPÍTULO 26

1. a) 48.0 μC b) 6.00 μC

3. a) 1.33 $\mu\mathrm{C/m^2}$ b) 13.3 pF

5. a) 11.1 kV/m hacia la placa negativa b) 98.3 $\mathrm{nC/m^2}$ c) 3.74 pF d) 74.7 pC

7. 4.42 μm

9. a) 2.68 nF b) 3.02 kV

11. a) 15.6 pF b) 256 kV

13. a) 3.53 μF b) 6.35 V y 2.65 V c) 31.8 μC sobre cada una

15. 6.00 pF y 3.00 pF

17. a) 5.96 μF b) 89.5 μC sobre 20 μF, 63.2 μC sobre 6 μF, 26.3 μC sobre 15 μF y sobre 3 μF

19. 120 μC; 80.0 μC y 40.0 μC

21. 10

23. 6.04 μF

25. 12.9 μF

27. a) 216 μJ b) 54.0 μJ

31. a) 1.50 μC b) 1.83 kV

35. 9.79 kg

37. a) 81.3 pF b) 2.40 kV

39. 1.04 m

41. 22.5 V

43. b) -8.78×10^6 N/C · m; $-5.53 \times 10^{-2}\,\hat{\mathbf{i}}$ N

45. 19.0 kV

47. a) 11.2 pF b) 134 pC c) 16.7 pF d) 66.9 pC

49. a) 40.0 μJ b) 500 V

51. 0.188 $\mathrm{m^2}$

55. La gasolina tiene 194 veces el contenido energético específico de la batería y 727 000 veces la del capacitor.

57. a) $Q_0^{\,2}\,d(\ell - x)/(2\ell^3\epsilon_0)$ b) $Q_0^{\,2}\,d/(2\ell^3\epsilon_0)$ hacia la derecha c) $Q_0^{\,2}/(2\ell^4\epsilon_0)$ d) $Q_0^{\,2}/(2\ell^4\epsilon_0)$; son precisamente el mismo.

59. 4.29 μF

61. a) La energía adicional viene del trabajo realizado por el campo eléctrico en los alambres conforme impulse más carga hacia las placas ya cargadas. b) La carga aumenta de acuerdo con $Q/Q_0 = \kappa$.

63. 750 μC sobre C_1 y 250 μC sobre C_2

65. $\frac{4}{3}C$

CAPÍTULO 27

1. 7.50×10^{15} electrones

3. a) 0.632 $I_0\tau$ b) 0.999 95 $I_0\tau$ c) $I_0\tau$

5. a) 17.0 A b) 85.0 $\mathrm{kA/m^2}$

7. a) 2.55 $\mathrm{A/m^2}$ b) $5.31 \times 10^{10}\ \mathrm{m^{-3}}$ c) 1.20×10^{10} s

9. a) 221 nm b) No. Los deuterones están tan separados que uno no produce un potencial significativo en la posición del siguiente.

11. 6.43 A

13. a) 1.82 m b) 280 μm

15. $6.00 \times 10^{-15}/\Omega\cdot$ m

17. 0.180 V/m

19. a) 31.5 n$\Omega\cdot$ m b) 6.35 $\mathrm{MA/m^2}$ c) 49.9 mA d) 659 μm/s e) 0.400 V

21. 0.125

23. 5.00 A, 24.0 Ω

25. 5.49 Ω

27. 36.1%

29. a) 3.17 m b) 340 W

31. a) 0.660 kWh b) $0.039 6

33. $0.232

35. $0.269/día

37. a) 184 W b) 461°C

39. ~$1

41. Cualquier diámetro d y longitud ℓ relacionados mediante $d^2 = (4.77 \times 10^{-8}\ \text{m})\ell$, tal como la longitud 0.900 m y el diámetro 0.207 mm. Sí.

45. Resistividad experimental = 1.47 $\mu\Omega\cdot$m $\pm$ 4% en coincidencia con 1.50 $\mu\Omega\cdot$m

47. a) 8.00 V/m en la dirección x b) 0.637 Ω c) 6.28 A d) 200 MA/m^2 en la dirección x

49. a) 667 A b) 50.0 km

51.

Material	$\alpha' = \alpha/(1 - 20\alpha)$
Plata	$4.1 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Cobre	$4.2 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Oro	$3.6 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Aluminio	$4.2 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Tungsteno	$4.9 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Hierro	$5.6 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Platino	$4.25 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Plomo	$4.2 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Nicromo	$0.4 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Carbono	$-0.5 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Germanio	$-24 \times 10^{-3}/°\text{C}$
Silicio	$-30 \times 10^{-3}/°\text{C}$

53. Es exacto. La resistencia se puede escribir $R = \rho L^2/V$ y la longitud estirada como $L = L_i(1 + \delta)$. Después el resultado se sigue directamente.

55. b) La carga se conduce mediante corriente en la dirección de potencial decreciente. La energía se conduce por calor en la dirección de temperatura decreciente.

59. Recubra las superficies de entrada y salida con un material de mucho mayor conductividad que el material del objeto. El potencial eléctrico será en esencia uniforme en cada uno de estos electrodos. La corriente se distribuirá sobre toda el área donde cada electrodo esté en contacto con el objeto resistivo.

61. a) $\dfrac{\epsilon_0 \ell}{2d}(\ell + 2x + \kappa\ell - 2\kappa x)$

b) $\dfrac{\epsilon_0 \ell v\,\Delta V(\kappa - 1)}{d}$ en el sentido de las manecillas del reloj

63. 2.71 MΩ

65. 2 020°C

CAPÍTULO 28

1. a) 6.73 Ω b) 1.97 Ω

3. a) 12.4 V b) 9.65V

5. a) 17.1 b) 1.99 A para 4 Ω y 9 Ω, 1.17 A para 7 Ω, 0.818 A para 10 Ω

7. a) 227 mA b) 5.68 V

9. a) 75.0 V b) 25.0 W, 6.25 W, y 6.25 W; 37.5 W

11. $R_1 = 1.00$ kΩ, $R_2 = 2.00$ kΩ, $R_3 = 3.00$ kΩ

13. Disminuye. Cerrar el circuito abre una nueva trayectoria con resistencia de sólo 20 Ω. $R = 14.0$ Ω

15. 14.2 W a 2 Ω, 28.4 W a 4 Ω, 1.33 W a 3 Ω, 4.00 W a 1 Ω

17. 846 mA abajo en el resistor de 8 Ω; 462 mA abajo en la rama media; 1.31 A arriba en la rama del lado derecho.

19. a) − 222 J y 1.88 kJ b) 687 J, 128 J, 25.6 J, 616 J, 205 J c) 1.66 kJ de la energía química se transforma en energía interna

21. 0.395 A y 1.50 V

23. 1.00 A arriba en 200 Ω, 4.00 A arriba en 70 Ω, 3.00 A arriba en 80 Ω, 8.00 A abajo en 20 Ω, 200 V

25. a) 909 mA b) $-1.82\ \text{V} = V_b - V_a$

27. a) 5.00 s b) 150 μC c) 4.06 μA

29. a) − 61.6 mA b) 0.235 μC c) 1.96 A

31. a) 6.00 V b) 8.29 μs

33. 0.302 Ω

35. 16.6 kΩ

37. a) 12.5 A, 6.25 A, 8.33 A b) No. Juntos requerirían 27.1 A.

39. a) 1.02 A abajo b) 0.364 A abajo c) 1.38 A arriba d) 0 e) 66.0 μC

41. 2.22 h

43. a es 4.00 V mayor

45. 87.3%

47. 6.00 Ω, 3.00 Ω

49. a) $I_1 = \dfrac{IR_2}{R_1 + R_2}$, $I_2 = \dfrac{IR_1}{R_1 + R_2}$

51. a) $R \leq 1050$ Ω b) $R \geq 10.0$ Ω

53. a) 9.93 μC b) 33.7 nA c) 334 nW d) 337 nW

55. a) 40.0 W b) 80.0 V, 40.0 V, 40.0 V

57. a) 9.30 V, 2.51 Ω b) 186 V 3.70 A c) 1.09 A d) 143 W e) 0.162 Ω f) 3.00 mW g) 2.21 W h) La potencia de salida de la fem depende de la resistencia que se le conecte. Una cuestión acerca de "la potencia en reposo" no es significativa cuando se comparan circuitos con diferentes corrientes. La fem neta produce más corriente en el circuito, donde se usa alambre de cobre. La fem neta entrega más potencia cuando se usa el alambre de cobre, 687 W en lugar de 203 W sin el alambre. Casi toda esta potencia resulta en energía interna adicional en la resistencia interna de las baterías, lo que rápidamente se eleva a una temperatura alta. El circuito con el alambre de cobre no es seguro debido al sobrecalentamiento de las baterías. El circuito sin el alambre de cobre no es seguro porque entrega un choque eléctrico al experimentador.

61. a) 0 en 3 kΩ y 333 μA en 12 kΩ y 15 kΩ b) 50.0 μC c) $(278\ \mu\text{A})e^{-t/180\ \text{ms}}$ d) 290 ms

63. a) $R_x = R_2 - R_1/4$ b) $R_x = 2.75$ Ω. La estación no está aterrizada de manera adecuada.

65. a) $2\Delta t/3$ b) $3\Delta t$

CAPÍTULO 29

1. a) arriba b) hacia usted, afuera del plano del papel c) no se desvía d) hacia el plano del papel

3. $(-20.9\hat{\mathbf{j}})$ mT

5. 48.9° o 131°

7. 2.34 aN

9. a) 49.6 aN sur b) 1.29 km

11. $r_\alpha = r_d = \sqrt{2}r_p$

13. a) 5.00 cm b) 8.78×10^6 m/s

15. 7.88 pT

17. 244 kV/m

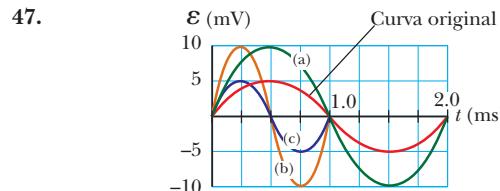
19. 0.278 m
21. a) 4.31×10^7 rad/s b) 51.7 Mm/s
23. 70.1 mT
25. 0.245 T este
27. a) 4.73 N b) 5.46 N c) 4.73 N
29. 1.07 m/s
31. $2\pi rIB$ sen θ arriba
33. 2.98 μN oeste
35. 9.98 N·m en sentido de las manecillas del reloj, visto desde arriba
37. a) Mínimo: apunta al norte a 48.0° bajo la horizontal; máximo: apunta al sur a 48.0° arriba de la horizontal. b) 1.07 μJ
39. El momento magnético no se puede ir a infinito. Su valor máximo es 5.37 mA · m^2 para un círculo de una vuelta. Menores en 21% y en 40% son los momentos magnéticos para el cuadrado y el triángulo de una vuelta. Las bobinas circulares con muchas vueltas tienen momentos magnéticos inversamente proporcionales al número de vueltas, y tienden a cero conforme el número de vueltas tiende a infinito.
41. 43.1 μT
43. a) La corriente eléctrica experimenta una fuerza magnética. c) no, no, no.
45. 12.5 km. No golpeará la Tierra, sino que realizará un giro en horquilla y regresará de vuelta paralela a su dirección original.
47. a) -8.00×10^{-21} kg · m/s b) 8.90°
49. a) $(3.52\hat{\mathbf{i}} - 1.60\hat{\mathbf{j}})$ aN b) 24.4°
51. 128 mT al norte a un ángulo de 78.7° bajo la horizontal
53. 0.588 T
55. 0.713 A contra las manecillas del reloj, visto desde arriba
57. 2.75 Mrad/s
59. 3.70×10^{-24} N · m
61. a) 1.33 m/s b) Los iones positivos que se mueven hacia usted en el campo magnético a la derecha sienten una fuerza magnética hacia arriba y migran hacia arriba en el vaso sanguíneo. Los iones negativos que se mueven hacia usted sienten una fuerza magnética hacia abajo y se acumulan en el fondo de esta sección del vaso. Por lo tanto, ambas especies pueden participar en la generación de la fem.
63. a) $v = qBh/m$. Si su rapidez es ligeramente menor que el valor crítico, la partícula se mueve en un semicírculo de radio h y deja el campo con velocidad $-v\hat{\mathbf{j}}$. Si su rapidez es cada vez mayor, la partícula se mueve en un cuarto de círculo del mismo radio y se mueve a lo largo de la frontera exterior del campo con velocidad $v\hat{\mathbf{i}}$. b) La partícula se mueve en un semicírculo menor de radio mv/qB, y logra la velocidad final $-v\hat{\mathbf{j}}$. c) La partícula se mueve en un arco circular de radio $r = mv/qB$, y deja el campo con velocidad v sen $\theta\,\hat{\mathbf{i}}$ + v cos $\theta\hat{\mathbf{j}}$, donde $\theta = \text{sen}^{-1}(h/r)$.
65. a) Para desplazamientos angulares pequeños, el momento de torsión sobre el dipolo es igual a una constante negativa por el desplazamiento.
b) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu B}{I}}$
c) La orientación de equilibrio de la aguja muestra la dirección del campo. En un campo más intenso, la frecuencia es mayor. La frecuencia es fácil de medir con precisión sobre un amplio intervalo de valores. 2.04 mT.

CAPÍTULO 30

1. 12.5 T
3. a) 28.3 μT hacia el papel b) 24.7 μ T hacia el papel
5. $\dfrac{\mu_0 I}{4\pi x}$ hacia el papel
7. a) $2I_1$ afuera de la página b) $6I_1$ hacia la página
9. a) a lo largo de la línea ($y = -0.420$ m, $z = 0$) b) $(-34.7\hat{\mathbf{j}})$ mN c) $(17.3\hat{\mathbf{j}})$ kN/C
11. en A, 53.3 μT hacia la parte inferior de la página; en B, 20.0 μT hacia la parte inferior de la página; en C, cero.
13. a) $4.5\,\dfrac{\mu_0 I}{\pi L}$
b) Más intenso. Cada uno de los dos lados que se encuentran en el vértice cercano aportan más del doble al campo neto en el nuevo punto.
15. $(-13.0\hat{\mathbf{j}})$ μT
17. $(-27.0\hat{\mathbf{i}})$ μN
19. paralelo a los alambres y 0.167 m abajo del alambre superior
21. a) direcciones opuestas b) 67.8 A c) menor. Una menor fuerza gravitacional jalaría hacia abajo sobre los alambres, y por lo tanto tiende a reducir el ángulo.
23. 20.0 μT hacia la parte inferior de la página.
25. en a, 200 μT hacia la parte superior de la página; en b, 133 μT hacia la parte inferior de la página.
27. a) 6.34 mN/m hacia adentro b) Mayor. El campo magnético aumenta hacia el exterior del paquete, donde más corriente neta yace dentro de un radio particular. El campo más grande ejerce una fuerza mayor sobre la cadena que se elige monitorear.
29. a) 0
b) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ tangente a la pared en el sentido contrario al de las manecillas del reloj
c) $\dfrac{\mu_0 I^2}{(2\pi R)^2}$ hacia adentro
31. a) $\mu_0 b r_1^{\,2}/3$ b) $\mu_0 b R_1^{\,3}/3r_2$
35. 31.8 mA
37. 226 μN alejándose del centro de la espira, 0
39. a) 3.13 mWb b) 0
41. a) 7.40 μWb b) 2.27 μWb
43. 2.02
45. a) 8.63×10^{45} electrones b) 4.01×10^{20} kg
47. $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi w}$ adentro $\left(1 + \dfrac{w}{b}\right)\hat{\mathbf{k}}$
49. $(-12.0\hat{\mathbf{k}})$ mN
51. 143 pT
57. a) 2.46 N hacia arriba b) El campo magnético en el centro de la espira o en su eje es mucho más débil que el campo magnético inmediatamente afuera del alambre. El alambre tiene curvatura despreciable sobre la escala de 1 mm, así que la espira inferior se modela como un largo alambre recto para encontrar el campo que crea en la posición del alambre superior. c) 107 m/s^2
59. a) 274 μT b) $(-274\hat{\mathbf{j}})$ μT c) $(1.15\hat{\mathbf{i}})$ mN d) $(0.384\hat{\mathbf{i}})$ m/s^2 e) la aceleración es constante f) $(0.999\hat{\mathbf{i}})$ m/s

61. $\dfrac{\mu_0 I_1 I_2 L}{\pi R}$ a la derecha

65. $\frac{1}{3}\rho\mu_0\omega R^2$

67. a) $\dfrac{\mu_0 I(2r^2 - a^2)}{\pi r(4r^2 - a^2)}$ a la izquierda

b) $\dfrac{\mu_0 I(2r^2 + a^2)}{\pi r(4r^2 + a^2)}$ hacia la parte superior de la página

CAPÍTULO 31

1. a) 101 μV que tienden a producir corriente en sentido de las manecillas del reloj, visto desde arriba b) Es el doble de grande en magnitud y en el sentido opuesto.
3. 9.82 mV
5. b) 3.79 mV, c) 28.0 mV
7. 160 A
9. a) 1.60 A contra las manecillas del reloj b) 20.1 μT c) a la izquierda
11. $-(14.2\text{ mV})\cos(120t)$
13. 283 μA hacia arriba
15. $(68.2\text{ mV})e^{-1.6t}$, que tiende a producir corriente contra las manecillas del reloj
17. 272 m
19. 13.3 mA contra las manecillas del reloj en la espira inferior y en sentido de las manecillas del reloj en la espira superior
21. a) 1.18 mV. La punta del ala a la izquierda del piloto es positiva. b) no cambia c) No. Si se intenta conectar las alas en un circuito con el foco, se extiende un alambre aislado adicional a lo largo del ala. En un campo uniforme, la fem total generada en la bobina de una vuelta es cero.
23. a) 3.00 N hacia la izquierda b) 6.00 W
25. 24.1 V con el contacto exterior positivo
27. 2.83 mV
29. a) $F = N^2B^2w^2v/R$ a la izquierda b) 0 c) $F = N^2B^2w^2v/R$ a la izquierda
31. 145 μA hacia arriba en la imagen
33. 1.80 mN/C hacia arriba y a la izquierda, perpendicular a r_1
35. a) 7.54 kV b) El plano de la espira es paralelo a **B**
37. $(28.6\text{ mV})\,\text{sen}(4\pi t)$
39. a) 110 V b) 8.53 W c) 1.22 kW
41. Ambos son correctos. La corriente en el imán crea un campo magnético hacia arriba, así que los polos N y S en el núcleo del solenoide se muestran correctamente. En el riel enfrente del freno, el flujo magnético hacia arriba aumenta conforme la bobina se aproxima, así que aquí se induce una corriente para crear campo magnético hacia abajo. Esta corriente es en el sentido de las manecillas del reloj, de modo que el polo S en el riel se muestra correctamente. En el riel detrás del freno, el flujo magnético hacia arriba disminuye. La corriente inducida en el riel producirá campo magnético hacia arriba al estar contra las manecillas del reloj, como muestra correctamente la imagen.
43. b) R más grande hace más pequeña la corriente, así que la espira debe viajar más rápido para mantener igualdad de fuerza magnética y peso. c) La fuerza magnética es proporcional al producto de campo y corriente, mientras que la corriente es por sí misma proporcional al campo. Si B se vuelve dos veces menor, la rapidez se debe volver cuatro veces mayor para compensar.
45. $-(7.22\text{ mnV})\cos(2\pi 523t/\text{s})$
47.

a) Duplicar N duplica la amplitud. b) Duplicar ω duplica la amplitud y reduce a la mitad el periodo. c) Duplicar ω y reducir a la mitad N deja la amplitud igual y corta el periodo a la mitad.
49. a) 3.50 A arriba en 2 Ω y 1.40 A arriba en 5 Ω b) 34.3 W c) 4.29 N
51. $\sim 10^{-4}$ V, al invertir una bobina de 20 vueltas de 3 cm de diámetro en 0.1 s en un campo de 10^{-3} T
53. 1.20 μC
55. a) 0.900 A desde b hacia a b) 0.108 N c) b d) No. En lugar de flujo magnético descendente hacia abajo para inducir corriente en sentido de las manecillas del reloj, la nueva espira verá flujo creciente hacia abajo para causar corriente contra las manecillas del reloj, pero la corriente en el resistor todavía es desde b a a.
57. a) $C\pi a^2 K$ b) la placa superior c) El campo magnético cambiante dentro de la espira induce un campo eléctrico alrededor de la circunferencia, que empuja sobre las partículas cargadas en el alambre
59. a) 36.0 V b) 600 mWb/s c) 35.9 V d) 4.32 N·m
63. 6.00 A
67. $(-87.1\text{ mV})\cos(200\pi t + \phi)$

CAPÍTULO 32

1. 100 V
3. $(18.8\text{ V})\cos(377t)$
5. -0.421 A/s
7. a) 188 μT b) 33.3 nT·m^2 c) 0.375 mH d) B y ${}_B$ son proporcionales a la corriente; L es independiente de la corriente
9. $\mathcal{E}_0/k^2L$
11. a) 0.139 s b) 0.461 s
13. a) 2.00 ms b) 0.176 A c) 1.50 A d) 3.22 ms
15. a) 0.800 b) 0
17. a) 6.67 A/s b) 0.332 A/s
19. a) 1.00 kΩ b) 3.00 ms
21. a) 5.66 ms b) 1.22 A c) 58.1 ms
23. 2.44 μJ
25. 44.2 nJ/m^3 para el campo $\vec{\mathbf{E}}$ y 995 μJ/m^3 para el campo $\vec{\mathbf{B}}$
27. a) 66.0 W b) 45.0 W c) 21.0 W d) En todo instante después de realizar la conexión, la potencia de la batería es igual

a la suma de la potencia entregada al resistor y la potencia entregada al campo magnético. Inmediatamente después de $t = 0$, la potencia del resistor es casi cero y casi toda la potencia de la batería va al campo magnético. Mucho después de realizar la conexión, el campo magnético no absorbe más potencia y la potencia de la batería va al resistor.

29. $\dfrac{2\pi B_0^2 R^3}{\mu_0} = 2.70 \times 10^{18}$ J

31. 1.00 V

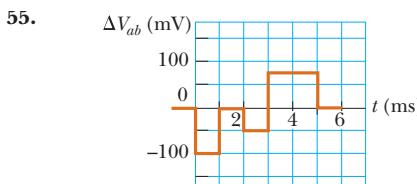
33. a) 18.0 mH b) 34.3 mH c) −9.00 mV

35. $M = \dfrac{N_1 N_2 \pi \mu_0 R_1^2 R_2^2}{2(x^2 + R_1^2)^{3/2}}$

37. 400 mA

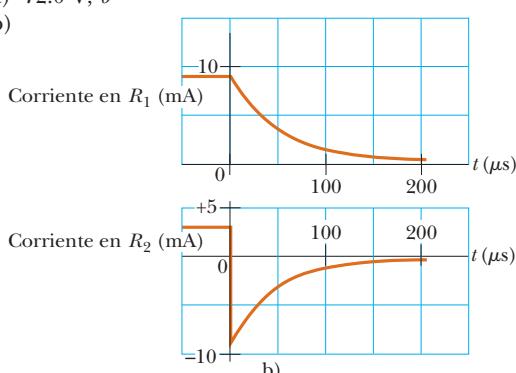
39. 281 mH

41. 608 pF

43. a) 6.03 J b) 0.529 J c) 6.56 J

45. a) 4.47 krad/s b) 4.36 krad/s c) 2.53%

47. a) $0.693(2L/R)$ b) $0.347(2L/R)$

49. a) −20.0 mV b) $-(10.0\ \text{MV/s}^2)t^2$ c) 63.2 μs

51. $(Q/2N)(3L/C)^{1/2}$

53. a) Inmediatamente después de conectar el circuito, la diferencia de potencial a través del resistor es cero y la fem a través de la bobina es 24.0 V. b) Después de varios segundos, la diferencia de potencial a través del resistor es 24.0 V y a través de la bobina es 0. c) Los dos voltajes son iguales, ambos de 12.0 V, sólo una vez, en 0.578 ms después de conectar el circuito. d) Conforme la corriente decae, la diferencia de potencial a través del resistor siempre es igual a la fem a través de la bobina.

55.

57. b) 91.2 μH c) 90.9 μH sólo es 0.3% menor

61. a) 72.0 V; *b*

b)

c) 75.2 μs

63. 300 Ω

65. a) 62.5 GJ b) 2 000 N

67. a) 2.93 mT arriba b) 3.42 Pa c) Las supercorrientes deben ser en el sentido de las manecillas del reloj para producir un campo magnético hacia abajo que cancela el campo hacia arriba de la corriente en los devanados. d) El campo de los devanados es hacia arriba y radialmente hacia fuera alrededor de la parte superior del solenoide. Ejerce una fuerza radialmente hacia adentro y hacia arriba sobre cada fracción de la supercorriente en sentido de las manecillas del reloj. La fuerza total sobre las supercorrientes en la barra es hacia arriba. e) 1.30 mN

CAPÍTULO 33

1. $\Delta v(t) = (283\ \text{V})\ \text{sen}(628t)$

3. 2.95 A, 70.7 V

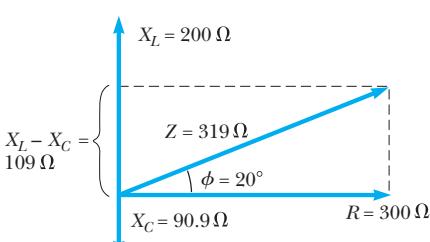
5. 14.6 Hz

7. a) 42.4 mH b) 942 rad/s

9. 5.60 A

11. 0.450 Wb

13. a) 141 mA b) 235 mA

15. 100 mA

17. a) 194 V b) la corriente se adelanta por 49.9°

19. a) 78.5 Ω b) 1.59 kΩ c) 1.52 kΩ d) 138 mA e) − 84.3°

21. a) 17.4° b) El voltaje adelanta a la corriente

23. 1.88 V

25.

27. 8.00 W

29. a) 16.0 Ω b) −12.0 Ω

31. a) 39.5 V · m/ΔV b) El diámetro es inversamente proporcional a la diferencia de potencial. c) 26.3 mm d) 13.2 KV

33. $11\ (\Delta V_{\text{rms}})^2/14R$

35. 1.82 pF

37. 242 mJ

39. 0.591 y 0.987; el circuito en el Problema 21

41. 687 V

43. a) 29.0 kW b) 5.80×10^{-3} c) Si el generador estuviera limitado a 4500 V, no se podrían entregar más de 17.5 kW a la carga, nunca 5000 kW

45. b) 0; 1 c) $f_h = (10.88RC)^{-1}$

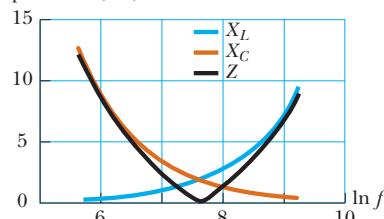
47. a) 613 μF b) 0.756

49. a) 580 μH y 54.6 μF b) 1 c) 894 Hz d) Δv_{afuera} adelanta a $\Delta v_{\text{adentro}}$ por 60.0° a 200 Hz. Δv_{afuera} y $\Delta v_{\text{adentro}}$ están en fase a 894 Hz. Δv_{afuera} se retrasa a $\Delta v_{\text{adentro}}$ en 60.0° a 4 000 Hz e) 1.56 W, 6.25 W, 1.56 W f) 0.408

51. a) X_C podría ser 53.8 Ω o podría ser 1.35 kΩ. b) X_C debe ser 53.8 Ω. c) X_C debe ser 1.43 kΩ.

53. 56.7 W

55. La tensión T y la separación d se deben relacionar mediante $T = (274\ \text{N/m}^2)\ d^2$. Una posibilidad es $T = 10.9$ N y $d = 0.200$ m.

57. a) 225 mA b) 450 mA

59. a) 1.25 A b) La corriente se atrasa al voltaje por 46.7°.

61. a) 200 mA; el voltaje se adelanta por 36.8° b) 40.0 V; $\phi = 0°$ c) 20.0 V; $\phi = -90.0°$ d) 50.0 V; $\phi = +90.0°$

63. b) 31.6

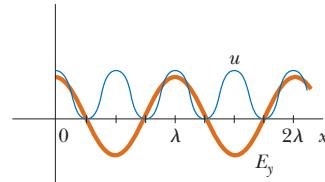
67. a)

f (Hz)	X_L (Ω)	X_C (Ω)	Z (Ω)
300	283	12 600	12 300
600	565	6280	5720
800	754	4710	3960
1000	942	3770	2830
1500	1410	2510	1100
2000	1880	1880	40.0
3000	2830	1260	1570
4000	3770	942	2830
6000	5650	628	5020
10 000	9420	377	9040

b)

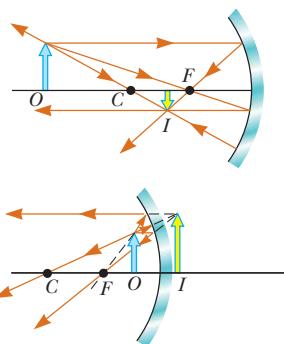
69. a) y b) 19.7 cm a 35.0°. Las respuestas son idénticas c) 9.36 cm a 169°

CAPÍTULO 34

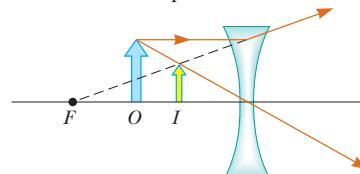
1. a) 11.3 GV· m/s b) 0.100 A
3. 1.85 aT arriba
5. $(-2.87\hat{\mathbf{j}}) + 5.75\hat{\mathbf{k}})$ Gm/s^2
7. a) el año 2.69×10^3 b) 499 s c) 2.56 s d) 0.133 s e) 33.3 μs
9. a) 6.00 MHz b) $(-73.3\hat{\mathbf{k}})$ nT c) $\vec{\mathbf{B}} = [(-73.3\hat{\mathbf{k}})\text{ nT}]\cos(0.126x - 3.77 \times 10^7 t)$
11. a) 0.333 μT b) 0.628 μm c) 477 THz
13. 75.0 MHz
15. 3.33 μJ/m^3
17. 307 μW/m^2
19. 3.33×10^3 m^2
21. a) 332 kW/m^2 radialmente hacia dentro b) 1.88 kV/m y 222 μT
23. a) $\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0$ b) $(11.5\hat{\mathbf{i}} - 28.6\hat{\mathbf{j}})$ W/m^2
25. a) 2.33 mT b) 650 MW/m^2 c) 510 W
27. a) 88.8 nW/m^2 b) 11.3 MW
29. 83.3 nPa
31. a) 1.90 kN/C b) 50.0 pJ c) 1.67×10^{-19} kg · m/s
33. a) 590 W/m^2 b) 2.10×10^{16} W c) 70.1 MN d) La fuerza gravitacional es ~10^{13} veces más intensa y en la dirección opuesta. e) Sobre la Tierra, la fuerza gravitacional del Sol también es ~10^{13} veces más intensa que la fuerza de presión de la luz y en la dirección opuesta.
35. a) 134 m b) 46.9 m
37. a) alejándose a lo largo del bisector perpendicular del segmento de línea que une las antenas b) a lo largo de las extensiones del segmento de línea que une las antenas
39. a) $\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\mu_0 c J_{\text{máx}}[\cos(kx - \omega t)]\hat{\mathbf{j}}$
b) $\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{4}\mu_0 c J_{\text{máx}}^2[\cos^2(kx - \omega t)]\hat{\mathbf{i}}$
c) $I = \dfrac{\mu_0 c J_{\text{máx}}^2}{8}$ d) 3.48 A/m
41. a) 6.00 pm b) 7.50 cm
43. a) 4.17 m a 4.55 m b) 3.41 m a 3.66 m c) 1.61 m a 1.67 m
45. 1.00 Mm = 621 millas; no muy práctico
47. a) 3.85×10^{26} W b) 1.02 kV/m y 3.39 μT
49. a)

b), c) $u_E = u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_{\text{máx}}^2 \cos^2(kx)$
d) $u = \epsilon_0 E_{\text{máx}}^2 \cos^2(kx)$ e) $E_\lambda = \frac{1}{2}A\lambda\epsilon_0 E_{\text{máx}}^2$
f) $I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{\text{máx}}^2$. Este resultado coincide con $I = \dfrac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c}$ en la ecuación 34.24
51. a) 6.67×10^{-16} T b) 5.31×10^{-17} W/m^2 c) 1.67×10^{-14} W d) 5.56×10^{-23} N
53. 95.1 mV/m
55. a) $B_{\text{máx}} = 583$ nT, $k = 419$ rad/m, $\omega = 126$ Grad/s; $\vec{\mathbf{B}}$ vibra en el plano xz b) $\vec{\mathbf{S}}_{\text{prom}} = (40.6\hat{\mathbf{i}})$ W/m^2 c) 271 nPa d) $(406\hat{\mathbf{i}})$ nm/s^2
57. a) 22.6 h b) 30.6 s
59. a) 8.32×10^7 W/m^2 b) 1.05 kW
61. b) 17.6 Tm/s^2, 1.75×10^{-27} W c) 1.80×10^{-24} W
63. a) $2\pi^2 r^2 f B_{\text{máx}} \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre el campo magnético y la normal a la espira b) La espira debe estar en el plano vertical que contenga la línea de visión al transmisor.
65. a) 388 K b) 363 K

CAPÍTULO 35

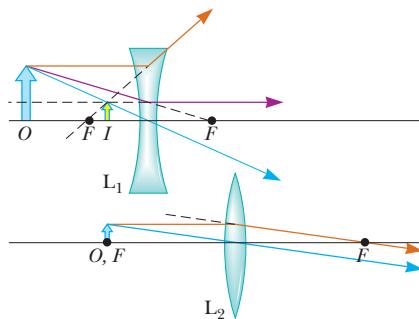
1. 300 Mm/s. Se deben tomar en cuenta los tamaños de los objetos; de otro modo, la respuesta sería más grande en 2%.
3. 114 rad/s
5. a) 1.94 m b) 50.0° sobre la horizontal
7. 23.3°
9. 25.5°, 442 mm
11. 19.5° sobre el horizonte
13. 22.5°
15. a) 181 Mn/s b) 225 Mn/s c) 136 Mn/s

17. 30.0° y 19.5° en la entrada; 19.5° y 30.0° en la salida
19. 3.88 mm
21. 30.4° y 22.3°
23. a) sí, si el ángulo de incidencia es 58.9° b) No. Tanto la reducción en rapidez como el doblado hacia la normal reducen la componente de velocidad paralela a la interfaz. Esta componente no puede permanecer constante a menos que el ángulo de incidencia sea 0°.
25. 86.8°
27. 27.9°
29. b) 37.2° c) 37.3° d) 37.3°
31. 4.61°
33. a) 24.4° b) 37.0° c) 49.8°
35. 1.000 08
37. a) $dn/(n - 1)$ b) sí, sí, sí c) 350 μm
39. La luz cenital desde arriba atraviesa el plástico. Si el índice de refracción del plástico es mayor que 1.41, los rayos cercanos en dirección a la vertical se reflejan totalmente desde las paredes laterales de la placa y de ambas caras en el fondo del plástico, donde no están sumergidas en gasolina. Esta luz regresa hacia arriba dentro del plástico y lo hace brillar. A menos que el índice de refracción del plástico sea poco práctica grande (mayor que aproximadamente 2.1), la reflexión interna total se frustra donde el plástico esté sumergido en gasolina. Ahí la luz que se propaga hacia abajo pasa del plástico a la gasolina. Poca luz se refleja hacia arriba y el calibrador parece oscuro.
41. La luz dispersada que sale de la fotografía en todas las direcciones horizontales hacia adelante en el aire se recoge por refracción en un abanico en el agua de 48.6° de semiángulo. A ángulos más grandes, usted ve cosas en el otro lado del globo, reflejadas mediante reflexión interna total en la superficie posterior del cilindro.
43. 77.5°
45. 2.27 m
47. 62.2%
49. 82 reflexiones
51. 27.5°
53. a) La reflexión interna total ocurre para todos los valores de θ, o el ángulo máximo es 90°. b) 30.3° c) La reflexión interna total nunca ocurre conforme la luz se mueve de poliestireno de menor índice a disulfuro de carbono de mayor índice.
55. 2.36 cm
57. $\theta = \sin^{-1}\left[\dfrac{L}{R^2}\left(\sqrt{n^2R^2 - L^2} - \sqrt{R^2 - L^2}\right)\right]$
61. a) nR_1 b) R_2
63. a) 1.20 b) 3.40 ns

CAPÍTULO 36

1. $\sim 10^{-9}$ s más joven
3. 35.0 pulg.
5. a) $-(p_1 + h)$ b) virtual c) vertical d) 1.00 e) no
7. a) -12.0 cm; 0.400 b) -15.0 cm; 0.250 c) vertical
9. a) $q = 45.0$ cm; $M = -0.500$
b) $q = -60.0$ cm; $M = 3.00$
c) La imagen a) es real, invertida y reducida. La imagen b) es virtual, vertical y agrandada.

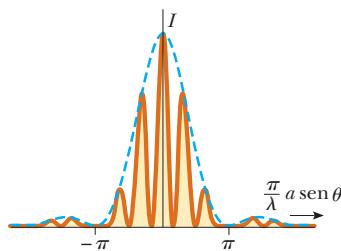
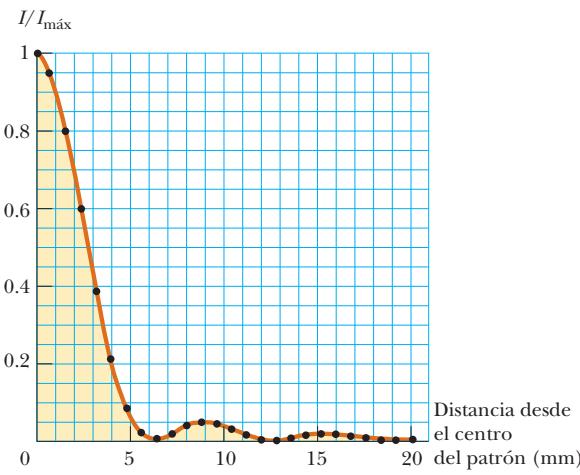
11. a) 2.22 cm b) 10.0
13. a) 160 mm b) $R = -267$ mm
15. a) convexo b) en la marca de 30.0 cm c) -20.0 cm
17. a) un espejo cóncavo con radio de curvatura 2.08 m b) 1.25 m desde el objeto
19. a) La imagen comienza 60.0 cm arriba del espejo y se mueve hacia arriba cada vez más rápido, y corre hasta una distancia infinita arriba del espejo. En ese momento, los rayos de la imagen son paralelos y la imagen está igualmente bien descrita como infinitamente alejada por abajo del espejo. Desde ahí, la imagen se mueve hacia arriba, y frena su movimiento para alcanzar el vértice del espejo. b) a 0.639 s y 0.782 s
21. 38.2 cm abajo de la superficie superior del hielo
23. 8.57 cms
25. a) dentro del tanque, 24.9 cm detrás de la pared frontal; virtual, lado derecho arriba, agrandada b) dentro del tanque, 93.9 cm detrás de la pared frontal; virtual, lado derecho arriba, agrandada c) 1.10 y 1.39 d) 9.92 cm y 12.5 cm e) El plástico tiene grosor uniforme, así que las superficies de entrada y salida para cualquier rayo particular son casi paralelos. El rayo se desplaza ligeramente, pero no cambiaría en dirección al pasar a través de la pared plástica con aire en ambos lados. Sólo la diferencia entre el aire y el agua es responsable por la refracción de la luz.
27. a) 16.4 cm b) 16.4 cm
29. a) $q = 40.0$ cm, real e invertida, tamaño real $M = -1.00$ b) $q = \infty$, $M = \infty$, no se forma imagen c) $q = -20.0$ cm, vertical, virtual, agrandada $M = +2.00$
31. 2.84 cm
33. a) -12.3 cm, a la izquierda del lente b) 0.615
c)

35. a) 5.36 cm b) -18.9 cm c) virtual, lado derecho arriba, agrandada d) Una lupa con distancia focal de 7.50 cm se usa para formar una imagen de una estampilla, agrandada 3.50 veces. Encuentre la distancia del objeto. Ubique y describa la imagen.
37. a) $p = \dfrac{d}{2} \pm \sqrt{\dfrac{d^2}{4} - fd}$

b) Ambas imágenes son reales e invertidas. Una es agrandada, la otra reducida.

39. 2.18 mm alejándose del plano de la película
41. 21.3 cm
43. − 4.00 dioptrías, una lente divergente
45. a) en 4.17 cm b) 6.00
47. a) − 800 b) la imagen está invertida
49. 3.38 min
51. − 40.0 cm
53. − 25.0 cm
55. $x' = (1\,024 \text{ cm} - 58x) \text{ cm}/(6 \text{ cm} - x)$. La imagen comienza en la posición $x_i' = 171$ cm y se mueve en la dirección x positiva, cada vez más rápido, hasta que está afuera en el infinito cuando el objeto está en la posición $x = 6$ cm. En este instante, los rayos de la parte superior del objeto son paralelos conforme salen de la lente. Sus puntos de intersección se pueden describir como en $x' = \infty$ a la derecha o igualmente bien en $x' = -\infty$ a la izquierda. A partir de $x' = -\infty$ la imagen continúa moviéndose hacia la derecha, ahora disminuyendo su velocidad. Llega por ejemplo, a −280 cm cuando el objeto está en 8 cm y −55 cm cuando el objeto finalmente está en 12 cm. La imagen viajó siempre hacia la derecha, hasta infinito y más allá.
57. Alinee las lentes en el mismo eje y separadas 9.00 cm. Haga que la luz pase primero a través de la lente divergente y luego a través de la lente convergente. El diámetro aumenta en un factor de 1.75.
59. 0.107 m a la derecha del vértice de la cara hemisférica.
61. 8.00 cm. Diagrama de rayo:

63. 1.50 m enfrente del espejo; 1.40 cm (invertida)
65. a) 30.0 cm y 120 cm b) 24.0 cm c) real, invertida, reducida con $M = -0.250$
67. a) 20.0 cm a la derecha de la segunda lente, −6.00 b) invertida c) 6.67 cm a la derecha de la segunda lente, −2.00, invertida

CAPÍTULO 37

1. 1.58 cm
3. a) 55.7 m b) 124 m
5. 1.54 mm
7. a) 2.62 mm b) 2.62 mm
9. 36.2 cm
11. a) 10.0 m b) 516 m c) Sólo la pista de la línea central es un máximo para los patrones de interferencia para ambas frecuencias. Si las frecuencias se relacionaran mediante una proporción de enteros pequeños k/ℓ, el avión podría fallar el vuelo a lo largo del k-ésimo máximo lateral de una señal, donde coincide con el ℓ-ésimo máximo lateral del otro. El avión no puede hacer una vuelta cerrada al final de la pista, así que entonces se dirigiría en la dirección equivocada para aterrizar.
13. a) 13.2 rad b) 6.28 rad c) 0.012 7 grados d) 0.059 7 grados
15. a) 193 μm b) 3.00λ c) Corresponde a un máximo. La diferencia de trayectoria es un múltiplo entero de la longitud de onda.
17. 48.0 μm
19. $E_1 + E_2 = 10.0 \text{ sen } (100\pi t + 0.927)$
21. a) 7.95 rad b) 0.453
23. a) verde b) violeta
25. 512 nm
27. 96.2 nm
29. a) 238 nm b) La longitud de onda aumenta debido a la expansión térmica del material del filtro. c) 328 nm
31. 4.35 μm
33. 1.20 mm
35. 39.6 μm
37. 1.62 cm
39. 1.25 m
41. a) $\sim 10^{-3}$ grados b) $\sim 10^{11}$ Hz, microondas
43. 2.52 cm
45. 20.0×10^{-6} °C^{-1}
47. 3.58°
49. 1.62 km
51. 421 nm
55. b) 266 nm
57. $y' = (n-1)tL/d$
59. a) 70.6 m b) 136 m
61. a) 14.7 μm b) 1.53 cm c) − 16.0 m
63. a) 4.86 cm desde la parte superior b) 78.9 nm y 128 nm c) 2.63×10^{-6} rad
65. 0.505 mm
67. 0.498 mm

CAPÍTULO 38

1. 4.22 mm
3. 0.230 mm
5. tres máximos, en 0° y cerca de 46° en ambos lados
7. 0.016 2
9.

11. 1.00 mrad
13. 3.09 m
15. 13.1 m
17. Ninguno. No puede resolver objetos más cercanos que varios centímetros de separación.
19 . 7.35°

21. 5.91° en primer orden, 13.2° en segundo orden, 26.5° en tercer orden
23. a) 478.7 nm, 647.6 nm, y 696.6 nm b) 20.51°, 28.30°, y 30.66°
25. tres, en 0° y en 45.2° a derecha e izquierda.
27. a) cinco órdenes b) diez órdenes en la región de longitud de onda corta
29. 2
31. 14.4°
33. El cristal no puede producir haces difractados de luz visible. La ley de Bragg no se puede satisfacer para una longitud de onda mucho mayor que la distancia entre planos atómicos en el cristal.
35. a) 54.7° b) 63.4° c) 71.6°
37. 60.5°
39. b) Para luz confinada a un plano, sí.

$$\left|\tan^{-1}\left(\frac{n_3}{n_2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\right|$$

41. a) 0.875 b) 0.789 c) 0.670 d) Puede obtener más y más de la luz incidente a través de la pila de filtros ideales, cercano a 50%, al reducir el ángulo entre los ejes de cada uno y el siguiente.
43. a) 6 b) 7.50°
45. a) 0.045 0 b) 0.016 2
47. 632.8 nm
49. a) 25.6° b) 19.0°
51. 545 nm
53. a) 3.53×10^3 ranuras/cm c) 11 máximos
55. 4.58 μm $< d <$ 5.23 μm
57. 15.4
59. a) 41.8° b) 0.593 c) 0.262 m
61. b) 3.77 nm/cm
63. b) 15.3 μm
65. $\phi = 1.391\,557\,4$ después de 17 etapas o menos
67. $a = 99.5\ \mu$m ± 1%

CAPÍTULO 39

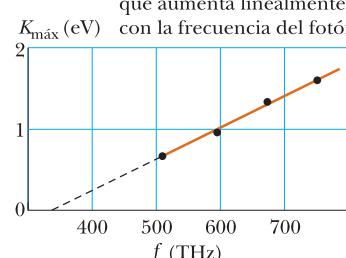
5. 0.866c
7. 1.54 ns
9. 0.800c
11. a) 39.2 μs b) Fue precisa a un dígito. El cobre envejeció 1.78 μs menos en cada órbita sencilla
13. a) 20.0 m b) 19.0 m c) 0.312c
15. 11.3 kHz
17. b) 0.050 ac
19. a) 0.943c b) 2.55 km
21. β ocurrió 4.44 10^{-7} s antes que A
23. 0.960c
25. a) 2.73×10^{-24} kg · m/s b) 1.58×10^{-22} kg · m/s c) 5.64×10^{-22} kg · m/s
27. 4.50×10^{-14}
29. 0.285c
31. a) 5.37×10^{-11} J b) 1.33×10^{-9} J
33. 1.63×10^3 MeV/c
35. a) 938 MeV b) 3.00 GeV c) 2.07 GeV
39. a) 0.979c b) 0.065 2c c) 0.914c = 274 Mm/s d) 0.999 999 97c; 0.948c; 0.052 3c = 15.7 Mm/s
41. 4.08 MeV y 29.6 MeV
43. menor en 3.18 × 1012 kg, que es una fracción muy pequeña de 9 g para ser medida
45. 4.28×10^9 kg/s
47. a) 26.6 Mm b) 3.87 km/s c) -8.34×10^{-11} d) 5.29×10^{-10} e) $+4.46 \times 10^{-10}$
49. a) algunos cientos de segundos b) $\sim 10^8$ km
51. a) $u = c\left(\dfrac{2H + H^2}{1 + 2H + H^2}\right)^{1/2}$, donde $H = K/mc^2$

b) u tiende a 0 conforme K tiende a 0. c) u tiende a c conforme K aumenta sin límite.

d) $a = \dfrac{\mathcal{P}}{mcH^{1/2}(2 + H)^{1/2}(1 + H)^2}$

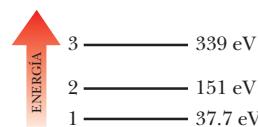
e) $a = \dfrac{\mathcal{P}}{mc\,(2H)^{1/2}} = \dfrac{\mathcal{P}}{(2mK)^{1/2}}$, coincide con el caso no relativista.

f) a tiende a $\mathcal{P}/mcH^3 = \mathcal{P}m^2c^5/K^3$ g) Conforme la energía se imparte estacionariamente a la partícula, la aceleración de la partícula disminuye. Disminuye pronunciadamente, en proporción a $1/K^3$ a alta energía. De esta forma, la rapidez de la partícula no puede alcanzar o sobrepasar cierto límite superior, que es la rapidez de la luz en el vacío.
53. 0.712%
55. a) 76.0 mín b) 52.1 mín
57. a) 0.946c b) 0.160 años luz c) 0.114 años d) 7.50×10^{22}J
59. sí, con 18.8 m para disponer
61. b) Para u pequeña comparada con c, la expresión relativista coincide con la expresión clásica. Conforme u tiende a c, la aceleración tiende a cero, así que el objeto nunca puede alcanzar o sobrepasar la rapidez de la luz. c) Realice la operación $\int(1 - u^2/c^2)^{-3/2}du = (qE/m)\int dt$ para obtener $u = qEct(m^2c^2 + q^2E^2t^2)^{-1/2}$ y luego $\int dx = \int qEct(m^2c^2 + q^2E^2t^2)^{-1/2}dt$ para obtener $x = (c/qE)[(m^2c^2 + q^2E^2t^2)^{1/2} - mc]$
63. a) $M = \dfrac{2m\sqrt{4 - u^2/c^2}}{3\sqrt{1 - u^2/c^2}}$

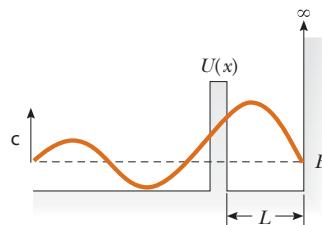
b) M = $4m/3$. El resultado coincide con la suma aritmética de las masas de las dos partículas que chocan.

65. a) Los refugiados concluyen que Tau Ceti explotó 16.0 años antes que el Sol. b) Un observador estacionario en el punto medio concluye que Tau Ceti y el Sol explotaron simultáneamente.
67. 1.82×10^{-3} eV

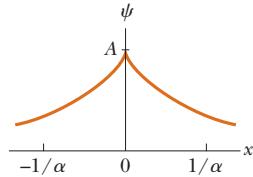
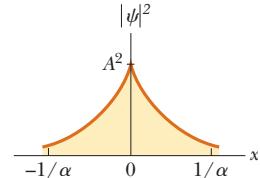
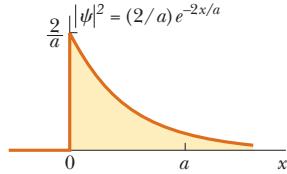
CAPÍTULO 40

1. 5.18×10^3 K
3. aproximadamente 5200 K. Una luciérnaga no puede estar a esta temperatura, así que su luz no puede ser radiación de cuerpo negro.
5. 1.30×10^{15}/s
7. a) 5.78×10^3 K b) 501 nm
9. a) 2.57 eV b) 12.8 μeV c) 191 neV d) 484 nm (visible); 968 cm y 6.52 m (ondas de radio)
11. 2.27×10^{30} fotones/s
15. a) 1.90 eV b) 0.216 V
17. a) Se encuentra la energía de un fotón con 400 nm de longitud de onda y se comprueba que supera la función de trabajo. De estos metales, sólo el litio muestra el efecto fotoeléctrico. b) 0.808 eV
19. 8.41 pC
21. 1.78 eV, 9.47×10^{-28} kg · m/s
23. 70.0°
25. a) 43.0° b) 602 keV, 3.21×10^{-22} kg · m/s c) 278 keV, 3.21×10^{-22} kg · m/s
27. a) 2.88 pm b) 101°
29. Es suficiente porque la ecuación de Compton y la conservación de la cantidad de movimiento vectorial da tres ecuaciones independientes en las incógnitas λ', λ_0 y u. La longitud de onda es 3.82 pm
31. a) 0.667 b) 0.01 09
33. a) 14.0 kV/m, 46.8 μT b) 4.19 nM c) 10.2 g
35. a) 0.174 nm b) 5.37 pm o 5.49 pm si ignora corrección relativista
37. a) ~100 MeV o más b) ~ −1 MeV. No. Con energía cinética mucho mayor que la magnitud de su energía potencial eléctrica negativa, el electrón inmediatamente escaparía.
39. b)No. $\lambda^{-2} + \lambda_C^{-2}$ no puede ser igual a λ^{-2}.
41. a) 14.9 keV o, si ignora corrección relativista, 15.1 keV b) 124 keV
43. a) 3.91×10^4 b) 20.0 GeV/c = 1.07×10^{-17} kg· m/s c) 6.22×10^{-17} m, pequeña en comparación con el tamaño del núcleo. La dispersión de los electrones puede dar información acerca de las partículas que forman el núcleo.
47. a) 993 nm b) 4.96 mm c) Si su detección forma parte de un patrón de interferencia, el neutrón debió pasar a través de ambas rendijas. Si se prueba para ver por cuál rendija particular pasa el neutrón, éste no formará parte del patrón de interferencia.
49. Dentro de 1.16 mm para el electrón, 5.28×10^{-32} m para la bala
51. 3.79×10^{28} m, 190 veces el diámetro del Universo observable
53. b) 519 am
55. a)

b) 6.4×10^{-34} J · s ± 8% c) 1.4 eV
57. $\dfrac{hc}{\lambda} - \dfrac{e^2B^2R^2}{2m_e}$
63. 0.143 nm. La longitud de onda es comparable a la distancia entre átomos en un cristal, así que se puede observar difracción.
67. 2.81×10^{-8}

CAPÍTULO 41

1. a) 126 pm b) 5.27×10^{-24} kg · m/s c) 95.5 eV
3. a) 0.434 nm b) 6.00 eV
5. a)

b) 2.20 nm, 2.75 nm, 4.12 nm, 4.71 nm, 6.60 nm, 11.0 nm
7. 0.793 nm
9. 6.16 MeV, 202 fm, un rayo gamma
11. 0.513 MeV, 2.05 MeV, 4.62 MeV. Lo hacen; el MeV es la unidad natural de la energía radiada por un núcleo atómico.
13. a) $\Delta p \approx \hbar/2L$ b) $E \approx \hbar^2/8mL^2$. Esta estimación es muy baja por $4\pi^2 \approx 40$ veces. Muestra correctamente el patrón de dependencia de la energía sobre la masa y la longitud del pozo.
17. En $L/4$ y en $3L/4$. Se observa que sen$(2\pi x/L)$ toma sus valores extremos 1 y −1, de modo que la función de onda cuadrada es tan grande como puede ser.
19. a) 0.196 b) 0.609 c) La probabilidad clásica, $\frac{1}{3}$, es muy diferente.
23. a) $E = \hbar^2/mL^2$
b) $\displaystyle\int_{-L}^{L} A^2(1 - x^2/L^2)^2 dx = 1$ produce $A = \left(\dfrac{15}{16L}\right)^{1/2}$.
c) $\frac{47}{81} = 0.580$
27. a)

b) $2L$

29. por 0.959 nm, a 1.91 nm
31. a) 0.010 3 b) 0.990
33. 1.35
37. 600 nm
39. b) La aceleración es igual a una constante negativa por la excursión desde el equilibrio. La frecuencia es $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$.
41. $\sim 10^{-10^{30}}$
43. a)

b)

c) La función de onda es continua. Muestra la ubicación al aproximarse a cero conforme x ∞. Es finita en todas partes y se puede normalizar. d) $A = \sqrt{\alpha}$ e) 0.632
45. b) Para la transición del nivel 2 al nivel 1, λ = 1.38 μm infrarrojo. Para el nivel 4 al nivel 1, λ = 276 nm ultravioleta. Para el nivel 3 al nivel 2, λ = 827 nm infrarroja. Para el nivel 4 al nivel 2, λ = 344 nm cerca del ultravioleta. Para el nivel 4 al nivel 3, λ = 590 nm visible amarillo-naranja.
47. 0.029 4
49. a) 434 THz b) 691 nm c) 165 peV o más
53. a)

b) 0 c) 0.865
55. a) $-7k_e e^2/3d$ b) $\hbar^2/36m_e d^2$ c) 49.9 pm d) El espaciamiento interatómico del litio de 280 pm es 5.62 veces mayor. Por lo tanto, es del mismo orden de magnitud que el espaciamiento interatómico de $2d$ en este caso.
57. a) $A = \left(\frac{2}{17L}\right)^{1/2}$ b) $|A|^2 + |B|^2 = 1/a$
59. 2.25

CAPÍTULO 42

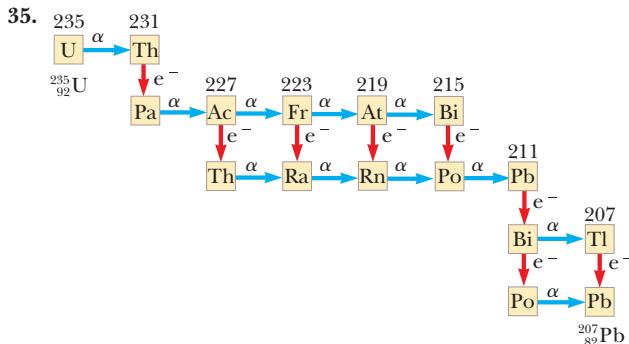
1. a) 5 b) no; no
3. b) 0.846 ns
5. a) 1.89 eV, 656 nm b) 3.40 eV, 365 nm
7. a) 0.212 nm b) 9.95×10^{-25} kg · m/s
c) 2.11×10^{-34} kg · m^2/s d) 3.40 eV e) −6.80 eV
f) −3.40 eV
9. a) $E_n = -54.4$ eV$/n^2$ para n = 1, 2, 3, . . .

b) 54.4 eV
11. r_n = (0.106 nm)n^2, $E_n = -6.80$ eV$/n^2$, para n = 1, 2, 3,…
13. a) 1.31 μm b) 164 nm
15. a) $\Delta p \geq \hbar/2r$ b) Al elegir $p \approx \hbar/r$, se encuentra que $E = K + U = \hbar^2/2m_e r^2 - k_e e^2/r$ c) $r = \hbar^2/m_e k_e e^2 = a_0$ y $E = -13.6$ eV, de acuerdo con la teoría de Bohr
17. b) 0.497
19. Lo hace, con $E = -k_e e^2/2a_0$.
21. a)

n	ℓ	m_ℓ	m_s
3	2	2	$\frac{1}{2}$
3	2	2	$-\frac{1}{2}$
3	2	1	$\frac{1}{2}$
3	2	1	$-\frac{1}{2}$
3	2	0	$\frac{1}{2}$
3	2	0	$-\frac{1}{2}$
3	2	−1	$\frac{1}{2}$
3	2	−1	$-\frac{1}{2}$
3	2	−2	$\frac{1}{2}$
3	2	−2	$-\frac{1}{2}$

b)

n	ℓ	m_ℓ	m_s
3	1	1	$\frac{1}{2}$
3	1	1	$-\frac{1}{2}$
3	1	0	$\frac{1}{2}$
3	1	0	$-\frac{1}{2}$
3	1	−1	$\frac{1}{2}$
3	1	−1	$-\frac{1}{2}$

23. a) Encuentre el número cuántico orbital de un electrón en un estado en el que tenga cantidad de movimiento angular orbital igual a 4.714 10^{-34} J · s. b) número cuántico orbital = 4
25. a) 2 b) 8 c) 18 d) 32 e) 50
27. a) 3.99 10^{17} kg/m^3 b) 81.7 am c) 1.77 Tm/s
d) Es 5.91 10^3c, que es enorme en comparación con la rapidez de la luz e imposible.

29. $n = 3$; $\ell = 2$; $m_\ell = -2, -1, 0, 1,$ o 2; $s = 1$; $m_s = -1, 0,$ o 1, para un total de 15 estados
31. La subcapa $4s$ se llena primero. Se esperaría que [Ar] $3d^4 4s^2$ tenga menor energía, pero [Ar] $3d^5 4s^1$ tiene más espines no pareados y menor energía de acuerdo con la regla de Hund. Es la configuración del estado fundamental del cromo
33. aluminio
35. a) $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, 4f, 5d, 6p, 7s$
b) El elemento 15 debe tener valencia -5 o -3, y la tiene. El elemento 47 debe tener valencia -1, pero tiene valencia $+1$. El elemento 86 debe ser inerte y lo es.
37. 18.4 T
39. 1.4 y 1.0. Cuando el electrón más externo en el sodio se promueve del estado $3s$ al estado $3p$, su función de onda aún se traslapa un poco con los diez electrones bajo él. Por lo tanto, ve la carga nuclear $+11e$ no completamente en la pantalla y en promedio se mueve en un campo eléctrico como el que se crea mediante una partícula con carga $+11e - 9.6e = 1.4e$. Cuando este electrón de valencia se eleva aún más a un estado $3p$, en esencia está completamente afuera de la nube de diez electrones bajo él y se mueve en el campo de una carga neta $+11e - 10e = 1e$.
41. 0.072 5 nm
43. hierro
45. 28.2 THz, 10.6 μm, infrarrojo
47. 3.49×10^{16} fotones
49. a) 217 nm b) 93.1 nm
51. a) 609 μeV b) 6.9 μeV c) 147 GHz, 2.04 mm
53. La frecuencia clásica es $4\pi^2 m_e k_e^2 e^4 / h^3 n^3$.
55. a) -8.16 eV, -2.04 eV, -0.902 eV, -0.508 eV, -0.325 eV
b) 1090 nm, 811 nm, 724 nm, 609 nm d) El espectro podría ser el del hidrógeno, con corrimiento Doppler por movimiento alejándose de nosotros con rapidez $0.471c$.
57. a) $1.57 \times 10^{14}\ \text{m}^{-3/2}$ b) $2.47 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$
c) $8.69 \times 10^{8}\ \text{m}^{-1}$
59. a) 4.20 mm b) 1.05 3 1019 fotones
c) 8.82 mm $\times 10^{16}/\text{mm}^3$
61. $3h^2/4mL^2$
65. 5.39 keV
67. 0.125
69. 9.79 GHz

CAPÍTULO 43

1. a) 921 pN hacia el otro ion b) -2.88 eV
3. a) $(2A/B)^{1/6}$ b) $B^2/4A$ c) 74.2 pm, 4.46 eV
5. ~ 10 K
7. a) 40.0 μeV, 9.66 GHz b) Si r es 10% menor, en tal caso f es 20% mayor.
9. 5.63 Trad/s
13. $2.72 \times 10^{-47}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
15. 0.358 eV
17. $(18.4\ \mu\text{eV}) J(J + 1)$, donde $J = 0, 1, 2, 3, \ldots$
19. $2.9 \times 10^{-47}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
21. sólo 64.1 THz
23. -7.48 eV
27. Un átomo promedio aporta 0.981 electrón a la banda de conducción.
29. a) 1.57 Mm/s b) Es mayor por diez órdenes de magnitud.
31. a) 4.23 eV b) 3.27×10^4 K
33. 5.28 eV
37. a) 1.10 b) 1.47×10^{-25}, Es enormemente menor. Muy pocos estados por arriba de la energía de Fermi están ocupados a temperatura ambiente.
39. a) 275 THz b) 1.09 μm
41. La brecha sería menor que o igual a 1.24 eV. La brecha energética del silicio de 1.14 eV significa que puede absorber la energía de casi todos los fotones en la luz solar y es un material adecuado para un colector de energía solar.
43. 266 nm
45. a) 59.5 mV b) -59.5 mV
47. 4.19 mA
49. 203 A para producir un campo magnético en la dirección del campo original.
51. a)

b) 10.7 kA
53. a) 6.15×10^{13} Hz b) $1.59 \times 10^{-46}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
c) 4.79 μm o 4.96 μm
55. 7
59. a) 0.350 nm b) -7.02 eV c) $-1.20\hat{\mathbf{i}}$ nN
61. a) r_0 b) B c) $(a/\pi)[B/2\mu]^{1/2}$
d) $B - (ha/\pi)[B/8\mu]^{1/2}$

CAPÍTULO 44

1. $\sim 10^{28}$; $\sim 10^{28}$; $\sim 10^{28}$
3. a) 2.81×10^{-5} b) 1.38×10^{-14}
5. a) 455 fm b) 6.04 Mm/s
7. 16.0 km
9. a) 1.11 MeV/nucleón b) 7.07 MeV/ MeV/nucleón
c) 8.79 MeV/nucleón d) 7.57 MeV/ MeV/nucleón
11. a) ${}^{139}_{55}\text{Cs}$ b) ${}^{139}_{57}\text{La}$ c) ${}^{139}_{55}\text{Cs}$
13. mayor para ${}^{15}_{7}\text{N}$ en 3.54 MeV
15. 7.93 MeV
17. 200 MeV
19. 1.16 ks
21. a) 1.55×10^{-5}/s, 12.4 h b) 2.39×10^{13} átomos
c) 1.88 mCi
23. 9.47×10^9 nucleos
25. 1.41
27. 2.66 d
29. 4.27 MeV

31. a) $N_d = 10^6\,(1 - e^{-0.069\ 3t})$, donde t está en horas b) El número de núcleos hija comienzan desde cero en $t = 0$. Primero aumenta muy rápidamente, en 6.93 10^4/h, y luego más y más lentamente. Su rapidez de cambio tiende a cero mientras el número se aproxima asintóticamente a 1.00 10^6 conforme t aumenta sin límite.

33. a) $e^- + p \rightarrow n + \nu$ b) $^{15}_{8}$O átomo $\rightarrow$ $^{15}_{7}$N átomo $+\ \nu$ c) 2.75 MeV

35.

37. a) 148 Bq/m^3 b) 7.05×10^7 átomos/m^3 c) 2.17×10^{-17}

39. a) $^{21}_{10}$Ne b) $^{144}_{54}$Xe c) $^{0}_{1}e^{+} + \nu$

41. $^{197}_{79}$Au + $^{1}_{0}$n $\rightarrow$ $^{198}_{80}$Hg + $^{0}_{-1}e^{-} + \overline{\nu}$ b) 7.89 MeV

43. 8.005 3 u; 10.013 5 u

45. a) 29.2 MHz b) 42.6 MHz c) 2.13 kHz

47. a) 5.70 MeV b) 3.27 MeV, exotérmica

49. b) 1.53 MeV

51. Encuentre la energía de la reacción (valor Q) de la reacción $^{10}_{5}$B + $^{4}_{2}$He $\rightarrow$ $^{13}_{6}$C + $^{1}_{1}$H. Al resolver, $Q = 4.06$ MeV es la energía liberada por la reacción conforme se convierte de energía en reposo en otras formas.

53. a) El proceso no puede ocurrir porque se requeriría entrada de energía. b) puede ocurrir c) K_e entre 0 y 156 keV

55. a) conservación de energía b) La energía potencial eléctrica del núcleo padre puede suministrar la energía requerida. c) 1.20 MeV

57. a) 61.8 Bq/L b) 40.3 d

59. 5.94 Gyr

61. 2.20 μeV

63. 0.400%

65. a) 3.91 años b) Podría no ser más viejo. Se debe hacer alguna suposición acerca de la cantidad original de material radiactivo. En el inciso a) se supuso que la roca originalmente no contenía estroncio.

CAPÍTULO 45

1. 0.387 g

3. $^{144}_{54}$Xe, $^{143}_{54}$Xe, $^{142}_{54}$Xe

5. $^{1}_{0}$n + ^{232}Th $\rightarrow$ ^{233}Th $\rightarrow$ ^{233}Pa + $e^- + \overline{\nu}$,
^{233}Pa $\rightarrow$ ^{233}U + e^- +

7. 5.80 Mm

9. aproximadamente 3000 años

11. 2.68×10^5

13. a) 4.55×10^{-24} kg · m/s b) 0.146 nm. Este tamaño es del mismo orden de magnitud que la nube de electrones exterior de un átomo y es enormemente mayor que un núcleo.

15. a) 31.9 g/h b) 122 g/h

17. a) 3.24 fm b) 444 keV c) $\frac{2}{5}v_i$ d) 740 keV e) posiblemente por filtración cuántica

19. a) 2.22 Mm/s b) $\sim 10^{-7}$ s

21. a) 10^{14} cm^{-3} b) 1.24×10^5 J/m^3 c) 1.77 T

23. 1.66×10^3 años

25. a) 2.5 mrem por cada imagen de rayos X b) La exposición ocupacional del técnico es alta en comparación con la radiación de fondo; es 38 veces 0.13 rem/año.

27. 2.09×10^6 s

29. 1.14 rad

31. 3.96×10^{-4} J/kg

33. a) 3.12×10^7 b) 3.12×10^{10} electrones

35. 4.45×10^{-8}kg/h

37. b) R/λ

39. a) 8×10^4 eV b) 4.62 MeV y 13.9 MeV c) 1.03×10^7 kWh

41. a) 177 MeV b) $K_{\text{Br}} = 112$ MeV, $K_{\text{La}} = 65.4$ MeV c) $v_{\text{Br}} = 15.8$ Mm/s, $v_{\text{La}} = 9.20$ Mm/s

43. 482 Ci, menos que el inventario de fisión en el orden de cien millones de veces

45. 2.56×10^4 kg

47. a) 333 μCi, 15.5 μCi, 312 μCi b) 50.4%, 2.35%, 47.3% c) Es potencialmente peligroso, notablemente si el material se inhala como polvo. Con precauciones para minimizar el contacto humano, las fuentes de microcurie se pueden usar rutinariamente en los laboratorios.

49. a) 2.65 GJ b) La energía de fusión es 78.0 veces mayor.

51. a) 4.91×10^8 kg/h = 4.91×10^5 m^3/h b) 0.141 kg/h

53. a) 15.5 cm b) 51.7 MeV c) El número de decaimientos por segundo es la relación de decaimiento R, y la energía liberada en cada decaimiento es Q. En tal caso la energía liberada por intervalo de unidad de tiempo es $\mathcal{P} = QR$. d) 227 kJ/años e) 3.18 J/años.

55. 14.0 MeV o, si ignora corrección relativista, 14.1 MeV

57. a) 2.24×10^7 kWh b) 17.6 MeV c) 2.34×10^8 kWh d) 9.36 kWh e) El carbón es barato en este momento en la historia humana. Se espera que los problemas de seguridad y disposición de los desechos se pueda resolver de modo que la energía nuclear pueda estar disponible antes de que la escasez eleve el precio de los combustibles fósiles.

59. b) 26.7 MeV

61. a) 5×10^7 K b) 1.94 MeV, 1.20 MeV, 1.02 MeV, 7.55 MeV, 7.30 MeV, 1.73 MeV, 1.02 MeV, 4.97 MeV, 26.7 MeV c) La mayoría de los neutrinos dejan la estrella directamente después de su creación, sin interactuar con algunas otras partículas.

63. b) 1.00 μs c) 2.83 km/s d) 14.6 μs e) sí, 107 kilotones de TNT

CAPÍTULO 46

1. 453 ZHz; 662 am

3. a) 558 TJ b) $\$2.17 \times 10^7$

5. 118 MeV

7. $\sim 10^{-18}$ m

9. 67.5 MeV, 67.5 MeV/c, 16.3 ZHz

11. a) 0.782 MeV b) $v_e = 0.919\ c$, $v_p = 380$ km/s c) El electrón se mueve más rápido que un décimo la rapidez de la luz, y el protón no. Necesita usar las ecuaciones de energía cinética relativista y de cantidad de movimiento sólo para el electrón.

13. a) número leptónico de muón L_μ y número leptónico de electrón L_e b) carga c) número bariónico d) número bariónico e) carga

15. a) $\bar{\nu}_\mu$ b) ν_μ c) $\bar{\nu}_e$ d) ν_e e) ν_μ f) $+\ \nu_\mu$

17. Las reacciones a), c) y f) violan la conservación del número de bariones. La reacciones b), d) y e) pueden ocurrir. La reacción f) viola la conservación del número leptónico de muones.

19. b) $E_e = E_y = 469$ MeV, $p_e = p_y = 469$ MeV/c
c) $0.999\,999\,4c$

21. Las reacciones b) y c) conservan extrañeza. Las reacciones a), d), e) y f) violan la conservación de extrañeza.

23. a) números leptónicos de electrón y muón b) número leptónico de electrones c) carga y extrañeza d) número de bariones e) extrañeza

25. a) número de bariones, carga, L_e y L_τ b) número de bariones, carga, L_e, L_μ y L_τ c) extrañeza, carga, L_e, L_μ y L_τ d) número de bariones, extrañeza, carga, L_e, L_μ y L_τ e) número de bariones, extrañeza, carga, L_e, L_μ y L_τ f) número de bariones, extrañeza, carga, L_e, L_μ y L_τ

27. 9.26 cm

29 b) 5.63 GeV c) 768 MeV d) 280 MeV e) 4.43 TeV

35. a) La reacción ⊠ud + uud → ⊠sd + uds ttiene un total de 1 u, 2 d y 0 s quarks original y finalmente. b) La reacción $\bar{\text{d}}$u + uud → ⊠su + uus tiene un neto de 3 u, 0 d y 0 s antes y después. c) La reacción $\bar{\text{u}}$s + uud → ⊠su + ⊠sd + sss muestra conservación en 1 u, 1 d y 1 s quark. d) El proceso uud + uud → ⊠sd + uud + $\bar{\text{d}}$u + uds tienen totales netos de quarks 4 u, 2 d, 0 s da un neto de 4 u, 2 d y 0 s quarks inicial y finalmente; la partícula misteriosa es una Λ^0 o una Σ^0.

37. a) Σ^+ b) π^- c) K^0 d) Ξ^-

39. a) 3.32 am/s b) 690 pm/s

41. a) $0.160c$ b) 2.82×10^9 años luz

43. a) 590.07 nm b) 597 nm c) 661 nm

45. a) 8.41×10^6 kg b) No. Sólo es la fracción 4.23×10^{-24} de la masa del Sol

47. 3.15 μW/m^2

49. a) $\sim 10^{13}$ K b) $\sim 10^{10}$ K

51. b) 11.8 G años

53. a) 1.61×10^{-35} m b) 5.38×10^{-44} s, (del mismo orden de magnitud que la época ultracaliente c) Sí. La bola de fuego opaca del Big Bang, medida como la radiación de fondo de microonda cósmica, evita la recepción de luz visible de las cosas antes de que el Universo tuviera algunos cientos de miles de años de edad. Paredes de fuego más profundo ocultan toda la información de épocas incluso más tempranas.

55. 19 eV/c^2

57. una parte en 50 000 000

59. a) $2Nmc$ b) $3^{1/2}Nmc$ c) método a)

61. 5.35 MeV y 32.3 MeV

63. 74.4 MeV

65. 29.8 MeV

67. Diagrama a): aniquilación electrón-positrón; e^-. Diagrama b): un neutrino choca con un neutrón, lo que produce un protón y un muón; W^+

69. a) 127 MeV b) 1.06 mm c) 1.17 meV
d) 5.81×10^{19} eV

Nota de ubicación: **negrilla** indica una definición; *itálica* indica una figura; *t* indica una tabla.

Cuadro pedagógico de color

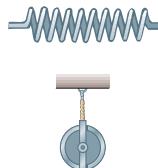
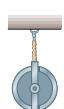
Mecánica

Desplazamiento y vectores de posición

Vectores de velocidad lineal ($\vec{\mathbf{v}}$) y angular ($\vec{\boldsymbol{\omega}}$)

Vectores componentes de velocidad

Vectores fuerza ($\vec{\mathbf{F}}$)

Vectores componentes de fuerza

Vectores aceleración ($\vec{\mathbf{a}}$)

Vectores componentes de aceleración

Vectores de cantidad de movimiento lineal ($\vec{\mathbf{p}}$ y angular ($\vec{\mathbf{L}}$)

Vectores momento de torsión ($\vec{\boldsymbol{\tau}}$)

Direcciones de movimiento lineal o rotacional

Resortes

Poleas

Electricidad y magnetismo

Campos eléctricos

Campos magnéticos

Cargas positivas

Cargas negativas

Resistores

Baterías y otras fuentes de potencia CD

Interruptores

Capacitores

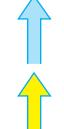
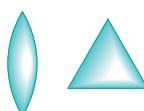
Inductores (bobinas)

Voltímetros

Amperímetros

Fuentes CA

Símbolo de tierra

Corriente

Luz y óptica

Rayos de luz

Lentes y prismas

Espejos

Objetos

Imágenes

Algunas constantes físicas

Cantidad	Símbolo	Valor [a]
Unidad de masa atómica	u	$1.660\,538\,86\,(28) \times 10^{-27}$ kg $931.494\,043\,(80)$ MeV/c^2
Número de Avogadro	N_A	$6.022\,141\,5\,(10) \times 10^{23}$ partículas/mol
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$	$9.274\,009\,49\,(80) \times 10^{-24}$ J/T
Radio de Bohr	$a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$5.291\,772\,108\,(18) \times 10^{-11}$ m
Constante de Boltzman	$k_B = \dfrac{R}{N_A}$	$1.380\,650\,5\,(24) \times 10^{-23}$ J/K
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = \dfrac{h}{m_e c}$	$2.426\,310\,238\,(16) \times 10^{-12}$ m
Constante de Coulomb	$k_e = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8.987\,551\,788\ldots \times 10^{9}$ N · m²/C² (exacto)
Masa de deuterón	m_d	$3.343\,583\,35\,(57) \times 10^{-27}$ kg $2.013\,553\,212\,70\,(35)$ u
Masa de electrón	m_e	$9.109\,382\,6\,(16) \times 10^{-31}$ kg $5.485\,799\,094\,5\,(24) \times 10^{-4}$ u $0.510\,998\,918\,(44)$ MeV/c^2
Electrón volt	eV	$1.602\,176\,53\,(14) \times 10^{-19}$ J
Carga elemental	e	$1.602\,176\,53\,(14) \times 10^{-19}$ C
Constante de gas	R	$8.314\,472\,(15)$ J/mol · K
Constante gravitacional	G	$6.674\,2\,(10) \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Relación frecuencia–voltaje de Josephson	$\dfrac{2e}{h}$	$4.835\,978\,79\,(41) \times 10^{14}$ Hz/V
Cuanto de flujo magnético	$\Phi_0 = \dfrac{h}{2e}$	$2.067\,833\,72\,(18) \times 10^{-15}$ T · m²
Masa de neutrón	m_n	$1.674\,927\,28\,(29) \times 10^{-27}$ kg $1.008\,664\,915\,60\,(55)$ u $939.565\,360\,(81)$ MeV/c^2
Magnetón nuclear	$\mu_n = \dfrac{e\hbar}{2m_p}$	$5.050\,783\,43\,(43) \times 10^{-27}$ J/T
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T · m/A (exacto)
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2}$	$8.854\,187\,817\ldots \times 10^{-12}$ C²/N · m² (exacto)
Constante de Planck	h	$6.626\,069\,3\,(11) \times 10^{-34}$ J · s
	$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,68\,(18) \times 10^{-34}$ J · s
Masa de protón	m_p	$1.672\,621\,71\,(29) \times 10^{-27}$ kg $1.007\,276\,466\,88\,(13)$ u $938.272\,029\,(80)$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	R_H	$1.097\,373\,156\,852\,5\,(73) \times 10^{7}$ m^{-1}
Rapidez de la luz en el vacío	c	$2.997\,924\,58 \times 10^{8}$ m/s (exacto)

Nota: Estas constantes son los valores recomendados en 2002 por CODATA, en términos de un ajuste de mínimos cuadrados de los datos provenientes de diferentes mediciones. Para una lista más completa, consulte P.J. Mohr y B.N. Taylor, "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants; 2002". *Rev. Mod. Phys.* **77**:1, 2005.

[a] Los números entre paréntesis para los valores representan las incertidumbres de los últimos dos dígitos.

Datos del sistema solar

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo (s)	Distancia desde el Sol (m)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^{7}	9.35×10^{8}	1.43×10^{12}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^{7}	2.64×10^{9}	2.87×10^{12}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^{7}	5.22×10^{9}	4.50×10^{12}
Plutón[a]	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^{6}$	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—
Sol	1.991×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—

[a] En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional adoptó una definición de planeta que separa a Plutón de los otros ocho planetas. Plutón ahora se define como "planeta enano" (como el asteroide Ceres).

Datos físicos usados con frecuencia

Distancia promedio Tierra–Luna	3.84×10^{8} m
Distancia promedio Tierra–Sol	1.496×10^{11} m
Radio promedio de la Tierra	6.37×10^{6} m
Densidad del aire (20°C y 1 atm)	1.20 kg/m^3
Densidad del agua (20°C y 1 atm)	1.00×10^{3} kg/m^3
Aceleración en caída libre	9.80 m/s^2
Masa de la Tierra	5.98×10^{24} kg
Masa de la Luna	7.36×10^{22} kg
Masa del Sol	1.99×10^{30} kg
Presión atmosférica estándar	1.013×10^{5} Pa

Nota: Estos valores son los utilizados en el texto.

Algunos prefijos para potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^{1}	deca	da
10^{-21}	zepto	z	10^{2}	hecto	h
10^{-18}	atto	a	10^{3}	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^{6}	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^{9}	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	mili	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zetta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yotta	Y

Abreviaturas estándar y símbolos para unidades

Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad
A	ampere	K	kelvin
u	unidad de masa atómica	kg	kilogramo
atm	atmósfera	kmol	kilomol
Btu	unidad térmica británica	L	litro
C	coulomb	lb	libra
°C	grado Celsius	al	año luz
cal	caloría	m	metro
d	día	min	minuto
eV	electrón volt	mol	mol
°F	grado Fahrenheit	N	newton
F	farad	Pa	pascal
pie	pie	rad	radián
G	gauss	rev	revolución
g	gramo	s	segundo
H	henry	T	tesla
h	hora	V	volt
hp	caballo de potencia	W	watt
Hz	hertz	Wb	weber
pulg	pulgada	año	año
J	joule	Ω	ohm

Símbolos matemáticos usados en el texto y su significado

Símbolo	Significado
$=$	es igual a
$\equiv$	se define como
$\neq$	no es igual a
$\propto$	es proporcional a
$\sim$	está en el orden de
$>$	es mayor que
$<$	es menor que
$\gg (\ll)$	es mucho mayor (menor) que
$\approx$	es aproximadamente igual a
Δx	el cambio en x
$\sum_{i=1}^{N} x_i$	la suma de todas las cantidades x_i desde $i = 1$ hasta $i = N$
$\|x\|$	la magnitud de x (siempre una cantidad no negativa)
$\Delta x \to 0$	Δx tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	la derivada de x respecto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	la derivada parcial de x respecto a t
$\int$	integral

Conversiones

Longitud

1 pulg = 2.54 cm (exacto)
1 m = 39.37 pulg = 3.281 pies
1 pie = 0.304 8 m
12 pulg = 1 pie
3 pies = 1 yd
1 yd = 0.9144 m
1 km = 0.621 mi
1 mi = 1.609 km
1 mi = 5 280 pies
1 μm = 10^{-6} m = 10^3 nm
1 año luz = 9.461×10^{15} m

Área

1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 $pies^2$
1 pie^2 = 0.092 9 m^2 = 144 $pulg^2$
1 $pulg^2$ = 6.452 cm^2

Volumen

1 m^3 = 10^6 cm^3 = 6.102×10^4 $pulg^3$
1 pie^3 = 1 728 $pulg^3$ = 2.83×10^{-2} m^3
1 L = 1 000 cm^3 = 1.057 6 qt = 0.035 3 pie^3
1 pie^3 = 7.481 gal = 28.32 L = 2.832×10^{-2} m^3
1 gal = 3.786 L = 231 $pulg^3$

Masa

1 000 kg = 1 t (tonelada métrica)
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.66×10^{-27} kg = 931.5 MeV/c^2

Fuerza

1 N = 0.224 8 lb
1 lb = 4.448 N

Velocidad

1 mi/h = 1.47 pies/s = 0.447 m/s = 1.61 km/h
1 m/s = 100 cm/s = 3.281 pies/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 pies/s

Aceleración

1 m/s^2 = 3.28 pies/s^2 = 100 cm/s^2
1 pie/s^2 = 0.304 8 m/s^2 = 30.48 cm/s^2

Presión

1 bar = 10^5 N/m^2 = 14.50 lb/$pulg^2$
1 atm = 760 mm Hg = 76.0 cm Hg
1 atm = 14.7 lb/$pulg^2$ = 1.013×10^5 N/m^2
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.45×10^{-4} lb/$pulg^2$

Tiempo

1 año luz = 365 días = 3.16×10^7 s
1 día = 24 h = 1.44×10^3 min = 8.64×10^4 s

Energía

1 J = 0.738 pie·lb
1 cal = 4.186 J
1 Btu = 252 cal = 1.054×10^3 J
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.60×10^6 J

Potencia

1 hp = 550 pies·lb/s = 0.746 kW
1 W = 1 J/s = 0.738 pie·lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

Algunas aproximaciones útiles para problemas de estimación

1 m $\approx$ 1 yd
1 kg $\approx$ 2 lb
1 N $\approx$ $\frac{1}{4}$ lb
1 L $\approx$ $\frac{1}{4}$ gal
1 m/s $\approx$ 2 mi/h
1 año $\approx$ $\pi \times 10^7$ s
60 mi/h $\approx$ 100 pies/s
1 km $\approx$ $\frac{1}{2}$ mi

Nota: Véase la tabla A.1 del apéndice A para una lista más completa.

El alfabeto griego

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Υ	υ
Epsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Phi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

Nueva edición de la ya conocida obra de Raymond A. Serway y John W. Jewett Jr. Esta séptima edición, además de conservar la gran capacidad didáctica que la ha caracterizado, cuenta con el soporte de herramientas tecnológicas que proveen de más apoyo al usuario durante el desarrollo del curso.

Características

- El capítulo 34 es más extenso que en la edición anterior, debido a que se incorporan los temas de corrientes de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell que se abordaban en otros capítulos.
- Aproximadamente el 23% de los problemas son nuevos.
- Se mantiene la sección *¿Qué pasaría si?* en los ejemplos resueltos, para ofrecer una variación al ejemplo que estimule la capacidad de razonamiento del estudiante.

Estas características, entre muchas otras que descubrirá al interior del texto, aunadas al lenguaje claro y accesible con el que desarrolla los temas, lo harán sin duda alguna, su libro de física favorito; tanto si usted es docente como si es estudiante de alguna licenciatura en el área de ingeniería ó ciencias.

http://latinoamerica.cengage.com